



DAYANE CAROLINE DE LIMA

**PLANILHA ELETRÔNICA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE MURO DE
ARRIMO ARQUEADO**

**LAVRAS - MG
2023**

DAYANE CAROLINE DE LIMA

**PLANILHA ELETRÔNICA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE MURO DE
ARRIMO ARQUEADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à
Universidade Federal de Lavras, como parte das
exigências do Programa de Graduação em
Engenharia Civil, para a obtenção do título de
bacharel

Professor Dr. Wisner Coimbra de Paula.
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

DAYANE CAROLINE DE LIMA

**PLANILHA ELETRÔNICA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE MURO DE
ARRIMO ARQUEADO**

**ELECTRONIC SPREADSHEET FOR ARCHED RETAINING WALL
STRUCTURAL ANALYSIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à
Universidade Federal de Lavras, como parte das
exigências do Programa de Graduação em
Engenharia Civil, para a obtenção do título de
bacharel.

APROVADO em 07 de dezembro de 2023.

Dr. Wisner Coimbra de Paula UFLA
Dr. Luiz Eduardo Teixeira UFLA
Dr. Rafael Santos de Moraes UFLA

Professor Wisner Coimbra de Paula
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

*Dedico este trabalho à minha amada família, o alicerce fundamental em minha jornada.
Ao meu querido pai, Luiz Antônio de Lima, cujo apoio inabalável sustenta meus sonhos.
À minha mãe, Marisa Andreia de Lima, que ilumina meu caminho com sabedoria e amor.
Ao meu irmão, Diego Sousa Lima, cujo exemplo me impulsiona a ser o melhor.
Dedico também a todos os meus professores que estiveram presentes em minha caminhada.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero expressar meu sincero agradecimento à Universidade Federal de Lavras por proporcionar toda a infraestrutura necessária para um ensino de qualidade, com profissionais qualificados.

Agradeço aos meus pais, Luiz Antônio e Marisa, por terem assegurado que eu pudesse realizar meu sonho de formar-me na faculdade. Seu apoio inabalável permitiu que eu me dedicasse integralmente à minha graduação.

Agradeço ao meu namorado, André Gustavo, por seu constante apoio e incentivo ao longo de toda a jornada acadêmica.

Agradeço imensamente a todos os amigos que fizeram parte desta incrível jornada. Em especial, quero expressar minha profunda gratidão a Felipe Salles Pio, cujo apoio foi fundamental nos momentos mais desafiadores. Juntos, enfrentamos adversidades e compartilhamos momentos inesquecíveis.

Ao Núcleo de Estudos em Estruturas (NEEST), minha profunda gratidão por apresentar-me a pessoas incríveis e por desempenhar um papel crucial em meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço sinceramente a todos os professores da UFLA por compartilharem seus conhecimentos, proporcionando-me uma formação abrangente e de alta qualidade. Destaco meu reconhecimento especial ao meu orientador da Iniciação Científica Luiz Eduardo e ao meu orientador do Trabalho de Conclusão de Curso Wisner, que estiveram totalmente disponíveis para me orientar e introduzir-me ao fascinante mundo das estruturas, dentro da Engenharia Civil.

A todos que contribuíram para minha jornada acadêmica e pessoal, meu sincero obrigado.

RESUMO

Este estudo apresenta a análise estrutural de um arco com dois tipos de carregamentos: um radial uniformemente distribuído e outro vertical uniformemente distribuído. Essa estrutura é utilizada comumente na indústria da engenharia civil, na qual muros de arrimo arqueados são construídos de modo a aproveitar esta geometria. A análise estrutural de um arco é feita com a utilização dos conhecimentos básicos de teoria das estruturas. O objetivo deste trabalho é analisar a geometria e os esforços internos de uma estrutura arqueada, a fim de se obter um arco em linha de pressão, ou seja, que o momento fletor seja nulo em todo o arco. Neste sentido, procurou-se demonstrar como a geometria e o tipo de carregamento influenciam na linha de pressão. Para isso, foi desenvolvida uma planilha eletrônica automatizada, que com os dados de entrada necessários são informados os diagramas de esforços internos da estrutura arqueada que se deseja ter conhecimento se está ou não em linha de pressão. Com esse propósito, um solo foi utilizado para a demonstração das equações desenvolvidas. Dessa forma, a geometria elipsoidal foi submetida aos dois tipos de carregamento, radial uniformemente distribuído e vertical uniformemente distribuído, e a geometria circular apenas ao carregamento radial uniformemente distribuído. Foi observado que apenas as geometrias circulares, submetidas a carregamento radial uniformemente distribuído, e as elipsoidais, sob carregamento vertical uniformemente distribuído, encontram-se em linha de pressão, resultando em esforço cortante e momento fletor nulos. No entanto, a análise conduzida concluiu que a representação do carregamento do solo é apenas o carregamento radial uniformemente distribuído, excluindo assim a geometria elipsoidal para aplicação em muros de arrimo. Para a validação dos resultados obtidos por meio dessa planilha desenvolvida no presente trabalho, utilizou-se o *software* FTOOL para refazer os cálculos, obtendo-se resultados satisfatórios com variação dos resultados de momento fletor para a geometria circular com carregamento radial uniformemente variado de 0 a 2,10 kNm, sendo essa diferença insignificante.

Palavras-chave: Linha de pressão; Empuxo; Carregamento de solo; Teoria das Estruturas; Momento fletor nulo; Alvenaria.

ABSTRACT

This study presents the structural analysis of an arch with two types of loadings: one radially uniformly distributed and the other vertically uniformly distributed. This structure is commonly used in the civil engineering industry, where curved retaining walls are constructed to take advantage of this geometry. The structural analysis of an arch is conducted using basic knowledge of structural theory. The objective of this work is to analyze the geometry and internal forces of a curved structure in order to achieve an arch in a line of thrust, meaning that the bending moment is zero throughout the arch. In this sense, we sought to demonstrate how the geometry and type of loading influence the line of thrust. To achieve this, an automated spreadsheet was developed, where the necessary input data generate internal force diagrams of the curved structure to determine whether it is in a line of thrust or not. For this purpose, soil was used to demonstrate the developed equations. Thus, ellipsoidal geometry was subjected to both types of loadings, radially uniformly distributed and vertically uniformly distributed, while circular geometry was only subjected to radially uniformly distributed loading. It was observed that only circular geometries, subjected to radially uniformly distributed loading, and ellipsoidal geometries, under vertically uniformly distributed loading, are in a line of thrust, resulting in zero shear force and bending moment. However, the analysis concluded that the representation of soil loading is only radially uniformly distributed, excluding ellipsoidal geometry for application in retaining walls. To validate the results obtained through this spreadsheet developed in this work, the FTOOL software was used to recalculate the values, obtaining satisfactory results with a variation in the bending moment results for circular geometry with radially uniformly varying loading from 0 to 2.10 kNm, and this difference was found to be insignificant.

Keyword: Line of thrust; Thrust; Soil loading; Structural Theory; Zero bending moment; Masonry.

LISTA DE FIGURAS

PRIMEIRA PARTE

Figura 1 - Arco elíptico com carregamento linear uniformemente distribuído.	8
Figura 2 - Viga de substituição do arco triarticulado com carregamento vertical uniformemente distribuído.	8
Figura 3 - Arco circular com carregamento radial uniformemente distribuído.	11
Figura 4 - Elemento infinitesimal “ d_s ” do arco analisado.	11
Figura 5 - Transformação das cargas distribuídas para pontuais do elemento infinitesimal do arco analisado.	12
Figura 6 - Decomposição da força inclinada do elemento infinitesimal do arco analisado. ...	13
Figura 7 - Representação das reações de apoio e das cargas uniformemente distribuídas no arco circular.	13
Figura 8 – Ponto genérico “T” no arco circular analisado.	14
Figura 9 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a), Força horizontal referente à carga distribuída P (b) e Força vertical referente à carga distribuída P (c).	16
Figura 10 - Arco elíptico com carregamento radial uniformemente distribuído.	17
Figura 11 - Representação das reações de apoio e das cargas representativas no arco elíptico.	18
Figura 12 – Ponto genérico “T” no arco elipsoidal.	19
Figura 13 - Parte superior de uma elipse.	20
Figura 14 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a); Reação de apoio horizontal H_a P (b); Força Vertical referente à carga distribuída P (c); e (d) Força horizontal referente à carga distribuída.	21
Figura 15 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a); Reação de apoio horizontal H_a (b); Força Vertical referente à carga distribuída P (c).	23
Figura 16 - Primeira aba da planilha eletrônica, desenvolvida para o cálculo do empuxo. ...	24
Figura 17 - Segunda aba da planilha eletrônica, desenvolvida para a análise estrutural do carregamento radial uniformemente distribuído.	25
Figura 18 - Terceira aba da planilha eletrônica, desenvolvida para a análise estrutural do carregamento vertical uniformemente distribuído.	25
Figura 19 - Representação do software FTOOL: (a) Geometria elíptica com carregamento radial uniformemente distribuído; (b) diagrama de momento fletor da estrutura.	27

SEGUNDA PARTE

Figura 1 – Carregamento radial uniformemente distribuído na geometria circular (a) e elíptica (b).	34
Figura 2 – Carregamento linear vertical uniformemente distribuído no arco de geometria elíptica.	34
Figura 3 – Parte superior de uma elipse.	37
Figura 4 – Elemento infinitesimal da estrutura analisada ‘ d_s ’.	38
Figura 5 – Carga representativa referente ao carregamento radial uniformemente distribuído na geometria circular (a) e elíptica (b).	39
Figura 6 –Ponto genérico “T” para a geometria circular (a) e elíptica (b).	39
Figura 7 - Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo software FTOOL, com os pontos em destaque demonstrando os valores obtidos na planilha mais significativo dos respectivos diagramas, para a geometria circular (a) diagrama de momento fletor; (b) diagrama de esforço cortante; (c) diagrama de esforço normal.	41
Figura 8 - Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo software FTOOL, com os pontos em destaque demonstrando os valores obtidos na planilha mais significativo dos respectivos diagramas, para a geometria elíptica (a) diagrama de momento.....	42
Figura 9 - Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo software FTOOL para um carregamento linear vertical (a) diagrama de momento fletor; (b) diagrama de esforço cortante; (c) diagrama de esforço normal.	44

LISTA DE TABELAS

PRIMEIRA PARTE

Tabela 1 - Parâmetros de resistência e de deformabilidade em função do SPT.....5

SEGUNDA PARTE

Tabela 1 - Parâmetros de resistência e de deformabilidade em função do SPT. Fonte: Marangon (2018)	36
Tabela 2 -Entrada de dados para o cálculo do empuxo na planilha eletrônica e seus respectivos resultados utilizando o Método de Rankine (Marangon, 2018).....	40
Tabela 3 -Resultadps obtidos para o carregamento radial uniformemente distribuído para a geometria elíptica e circular pela planilha eletrônica.....	41
Tabela 4 – Resultados obtidos para o carregamento vertical uniformemente distribuído para uma geometria de arco qualquer obtido pela planilha eletrônica.....	43

SUMÁRIO

PRIMEIRA PARTE

Resumo geral.....	1
1. INTRODUÇÃO.....	2
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	3
2.1 Muro de arrimo	3
2.2 Empuxo de terra	4
2.2.1 Carga do Solo	5
2.3 Arcos na engenharia civil	6
2.3.1 Perspectiva histórica do arco na engenharia civil	6
2.3.2 Linha de Pressão	6
2.4 Análise estrutural	7
3. METODOLOGIA.....	10
3.1 Solo escolhido como exemplo.....	10
3.2 Análise estrutural dos arcos	10
3.2.1 Arco circular com o carregamento radial uniformemente distribuído	11
3.2.2 Arco elipsoidal com o carregamento radial uniformemente distribuído.....	17
3.2.3 Arco com o carregamento vertical uniformemente distribuído.....	22
3.3 Modelagem da planilha eletrônica.....	24
4. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	27
REFERÊNCIAS	29
SEGUNDA PARTE	30
PLANILHA ELETRÔNICA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE MURO DE ARRIMO ARQUEADO	31
1. INTRODUÇÃO	32
2. METODOLOGIA	32
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	35
3.1 Muro de Arrimo	35

3.2	Linhas de pressão	35
3.3	Empuxo	35
3.4	Formulação da metodologia utilizada no trabalho	36
3.4.1	Empuxo	36
3.4.2	Elipse	36
3.4.3	Determinação da geometria em linha de pressão para um arco com carregamento linear vertical uniformemente distribuído	37
3.5	Consideração do carregamento do solo	38
4	RESULTADO E DISCUSSÃO	38
4.1	Arco com carregamento radial uniformemente distribuído	38
4.2	Ajuste de um arco qualquer com carregamento linear vertical uniformemente distribuído para uma geometria em linha de pressão	43
5	CONCLUSÃO	44
6	REFERÊNCIAS	45

PRIMEIRA PARTE

Resumo geral

O principal objetivo deste estudo é conduzir uma análise estrutural de um muro de arrimo, cuja geometria arqueada seja adequada para existir apenas esforços internos de compressão, ou seja, esteja em linha de pressão, permitindo sua construção em alvenaria, por exemplo.

O artigo intitulado "Planilha eletrônica para análise estrutural de um muro de arrimo arqueado", o qual foi submetido à revista Caderno de Engenharia de Estruturas, apresenta os resultados da análise estrutural de arcos circulares e elipsoidais sujeitos a um carregamento radial uniformemente distribuído, tendo como foco principal a verificação se estão em linha de pressão, na qual a estrutura apresenta momento fletor nulo. Além disso, a planilha é automatizada para ajustar a geometria de uma estrutura arqueada, com carregamento vertical uniformemente distribuído, para estar em linha de pressão.

As equações utilizadas foram deduzidas a partir de um ponto genérico em ambas as geometrias, circular e elipsoidal, utilizando-se o método das seções. Para o carregamento vertical uniformemente distribuído também foi utilizado os conhecimentos de uma viga biapoiada de substituição, equivalente ao arco triarticulado. Concluiu-se que, com a utilização destas equações, a geometria em linha de pressão para o carregamento vertical uniformemente distribuído sempre acontecerá, entretanto, para o carregamento radial uniformemente distribuído, as únicas geometrias dentre as que foram analisadas que se está em linha de pressão são as circulares. No entanto, o carregamento que o solo aplica no muro de arrimo arqueado é radial uniformemente distribuído, o que descarta o emprego do carregamento vertical uniformemente distribuído nas análises de muros de arrimo arqueados.

Todos os resultados obtidos via planilha eletrônica são comparados com os dados do *software* FTOOL (2018), o qual proporciona a análise estrutural de variadas estruturas de forma expedita e eficientemente.

1. INTRODUÇÃO

Muros de arrimos são estruturas de contenção de solo que estão presentes em muitas construções, os quais têm como objetivo suportar as pressões laterais do solo, de forma a garantir segurança ao talude (SOUZA, 2013). Hoje existem diversos tipos e geometrias de muros de arrimo amplamente estudados na literatura (OLIVEIRA e FIALHO, 2018).

É importante destacar que a escolha da geometria apropriada para o muro de arrimo pode facilitar significativamente o processo de construção. Além disso, a escolha do material que será utilizado deve ser considerada, pois, dependendo da construção, essa escolha pode acarretar uma economia significativa no montante dos custos da obra.

Na busca por diversificação na construção de muros de arrimo, pode-se adotar a utilização de geometrias arqueadas. Este enfoque é motivado pelo reconhecimento da eficácia dessa geometria. No entanto, vale ressaltar que, até o momento, não foi encontrado na literatura técnica um estudo conclusivo que explique de forma abrangente o porquê de um muro de arrimo arqueado ser eficiente para resistir aos esforços transmitidos pelos solos. Na literatura atual se baseia na compreensão de que um arco opera predominantemente em compressão quando adequadamente projetado em linha de pressão, porém para outros fins construtivos. (NUNES, 2009).

Sendo assim, o presente estudo tem como objetivo realizar uma análise dos esforços internos atuantes em um muro de arrimo arqueado. A investigação visa verificar como a sollicitação do solo se comporta na geometria arqueada, considerando duas geometrias distintas: circular e elipsoidal. Além disso, a pesquisa analisa como as geometrias circular e elipsoidal reagem ao carregamento radial uniformemente distribuído, avaliando se estão ou não em linha de pressão. Ainda mais, adota-se um arco qualquer com carregamento vertical uniformemente distribuído, o qual é ajustado para atingir à uma geometria que esteja em linha de pressão. A fim de otimizar essa análise, foi desenvolvida uma planilha eletrônica, proporcionando uma abordagem mais eficiente na identificação da melhor geometria para o muro de arrimo sob ação de empuxos de solo. Dessa forma, depois de uma vasta pesquisa, este estudo se torna único na literatura, na qual não foi encontrado nenhum estudo tratando especificamente de muros de arrimos arqueados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Muro de arrimo

Contenção de solo é uma estrutura de suporte construída para sustentar o solo e fornecer estabilidade a áreas inclinadas. Essa estrutura é frequentemente utilizada em projetos de engenharia civil para prevenir deslizamentos de terra, garantir a estabilidade de encostas e criar plataformas niveladas em terrenos inclinados. Muros de arrimo são projetados para resistir à pressão lateral do solo e, muitas vezes, são construídos em locais onde há a necessidade de retenção de terra para evitar movimentos indesejados. Eles podem variar em forma, tamanho e material de construção, sendo comuns em áreas urbanas e rurais para criar espaços utilizáveis e controlar a erosão do solo (OLIVEIRA e FIALHO, 2019).

