UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

THIAGO BARROS MESQUITA

CÁLCULO FRACIONÁRIO: UM ESTUDO INICIAL

LAVRAS – MG

2023

THIAGO BARROS MESQUITA

CÁLCULO FRACIONÁRIO: UM ESTUDO INICIAL

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Lavras, como requisito necessário para obtenção do grau de Lincenciatura em Matemática.

Professora Graziane Sales Teodoro
Orientadora

LAVRAS – MG
2023

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que me apoiaram ao longo deste desafiador percurso acadêmico. Suas contribuições e apoio foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Primeiramente, quero agradecer à minha família, que sempre esteve ao meu lado, proporcionando amor, incentivo e compreensão. Vocês são minha fonte de inspiração e força, e este trabalho é dedicado a vocês.

Minha orientadora, a Professora Graziane Sales Teodoro, merece um agradecimento especial. Sua orientação e expertise foram inestimáveis. Sem sua orientação cuidadosa, este trabalho não teria alcançado o nível de qualidade que atingiu. Obrigado por sua paciência, orientação e apoio constante ao longo deste processo.

Além disso, não posso deixar de agradecer aos meus amigos, em especial aos meus amigos pessoais, meus amigos do curso da Matemática e meus amigos da Atlética Odisséia, por estarem ao meu lado durante as noites de estudo, por compartilharem seus insights e por serem uma fonte de motivação. Seus conselhos e apoio foram inestimáveis e tornaram esta jornada acadêmica mais significativa.

Agradeço a todos os professores, colegas e a todos que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, minha mais profunda gratidão a todos que acreditaram em mim e me ajudaram a tornar este projeto uma realidade. Este TCC não teria sido possível sem o apoio e encorajamento daqueles ao meu redor.

Muito obrigado a todos.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre o Cálculo fracionário, uma extensão do Cálculo tradicional que lida com operadores de derivadas e integrais de ordem não inteira. Exploramos uma parte teórica do Cálculo fracionário, com foco na integral fracionária e nas derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. Iniciamos apresentando os fundamentos teóricos necessários para o nosso estudo do Cálculo fracionário, incluindo conceitos como a função gama e a função beta. Além disso, vimos também a definição da Convolução de Fourier, importante para o trabalho que seguirá. Discutimos as propriedades e características das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, que são funções especiais associadas ao Cálculo fracionário. Esperamos que este trabalho forneça uma visão introdutória do Cálculo fracionário, despertando o interesse por essa área de pesquisa e incentivando novas aplicações em diferentes campos científicos.

Palavras-chave: Cálculo fracionário, derivada fracionária, integral fracionária.

Abstract

In this work, we conducted a study on Fractional Calculus, an extension of traditional Calculus that deals with operators of derivatives and integrals of non-integer order. We explored a theoretical aspect of Fractional Calculus, focusing on fractional integrals and the Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives. We began by presenting the theoretical foundations necessary for our study of Fractional Calculus, including concepts such as the gamma function and the beta function. Additionally, we also examined the definition of the Fourier Convolution, which is important for the subsequent work. We discussed the properties and characteristics of one and two-parameter Mittag-Leffler functions, which are special functions associated with Fractional Calculus. We hope that this work provides an introductory overview of Fractional Calculus, sparking interest in this research area and encouraging new applications in various scientific fields.

Keywords: fractional Calculus, fractional derivative, fractional integral.

Sumário

Introdução

A escolha do tema para este trabalho de conclusão de curso não poderia ter sido mais natural e apaixonada. Desde os primeiros passos na minha jornada matemática, sempre fui cativado pela beleza e pela imensidão de possibilidades que esse campo do conhecimento proporciona. A matemática, com suas diversas vertentes, sempre me instigou e me desafiou a explorar conceitos cada vez mais complexos e fascinantes.

Através do estudo do Cálculo fracionário, percebi que a matemática é muito mais do que um conjunto de fórmulas e equações abstratas. Ela se revela como uma linguagem universal capaz de descrever padrões e relações subjacentes em todas as áreas do conhecimento. A aplicação do Cálculo fracionário em campos como física, engenharia, economia e biologia, entre outros, demonstra a sua relevância e a sua capacidade de promover avanços significativos em diversas áreas do saber humano.

Além disso, o Cálculo fracionário proporciona uma oportunidade para expandir minha capacidade de raciocínio lógico e abstrato. Essa abordagem estimula minha criatividade e me convida a transcender limites previamente estabelecidos, incentivando-me a explorar e a contribuir para o desenvolvimento da matemática e suas aplicações.