Antes de iniciar a construção de um muro de arrimo, é essencial realizar estudos geotécnicos para compreender as propriedades físicas do solo. Isso envolve a análise da capacidade de suporte, coesão, ângulo de atrito, permeabilidade e outras características do solo que influenciam a estabilidade da estrutura (OLIVEIRA E FIALHO, 2019).

Com base nos resultados dos estudos geotécnicos, são realizados cálculos de estabilidade para determinar as dimensões e características estruturais do muro de arrimo. Esses cálculos consideram a altura do muro, o tipo de solo, a pressão lateral esperada, a inclinação do terreno e outros fatores relevantes. O objetivo é garantir que o muro seja capaz de resistir às cargas e evitar deslizamentos ou colapsos.

Existem diferentes tipos de muros de arrimo e a escolha do tipo mais adequado depende das características do solo, da altura do muro, dos custos envolvidos, da mão de obra disponível e de outros fatores específicos do projeto. Alguns dos tipos comuns incluem muros de gravidade, que se baseiam no peso próprio para resistir à pressão lateral; muros de retenção com contrafortes, que utilizam contrafortes embutidos no solo para aumentar a estabilidade; muros de gabião, que consistem em gaiolas preenchidas com pedras; e muros de solo reforçado, que utilizam geossintéticos para reforçar o solo e aumentar sua capacidade de suporte (OLIVEIRA; CAVALCANTI; RIBEIRO, 2021).

Além da estabilidade estrutural, a drenagem adequada é um aspecto crucial para a eficácia de um muro de arrimo. O acúmulo de água atrás do muro pode exercer pressão adicional e comprometer sua estabilidade. Portanto, é importante projetar sistemas de drenagem eficientes, como drenos de alívio, para evitar o acúmulo de água. Entretanto, no presente estudo não está sendo considerada a drenagem, pois ele almeja apenas fornecer subsídios para um bom entendimento da melhor geometria arqueada para um muro de arrimo.

2.2 Empuxo de terra

O empuxo de terra é uma força que surge como resultado da pressão exercida pelo solo contra uma estrutura de contenção, como os muros de arrimo. Essa pressão se origina tanto do peso natural do solo como da maneira como as cargas são distribuídas quando o solo é represado ou contido por uma estrutura vertical (OLIVEIRA; CAVALCANTI; RIBEIRO, 2021).

Autores como Gerscovich (2016) se aprofundaram na compreensão dessa força, destacando a importância de determinar o empuxo de terra com precisão para orientar adequadamente projetos de muros de arrimo. Ainda mais, a pressão resultante pode induzir deformações ou até mesmo desestabilizar a estrutura, se não for cuidadosamente calculada e mitigada por meio de técnicas de engenharia bem fundamentadas.

Existem dois tipos de empuxo de terra: empuxo ativo e empuxo passivo. O empuxo ativo ocorre quando o solo exerce pressão na estrutura, enquanto o empuxo passivo acontece quando a estrutura exerce pressão no solo (GERSCOVICH, 2016)

O Método de Rankine, reconhecido como um dos fundamentos na análise do empuxo de terra em estruturas de contenção, é sustentado por simplificações cruciais, como enfatizado por Marangon (2018). Dentre essas análises, destacam-se a suposição de solos granulares e não coesivos, de superfícies de deslizamento planas e inclinadas, e de uma distribuição uniforme de pressão ao longo dessas superfícies.

Para a consideração do empuxo ativo, podem-se utilizar as Equações 1 e 2, e, para o caso do empuxo passivo, têm-se as Equações 3 e 4 (em ambos os casos, a poropressão foi excluída das considerações):

$$K_a = \frac{1 - \operatorname{sen}\phi}{1 + \operatorname{sen}\phi} \quad (1)$$

$$E_a = \frac{K_a \cdot \gamma \cdot H^2}{2} - 2 \cdot c \cdot H \cdot \sqrt{K_a} \quad (2)$$

$$K_p = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi} \quad (3)$$

$$E_p = \frac{K_p \cdot \gamma \cdot H^2}{2} - 2 \cdot c \cdot H \cdot \sqrt{K_p} \quad (4)$$

Sendo que:

K_a é o coeficiente de empuxo ativo;

ϕ é o ângulo de atrito do solo, em $^\circ$;

E_a é o empuxo ativo, em kPa;

γ é o peso específico do solo, em kN/m^3 ;

H é a altura do desnível do solo, em m;

C é a coesão do solo, em kPa.

K_p é o coeficiente de empuxo passivo;

E_p é o empuxo passivo, em kPa.

Marangon (2018) explica que, ao dispor dos resultados do ensaio SPT, é viável estabelecer correlações que permitam definir diversos parâmetros relacionados à resistência e deformabilidade do solo. Na Tabela 1, o autor ilustra uma série de parâmetros vinculados à resistência e deformabilidade do solo, todos em função dos valores obtidos no ensaio SPT.

Tabela 1 - Parâmetros de resistência e de deformabilidade em função do SPT.

Areia e Solos Arenosos			
Compacidade	$\gamma(t/m^3)$	$C(t/m^2)$	ϕ°
Fofa	1.6	0	25-30
Pouca compacta	1.8	0	30-35
Medianamente compacta	1.9	0	35-40
Compacta	2.0	0	40-45
Muito compacta	> 2.0	0	> 45
Argila e solos Argilosos			
Compacidade	$\gamma(t/m^3)$	$C(t/m^2)$	ϕ°
Muito mole	1.3	0 - 1.2	0
Mole	1.5	1.2 - 2.5	0
Média	1.7	2.5 - 5.0	0
Rija	1.9	5.0 - 15.0	0
Dura	> 2.0	> 15.0	0

Fonte: Marangon (2018).

2.2.1 Carga do Solo

Para realizar a análise das cargas exercidas por um solo em um muro de arrimo com a geometria arqueada, devem ser consideradas cargas aplicadas em duas direções para análises bidimensionais no cálculo do empuxo do solo, sendo aplicadas perpendicularmente à estrutura, seguindo a teoria de Rankine (MARANGON, 2018). Em aplicações geotécnicas, portanto, essa abordagem é suficiente para modelar com precisão o comportamento do solo em estruturas como fundações, paredes de contenção e taludes.

2.3 Arcos na engenharia civil

2.3.1 Perspectiva histórica do arco na engenharia civil

O estudo das estruturas arqueadas vem sendo muito exploradas e utilizadas a favor da arquitetura. Essas construções foram utilizadas por muito tempo intuitivamente, sem ter uma teoria formulada comprovando sua eficiência. Os romanos, por exemplo, foram pioneiros na construção de pontes e aquedutos usando arcos, essas construções destacaram a estabilidade e eficácia estrutural proporcionadas pelo formato arqueado, mesmo que a compreensão teórica ainda estivesse em estágios iniciais (NUNES, 2019).

Durante a Idade Média e o Renascimento, a teoria do arco começou a ser formalizada por engenheiros e arquitetos notáveis. A contribuição de estudiosos, como Leonardo da Vinci, foi crucial para a compreensão mais aprofundada dos princípios físicos subjacentes à estabilidade dos arcos (NUNES, 2019).

A capacidade dos arcos de distribuir cargas de maneira eficiente e resistir a tensões faz com que essa teoria seja fundamental para a engenharia civil, proporcionando soluções estruturais duradouras e esteticamente atraentes.

2.3.2 Linha de Pressão

A linha de pressão em arcos refere-se à trajetória imaginária ao longo da qual a carga aplicada é transmitida de maneira mais eficiente e uniforme ao longo da estrutura do arco. Em outras palavras, é a linha onde as forças resultantes se concentram, proporcionando uma distribuição equilibrada da carga ao longo do arco (NUNES, 2009).

Quando um arco é sujeito a uma carga, como o peso do solo ou outras pressões externas, a linha de pressão é a curva ao longo da qual as forças de compressão são distribuídas de forma que o momento fletor em qualquer ponto do arco seja zero. Isso é fundamental para garantir a estabilidade e a eficiência estrutural da construção de arco em alvenaria, por exemplo.

A busca pela linha de pressão é um conceito crucial no projeto de arcos em engenharia civil, pois uma linha de pressão bem projetada significa que as forças são distribuídas uniformemente, minimizando pontos de concentração de tensão e potencial fragilidade na estrutura do arco (NUNES, 2009).

Quando um arco triarticulado está sujeito a um determinado carregamento que gera exclusivamente esforços normais, sua configuração é descrita como a linha de pressão desse carregamento. Essa conformação é considerada ideal para um arco triarticulado, uma vez que

corresponde à forma mais eficiente do ponto de vista estrutural, conforme mencionado por Sussekind (1981).

É relevante observar que as linhas de pressão sofrem influência da geometria do arco, da carga aplicada e das características dos materiais utilizados. Aspectos como a forma do arco, seu raio de curvatura, a espessura da estrutura e a rigidez dos materiais desempenham um papel crucial na distribuição das linhas de pressão (NUNES, 2009).

A compreensão das linhas de pressão é importante para o projeto e análise estrutural de arcos na busca por uma distribuição equilibrada de cargas em arcos, pois auxilia na determinação dos esforços internos, na escolha adequada dos materiais e na avaliação da estabilidade da estrutura.

2.4 Análise estrutural

A análise estrutural é uma disciplina fundamental na engenharia civil e mecânica, que se concentra no estudo do comportamento e da resposta de estruturas sujeitas a diversas condições de carga. Para tanto, utiliza-se o método das seções por meio das equações de equilíbrio para se fazer esta análise. Estas estão descritas nas Equações 5, 6 e 7, que são a somatória de momento fletor, das forças horizontais e das forças verticais, respectivamente (HIBBLER, 2013).

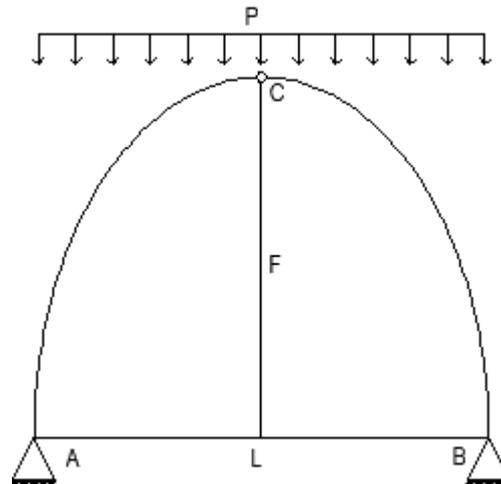
$$\Sigma M = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (7)$$

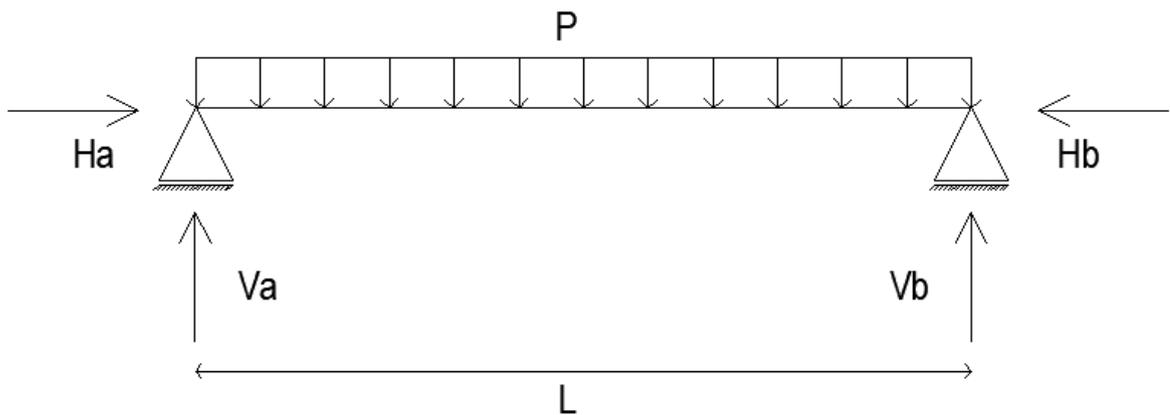
O autor Sussekind (1981) demonstrou uma teoria para arcos triarticulados, na qual um arco solicitando por uma carga vertical uniformemente distribuída, demonstrado na Figura 1, pode ser substituído por uma viga biapoiada, mostrado na Figura 2, simplificando os cálculos. As equações desenvolvidas pelo autor procuram ajustar o arco para que ele atinja a linha de pressão, ou seja, o momento seja nulo em qualquer ponto. Dessa forma, o objetivo é alterar a altura (flecha) e o vão entre apoios para que se obtenha linha de pressão.

Figura 1 - Arco elíptico com carregamento linear uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

Figura 2 - Viga de substituição do arco triarticulado com carregamento vertical uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

Os cálculos são realizados com as equações convencionais para o cálculo de uma viga, para o esforço cortante está descrita na Equação 8.

$$Q = \frac{P \cdot L}{2} \quad (8)$$

Sendo que:

Q é o esforço cortante nos apoios, que é igual para os dois apoios;

P a carga distribuída;

L o vão entre apoios.

O cálculo do maior momento possível (M_g) é realizado com a Equação 9:

$$M_g = \frac{P \cdot L^2}{8} \quad (9)$$

Para o momento em uma seção genérica (M_s) utiliza-se a Equação 10.

$$M_s = \frac{Q \cdot L}{2} \quad (10)$$

Sendo que:

M_s é o momento em uma seção genérica

A reação de apoio horizontal (H') é calculada com a Equação 11:

$$H' = \frac{M_g}{F} \quad (11)$$

Sendo que:

M_g é o maior momento fletor gerado;

F é a flecha máxima.

O cálculo da altura ajustada Y_s de cada ponto para que a estrutura esteja em linha de pressão é dado pela Equação 12.

$$Y_s = \frac{M_s}{H'} \quad (12)$$

Dessa forma, a flecha e o vão entre apoios inicialmente adotados são alterados com o objetivo de atingir a linha de pressão.

3. METODOLOGIA

3.1 Solo escolhido como exemplo

Para demonstrar o funcionamento da planilha eletrônica, optou-se por selecionar um estudo que investigou a viabilidade de um novo projeto de muro de arrimo na cidade de Caratinga, localizada em Minas Gerais (OLIVEIRA E FIALHO, 2019).

Neste contexto, com o propósito de realizar a análise estrutural de um muro de arrimo arqueado, os parâmetros essenciais para a realização dos cálculos, sendo eles o ângulo de atrito interno (ϕ), coesão aparente (c), e o peso específico do solo (γ), foram adquiridos do referido estudo realizado por Oliveira e Fialho (2019).

As informações pertinentes aos atributos deste solo foram obtidas por meio de uma correlação entre os dados provenientes dos relatórios de sondagem (utilizando a técnica SPT), fornecidos pela empresa BHL Construtora Ltda., mostrado no artigo de referência (OLIVEIRA E FIALHO, 2019).

Após analisar os relatórios de sondagens disponíveis (OLIVEIRA E FIALHO, 2019), optou-se pelo relatório SP-04, uma vez que está mais próximo da área de construção do muro. Esse ensaio descreve o solo como silte arenoso medianamente compacto e, conforme as informações fornecidas por Marangon (2018) (Tabela 1, Tópico 2.2), os parâmetros do solo adotados no presente estudo são:

- Ângulo de atrito: $\phi = 40^\circ$;
- Coesão: $c = 0 \text{ kN/m}^2$;
- Peso específico do solo: $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$.

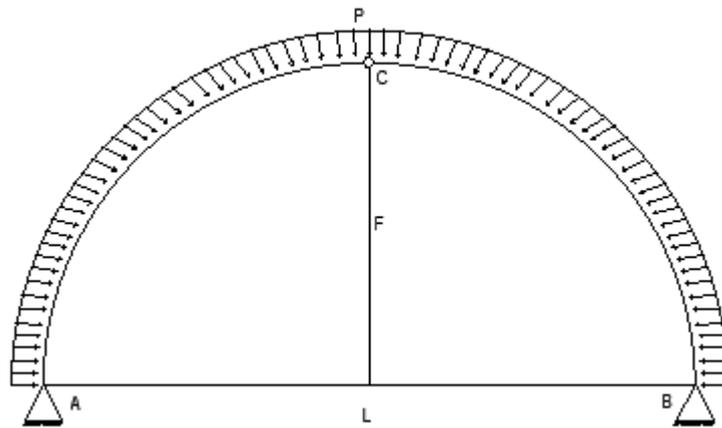
3.2 Análise estrutural dos arcos

A análise dos esforços internos de um arco triarticulado sujeito a um carregamento radial uniformemente distribuído é feita examinando-se um elemento infinitesimal. Isso permite a decomposição da carga solicitante, seguida por uma análise dos esforços atuando em um ponto genérico do arco, utilizando dos conhecimentos de teoria das estruturas mencionado no Tópico 2.4. Para a análise do carregamento vertical uniformemente distribuído, utilizou-se do conhecimento de viga de substituição (SUSSEKIND, 1981) e foi analisado um ponto genérico no arco pelo método das seções. Neste contexto, são apresentadas, a seguir, as etapas para obtenção das equações finais de cálculo para as geometrias circular e elipsoidal, para o carregamento radial uniformemente distribuído, e um arco qualquer com um carregamento vertical uniformemente distribuído.