Portanto, minha motivação para escolher o Cálculo fracionário como tema do meu trabalho de conclusão de curso reside na minha paixão pela matemática e sua diversidade, bem como na minha busca por desafios intelectuais estimulantes. Ao explorar as nuances do Cálculo fracionário, espero contribuir para a disseminação desse campo de estudo e, ao mesmo tempo, aprimorar meu próprio conhecimento e habilidades matemáticas.

O estudo do Cálculo, uma área da matemática que investiga o movimento e a variação associados a conceitos como integral e derivada, tem suas raízes nos trabalhos independentes de Newton e Leibniz no século XVII. Ao longo do tempo, diversos matemáticos, como Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass e Riemann, contribuíram para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do Cálculo tradicional.

Neste trabalho, concentramos nossa atenção no Cálculo de ordem não inteira, também conhecido como Cálculo fracionário. Essa área surge a partir de uma famosa correspondência entre L'Hopital e Leibniz em 1695, onde L'Hopital questionou o significado de uma derivada de ordem não inteira. Devido às suas aplicações atrativas em ciência e engenharia, o Cálculo fracionário ganhou popularidade e várias formulações para a derivada fracionária foram propostas.

Além disso, abordaremos os conceitos fundamentais necessários para o estudo das integrais e derivadas fracionárias, como as funções beta e gama e o produto de convolução de Fourier.

Dentro do campo das derivadas fracionárias, iremos explorar as formulações de Riemann-Liouville e Caputo, que são duas das principais abordagens. Após o estudo dessas derivadas fracionárias e suas teorias, iremos entender parte das funções de Mittag-Leffler, que emergem como soluções de muitas equações diferenciais de ordem arbitrária.

1 Conhecimentos Prévios

Neste capítulo introduziremos alguns conhecimentos necessários para o estudo dos operadores fracionários, dentre eles temos a função gama, a função beta, a transformada de Laplace e o produto de convolução de Fourier.

1.1 Função Gama e Função Beta

A começar pela função gama temos:

Definição 1. *A função gama, denotada por* $\Gamma(z)$*, é definida como a integral imprópria a seguir:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Uma propriedade importante da função gama é que ela generaliza o conceito de fatorial. Podemos observar isso através da seguinte relação:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1).$$

Essa propriedade é análoga ao conceito de fatorial, onde $n!$ é igual a $(n-1)!$ multiplicado por n. Para achar a relação, partindo da definição temos:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Resolvemos essa integral por partes, escolhemos $u = t^{z-1}$ e $dv = e^{-t}dt$ e calculamos $du = (z-1)t^{z-2}dt$ e $v = -e^{-t}$. Assim temos,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = -t^{z-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (z-1)t^{z-2}e^{-t}dt.$$

Avaliando o primeiro termo, obtemos $\lim_{t\to\infty}(-t^{z-1}e^{-t}) - (-0^{z-1}e^{-0})$. Ficamos então com:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}dt.$$

Reconhecendo a integral restante como sendo $\Gamma(z-1)$.
Logo,

$$\Gamma(z) \quad = (z-1)\Gamma(z-1).$$

Em seguida, apresento a função beta, a saber:

Definição 2. *A função beta, denotada por $B(p,q)$, é definida como*

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du.$$

Introduzindo uma mudança de variável $u = \sin^2\theta$, podemos expressar a função beta da seguinte forma:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta. \tag{1.1}$$

Também é importante mencionar a relação da função beta com a função gama, dada por:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Para obter esse resultado, consideramos o produto das integrais:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du\int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v}u^{p-1}v^{q-1}dudv.$$

Fazendo a substituição $u = x^2$ e $v = y^2$ e aplicando o determinante jacobiano,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Ao introduzir coordenadas polares no plano, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, obtemos:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta.$$

Utilizando a definição da função beta apresentada na Eq. (1.1), temos:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2B(p,q)\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr.$$

Por fim, considerando $t = r^2$ na integral acima, obtemos:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q).$$

■

Também é interessante notar que, pela definição, a função beta possui a propriedade comutativa, ou seja, $B(p,q) = B(q,p)$.

1.2 Convolução de Fourier

A convolução de Fourier é um conceito fundamental na análise de sinais e sistemas, amplamente utilizado em campos como processamento de sinais, comunicações e análise de sistemas lineares. Ela está intimamente relacionada com o Cálculo fracionário.

A convolução de Fourier de duas funções, $f(t)$ e $g(t)$, denotada como $(f * g)(t)$, é definida da seguinte forma:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{1.2}$$

onde $*$ representa a operação de convolução, t é a variável independente e τ é uma variável de integração (FOLLAND, 2000).