3.2.1 Arco circular com o carregamento radial uniformemente distribuído

A primeira análise será feita com o arco com geometria circular e carregamento radial uniformemente distribuído, conforme mostrado na Figura 3. O arco é triarticulado, com rótulas localizadas nos apoios A e B, e na altura máxima, no ponto C.

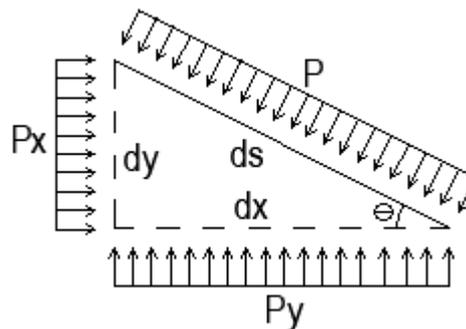
Figura 3 - Arco circular com carregamento radial uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

Para se obterem as forças atuantes nas direções horizontal e vertical, considera-se um elemento infinitesimal “ d_s ” da estrutura analisada. Para uma melhor representação realizou-se uma ampliação, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Elemento infinitesimal “ d_s ” do arco analisado.



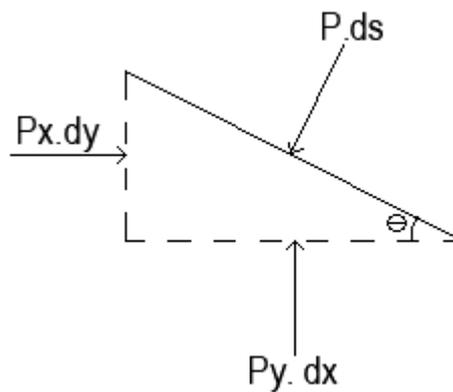
Fonte: Autor (2023).

Examinando essa porção infinitesimal, observa-se que a força distribuída “P” foi decomposta em “ P_x ” e “ P_y ”, podendo-se representá-las como cargas pontuais resultantes,

conforme ilustrado na Figura 5. Nessa representação, cada carga distribuída é multiplicada pela distância na qual está aplicada, resultando em:

- Carga pontual inclinada: $P \cdot d_s$
- Carga pontual horizontal: $P_x \cdot d_y$
- Carga pontual vertical: $P_y \cdot d_x$

Figura 5 - Transformação das cargas distribuídas para pontuais do elemento infinitesimal do arco analisado.



Fonte: Autor (2023).

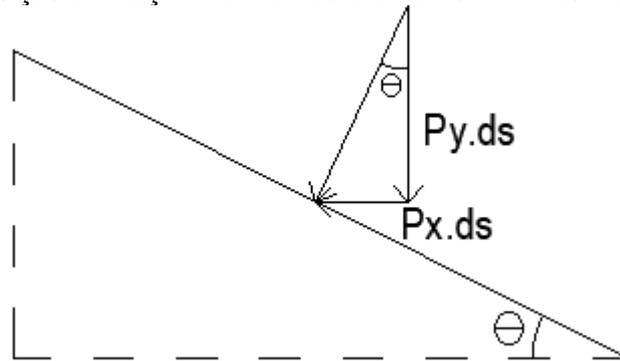
As distâncias d_x e d_y , mostradas na Equação 13, formam um ângulo θ com a carga inclinada, então essas distâncias são:

$$d_x = d_s \cdot \cos\theta \quad \text{e} \quad d_y = d_s \cdot \sin\theta \quad (13)$$

A carga pontual inclinada é decomposta em suas componentes X e Y. Sendo assim, forma um ângulo com as cargas decompostas, conforme ilustrado na Figura 6. Esse ângulo é equivalente ao formado pelas distâncias decompostas, ou seja, é igual a θ . Portanto, as cargas são representadas na Equação 14.

$$P_y = P \cdot d_s \cdot \sin\theta \quad \text{e} \quad P_x = P \cdot d_s \cdot \cos\theta \quad (14)$$

Figura 6 - Decomposição da força inclinada do elemento infinitesimal do arco analisado.



Fonte: Autor (2023).

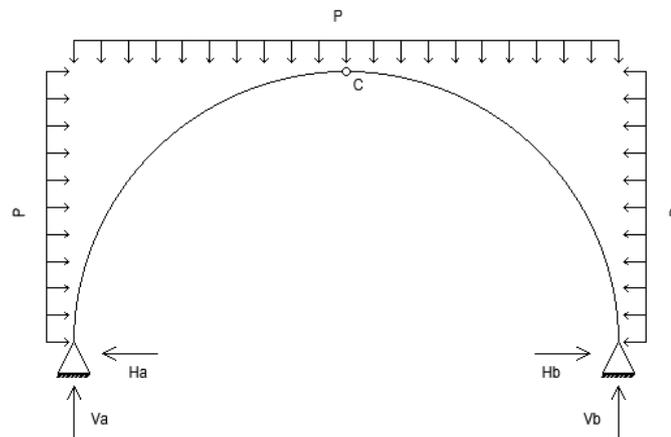
Ao decompor todas as cargas para determinar os valores das cargas P_x e P_y , foram utilizadas as equações de equilíbrio, conforme apresentadas por Hibbeler (2013). Estas equações foram aplicadas tanto para a direção horizontal quanto para a vertical, como exemplificado nas Equações 6 e 7 do Tópico 2.4.

Dessa forma, observa-se que tanto as cargas horizontais quanto as verticais uniformemente distribuídas são equivalentes à carga P radial uniformemente distribuída, conforme expresso na Equação 15.

$$P_x = P \quad \text{e} \quad P_y = P \quad (15)$$

Assim, uma vez que as forças P_x e P_y são equivalentes à P (radial), as cargas distribuídas no arco podem ser visualizadas conforme ilustrado na Figura 7, de tal forma a simplificar os cálculos de reações de apoio e esforços internos.

Figura 7 - Representação das reações de apoio e das cargas uniformemente distribuídas no arco circular.



Fonte: Autor (2023).

Com base na representação das cargas, torna-se viável realizar os cálculos para determinar as reações de apoio, tanto verticais quanto horizontais. Esse procedimento é realizado utilizando as equações de equilíbrio, conforme descritas por Hibbeler (2013) no Tópico 2.4, e aplicando as substituições pertinentes, como indicado nas Equações 16 e 17 a seguir.

$$V_a = V_b = \frac{P \cdot D}{2} = P \cdot R \quad (16)$$

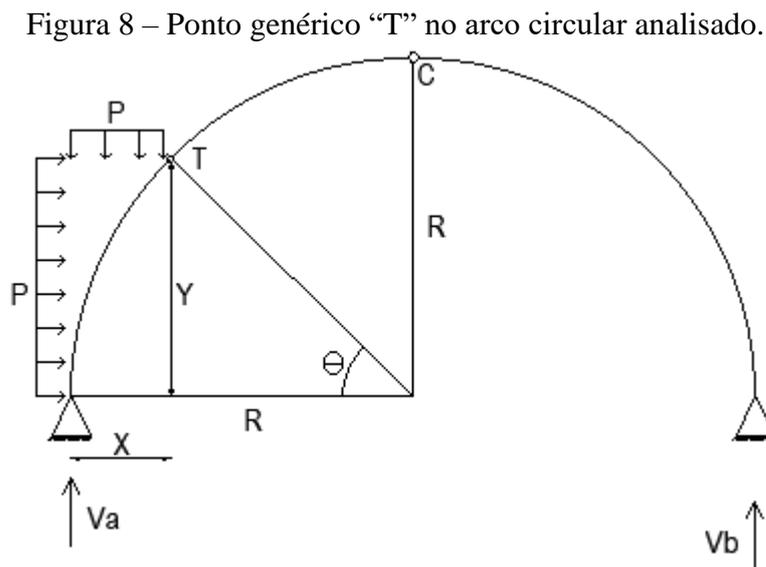
$$H_a = H_b = 0 \quad (17)$$

Sendo que:

V_a e V_b as reações verticais dos apoios [kN];

H_a e H_b as reações horizontais dos apoios [kN].

Para o cálculo do momento, será adotado um ponto genérico T, caracterizado pela distância horizontal X, medida a partir do apoio à esquerda, e uma distância vertical Y, correspondente à diferença de altura entre o apoio à esquerda e o ponto genérico T, conforme ilustrado na Figura 8.



Fonte: Autor (2023).

Na Figura 8, observa-se que cada ponto do arco possui distâncias Y e X que variam de acordo com um ângulo (θ). Desse modo, essas distâncias podem ser determinadas pelas Equações 18 e 19.

$$Y = R \cdot \text{sen}\theta \quad (18)$$

$$X = R \cdot (1 - \text{cos}\theta) \quad (19)$$

Com as distâncias calculadas, torna-se viável determinar o momento em qualquer ponto. Neste caso, o cálculo é realizado para o ponto genérico T (FIGURA 8), expresso na Equação 20, derivada da Equação 5 do Tópico 2.4.

$$M_T = V_a \cdot X - P \cdot X \cdot \frac{X}{2} - P \cdot Y \cdot \frac{Y}{2} \quad (20)$$

Após efetuar todas as substituições necessárias, obtém-se:

$$M_T = P \cdot R \cdot R \cdot (1 - \text{cos}\theta) - \frac{P \cdot R^2 \cdot (1 - \text{cos}\theta)^2}{2} - \frac{P \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{2}$$

A relação fundamental da trigonometria é expressa pela Equação 21.

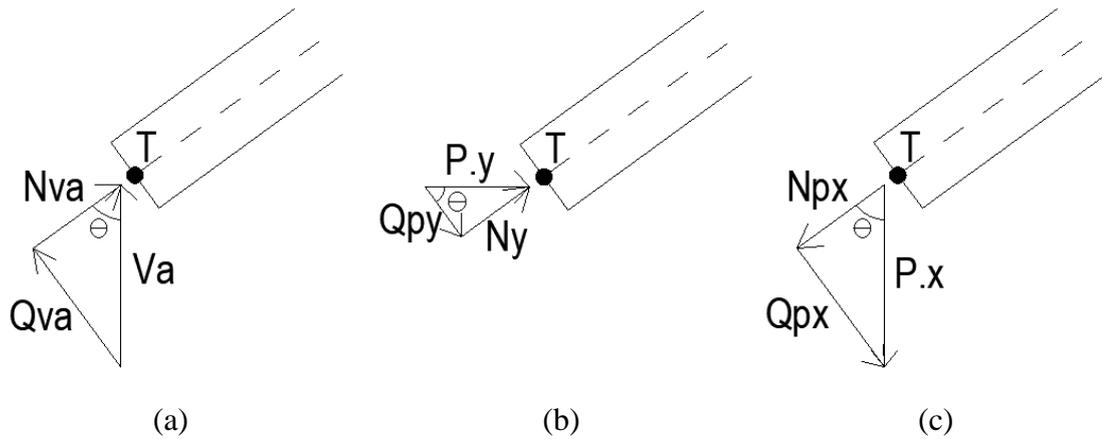
$$(\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 1 \quad (21)$$

Assim, alcança-se a expressão final para o momento em um ponto genérico, conforme representado pela Equação 22.

$$M_T = \frac{P \cdot R^2}{2} - \frac{P \cdot R^2}{2} = 0 \quad (22)$$

No cálculo do diagrama de esforço cortante, o ponto T, como representado na Figura 8, é analisado. Para uma representação mais precisa das forças atuantes nesse ponto, a Figura 9 ilustra as três forças presentes: a força de reação V_a , a carga pontual horizontal $P \cdot X$ e a carga pontual vertical $P \cdot Y$, junto com suas respectivas decomposições.

Figura 9 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a), Força horizontal referente à carga distribuída P (b) e Força vertical referente à carga distribuída P (c).



Fonte: Autor (2023).

Para o cálculo da força cortante Q_T , utilizou-se a Equação 23, realizando a soma das forças cortantes de cada carga apresentada na Figura 9.

$$Q_T = Q_{VA} - Q_H - Q_P \quad (23)$$

$$Q_T = V_A \cdot \text{sen}\theta - P \cdot Y \cdot \text{cos}\theta - P \cdot X \cdot \text{sen}\theta$$

As distâncias X e Y foram previamente definidas nas Equações 18 e 19, resultando na Equação 24:

$$Q_T = \frac{P \cdot D}{2} \cdot \text{sen}\theta - P \cdot R \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta - P \cdot R \cdot \text{sen}\theta + P \cdot R \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\theta = 0 \quad (24)$$

No cálculo da força normal N_T , também será analisado o mesmo ponto T da Figura 9, considerando as mesmas forças conforme ilustrado na Figura 7, resultando na Equação 25.

$$N_T = -N_{VA} - N_H - N_P \quad (25)$$

$$N_T = -V_A \cdot \text{cos}\theta - P \cdot Y \cdot \text{sen}\theta - P \cdot X \cdot \text{cos}\theta$$

$$N_T = -P \cdot R \cdot (\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta)$$

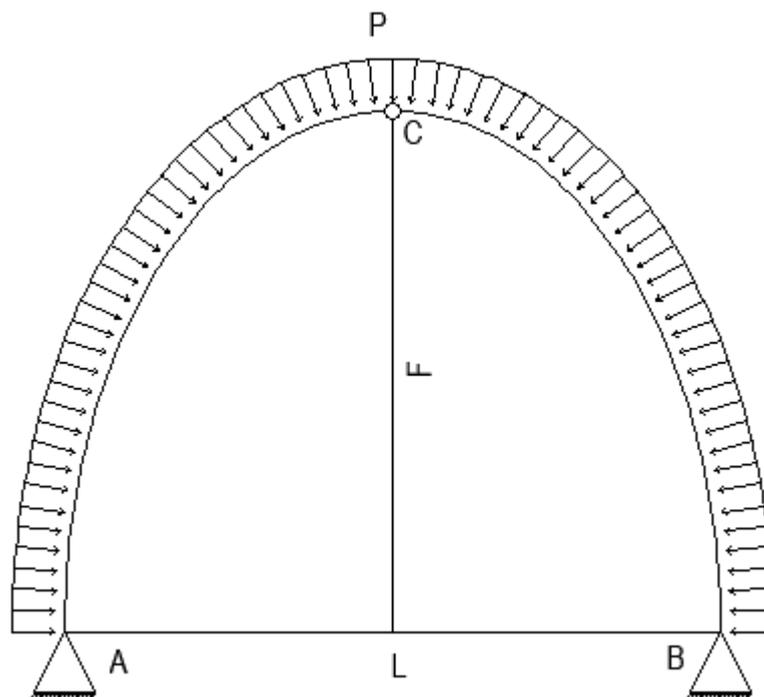
Conforme mencionado anteriormente na Equação 21, conclui-se que a força normal é representada pela Equação 26.

$$N_T = -P \cdot R \quad (26)$$

3.2.2 Arco elipsoidal com o carregamento radial uniformemente distribuído

Para o arco elipsoidal com carregamento radial uniformemente distribuído, ilustrado na Figura 10, é possível realizar cálculos semelhantes aos efetuados anteriormente para o arco circular no Tópico 3.2.1, visando analisar como o carregamento radial uniformemente distribuído atua no arco. Entretanto, o ângulo analisado não é o θ como no arco circular. Para o elíptico o ângulo deve ser o α , mostrado na Figura 12.

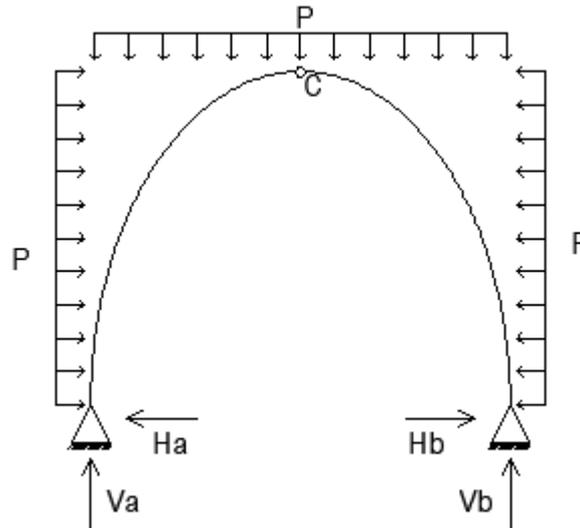
Figura 10 - Arco elíptico com carregamento radial uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

Na análise, presume-se que os carregamentos mostrados nas Figuras 10 e 11 são equivalentes, o que implica que o carregamento radial uniformemente distribuído no arco elipsoidal pode ser representado de maneira análoga aos carregamentos apresentados nas Figuras 3 e 7 para arcos circulares.