Uma propriedade interessante de notar é que, pela definição, a convolução de Fourier é comutativa, ou seja, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

A ligação entre a convolução de Fourier e o Cálculo fracionário reside na capacidade do Cálculo fracionário de descrever comportamentos não locais e não inteiramente diferenciais em sistemas. O Cálculo fracionário estende a noção de derivadas e integrais para ordens não inteiras, permitindo a modelagem de fenômenos complexos.

2 Operadores fracionários

Diferente do Cálculo desenvolvido independentemente por Newton e Leibniz, o Cálculo fracionário não possui uma única formulação para a integral e derivada fracionária. Essas definições são diversas e continuaram a se expandir ao longo do tempo. Cada uma dessas formulações se mostra mais apropriada para resolver problemas específicos em física. A seguir, trazemos uma breve parte da história por trás do Cálculo fracionário, tirada de (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018).

Muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do que conhecemos hoje como Cálculo fracionário. Euler, por exemplo, fez uma contribuição importante em 1730, em sua dissertação, onde abordou a questão das derivadas fracionárias para funções de p quando n é um inteiro positivo. Ele demonstrou que, para $n = 2$ e $p = x^3$, a derivada segunda, d^2x^3/dx^2, é igual a $6x$. No entanto, a questão que permaneceu foi: que tipo de relação pode ser estabelecida quando n é uma fração?

Lagrange, em 1772, contribuiu indiretamente para o Cálculo fracionário através da chamada lei dos expoentes, embora tenha sido demonstrado que essa lei não é válida para todas as funções.

Laplace, em 1812, introduziu uma definição de derivada fracionária através de uma integral, enquanto Lacroix, em 1819, foi o primeiro a mencionar derivadas de ordem arbitrária em seu livro de Cálculo. Ele focou em obter uma fórmula para a n-ésima derivada de funções polinomiais do tipo $y = x^m$, com $m \in \mathbb{N}$, e posteriormente introduziu a função gama em vez do símbolo fatorial. Substituindo n por α e m por β, obteve uma fórmula geral para a derivada de ordem arbitrária. A partir dessa equação, com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$, obtém-se a formulação conhecida como a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville.

Fourier, em seu estudo de derivadas de ordens arbitrárias em 1822, obteve a representação integral para uma função e suas derivadas de ordem superior. Ao substituir o inteiro n por α, um valor arbitrário, ele formalmente derivou uma versão generalizada para as derivadas de ordem arbitrária.

Embora Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix, Fourier e outros matemáticos notáveis tenham contribuído para o desenvolvimento do Cálculo fracionário, não havia, na época, uma aplicação característica e bem definida. A primeira definição de uma operação fracionária propriamente dita foi dada por Abel em 1823, quando ele resolveu uma equação integral relacionada ao problema da tautócrona.

Liouville, provavelmente influenciado pela solução elegante de Abel, realizou um estudo importante em 1829 para fornecer uma definição lógica da derivada fracionária, explorando duas abordagens diferentes. Seu trabalho inovador envolveu a expansão de funções em séries de potências e a definição da derivada de ordem n como se n fosse um inteiro positivo, estendendo essa definição para ordens não inteiras e, eventualmente, para a derivada de ordem arbitrária. A formulação da derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville, conforme a conhecemos hoje, foi estabelecida por Sonin em 1869, com base na fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n de uma função analítica.

Mais tarde, em 1969, Caputo propôs uma nova definição para a derivada de ordem arbitrária a fim de resolver problemas de viscoelasticidade. Além dos matemáticos mencionados, diversos outros contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo fracionário.

Neste capítulo, apresentaremos dois importantes operadores amplamente conhecidos relacionados ao Cálculo fracionário: a derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo. Ambas as formulações são definidas em termos de integrais fracionárias. Começaremos a próxima seção fornecendo o conhecimento necessário para darmos início ao estudo do Cálculo fracionário e, em seguida, introduziremos essas integrais.

2.1 Integral Fracionária

Vamos introduzir a integral fracionária a partir da fórmula integral de Cauchy, que é definida como segue:

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1}d\tau,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e f é uma função causal[1]. O operador J^n representa a repetição n-ésima da integral e pode ser expresso como:

$$J^n f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_n - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau)d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}.$$

Por definição temos:

Definição 3. *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f causal é dada por,*

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \tag{2.1}$$

sendo $Re(\alpha) > 0$ e $t > 0$.

Note que a integral fracionária de ordem $\alpha = 0$ de uma função f é a própria função f, ou seja, $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Podemos também escrever a integral fracionária, Eq.(2.1), como um produto de convolução das funções f e ϕ_α, sendo $Re(\alpha) > 0$ e

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad t > 0, \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \phi_\alpha(t) * f(t). \tag{2.2}$$

Devido a sua importância mostraremos agora uma propriedade da função ϕ_α.

Proposição 1. *A função ϕ_α satisfaz a propriedade, $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$, sendo $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$.*

Demonstração. A partir da definição do produto de convolução de Fourier temos,

$$(\phi_\alpha * \phi_\beta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

Primeiro, consideremos as funções definidas:

[1] Funções causais são funções que são definidas para $t > 0$

$$\phi_\alpha(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

$$\phi_\beta(t-\tau) = \begin{cases} \dfrac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \tau < t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

O produto $\phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau)$ só será diferente de zero quando $0 < \tau < t$. Portanto, por Eq.(2.3), temos:

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau, & 0 < \tau < t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Agora, vamos resolver esta integral usando a função beta e a relação da função beta com a função gama. Primeiro, observe que podemos escrever a Eq.(2.4) como:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \frac{t^{\beta-1}}{t^{\beta-1}} (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} t^{\beta-1} \left(\frac{1}{t}(t-\tau) \right)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} t^{\beta-1} \left(1 - \frac{\tau}{t} \right)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, vamos introduzir a mudança de variável $u = \dfrac{\tau}{t}$ na Eq.(2.5)

$$\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (ut)^{\alpha-1} t^{\beta-1} (1-u)^{\beta-1} t du.$$

Note que podemos fatorar $t^{\alpha+\beta-1}$ fora da integral.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} d\tau = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du. \tag{2.6}$$

Agora, podemos reconhecer a integral obtida na Eq.(2.6) como a fórmula da função beta:

$$\int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du = B(\alpha, \beta).$$

Então, o resultado fica:

$$\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta). \tag{2.7}$$

Agora, podemos usar a relação entre a função beta e a função gama:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Substituindo isso na Eq.(2.7) integral, obtemos:

$$\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Portanto, concluímos que:

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

que é exatamente o que queríamos mostrar. ■

A partir de agora, iremos considerar apenas as funções causais. Nos dois exemplos a seguir tirados de (TEODORO, 2014) podemos ver a integral fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α de duas funções, a função constante e a função potência.

Exemplo 1. *Encontraremos a integral fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α, sendo $Re(\alpha) > 0$, da função $f(t) = c$, sendo c uma constante.*

A partir da definição, Eq.(2.1), podemos escrever

$$J^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} c\, d\tau = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\frac{t^\alpha}{\alpha} = \frac{t^\alpha c}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

□

Exemplo 2. *Calcularemos a integral fracionária de ordem $\alpha, Re(\alpha) > 0$ da função $f(t) = t^\gamma$, sendo $\gamma > -1$ e $t > 0$.*

Por definição, Eq.(2.1), temos

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^\gamma d\tau, \tag{2.8}$$

consideremos a mudança de variável $\tau = tx$ na integral da Eq. (2.8), assim,

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1}(tx)^\gamma t dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^\gamma dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\gamma+1) \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}. \end{aligned}$$

De onde segue-se,

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}. \tag{2.9}$$

□

Apresentamos agora uma propriedade da integral fracionária.

Proposição 2. *A integral de Riemann-Liouville satisfaz a seguinte propriedade*

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t),$$

sendo $Re(\alpha), Re(\beta) \geq 0.$

Demonstração. Para mostrarmos a propriedade acima, para qualquer função f causal, usaremos a **Proposição 1**. Assim, temos da **Definição 3.** que,

$$J^\beta f(t) = \phi_\beta(t) * f(t)$$

logo, $J^\alpha J^\beta f(t) = J^\alpha(\phi_\beta(t) * f(t)) = \phi_\alpha(t) * (\phi_\beta(t) * f(t))$ usando a propriedade associativa de multiplicação chegamos em,

$$J^\alpha J^\beta f(t) = (\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t)) * f(t)$$

pela **Proposição 1** temos que $(\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t)) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$ logo a equação acima fica,

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t)$$

e assim chegamos no resultado esperado:

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t).$$

■

Como consequência imediata da **Proposição 2** temos que $J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t)$. De fato, $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) = J^{\beta+\alpha} f(t) = J^\beta J^\alpha f(t)$.

2.2 Derivadas Fracionárias

Já conhecemos a integral fracionária, agora iremos estudar as definições de duas derivadas fracionárias, as derivadas segundo Riemann-Liouville e Caputo.