Figura 11 - Representação das reações de apoio e das cargas representativas no arco elíptico.



Fonte: Autor (2023).

Dessa maneira, o procedimento inicial consiste em determinar o valor das reações de apoio. Para isso, o somatório dos momentos no ponto A, conforme indicado na Equação 5 do Tópico 2.4, levando em consideração o sentido anti-horário como positivo, obtém-se a Equação 27.

$$L \cdot V_B - P \cdot L \cdot \frac{L}{2} - P \cdot F \cdot \frac{F}{2} + P \cdot F \cdot \frac{F}{2} = 0 \quad (27)$$

Devido à simetria do arco e dos carregamentos, as reações de apoio verticais são representadas pela Equação 28.

$$V_A = V_B = P \cdot \frac{L}{2} \quad (28)$$

Com a presença de uma rótula no ponto mais alto do arco, identificado como ponto C na Figura 10, a estrutura torna-se isostática. Dessa forma, é possível determinar os valores dos esforços horizontais nas reações de apoio por meio da Equação 5 do Tópico 2.4, fazendo a somatória do momento fletor no ponto C, sabendo-se que ele é nulo, obtém-se a Equação 29.

$$M_C + F \cdot H_B + \frac{L}{2} \left(P \cdot \frac{L}{2} \right) - P \cdot F \cdot \frac{F}{2} - P \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0 \quad (29)$$

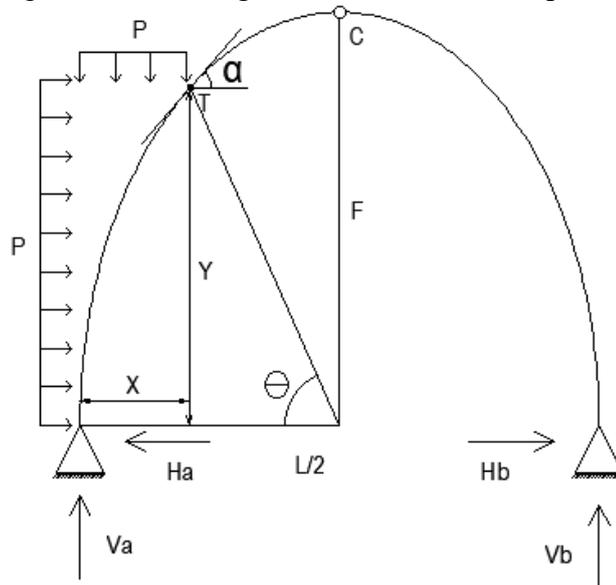
Devido à simetria do arco e dos carregamentos, as reações de apoio horizontais são representadas pela Equação 30.

$$H_B = H_A = \frac{-\frac{L}{2}\left(P \cdot \frac{L}{2}\right) + P \cdot \frac{F^2}{2} + P \cdot \frac{F^2}{8}}{h} \quad (30)$$

Iniciando os cálculos dos esforços internos da estrutura, foi selecionado um ponto genérico T. Este ponto é caracterizado pela abscissa horizontal X, medida a partir do apoio à esquerda, e uma abscissa vertical Y, correspondente à diferença de altura entre o apoio à esquerda e o ponto analisado, conforme ilustrado na Figura 12.

Foram traçadas duas retas que interceptam o ponto T, uma tangente ao arco e uma horizontal. O ângulo formado entre essas duas retas é o ângulo α mencionado anteriormente. Para determiná-lo, foi necessário determinar a inclinação do arco neste ponto. Isso envolveu a obtenção do coeficiente angular da reta tangente ao arco no ponto analisado por meio da derivação, e a partir dele encontra-se o ângulo α por relações trigonométricas.

Figura 12 – Ponto genérico “T” no arco elipsoidal.



Fonte: Autor (2023).

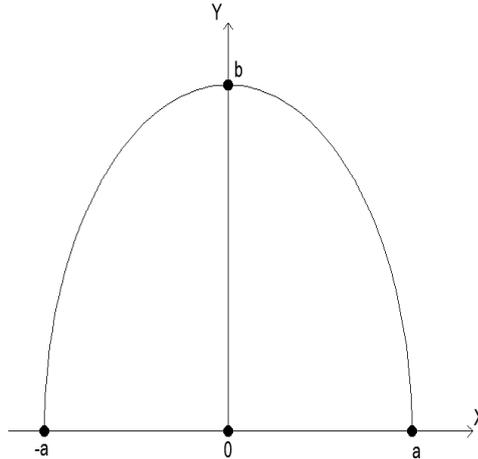
Considerando o sentido horário como positivo na Equação 5 do Tópico 2.4, o somatório de momentos no ponto genérico T (M_T) é expresso pela Equação 31.

$$M_T = V_A \cdot x + H_A \cdot y - P \cdot x \cdot \frac{x}{2} - P \cdot y \cdot \frac{y}{2} \quad (31)$$

A parte superior de uma elipse, representada na Figura 13, pode ser obtida com a Equação 32 (GÓMEZ.; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a] \quad (32)$$

Figura 13 - Parte superior de uma elipse.



Fonte: Autor (2023).

Alterando o intervalo $[-a, a]$ para $[0, 2a]$, a Equação 25 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - (x - a)^2}, \quad x \in [0, 2a]$$

Considerando a Figura 13, onde a variável "a" representa a metade do comprimento "L" (metade do vão do arco) e a variável "b" a altura "F", adquire-se a Equação 33.

$$y = \frac{2 \cdot F}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}, \quad x \in [0, 2a] \quad (33)$$

Analisando a Figura 12, torna-se viável calcular o ângulo θ para o ponto genérico T. Dessa forma, obtém-se a Equação 34.

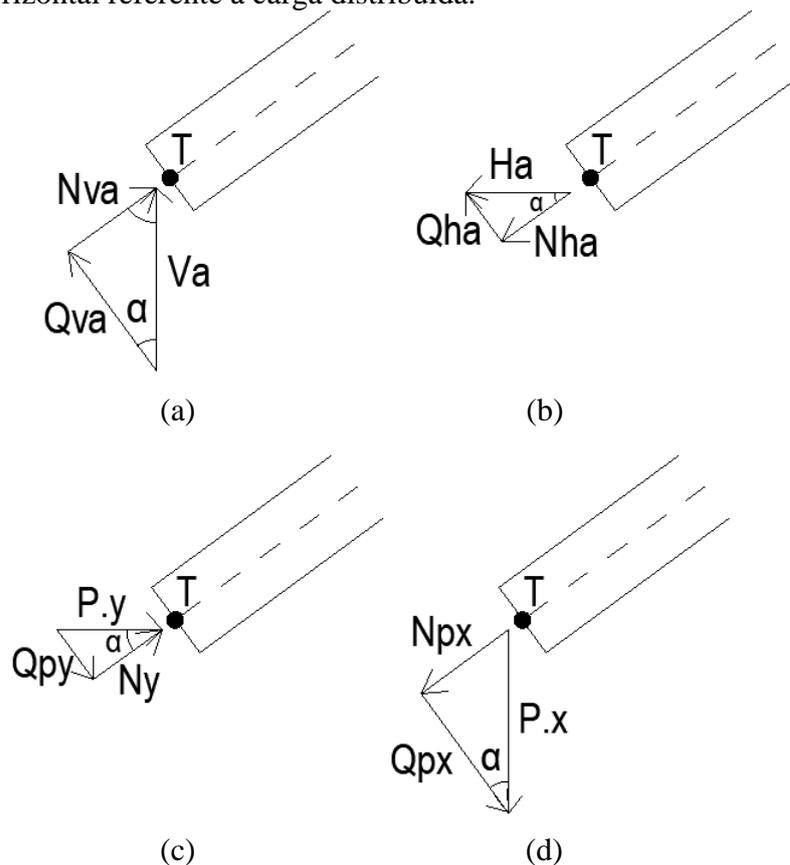
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{\frac{L}{2} - x}\right) \quad (34)$$

Desse modo, é viável reformular a Equação 31 para o valor do momento fletor em um ponto genérico T, deixando a equação em função dos comprimentos, que mudam de acordo com o ângulo θ , resultando na Equação 35.

$$M_T = V_A \cdot x + H_A \cdot \left(\frac{2 \cdot F}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2} \right) - P \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot F}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2} \right)^2}{2} \quad (35)$$

Para calcular o esforço cortante e o esforço normal em cada ponto do arco, foi realizada a decomposição das forças “ V_a ”, “ P_y ”, “ P_x ” e “ H_a ” conforme mostrado na Figura 14. Para este caso, o ângulo formado é o α , que representa a curvatura da elipse.

Figura 14 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a); Reação de apoio horizontal H_a P (b); Força Vertical referente à carga distribuída P (c); e (d) Força horizontal referente à carga distribuída.



Fonte: Autor (2023).

Considerando a soma de todas as forças presentes, conforme ilustrado na Figura 14, com o sentido para fora do arco considerado positivo, o esforço cortante no ponto genérico T é representado pela Equação 36.

$$Q_T = Q_{VA} + Q_{HA} - Q_{qV} - Q_{qH} \quad (36)$$

Substituindo os valores com base na Figura 12 e 14, obtém-se a Equação 37.

$$Q_T = V_A \cdot \cos\alpha + H_A \cdot \sen\alpha - P \cdot Y \cdot \sen\alpha - P \cdot X \cdot \cos\alpha \quad (37)$$

Ao analisar novamente a Figura 14, é possível obter a equação do esforço normal N_T no ponto genérico T para cada ponto da primeira metade do arco, conforme descrito pela Equação 38, com o sentido à esquerda (seguindo a inclinação do arco) considerado positivo:

$$N_T = -N_{VA} + N_{HA} - N_{qV} + N_{qH} \quad (38)$$

Portando, é obtido a Equação 39.

$$N_T = -V_A \cdot \sen\alpha + H_A \cdot \cos\alpha - P \cdot Y \cdot \cos\alpha + P \cdot X \cdot \sen\alpha \quad (39)$$

3.2.3 Arco com o carregamento vertical uniformemente distribuído

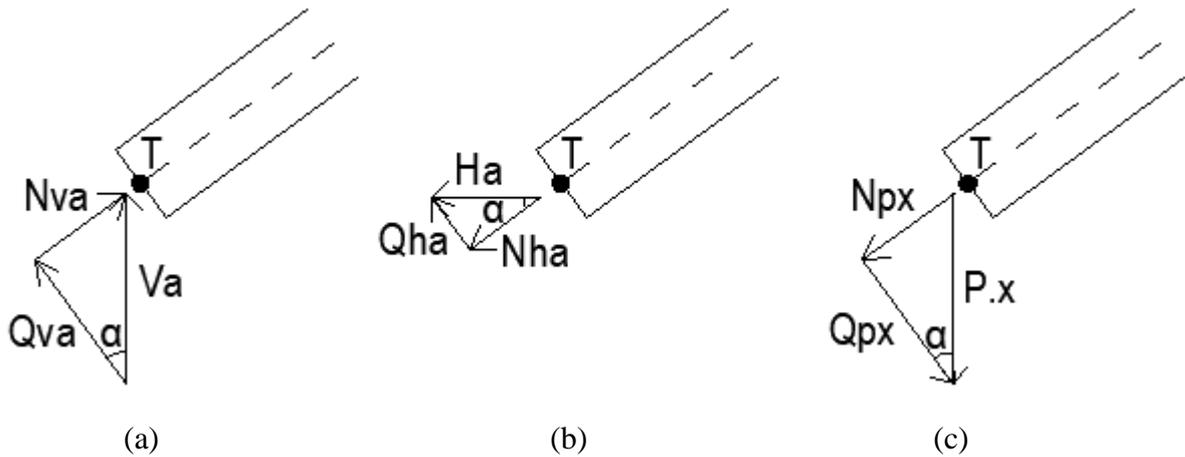
Para o arco com carregamento vertical, ilustrado na Figura 1, utilizou-se do conhecimento mencionado no Tópico 2.4, no qual Sussekind (1981) demonstrou ser possível ajustar a geometria do arco para a obtenção da linha de pressão, sendo este arco submetido a um carregamento vertical uniformemente distribuído. Desse modo, a fim de se conhecer os esforços internos deste arco, utilizou-se do conhecimento de teoria das estruturas (HIBBLER, 2012), no qual analisou-se um ponto genérico deste arco.

O primeiro passo é encontrar a geometria que estará em linha de pressão, para isso foram utilizados as Equações 8, 9, 10, 11 e 12, no qual esta última refere-se à altura ajustada da geometria submetido ao carregamento vertical uniformemente variado. Para encontrar o momento fletor, esforço normal e esforço cortante foi considerado um ponto genérico T, conforme feito para os Tópicos 3.2.1 e 3.2.2. Desse modo, utilizou-se a Equação 5 do Tópico 2.4, para encontrar o momento fletor nesse ponto, resultando na Equação 40.

$$M_T = V_A \cdot x + H_A \cdot y - P \cdot x \cdot \frac{x}{2} - P \cdot y \cdot \frac{y}{2} \quad (40)$$

Ainda, para os esforços cortante e normal, foi dividida as forças atuantes no ponto para uma melhor representação e suas respectivas decomposição, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15 - Forças atuantes no ponto genérico T: reação de apoio V_a (a); Reação de apoio horizontal H_a (b); Força Vertical referente à carga distribuída P (c).



Fonte: Autor (2023).

Fazendo a somatória de todas as forças presentes no ponto T, conforme ilustrado na Figura 15, com o sentido para fora do arco considerado positivo, o esforço cortante Q_T é representado pela Equação 41.

$$Q_T = Q_{VA} + Q_{HA} - Q_{qV} \quad (41)$$

Substituindo os valores com base na Figura 7 e 12, obtém-se a Equação 42.

$$Q_T = V_A \cdot \cos\alpha + H_A \cdot \sen\alpha - P \cdot X \cdot \cos\alpha \quad (42)$$

Para o cálculo do esforço normal N_T no ponto genérico T, demonstrado na Figura 15, fez-se o somatório de todas as forças normais das cargas atuantes, com o sentido à esquerda seguindo a inclinação do arco considerado positivo, obtém-se a Equação 43:

$$N_T = -N_{VA} + N_{HA} - N_{qV} \quad (43)$$

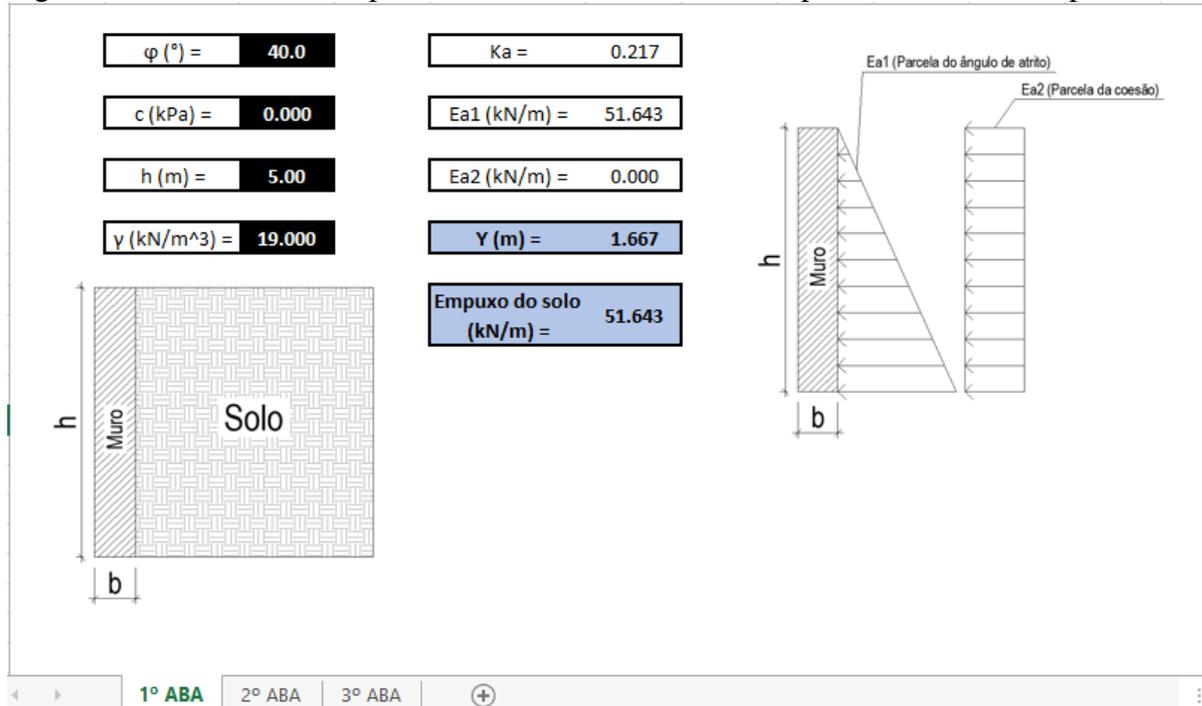
Portando, é obtido a Equação 44.

$$N_T = -V_A \cdot \text{sen}\alpha + H_A \cdot \text{cos}\alpha - P \cdot Y \cdot \text{cos}\alpha + P \cdot X \cdot \text{sen}\alpha \quad (44)$$

3.3 Modelagem da planilha eletrônica

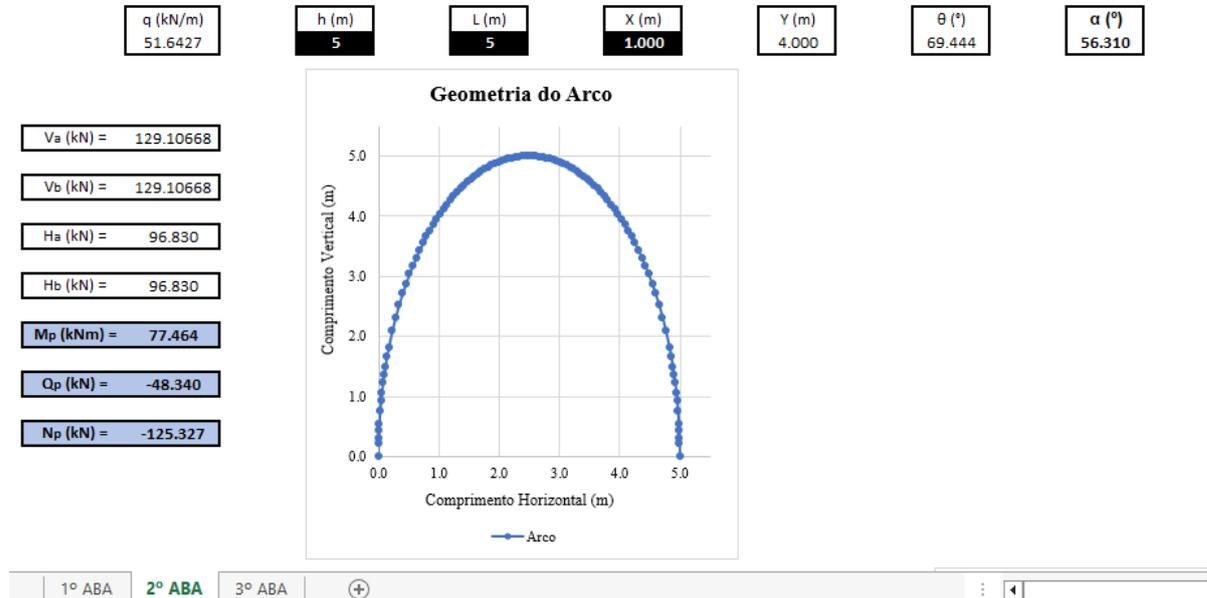
Elaborou-se uma planilha eletrônica com o intuito de aprimorar os resultados obtidos das equações discutidas nos Tópicos 2.4 e 3.2. Essa planilha foi organizada em três abas distintas: a primeira destinada ao cálculo do empuxo de solo, mostrada na Figura 16, tendo como dados de entrada ao ângulo de atrito (φ), a coesão (c), a altura total do solo (h) e o peso específico do solo. A segunda ao cálculo dos esforços presentes na estrutura para o carregamento radial uniformemente distribuído, conforme a Figura 17, tendo como dados de entrada o empuxo calculado na aba 1 (q), a altura do ponto mais alto do arco (h), o comprimento entre apoio (L) e a distância do eixo das abscissas (x), e a terceira feita para o cálculo do carregamento vertical uniformemente distribuído, Figura 18, tendo os dados de entradas iguais aos da segunda aba.

Figura 16 - Primeira aba da planilha eletrônica, desenvolvida para o cálculo do empuxo.



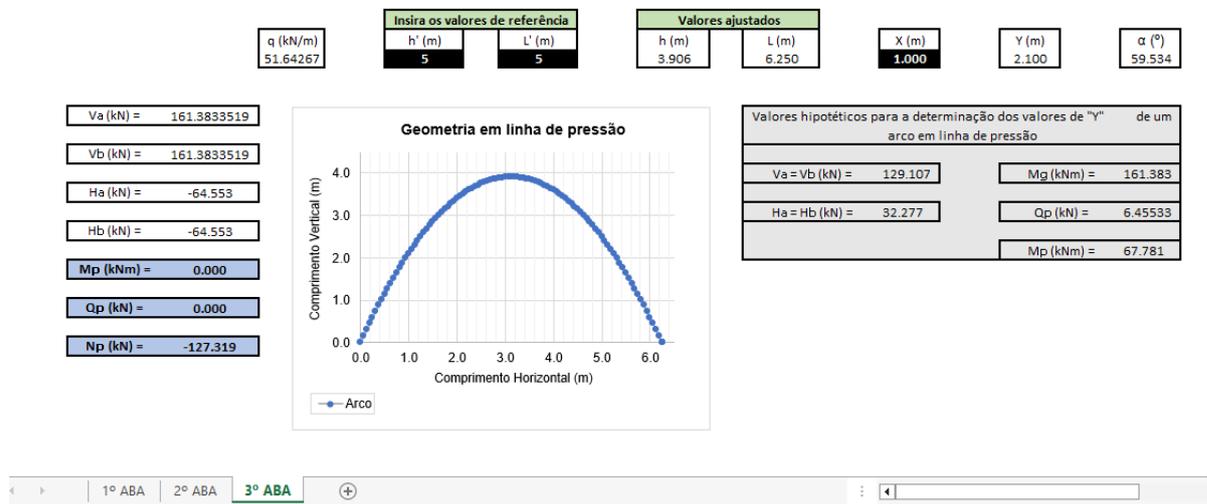
Fonte: Autor (2023).

Figura 17 - Segunda aba da planilha eletrônica, desenvolvida para a análise estrutural do carregamento radial uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

Figura 18 - Terceira aba da planilha eletrônica, desenvolvida para a análise estrutural do carregamento vertical uniformemente distribuído.



Fonte: Autor (2023).

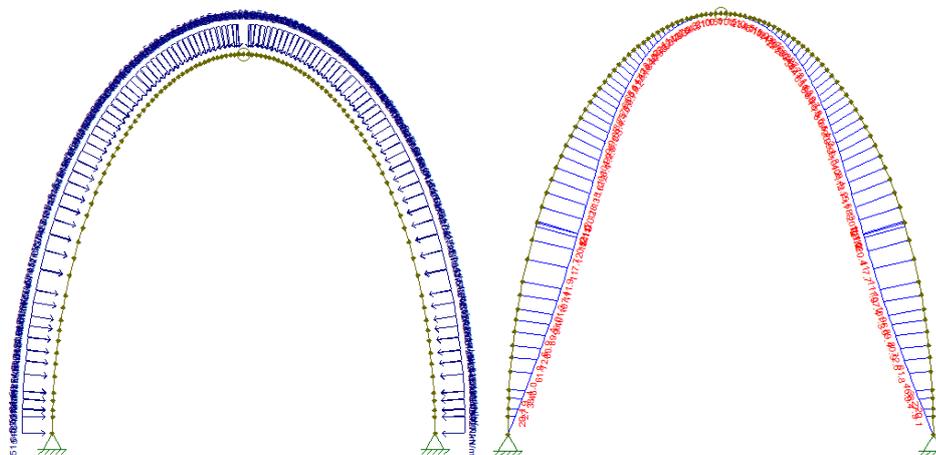
No que consiste o cálculo do empuxo, mostrado na Figura 16, foram empregadas as equações detalhadas no Tópico 2.2, utilizando o Método de Rankine (MARANGON, 2018). Nesse contexto, os dados de entrada são os parâmetros físicos do solo, como o ângulo de atrito, a coesão e o peso específico, e a altura total de onde se deseja fazer a contenção. Como resultado, o empuxo é automaticamente gerado.

Para a análise estrutural do carregamento radial uniformemente distribuído, utilizaram-se as equações descritas no Tópico 3.2.1 e 3.2.2. Nessa etapa, os dados de entrada são o empuxo, que é transferido automaticamente da primeira aba, a flecha, o vão desejado e a distância horizontal a uma seção genérica da estrutura. Com esses dados fornecidos, a planilha apresenta os resultados decorrentes das equações deduzidas. Adicionalmente, são gerados gráficos representativos dos diagramas de momento fletor, esforço normal e esforço cortante.

Ainda mais, para a análise estrutural do carregamento vertical uniformemente distribuído, utilizaram-se as equações descritas nos Tópicos 2.4 e 3.2.3. Como na segunda aba, os dados de entrada são o empuxo, que é transferido automaticamente da primeira aba para a terceira, a flecha, o vão desejado e a distância horizontal a uma seção genérica da estrutura. Entretanto, para este carregamento as equações utilizadas forçam uma geometria para esteja em linha de pressão, ou seja, a flecha e o vão entre apoios são ajustados para valores próximos aos desejados, mas não necessariamente iguais. Dessa maneira, a planilha apresenta os resultados decorrentes das equações utilizadas por Sussekind (1974) (Tópico 2.4). Para a análise dos esforços internos, foram utilizadas as equações desenvolvidas no Tópico 3.2.3. Adicionalmente, são gerados gráficos representativos dos diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço normal, como na aba 2.

Para a validação dos resultados, empregou-se o *software* FTOOL. Este *software* foi utilizado para uma aproximação do que seria um arco, dado que ele opera com segmentos lineares. Para essa análise, os arcos foram subdivididos em várias retas, e as forças aplicadas foram decompostas conforme o tipo de carregamento. O carregamento radial uniformemente distribuído foi decomposto em uma força horizontal e outra vertical, enquanto o carregamento vertical uniformemente distribuído resultou apenas em esforço vertical. É importante ressaltar que a intensidade desse esforço varia de acordo com a mudança na distância horizontal. Para demonstração do *software* FTOOL, está demonstrado na Figura 19 o carregamento radial uniformemente variado e seu respectivo diagrama de momento fletor.

Figura 19 - Representação do software FTOOL: (a) Geometria elíptica com carregamento radial uniformemente distribuído; (b) diagrama de momento fletor da estrutura.



Fonte – FTOOL (2023).

4. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O muro de arrimo arqueado é uma componente essencial na engenharia civil, desempenhando um papel fundamental na estabilidade das estruturas. Isso destaca a importância da análise estrutural, requerendo estudos aprofundados nesse tópico específico.

O presente trabalho está dividido em duas partes distintas. Na primeira parte, são exploradas as bases teóricas subjacentes ao estudo de muros de arrimo arqueados, proporcionando uma compreensão sólida das teorias fundamentais relacionadas a essa estrutura específica. A segunda parte é dedicada à apresentação de um artigo que condensa e sintetiza as bases teóricas previamente exploradas. Este artigo é seguido por uma análise detalhada dos resultados e conclusões do estudo, oferecendo uma visão clara e aplicável das implicações práticas e teóricas do uso de muros de arrimo arqueados na engenharia civil.

Destaca-se, na segunda parte, que a planilha eletrônica otimiza a verificação da geometria arqueada, mostrando se está ou não em linha de pressão. Essa abordagem foi comprovada pelo uso do *software* FTOOL, que apresentou resultados próximos aos da planilha, tendo a maior variação do momento para o arco circular com carregamento radial uniformemente variado de 2,1kNm, sendo este valor para momento fletor muito baixo. A diferença nos resultados pode ser atribuída ao fato de que o FTOOL realiza análises estruturais em estruturas lineares. No entanto, ele se aproximou de uma representação arqueada subdividindo-a em 106 segmentos lineares para os arcos com carregamento radial

uniformemente variado e 100 segmentos lineares para os arcos com carregamento vertical uniformemente variado.

5. REFERÊNCIAS

- CUNHA, J. A. A. **Construção de Pontes em Arco com tirantes provisórios com controle ativo**. 2014. 214p. Dissertação (Mestrado em Ciências da engenharia e tecnologias) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Universidade do Porto, Portugal, 2014.
- GERSCOVICH, D., **Estabilidade de Taludes**, 2ª Ed. Oficina de Textos, 2016.
- GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. S. **Geometria Analítica e Cálculo Vetorial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileiro de Matemática, 2013.
- HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8. ed. São Paulo – Pearson Education do Brasil, 2013.
- MANTILLA, J. N. R.; CARRASCO, E. V. M. Parâmetros geotécnicos de solo residual de gnaiss da cidade de Belo Horizonte, Brasil, por meio de ensaios cone penetration test (CPT) e de laboratório. In: 1st IBERC CONFERENCE ON THEORETICAL AND EXPERIMENTAL MECHANICS AND MATERIALS, 2018, Porto. **Proceedings...** Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2018, p. 777-780. ISBN: 978-989-20-8771-9.
- MARANGON, M. **CAPACIDADE DE CARGA DOS SOLOS**. Unidade 7. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018. 31p.
- NUNES, P. C. C. **Teoria do arco de alvenaria: uma perspectiva histórica**. 2009. 176p. Dissertação (Mestrado em estruturas e construção civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.
- OLIVEIRA, K. R. L.; FIALHO, P. H. Q. **Proposta de um novo projeto de estrutura de contenção do tipo muro de arrimo: estudo de caso em Caratinga - MG**. 2019. 96p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade Doctum de Caratinga, Caratinga, 2019.
- SILVA, A. B.; RANKIN, D. S.; SARDINHA, I. J. M.; ORLANDINI, L. S. **Muros De Arrimo: Estudo Comparativo Entre Alvenaria Estrutural e Concreto Moldado In Loco**. 2019. 97p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Centro Universitário UNIFAAT, Atibaia, 2019.
- SOUZA JÚNIOR, J. G. **Influência da compactação nas condições de estabilidade de muros de peso em gabião**. 2013. 92p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- SUSSEKIND, J. C. **Análise estrutural: Estruturas Isostáticas**. Rio de Janeiro: Globo, 1974. 344p.
- FTOOL, versão 4.00.004. [S.I.]: PUC-Rio, 2018. Disponível em < <http://tecgraf.puc-rio.br/ftool/>>. Acesso em 15/11/2023.

6. SEGUNDA PARTE

Artigo 1 - Planilha eletrônica para análise estrutural de muro de arrimo arqueado O artigo será submetido a revista Caderno de Engenharia de Estruturas (ISSN 1809-5860). O periódico possui qualis B1.

PLANILHA ELETRÔNICA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE MURO DE ARRIMO ARQUEADO

Dayane Caroline de Lima¹, Felipe Salles Pio² & Wisner Coimbra de Paula³

Resumo

Na indústria da construção civil, a escolha do muro de arrimo desempenha um papel fundamental no êxito de uma obra. Este estudo, portanto, tem como objetivo realizar a análise estrutural de um muro de arrimo com uma geometria em arco, otimizando a geometria para se obter a linha de pressão, ou seja, a geometria que possui momento fletor nulo em todos os seus pontos. Para exemplificar, foram adotados os parâmetros físicos de um solo a fim de simular o carregamento de empuxo nas estruturas de contenção avaliadas. Com o intuito de otimizar o processo de análise estrutural, foi desenvolvida uma planilha eletrônica automatizada, a qual facilita a identificação da melhor geometria para o arco. Nessa planilha, foram inseridos os cálculos automatizados do empuxo do solo analisado e dos esforços resultantes internos causados pelo carregamento radial uniformemente distribuído, para diferentes geometrias do arco. Além disso, também foram inseridos os cálculos automatizados para o carregamento linear vertical em um arco que não representa o carregamento do solo, para exemplificação de um arco em linha de pressão. Por fim, chegou-se à conclusão que, dentro das geometrias analisadas, apenas a geometria circular está na linha de pressão com o carregamento radial uniformemente distribuído, o qual representa o carregamento do solo. Para confirmação dos cálculos realizados, utilizou-se o software FTOOL, no qual obteve-se a confirmação da análise estrutural realizada na planilha com uma variação máxima de 2,1kNm entre os momentos do arco circular submetido ao carregamento radial uniformemente distribuído, sendo este a maior variação verificada entre os resultados dos momentos.

Palavras-chave: Linha de pressão; Empuxo; Carregamento de solo; Teoria das Estruturas; Momento fletor nulo; Alvenaria.