2.2.1 Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville

Definição 4. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior ou igual que $Re(\alpha)$, assim $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função causal f é dada por,*

$$D^{\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t),$$

onde o operador D^m representa a m-ésima derivada, ou seja, $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$ e J a integral fracionária.

Na definição acima, para $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$, temos:

$$D^{\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t)$$

aplicando a definição de operador fracional de Riemann-Liouville, temos:

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} f(\tau) d\tau,$$

por fim podemos reorganizar a integral da seguinte forma:

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau,$$

e se $\alpha = m$, sendo m inteiro, temos, $D^{\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t) = D^m J^0 f(t) = D^m f(t)$. Portanto,

$$D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \dfrac{d^m}{dt^m} \displaystyle\int_0^t \dfrac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, & \text{se } m - 1 < Re(\alpha) < m; \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t) \quad , & \text{se } \alpha = m. \end{cases}$$

Observe que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α, denotada por D^{α}, é a inversa à esquerda da integral fracionária de ordem α, representada por J^{α}. Em outras palavras:

$$D^{\alpha} J^{\alpha} = I.$$

De fato, podemos demonstrar essa relação da seguinte maneira: Começamos com $D^{\alpha} J^{\alpha}$ e aplicamos a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville:

$$D^{\alpha} J^{\alpha} = D^m J^{m-\alpha} J^{\alpha},$$

agora, notamos que $m-\alpha+\alpha$ é igual a m, então podemos simplificar:

$$D^{\alpha}J^{\alpha}=D^{m}J^{m}=I.$$

Assim, concluímos que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α aplicada à integral fracionária de ordem α é igual à identidade, como desejado.Também é interessante observar que $J^{\alpha}D^{\alpha}f(t)\neq I$ para $\alpha\in\mathbb{N}$

$$J^{\alpha}D^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{\alpha-1}f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}. \tag{2.10}$$

Vamos mostrar que a Eq.(2.10) vale por indução.

Passo 1: primeiramente vamos mostrar que vale para $\alpha=1$. Começamos aplicando a definição da integral fracionária de ordem 1 de Riemann-Liouville, que é equivalente à integral comum:

$$J^1D^1f(t)=\int_0^t D^1f(\tau)d\tau,$$

agora, aplicamos a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem 1, que é igual à derivada comum:

$$J^1D^1f(t)=\int_0^t f'(\tau)d\tau$$

integrando a derivada de $f(\tau)$ em relação a τ, obtemos a própria função $f(\tau)$ como resultado da integração:

$$\int_0^t D^1f(\tau)d\tau=f(\tau)\Big|_0^t$$

aplicando os limites de integração obtemos:

$$J^1D^1f(t)=f(t)-f(0)$$

que era exatamente o resultado desejado.

Passo 2: Agora suponha que a Eq.(2.10) vale para $\alpha=s$, ou seja,

$$J^sD^sf(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{s-1}f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!},$$

sendo $s\in\mathbb{N}$.

Passo 3: Agora mostraremos que vale a Eq.(2.10) para $\alpha=s+1$, ao final queremos chegar que vale a seguinte equação,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{s}f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Assim, pela **Proposição 2**, temos

$$\begin{aligned} J^{s+1}D^{s+1}f(t) &= J^1 J^s D^s D^1 f(t). \\ &= J^1 J^s D^s f'(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como por hipótese de indução vale a Eq.(2.10) pra $\alpha = s$, temos,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = J^1 \left(f'(t) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^k}{k!} \right)$$

aplicamos a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem 1,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = \int_0^t f'(\tau)d\tau - \int_0^t \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^k}{k!}d\tau$$

realizando a integração, no primeiro termo obtemos $f(t) - f(0)$ e no segundo termo podemos retirar o somatório para fora da integral, ficando com:

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0) \int_0^t \frac{\tau^k}{k!}d\tau.$$

Agora integramos o restante, calculando que a integral de $\dfrac{\tau^k}{k!}$ é $\dfrac{\tau^{k+1}}{(k+1)k!}$, com isso,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^{k+1}}{(k+1)k!}\bigg|_0^t$$

avaliando os limites de integração, onde $\tau = t$ e $\tau = 0$ obtemos,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.12}$$

Considerando a mudança de índice $k \to k-1$ na Eq.(2.12), temos

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=1}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}, \tag{2.13}$$

observemos que

$$f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\bigg|_{k=0} = f(0). \tag{2.14}$$

Portanto, pelas Eq.(2.13) e (2.14) temos,

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Logo, vale a Eq.(2.10).

No exemplo que se segue, demonstraremos que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é sempre igual a zero, ao contrário do que acontece no Cálculo de ordem inteira, onde a derivada de uma constante é zero.