ELECTRONIC SPREADSHEET FOR ARCHED RETAINING WALL STRUCTURAL ANALYSIS

Abstract

In the construction industry, the choice of a retaining wall plays a crucial role in the success of a project. This study aims to perform the structural analysis of a retaining wall with an arched geometry, optimizing the geometry to obtain the pressure line, where the bending moment is zero at all points. For illustration, the physical parameters of soil were adopted to simulate the thrust loading on the assessed containment structures. To streamline the structural analysis process, an automated spreadsheet was developed, facilitating the identification of the best arch geometry. This spreadsheet includes automated calculations for the analyzed soil thrust and resulting internal forces caused by uniformly distributed radial loading for different arch geometries. Additionally, automated calculations were included for vertical linear loading on an arch that does not represent soil loading, serving as an example of an arch in a pressure line. In conclusion, among the analyzed geometries, only the circular geometry aligns with the pressure line under uniformly distributed radial loading, representing the soil loading. To confirm the calculations, the FTOOL software was used, confirming the structural analysis conducted in the spreadsheet with a maximum variation of 2.1 kNm between the moments of the circular arch subjected to uniformly distributed radial loading, which is the highest observed variation among moment results.

Keywords: Pressure line; Thrust; Soil loading; Structural theory; Zero bending moment; Masonry

¹ Aluna do 10º período de Engenharia Civil da Universidade Federal de Lavras, dayane.lima@estudante.ufla.br

² Aluno do 8º período de Engenharia Civil da Universidade Federal de Lavras, felipesallespio@gmail.com

³ Professor do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Lavras, wisner.depaula@ufla.br

1 INTRODUÇÃO

Muros de arrimo desempenham um papel vital na engenharia civil, sendo essenciais para conter solos, garantir a estabilidade de encostas e prevenir a erosão. Tendo isso em vista, a escolha do material para construir esses muros é uma decisão crítica, influenciada por diversos fatores, como a resistência necessária, disponibilidade de recursos e impacto ambiental. A construção de estruturas arqueadas em alvenaria tem sido utilizada na engenharia civil devido à sua boa resistência à compressão. Dessa forma, para garantir a estabilidade e durabilidade dessas estruturas, é crucial assegurar que o muro em arco apresente valores de momento fletor nulos em todos os seus pontos. Este requisito é fundamental para a distribuição uniforme das cargas ao longo do arco, evitando possíveis pontos de fragilidade ou concentração de tensões que poderiam comprometer a integridade da construção.

É importante destacar que a escolha da geometria apropriada para o muro de arrimo pode facilitar significativamente o processo de construção. Sendo assim, faz-se necessário desenvolver o estudo da geometria do muro de arrimo para diferentes formas de um arco, buscando obter a geometria que não possui momento fletor agindo na estrutura, também chamada de linha de pressão. Essa abordagem pode potencialmente eliminar a necessidade de reforço em aço, tradicionalmente utilizado para combater forças de tração, já que a geometria em linha de pressão possui apenas esforços de compressão.

A construção de muros de arrimo em formato de arco apresenta vantagens notáveis de resistência a cargas, resultando na economia de materiais empregados. Contudo, é evidente a escassez de estudos sobre essa temática específica. A literatura acadêmica existente oferece análises sobre muros de arrimo em alvenaria, porém, a especificidade de garantir momentos fletores igual a zero em todos os pontos de um muro arqueado não tem sido explorada. Essa ausência de informações representa uma oportunidade para a realização de pesquisas no campo da engenharia estrutural, visando preencher essa lacuna de conhecimento e aprimorar as práticas de construção desse tipo de estrutura.

Nesse contexto, este estudo tem como objetivo principal desenvolver uma planilha eletrônica automatizada capaz de incorporar parâmetros físicos referentes a diferentes tipos de solos e distintas geometrias para muros de arrimo em formato de arco. Esta planilha visa oferecer, de maneira rápida e precisa, diagramas dos esforços internos resultantes das cargas exercidas pelo solo analisado, fornecendo uma avaliação sobre a viabilidade da geometria estudada para a construção de um muro de arrimo em alvenaria.

2 METODOLOGIA

Para o cálculo do empuxo de solo, foram inseridas na planilha eletrônica, inicialmente, as equações do Método de Rankine (MARANGON, 2018). Essas equações dependem da altura do muro de arrimo, do ângulo de atrito, coesão e peso específico do solo, permitindo calcular o referido esforço aplicado ao muro.

A Equação 1 determina o coeficiente de empuxo ativo e a Equação 2 estabelece o empuxo ativo conforme descrito por Marangon (2018):

$$K_a = \frac{1 - \text{sen}\phi}{1 + \text{sen}\phi} \quad (1)$$

$$E_a = \frac{K_a \cdot \gamma \cdot H^2}{2} - 2 \cdot c \cdot H \cdot \sqrt{K_a} \quad (2)$$

Na qual:

K_a é o coeficiente de empuxo ativo;

ϕ é o ângulo de atrito do solo, em $^{\circ}$;

E_a é o empuxo ativo, em kPa;

γ é o peso específico do solo, em kN/m³;

H é a altura do desnível do solo, em metros.

Para exemplificar o carregamento do solo, escolheu-se um estudo geotécnico que investiga a viabilidade de um projeto de muro de arrimo na cidade de Caratinga, em Minas Gerais, realizado por Oliveira e Filho (2019). Os parâmetros físicos adotados foram:

- Ângulo de Atrito $\phi = 40^{\circ}$
- Coesão $c = 0 \frac{kN}{m^2}$
- Peso Específico do solo $\gamma = 19 \frac{kN}{m^3}$

Ademais, foi adotada uma altura do muro de arrimo de 5 metros.

É importante destacar que este projeto está excluindo a consideração da drenagem no muro de arrimo. No entanto, é amplamente reconhecido que a drenagem desempenha um papel crucial no êxito de uma obra de muro de arrimo. É relevante ressaltar também que, para a determinação do empuxo causado pelo solo, não está sendo considerado sobrecarga, empuxo passivo ou nível d'água.

Em seguida, foi analisado como o solo impacta na estrutura. A carga do solo é direcionada perpendicularmente a cada ponto do eixo do muro de arrimo, resultando em uma força uniformemente distribuída ao longo do arco, com inclinações diferentes em cada ponto, no sentido radial, conforme ilustrado nas Figuras 1 e 2, e, para análise na planilha desenvolvida, foi decomposta essa força nas direções vertical e horizontal.

O arco possui dois apoios do segundo gênero, um em cada extremidade, formando duas reações de apoio na horizontal e duas na vertical. Além disso, o arco foi considerado triarticulado, com uma rótula no topo. Sendo assim, a estrutura analisada é isostática.

Foram elaboradas equações, por meio do método das seções, para obtenção do momento fletor, esforço cortante e esforço normal, em função do carregamento causado pelo solo, da flecha do arco, do vão entre os apoios e de uma seção genérica do arco na qual se deseja obter esses esforços. Estas equações foram inseridas na planilha eletrônica para fornecer os valores dos esforços internos em qualquer ponto do arco. Este procedimento possibilitou a representação gráfica dos diagramas dos esforços internos em relação ao eixo da estrutura proposta, onde o arco é apresentado em um gráfico dividido em 107 pontos conectados por 106 retas.

Neste trabalho são apresentadas duas distintas geometrias para o muro de arrimo submetidas à carga do solo: uma de formato circular e outra elipsoidal, para que seja analisada a viabilidade estrutural de cada uma. Portanto, para exemplificação do estudo, foi estabelecida uma geometria de arco circular com raio igual a 2,5 metros (ilustrado na Figura 1a), e uma geometria de arco elíptico que possui vão entre apoios de 5 metros e altura total do arco de 5 metros, conforme ilustrado na Figura 1b.

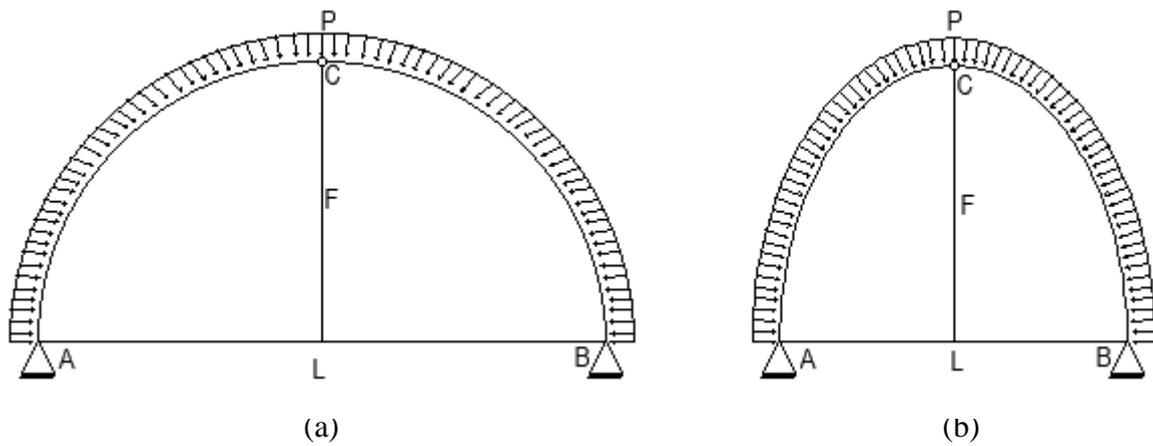


Figura 1 - Carregamento radial uniformemente distribuído para a geometria circular (a) e elíptica (b).

Adicionalmente, a partir das formulações propostas por Sussekind (1981), foram inseridas as formulações na planilha eletrônica para determinar a geometria de um arco qualquer em linha de pressão, sujeito a um carregamento linear vertical que, embora não represente o carregamento originado por um solo, permite a exemplificação prática e didática de um arco em linha de pressão, conforme ilustrado na Figura 2. Portanto, ao introduzir na planilha os parâmetros do vão entre os apoios e a flecha do arco, esses valores são automaticamente ajustados para se obter uma geometria em linha de pressão. Tais dados de entrada na planilha são então utilizados para gerar os diagramas dos esforços internos. Além disso, ao analisar uma posição qualquer na estrutura, em relação ao eixo das abscissas, a planilha apresentará os valores dos esforços internos correspondentes a essa seção específica do arco.

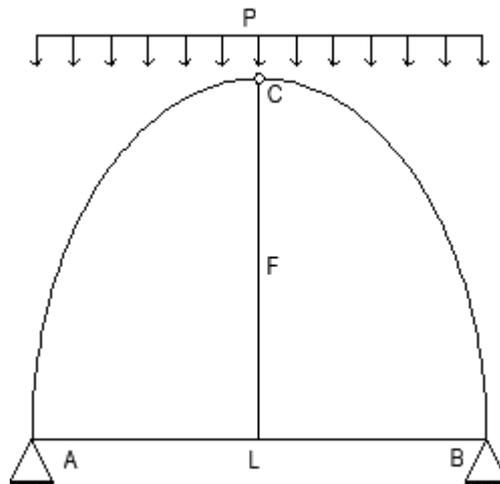


Figura 2 - Carregamento linear vertical uniformemente distribuído no arco de geometria elíptica.

No contexto deste estudo, para o arco com o carregamento linear vertical, como exemplo foram inseridos valores iniciais de vão entre apoios de 5 metros e flecha de 5 metros. Esses valores são ajustados pela planilha para determinar a geometria desejada. O eixo do arco foi apresentado em um gráfico dividido em 101 pontos, ligados por 100 retas, a fim de se obterem os diagramas mencionados.

Todas as considerações aqui apresentadas para a análise estrutural de um muro de arrimo por meio da planilha eletrônica também foram replicadas no *software* FTOOL, e os resultados foram comparados.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Muro de Arrimo

O muro de arrimo, conhecido como muro de contenção, é uma estrutura crucial na engenharia civil projetada para suportar a pressão lateral do solo e evitar deslizamentos em terrenos inclinados ou elevados (Oliveira, Cavalcanti, Ribeiro, 2021).

O principal objetivo de um muro de arrimo é proporcionar estabilidade ao terreno, evitando que o solo se desloque devido à sua inclinação natural ou a cargas adicionais, como a construção de edifícios ou estradas. Esses muros são projetados levando em consideração as características do solo, a altura do muro, a pressão lateral esperada e outros fatores geotécnicos relevantes (Souza, 2013).

Antes da construção, é necessário realizar estudos geotécnicos abrangentes para compreender as propriedades do solo, incluindo capacidade de suporte, coesão e ângulo de atrito (Oliveira e Fialho, 2019). Com base nesses estudos, são realizados cálculos de estabilidade para definir as dimensões e características estruturais do muro, visando a resistência às cargas e a prevenção de deslizamentos ou colapsos.

Existem diversos tipos de muros de arrimo e a escolha depende das características do solo, altura do muro e requisitos do projeto (Oliveira, Cavalcanti, Ribeiro, 2021). Além disso, a drenagem adequada e a geometria correta, incluindo inclinação e espessura, são fundamentais para a eficácia da estrutura, enquanto a fundação desempenha um papel importante na distribuição uniforme das cargas no solo (Oliveira e Fialho, 2019).

3.2 Linhas de pressão

As linhas de pressão de um arco são representações imaginárias das forças de compressão exercidas pelo arco sobre sua estrutura de suporte. Estas linhas, que possuem uma natureza curva, geralmente convergem no ponto mais baixo do arco, conhecido como intradorso (Nunes, 2009).

Quando um arco é submetido a uma carga vertical ou empuxo lateral, ele transmite essas forças às extremidades do arco e à fundação. As linhas de pressão são então desenhadas para ilustrar como essas forças estão distribuídas ao longo da estrutura, indicando os pontos de máxima compressão e como ela se distribui dentro do arco (Cunha, 2014).

A curvatura das linhas de pressão é uma característica inerente à natureza da compressão exercida pelo arco, desempenhando um papel crucial na estabilidade e resistência estrutural. Esta compressão empurra as extremidades do arco contra os apoios laterais, impedindo qualquer possível colapso (Cunha, 2014).

É importante destacar que as linhas de pressão são influenciadas por vários fatores, incluindo a geometria do arco, a carga aplicada e as propriedades dos materiais. A forma do arco, seu raio de curvatura, a espessura da estrutura e a rigidez dos materiais desempenham um papel significativo na distribuição das linhas de pressão (Nunes, 2009).

A compreensão das linhas de pressão é fundamental no projeto e na análise estrutural de arcos, auxiliando na determinação dos esforços internos, na seleção apropriada dos materiais e na avaliação da estabilidade da estrutura.

3.3 Empuxo

O empuxo de terra, uma força resultante da pressão do solo contra estruturas de contenção, é um fenômeno crítico na engenharia geotécnica e estrutural. Originado do peso natural do solo e da redistribuição das cargas durante processos construtivos, o empuxo de terra pode afetar significativamente a estabilidade das estruturas.

O empuxo de terra é um fator determinante na análise de estruturas de contenção, com a pressão resultante podendo causar deformações e desestabilização, se não gerenciada adequadamente.

Gerscovich e colaboradores (2016) contribuíram ao distinguir dois tipos de empuxo de terra: empuxo ativo e empuxo passivo. O empuxo ativo ocorre quando o solo exerce pressão na estrutura, enquanto o empuxo passivo é quando a estrutura exerce pressão no solo. Essa diferenciação é essencial para uma análise precisa e para orientar o projeto e construção.

O método de Rankine, reconhecido como um dos fundamentos na análise do empuxo de terra em estruturas de contenção, é sustentado por simplificações importantes, como enfatizado por Marangon (2009), as quais abrangem diversos aspectos, incluindo a suposição de solos granulares e não coesivos, a consideração de superfícies de deslizamento planas e inclinadas, e a presunção de uma distribuição uniforme de pressão ao longo dessas superfícies.

Ainda mais, Marangon (2018) explica que ao se dispor dos resultados do ensaio SPT, é viável estabelecer correlações que permitam definir diversos parâmetros relacionados à resistência e deformabilidade do solo. Através da Tabela 1, o autor ilustra uma série de parâmetros vinculados à resistência e deformabilidade do solo, todos em função dos valores obtidos no ensaio SPT.

Tabela 1 - Parâmetros de resistência e de deformabilidade em função do SPT. Fonte: Marangon (2018)

Areia e Solos Arenosos			
Compacidade	$\gamma(t/m^3)$	$C(t/m^2)$	ϕ°
Fofa	1,6	0	25-30
Pouca compacta	1,8	0	30-35
Medianamente compacta	1,9	0	35-40
Compacta	2,0	0	40-45
Muito compacta	> 2,0	0	> 45
Argila e solos Argilosos			
Compacidade	$\gamma(t/m^3)$	$C(t/m^2)$	ϕ°
Muito mole	1,3	0 – 1,2	0
Mole	1,5	1,2 – 2,5	0
Média	1,7	2,5 – 5,0	0
Rija	1,9	5,0 – 15,0	0
Dura	> 2,0	> 15,0	0

3.4 Formulação da metodologia utilizada no trabalho

3.4.1 Empuxo

Utilizando o método de Rankine, existem dois tipos distintos de empuxo, como discutido por Marangon (2018) o empuxo ativo, utilizando as equações 1 e 2, e o empuxo passivo, que não será utilizado para este estudo em questão. Em ambos os casos, foi desconsiderada a poropressão.

3.4.2 Elipse

Dentre os diferentes formatos possíveis para o arco, foi analisado o arco elíptico. Tendo isso em vista, segundo Gómez, Frensel e Crissaff (2013), a metade superior de uma elipse, demonstrada na Figura 3, pode ser obtida com a seguinte equação (3):

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a] \quad (3)$$

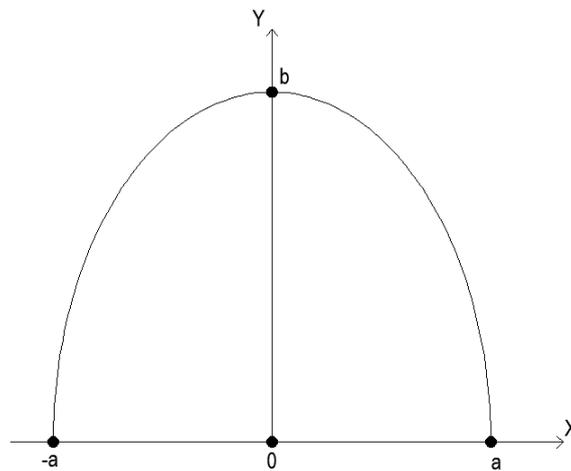


Figura 3 – Parte superior de uma elipse.

3.4.3 Determinação da geometria em linha de pressão para um arco com carregamento linear vertical uniformemente distribuído

As equações apresentadas por Sussekind (1981) determinam a geometria ideal de um arco para o carregamento linear vertical, ilustrado na Figura 3, com base no valor da carga e nos valores iniciais do vão entre os apoios e da flecha do arco. O autor simplifica significativamente os cálculos, pois segue um método análogo ao de uma viga bi apoiada.

As equações utilizadas para a determinação da altura de cada ponto do arco são:

$$V_A = \frac{P \cdot L}{2} \quad (4)$$

$$M_g = \frac{P \cdot L^2}{8} \quad (5)$$

$$H_a = \frac{M_g}{h'} \quad (6)$$

$$Q_p = H_a - \frac{P \cdot X}{2} \quad (7)$$

$$M_p = \frac{(V_a + Q_p) \cdot X}{2} \quad (8)$$

$$Y = \frac{H_a}{M_p} \quad (9)$$

Sendo que:

V_a é o valor hipotético da reação vertical no apoio A, em kN;

P é o valor da carga uniformemente distribuída, em kN/m;

D' é o valor inicial do vão entre os apoios do arco, em metros;

M_g é o momento fletor máximo na viga de substituição, em kNm;
 H_a é o valor hipotético da reação horizontal no apoio A, em kN;
 h' é o valor inicial da flecha do arco;
 Q_p é o esforço cortante no ponto considerado (ponto "X"), na viga de substituição, em kN;
 X é a distância até o ponto genérico "T", em relação ao eixo das abscissas, em metros;
 M_p é o momento fletor no ponto "X" analisado, na viga de substituição, em kNm;
 Y é altura do ponto analisado, em metros.

3.5 Considerações do carregamento do solo

Para realizar a análise de um solo, devem ser consideradas cargas aplicadas em duas direções, seguindo a teoria de Rankine para análises bidimensionais no cálculo do empuxo do solo (Marangon, 2018). Em aplicações geotécnicas, essa abordagem de duas direções é suficiente para modelar com precisão o comportamento do solo em estruturas como fundações, paredes de contenção e taludes.

4 RESULTADO E DISCUSSÃO

Como mencionado anteriormente, foram consideradas diferentes geometrias para distintos tipos carregamentos, a fim de se avaliarem os esforços internos na estrutura em arco. O carregamento radial uniformemente distribuído representa o esforço causado pelo solo na estrutura e, para a avaliação da linha de pressão com tal carregamento, foram consideradas estruturas de arco circular e elíptica. Por outro lado, para o carregamento linear vertical (que não corresponde às forças provenientes do solo) foi determinada uma geometria de arco que está em linha de pressão.

4.1 Arco com carregamento radial uniformemente distribuído

Para a simplificação dos cálculos, um elemento infinitesimal da estrutura foi analisado, mostrado na Figura 4, para determinar como o carregamento radial atua na estrutura com suas componentes horizontal e vertical. Dessa maneira, a partir das equações de equilíbrio, obteve-se a Equação 10.

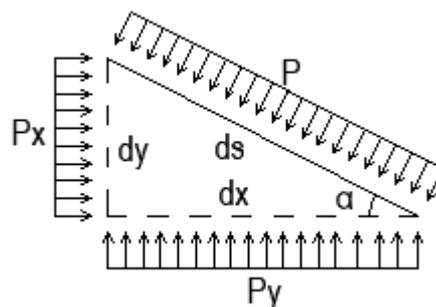


Figura 4 – Elemento infinitesimal da estrutura analisada 'ds'.

$$P_x = P \quad \text{e} \quad P_y = P \quad (10)$$

Desta forma, conclui-se que a carga radial uniformemente distribuída aplicada nos arcos circular e elíptico, apresentado anteriormente nas Figuras 1a e 1b, age de mesmo modo que as cargas lineares representadas nas Figuras 5a e 5b, respectivamente. Esse artifício matemático para a consideração das cargas foi necessário para simplificar as formulações com o método das seções para a determinação dos esforços internos.

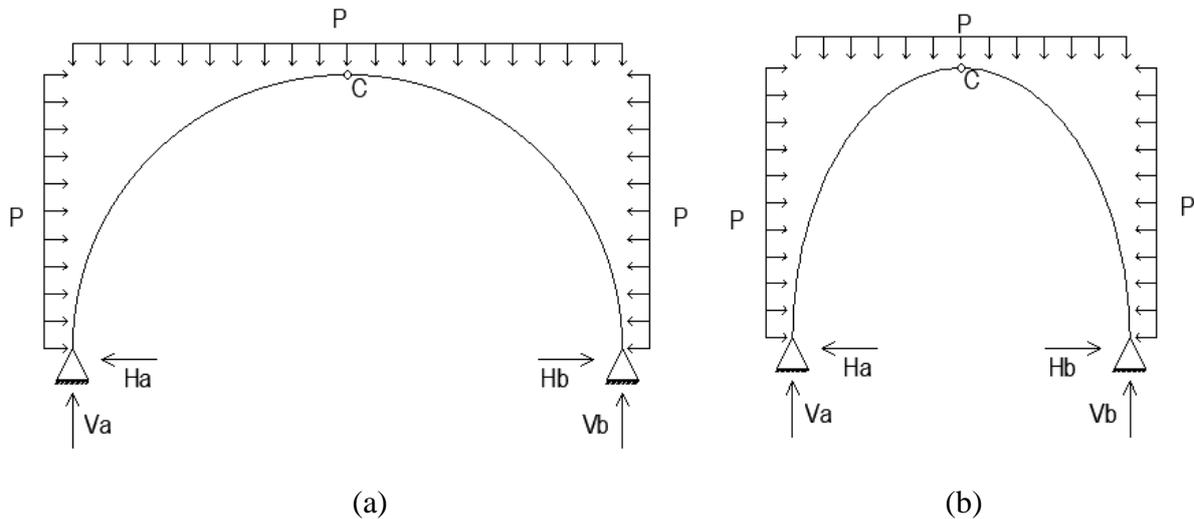


Figura 5 - Carga representativa referente ao carregamento radial uniformemente distribuído na geometria circular(a) e na elíptica (b).

As equações foram desenvolvidas a partir da análise de um ponto genérico 'T', tanto para a geometria circular, representado na Figura 6a, quanto para a elíptica, Figura 6b. Nestas, estão demonstradas as distâncias horizontais "X" e vertical "Y", assim como os ângulos θ e α .

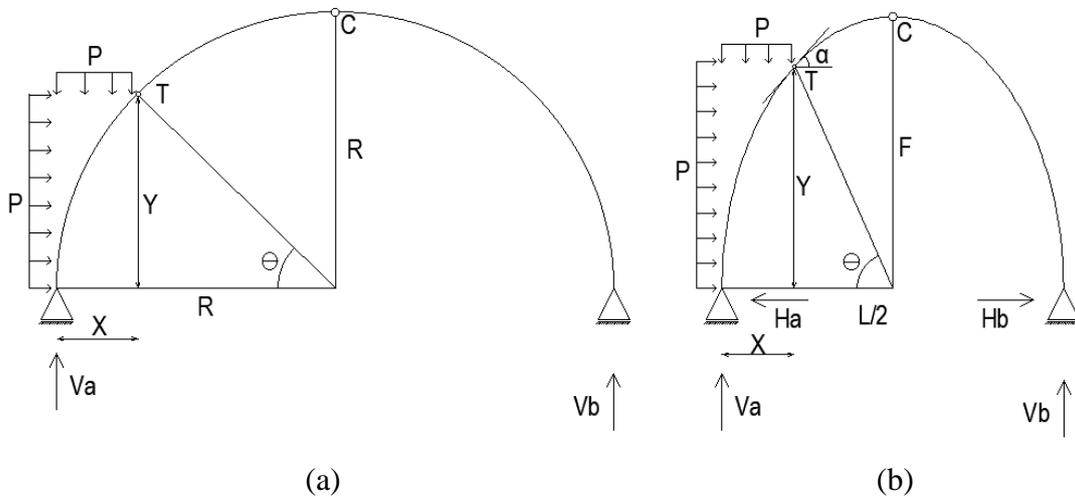


Figura 6 – Ponto genérico T para a geometria circular (a) e elíptica (b).

O ângulo α foi obtido a partir da reta tangente ao ponto genérico analisado.

Com a definição do carregamento, o cálculo das reações de apoio foi realizado de acordo com as equações de equilíbrio. A seguir, estão as Equações 11, 12 e 13 dos esforços internos presentes na geometria circular em um ponto genérico "T".

$$M_T = \frac{P \cdot R^2}{2} - \frac{P \cdot R^2}{2} = 0 \quad (11)$$

$$Q_T = \frac{P \cdot L}{2} \cdot \text{sen}\theta - P \cdot R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta - P \cdot R \cdot \text{sen}\theta + P \cdot R \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta = 0 \quad (12)$$

$$N_T = -P \cdot R \quad (13)$$

Na qual:

M_T é o valor do momento fletor em qualquer ponto do arco, em kNm;

Q_T é o valor do esforço cortante em qualquer ponto do arco, em kN;

N_T é o valor do esforço normal em qualquer ponto do arco, em kN.

Os esforços internos para a geometria elíptica em um ponto genérico "T" são demonstrados nas Equações 14, 15 e 16.

$$M_T = V_A \cdot x + H_A \cdot \left(\frac{2 \cdot h}{L} \cdot \sqrt{x - \frac{L}{2}} \right) - P \cdot \frac{x^2}{2} - P \cdot \frac{\left(\frac{2 \cdot h}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{L}{2} \right)^2} \right)^2}{2} \quad (14)$$

$$Q_T = V_A \cdot \cos \alpha + H_A \cdot \operatorname{sen} \alpha - P \cdot Y \cdot \operatorname{sen} \alpha - P \cdot X \cdot \cos \alpha \quad (15)$$

$$N_T = -V_A \cdot \operatorname{sen} \alpha + H_A \cdot \cos \alpha - P \cdot Y \cdot \cos \alpha + P \cdot X \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (16)$$

Sendo que:

x é a distância da extremidade esquerda até qualquer ponto do arco, em relação ao eixo das abscissas, em metro;

y é a distância da extremidade esquerda até qualquer ponto do arco, em relação ao eixo das ordenadas, em metro;

α é o ângulo que é formado entre a reta tangente do ponto analisado e a horizontal (em °).

A Tabela 2 apresenta os dados de entrada na planilha eletrônica desenvolvida para o cálculo do empuxo, empregando o Método de Rankine (Marangon, 2018), tais como o ângulo de atrito, coesão do solo, altura total e peso específico, conforme detalhado anteriormente no Item 2. Nesta planilha apresentam-se também os resultados, tais como as parcelas do empuxo referentes ao ângulo de atrito e à coesão, e a posição da força resultante, são calculadas pela planilha, obtendo-se, com isso, o esforço total do empuxo, que representa o carregamento uniformemente distribuído no arco.

Tabela 2 - Entrada de dados para o cálculo do empuxo na planilha eletrônica e seus respectivos resultados utilizando o Método de Rankine (Marangon, 2018).

Ângulo de Atrito	φ (°)	40,0
Coesão	c (kPa)	0,00
Altura total	h (m)	5,00
Peso Específico	γ (kN/m ³)	19,00
Coeficiente de empuxo	K_a	0,217
Empuxo ativo 1 (ângulo de atrito)	E_{a1} (kN/m)	51,643
Empuxo ativo 2 (coesão)	E_{a2} (kN/m)	0,000
Posição da resultante do empuxo 1 e 2 a partir da base do arrimo	Y (m)	1,667
Empuxo total do solo	E_s (kN/m)	51,643

A Tabela 3, a seguir, apresenta os resultados dos esforços internos na estrutura, com base nos valores de entrada da flecha e do vão entre apoios para geometrias circular e elíptica, do valor do carregamento do solo (obtido por meio da Tabela 2) e da posição de um ponto genérico (x) em relação ao eixo das abscissas, igual a 1,00 metros. Com essas informações, a planilha fornece os valores da altura do ponto analisado (y), do ângulo formado entre a horizontal e a reta que liga o centro do arco ao ponto analisado

(θ), do ângulo formado entre a reta tangente do ponto analisado e a horizontal (α) e das reações nos apoios na estrutura.

Tabela 3 - Resultados obtidos para o carregamento radial uniformemente distribuído para a geometria elíptica e circular obtido pela planilha eletrônica.

Parâmetros	Circular	Elíptica
Empuxo do Solo P (kN/m)	51,643	51,643
Flecha - h (m)	2,5	5
Comprimento do vão - L (m)	5	5
Comprimento horizontal do ponto genérico - x (m)	1,000	1,000
Esforço vertical do apoio A - V_a (kN)	129,107	129,107
Esforço vertical do apoio B - V_b (kN)	129,107	129,107
Esforço horizontal do apoio A - H_a (kN)	0,000	96,830
Esforço horizontal do apoio B - H_b (kN)	0,000	96,830
Altura do ponto genérico - y (m)	2,000	4,000
Ângulo formado - θ ($^\circ$)	53,130	69,444
Ângulo formado - α ($^\circ$)	36,870	56,310
Momento fletor no ponto genérico - M_T (kNm)	0,000	77,464
Esforço cortante no ponto genérico - Q_T (kN)	0,000	-48,340
Esforço normal no ponto genérico - N_T (kN)	-129,107	-125,327

A planilha eletrônica também fornece os valores do momento fletor, esforço normal e esforço cortante em cada ponto, mostrados na Tabela 3, por meio das equações mencionadas para as geometrias circulares e elípticas.

Nas Figuras 7 (a), 7 (b) e 7 (c), estão representados o formato do arco circular (em azul), os diagramas dos esforços internos (em laranja), sendo eles, o esforço cortante, o momento fletor e o esforço normal, com base nos valores de entrada mencionados na Tabela 3. Da mesma forma, nas Figuras 8 (a), 8 (b) e 8 (c), estão representados o formato do arco elíptico, em azul, e seus respectivos diagramas de esforços internos, em laranja.

Para a comparação e validação dos resultados obtidos via planilha eletrônica, optou-se pela utilização do *software* FTOOL. Nesse processo, foram inseridas as mesmas coordenadas cartesianas dos 107 pontos utilizados para representação dos esforços internos na planilha. É importante destacar que esse *software* é uma ferramenta destinada à análise de estruturas lineares, o que levou à necessidade de uma aproximação para a representação do arco, transformando-o em 106 segmentos lineares.