Exemplo 3. *Encontraremos a derivada fracionária de ordem α de uma constante c usando a definição de Riemann-Liouville.*

Considerando um valor α que satisfaz a desigualdade $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq m$. Portanto, temos:

$$D^{\alpha}c = D^{m}J^{m-\alpha}c$$

A partir do **Exemplo 1**, sabemos que:

$$J^{\alpha}c = \frac{t^{\alpha}c}{\Gamma(\alpha+1)}$$

agora, podemos calcular $D^{\alpha}c$ da seguinte forma:

$$D^{\alpha}c = D^{m}\frac{t^{m-\alpha}c}{\Gamma(m-\alpha+1)}. \tag{2.15}$$

Sabendo que a derivada de $t^{m-\alpha}c$ se comporta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y &= t^{m-\alpha}c \\ y' &= c(m-\alpha)t^{m-\alpha-1} \\ y'' &= c(m-\alpha-1)(m-\alpha)t^{m-\alpha-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

podemos reescrever a devirada $D^{m}t^{m-\alpha}c$ como:

$$D^{m}t^{m-\alpha}c = c\frac{\Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha},$$

ao substituirmos na Eq.(2.15)

$$\begin{aligned} D^{\alpha}c &= c\frac{\Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \\ &= \frac{c}{t^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada fracionária de ordem α de uma constante c, de acordo com a definição de Riemann-Liouville, é igual a $\dfrac{c}{t^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}$.

Observação: Se escolhermos um valor α que seja um número real positivo, mas não um número natural, a derivada fracionária de ordem α de uma constante não será igual a zero.

Teorema 1. *Duas funções, $f(t)$ e $g(t)$, possuem a mesma derivada fracionária de ordem α de acordo com a definição de Riemann-Liouville, ou seja, $D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}g(t)$, onde $t > 0$ e $Re(\alpha) > 0$, se e somente se, $f(t)$ pode ser expressa como:*

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} \tag{2.16}$$

Onde c_j são constantes arbitrárias e $m-1 < Re(\alpha) \leq m$.

Demonstração. Vamos dividir a demostração do **Teorema 1** em 2 partes, sendo elas

$i)$ Se $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$ então $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$;

$ii)$ Se $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$ então $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$.

Demonstraremos primeiro $i)$. Seja $m-1 < \alpha \leq m$, por hipótese $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$, portanto, pela **Definição 4.** temos,

$$D^m J^{m-\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} g(t). \tag{2.17}$$

Tomando $J^{m-\alpha} f(t) = f_1(t)$ e $J^{m-\alpha} g(t) = g_1(t)$, podemos reescrever a Eq.(2.17) como,

$$D^m f_1(t) = D^m g_1(t). \tag{2.18}$$

Aplicando em ambos os membros da Eq.(2.18) o operador J^m, temos

$$J^m D^m f_1(t) = J^m D^m g_1(t),$$

e usando a Eq.(2.10) podemos escrever

$$f_1(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f_1^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = g_1(t) - \sum_{k=0}^{m-1} g_1^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Logo, rearranjando, obtemos

$$f_1(t) = g_1(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0)\right]. \tag{2.19}$$

Escrevenda a Eq.(2.19) em função de f e g temos,

$$J^{m-\alpha} f(t) = J^{m-\alpha} g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0)\right]. \tag{2.20}$$

Aplicamos o operador $J^{\alpha-m}$ em ambos os membros da Eq.(2.20), como $J^{\alpha-m} * J^{m-\alpha} = J^{m-m+\alpha-\alpha} = J^0 = I$, temos

$$f(t) = g(t) + J^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0)\right]$$

em seguida, usamos a definição do operador $J^{\alpha-m}$ para chegar em,

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-m)}\frac{t^{k+\alpha-m}}{k!}\left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0)\right]$$

simplificando a equação obtemos:

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k+\alpha-m}}{\Gamma(k+1+\alpha-m)}\left[f_1^{(k)}(0) - g_1^{(k)}(0)\right].$$

Agora vamos considerar a mudança de índice $k = m - j$, assim

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=m}^{1} \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left[f_1^{(m-j)}(0) - g_1^{(m-j)}(0) \right].$$

Como $\dfrac{f_1^{(m-j)}(0) - g_1^{(m-j)}(0)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}$ é uma constante arbitrária, podemos dizer que $c_j = \dfrac{f_1^{(m-j)}(0) - g_1^{(m-j)}(0)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}$, assim $f(t) = g(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$, como queríamos mostrar.