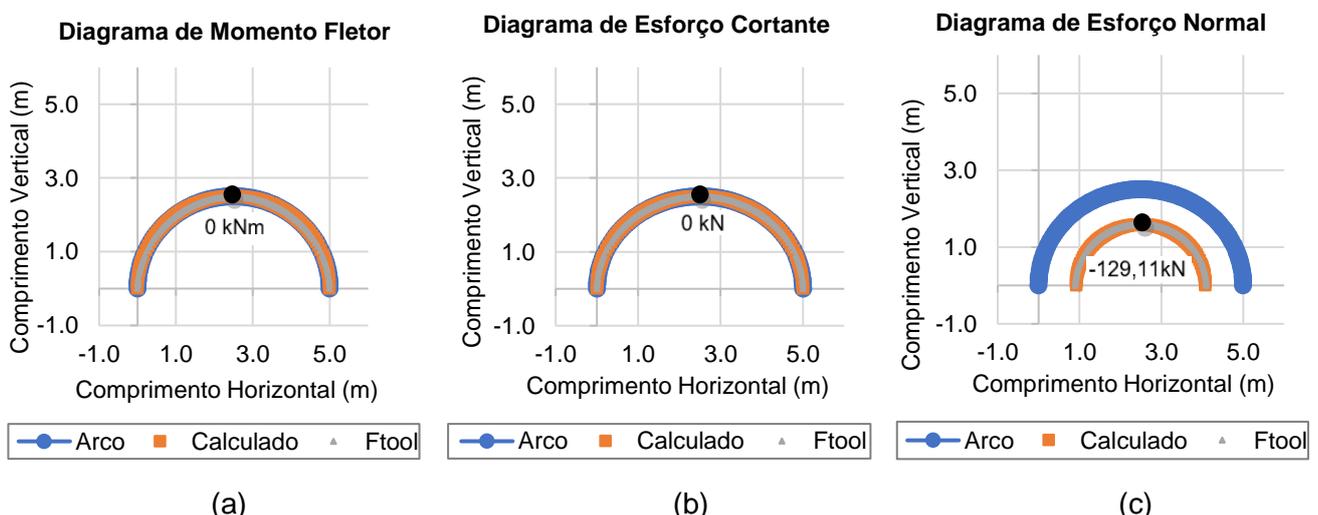


Figura 7 - Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo *software* FTOOL, com os pontos em destaque demonstrando os valores obtidos na planilha mais significativo dos respectivos diagramas, para a geometria circular (a) diagrama de momento fletor; (b) diagrama de esforço cortante; (c) diagrama de esforço normal.

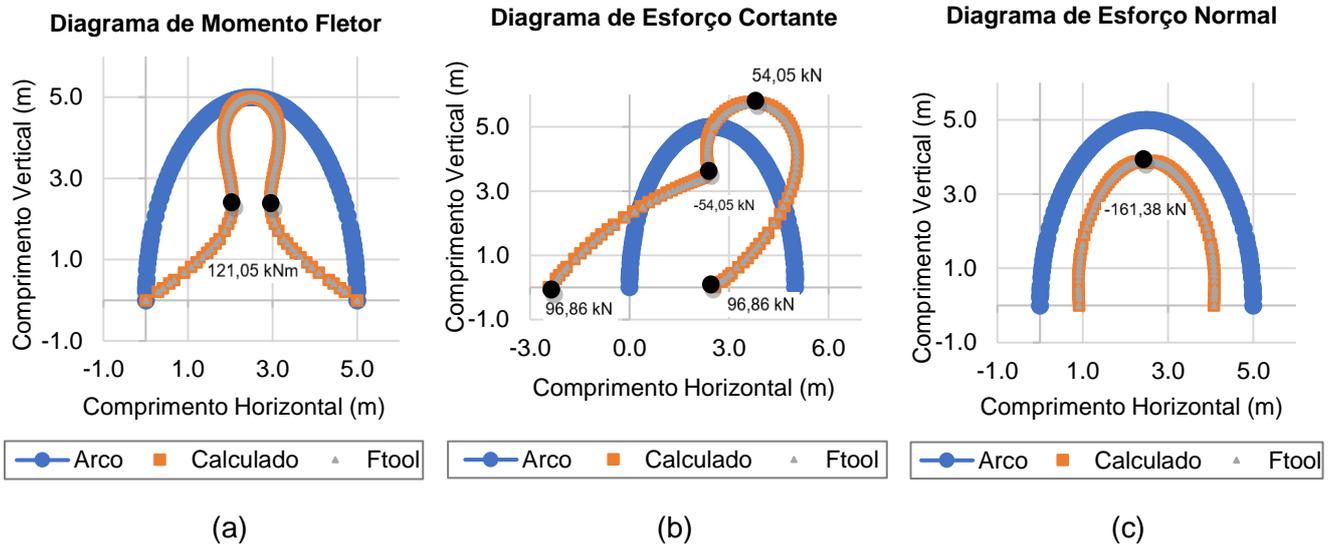


Figura 8 - Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo *software* FTOOL, com os pontos em destaque demonstrando os valores obtidos na planilha mais significativo dos respectivos diagramas, para a geometria elíptica (a) diagrama de momento.

Comparando os resultados para o arco circular obtidos pela planilha eletrônica com o *software* FTOOL, observa-se que as curvas resultantes do momento fletor, mostradas na Figura 7a, são muito semelhantes, sendo que na planilha obteve-se 0 kNm em todos os pontos e o *software* apresentou uma variação de 0 a 2,1 kNm, sendo que esse valor para momento é desprezível. Portanto, evidencia-se o funcionamento da planilha desenvolvida para análise de estruturas arqueadas e, no presente estudo da circular com carregamento radial uniformemente distribuído conclui-se que está em linha de pressão.

Os resultados obtidos para o esforço cortante na estrutura circular, representado na Figura 7b, também apresentaram uma alta precisão, não tendo nenhuma variação entre a planilha e o FTOOL. O esforço normal, ilustrado na Figura 7c, obteve uma grande aproximação, obtendo erros percentuais variando de 0,2% a 2,5%. Essas diferenças observadas ocorreram por conta das considerações de lançamento da estrutura no FTOOL, pois este *software* analisa estruturas lineares e, neste estudo, procurou-se aproximar tais estruturas lineares à um arco. A concordância dos resultados indica a precisão dos cálculos realizados, evidenciando a confiabilidade dos valores obtidos pela planilha eletrônica.

Ademais, comparando os resultados do arco elíptico obtidos pela planilha eletrônica com o *software* FTOOL, notou-se que os diagramas resultantes também foram muito próximos. Para o momento fletor, mostrado na Figura 8a, obtiveram-se diferenças percentuais variando de 0% a 2,2% entre os resultados. Para o esforço cortante, demonstrado na Figura 8b, observou-se uma discrepância entre as curvas variando de 0 kN a 3,7 kN. Já o esforço normal, ilustrado na Figura 8c, apresentou uma variação de 0% a 1,9%. Essas diferenças são resultantes da limitação do *software* utilizado para comparação. Ressalta-se que algumas das análises foram realizadas considerando a variação dos resultados, uma vez que a utilização da porcentagem não era apropriada devido à proximidade dos números em torno de 0, o que resultaria em um aumento significativo na porcentagem.

Por fim, foi comprovado que a representação do carregamento radial uniformemente distribuído (Figura 1) e empregado nos cálculos dos esforços na estrutura via FTOOL é equivalente aos carregamentos lineares horizontal e vertical empregados nos cálculos desenvolvidos na planilha eletrônica, tendo em vista a equivalência dos resultados acima apresentado.

4.2 Ajuste de um arco qualquer com carregamento linear vertical uniformemente distribuído para uma geometria em linha de pressão

Da mesma forma que foi feita no Item 4.1, a determinação dos esforços internos de um carregamento linear em um arco, como ilustrado na Figura 2, foi feita por meio do método das seções. As equações deduzidas estão demonstradas a seguir:

$$M_T = -V_A \cdot x + H_A \cdot y - P \cdot \frac{x^2}{2} \quad (17)$$

$$Q_T = V_A \cdot \cos \alpha + H_A \cdot \operatorname{sen} \alpha - P \cdot X \cdot \cos \alpha \quad (18)$$

$$N_T = -V_A \cdot \operatorname{sen} \alpha + H_A \cdot \cos \alpha + P \cdot X \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (19)$$

Sendo que:

M_T é o valor do momento fletor em qualquer ponto do arco, em kNm;

x é a distância do ponto genérico, em relação ao eixo das abscissas, em metros;

y é a distância da extremidade esquerda até o ponto genérico, em relação ao eixo das ordenadas, calculada por meio das equações descritas no Item 3.4.3, em metros;

Q_T é o valor do esforço cortante em qualquer ponto do arco, em kN;

α é o ângulo que é formado entre a reta tangente do ponto analisado e a horizontal (em °);

N_T é o valor do esforço normal em qualquer ponto do arco, em kN.

A Tabela 4, apresentada a seguir, apresenta os resultados dos esforços internos na estrutura, com base nos valores de entrada da flecha e do vão entre apoios para uma geometria qualquer, sendo adotados valores de 5 metros para ambos, do valor do carregamento do solo (obtido por meio da Tabela 2) e da posição de um ponto genérico (x) em relação ao eixo das abscissas, igual a 1,00 metros. Com essas informações, a planilha fornece os valores ajustados do vão entre apoios e da altura do ponto analisado (y) também ajustado, do ângulo formado entre a horizontal e a reta que liga o centro do arco ao ponto analisado (θ), do ângulo formado entre a reta tangente do ponto analisado e a horizontal (α) e das reações nos apoios na estrutura.

Tabela 4 - Resultados obtidos para o carregamento vertical uniformemente distribuído para uma geometria de arco qualquer obtido pela planilha eletrônica.

Carregamento P (kN/m)	51,643
Flecha inicial - h' (m)	5
Comprimento do vão inicial - L' (m)	5
Comprimento horizontal do ponto genérico - x (m)	1,000
Flecha ajustada - h (m)	3,906
Comprimento do vão ajustado - L (m)	6,250
Esforço vertical do apoio A - V_a (kN)	161,383
Esforço vertical do apoio B - V_b (kN)	161,383
Esforço horizontal do apoio A - H_a (kN)	-64,553
Esforço horizontal do apoio B - H_b (kN)	-64,553
Altura do ponto genérico - y (m)	2,100
Ângulo formado - α (°)	59,534
Momento fletor no ponto genérico - M_T (kNm)	0,000
Esforço cortante no ponto genérico - Q_T (kN)	0,000
Esforço normal no ponto genérico - N_T (kN)	-127,319

Nas Figuras 9 (a), 9 (b) e 9 (c), estão representados o formato do arco em linha de pressão (em azul), os diagramas dos esforços internos (em laranja), sendo eles, o esforço cortante, o momento fletor e o esforço normal, plotados com 101 pontos, calculados por meio das equações deduzidas acima, com base nos valores de entrada mencionados na Tabela 4. Além disso, em cinza estão os valores obtidos por meio do *software* FTOOL.

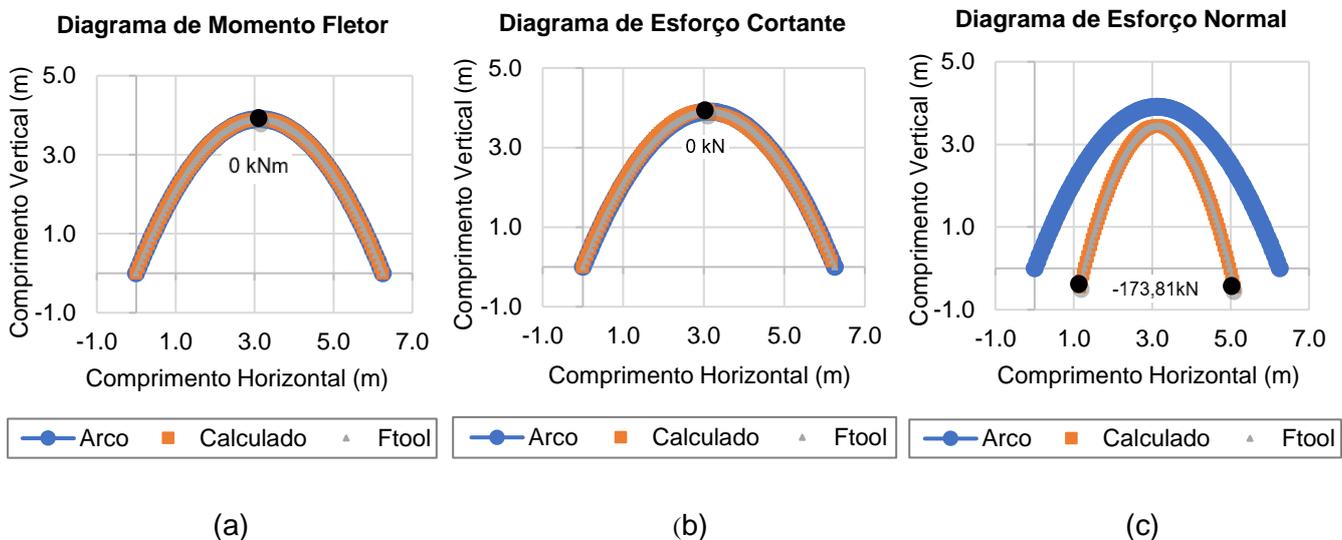


Figura 9 – Comparação entre os resultados dos diagramas de esforços internos calculados pelo método das seções e os resultados gerados pelo *software* FTOOL para um carregamento linear vertical (a) diagrama de momento fletor; (b) diagrama de esforço cortante; (c) diagrama de esforço normal.

Analisando os resultados dos diagramas da planilha eletrônica com os do *software* FTOOL, nota-se que estão muito próximos, sendo que os resultados do momento fletor e esforço cortante não apresentaram nenhuma variação, já o esforço normal teve uma variação de no máximo 0,1%. Nesse contexto, tendo em mente que o FTOOL analisa pequenos segmentos lineares inclinados, as discrepâncias identificadas em relação à planilha eletrônica foram insignificantes. Isso, por sua vez, confirma os cálculos realizados e sustenta a conclusão de que a automação desenvolvida na planilha eletrônica apresenta resultados confiáveis para a análise de estruturas arqueadas para uso como muros de arrimo.

5 CONCLUSÃO

Como mencionado anteriormente, o sucesso de um muro de arrimo arqueado requer a adoção de uma geometria na qual o momento fletor seja nulo em qualquer ponto, sendo o único esforço atuante o de compressão. Por essa razão, a determinação da linha de pressão, considerando o carregamento, comprimento e flecha estabelecidos, é de suma importância para que não haja ruptura. Tendo isso em vista, as geometrias analisadas que estão em linha de pressão é a circular com carregamento radial uniformemente distribuído e o arco com carregamento vertical uniformemente distribuído.

Entretanto, para ser considerado o carregamento de um solo, ele necessariamente precisa ser radial uniformemente distribuído, pois os solos atuam em duas direções. Dessa maneira, a única geometria que está em linha de pressão e que considera corretamente o carregamento de um solo é a circular.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho, que é o desenvolvimento de uma planilha eletrônica para a análise estrutural da melhor geometria de um muro de arrimo arqueado em linha de pressão, foi alcançado, tendo em vista que a análise dos diagramas de esforços foi validada via *software* FTOOL.

Como foi descrito previamente, neste estudo a drenagem foi omitida para a simplificação dos cálculos, mas é recomendável sua inclusão em pesquisas futuras. Ademais, o dimensionamento dos apoios, como pilares, não foi abordado, sendo sugerido para estudos subsequentes. Também é relevante investigar a seleção de materiais de alvenaria e estratégias para garantir a segurança na construção.

Além disso, a análise utilizando *software* de elementos finitos pode enriquecer o entendimento do comportamento estrutural da geometria de arco em diferentes situações.

6 REFERÊNCIAS

CUNHA, J. A. A. **Construção de Pontes em Arco com tirantes provisórios com controlo ativo**. 2014. 214p. Dissertação (Mestrado em Ciências da engenharia e tecnologias) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Universidade do Porto, Portugal, 2014.

GERSCOVICH, D., **Estabilidade de Taludes**, 2ª Ed. Oficina de Textos, 2016.

GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. S. **Geometria Analítica e Cálculo Vetorial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileiro de Matemática, 2013.

HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8. ed. São Paulo – Pearson Education do Brasil, 2013.

MANTILLA, J. N. R.; CARRASCO, E. V. M. Parâmetros geotécnicos de solo residual de gnaiss da cidade de Belo Horizonte, Brasil, por meio de ensaios cone penetration test (CPT) e de laboratório. In: 1st IBERC CONFERENCE ON THEORETICAL AND EXPERIMENTAL MECHANICS AND MATERIALS, 2018, Porto. **Proceedings...** Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2018, p. 777-780. ISBN: 978-989-20-8771-9.

MARANGON, M. **CAPACIDADE DE CARGA DOS SOLOS**. Unidade 7. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018. 31p.

NUNES, P. C. C. **Teoria do arco de alvenaria: uma perspectiva histórica**. 2009. 176p. Dissertação (Mestrado em estruturas e construção civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

OLIVEIRA, K. R. L.; FIALHO, P. H. Q. **Proposta de um novo projeto de estrutura de contenção do tipo muro de arrimo: estudo de caso em Caratinga - MG**. 2019. 96p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade Doctum de Caratinga, Caratinga, 2019.

SILVA, A. B.; RANKIN, D. S.; SARDINHA, I. J. M.; ORLANDINI, L. S. **Muros De Arrimo: Estudo Comparativo Entre Alvenaria Estrutural e Concreto Moldado In Loco**. 2019. 97p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Centro Universitário UNIFAAT, Atibaia, 2019.

SOUZA JÚNIOR, J. G. **Influência da compactação nas condições de estabilidade de muros de peso em gabião**. 2013. 92p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

SUSSEKIND, J. C. **Análise estrutural: Estruturas Isostáticas**. Rio de Janeiro: Globo, 1981. 344p.

FTOOL, versão 4.00.004. [S.I.]: PUC-Rio, 2018. Disponível em < <http://tecgraf.puc-rio.br/ftool/>>. Acesso em 15/11/2023.