Mostraremos agora que vale ii). Por hipótese temos que

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}. \tag{2.21}$$

Aplicando o operador D^α em ambos os lados da Eq. (2.21) obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} \right) \\ &= D^\alpha g(t) + D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora, mostraremos que $D^\alpha \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$ presente na Eq.(2.22) é zero. Seja $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$, assim, pela **Definição 4.** temos,

$$D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = D^m J^{m-\alpha} \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j}$$

passando o operador $J^{m-\alpha}$ para dentro do somatório chegamos em,

$$D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = D^m \sum_{j=1}^{m} c_j J^{m-\alpha} t^{\alpha-j}$$

agora aplicando o operador $J^{m-\alpha}$ obtemos,

$$D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = D^m \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha - j + 1)}{\Gamma(m - j + 1)} t^{m-j}$$

em seguida passamos o operador D^m para dentro do somatório,

$$D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha - j + 1)}{\Gamma(m - j + 1)} D^m t^{m-j}$$

aplicamos o operador D^m,

$$D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(m - j + 1)}{\Gamma(-j + 1)} t^{-j} \frac{\Gamma(\alpha - j + 1)}{\Gamma(m - j + 1)}$$

por fim simplificamos a equação,

$$D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(-j+1)} t^{-j}.$$

Devido ao fato de $\lim\limits_{x\to m} |\Gamma(x)| \to \infty$ para $m = 0, -1, -2, -3, ...$ temos que

$$D^{\alpha}\sum_{j=1}^{m} c_j t^{\alpha-j} = 0. \tag{2.23}$$

Logo, pelas Eq.(2.22) e Eq.(2.23) temos que $D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}g(t)$. ∎

2.2.2 Derivada Fracionária segundo Caputo

Em 1967, Caputo introduziu uma reformulação da definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e, posteriormente, em 1969, empregou essa formulação para solucionar um problema relacionado à viscoelasticidade. Nesta seção, apresentaremos a derivada de Caputo (CAPUTO, 1967).

Definição 5. *Seja α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$, e seja m o menor inteiro maior ou igual que $Re(\alpha)$, de modo que $m-1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária de Caputo de uma função causal f, é definida como:*

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t).$$

O índice $_*$ foi acrescentado ao símbolo da derivada fracionária de Caputo para distingui-lo da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

É importante notar que, após a análise das formulações de Caputo e Riemann-Liouville, a ordem dos operadores em uma delas é invertida em relação à outra.

A derivada fracionária de Caputo possui uma restrição maior em comparação à derivada fracionária segundo Riemann-Liouville. Isso se deve ao fato de que, para calcular a derivada fracionária de Caputo de uma função f, é necessário que a derivada de ordem m de f seja integrável, onde $m-1 < Re(\alpha) \leq m$, e α é a ordem da derivada fracionária.

Observemos que se $\alpha = m$ então pela definição acima temos que

$$_*D^\alpha f(t) = J^0 D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

e se $m-1 < Re(\alpha) \leq m$ temos

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t)$$

onde D^m é a derivada m-ésima $f^{(m)}$, assim

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} f^{(m)}(t)$$

e aplicando o operador $J^{m-\alpha}$ obtemos,

$$_*D^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

de onde segue-se

$$_*D^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & , \quad \text{se } m-1 < Re(\alpha) \leq m; \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t) & , \quad \text{se } \alpha = m. \end{cases}$$

Note também que a derivada fracionária de ordem α, segundo Caputo, de uma constante é sempre zero diferente da derivada fracionária segundo Riemman-Liouville,

$$_*D^\alpha c = J^{m-\alpha}D^m c = J^{m-\alpha}0 = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}0d\tau = 0,$$

sendo c uma constante e $Re(\alpha) > 0$.

Exemplo 4. *Calcularemos a derivada fracionária segundo Caputo de ordem α, sendo $Re(\alpha) > 0$, da função $f(t) = e^{\lambda t}$.*

Assim, podemos escrever

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = J^{m-\alpha}D^m e^{\lambda t}.$$

Sabendo que a derivada de $e^{\lambda t}$ se comporta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda t} \\ y' &= \lambda e^{\lambda t} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \end{aligned}$$

podemos reescrever a devirada como:

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = J^{m-\alpha}(\lambda^m e^{\lambda t}),$$

aplicando o operador $J^{m-\alpha}$ obtemos,

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}\lambda^m e^{\lambda\tau}d\tau,$$

tirando o λ^m da integral ficamos com,

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}e^{\lambda\tau}d\tau,$$

podemos expandir em série de Taylor o termo $e^{\lambda\tau}$ da seguinte maneira, $e^{\lambda\tau} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$, assim nossa equação fica:

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}d\tau.$$

Agora retiramos da integral a parte do somatório que não se relaciona com τ,

$$_*D^\alpha e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}\tau^k d\tau,$$

em seguida, vamos manipular o termo $(t-\tau)^{m-\alpha-1}$ da seguinte forma $(t-\tau)^{m-\alpha-1} = t^{m-\alpha-1}(1-\dfrac{\tau}{t})^{m-\alpha-1}$, logo nossa equação fica,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^t t^{m-\alpha-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{m-\alpha-1}\tau^k d\tau,$$

vamos realizar a mudança de variável $\dfrac{\tau}{t} = u$ logo $\tau = tu$ e $d\tau = tdu$ assim ficamos com,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1 t^{m-\alpha-1}\left(1-u\right)^{m-\alpha-1}(t\ u)^k t\ du,$$

agora vamos tirar o t da integral, já somando os expoentes:

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\ t^{(m-\alpha-1+k+1)}\int_0^1 \left(1-u\right)^{m-\alpha-1}u^k du,$$

note que a integral restante é exatamente $\beta(m-\alpha, k+1)$,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\ t^{(m-\alpha+k)}\ \beta(m-\alpha, k+1).$$

Agora, utilizando a relação da função Beta com a função Gama, temos,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\ t^{(m-\alpha+k)}\ \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(m-\alpha+k+1)}.$$

Podemos simplificar os termos $\Gamma(m-\alpha)$ e também o termo $\Gamma(k+1)$ com $k!$ pois eles são iguais, como demonstrados anteriormente. Após a simplificação ficamos com,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \lambda^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\ t^{(m-\alpha+k)}}{\Gamma(m-\alpha+k+1)}.$$

Agora, vamos rearranjar o somatório para tirarmos termos e simplificarmos a conta, assim, após tirarmos $t^{m-\alpha}$ do somatório ficamos com,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \lambda^m\ t^{m-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(m-\alpha+k+1)}. \tag{2.24}$$

Poderíamos parar por aqui, porém mais a frente no trabalho veremos que nessa equação aparece uma função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, explicaremos ela melhor a frente, porém por agora devemos saber que ela é descrita como $E_{\alpha,\beta}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}$. Utilizando-a podemos deixar a equação Eq.(2.24) da seguinte maneira,

$$_{*}D^{\alpha}e^{\lambda t} = \lambda^m\ t^{m-\alpha}\ E_{1,m-\alpha+1}(\lambda t).$$

□

Teorema 2. *Duas funções f e g têm a mesma derivada fracionária de ordem α segundo Caputo, isto é, $D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t)$, para $t > 0$ e $Re(\alpha) > 0$, se e somente se,* $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$, *em que c_j são constantes arbitrárias e $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$.*

Demonstração. Como feito anteriormente, também dividiremos essa demonstração em duas partes, sendo elas,

$i)$ Se $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$ então ${}_*D^\alpha f(t) =_* D^\alpha g(t)$.

$ii)$ Se ${}_*D^\alpha f(t) =_* D^\alpha g(t)$ então $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$;

Demonstraremos primeiro $i)$. Seja $m - 1 < \alpha \leq m$, por hipótese temos que

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}. \tag{2.25}$$

Aplicando o operador ${}_*D^\alpha$ em ambos membros da Eq.(2.25) temos

$${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha \left(g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} \right)$$

Utilizando da propriedade distributiva chegamos em,

$${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha g(t) +_* D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}. \tag{2.26}$$

Mostraremos que ${}_*D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$ presente na Eq.(2.26) é zero. Assim,

$${}_*D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} = \sum_{j=1}^{m} *D^\alpha c_j t^{m-j}$$

Pela definição de ${}_*D^\alpha$ temos,

$${}_*D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} = \sum_{j=1}^{m} c_j J^{m-\alpha} D^m t^{m-j}$$

Como a ordem da derivada é maior que o expoente de t, podemos assumir que $D^m t^{m-j} = 0$. Logo,

$${}_*D^\alpha \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j} = 0. \tag{2.27}$$

assim, pelas Eq.(2.26) e Eq.(2.27) temos ${}_*D^\alpha f(t) =_* D^\alpha g(t)$.
Mostraremos, agora, que vale $ii)$. Para $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ e por hipótese temos,

$${}_*D^\alpha f(t) = {}_*D^\alpha g(t)$$

Aplicando a definição de ${}_*D^\alpha$ chegamos em,

$$J^{m-\alpha}D^m f(t) = J^{m-\alpha}D^m g(t). \tag{2.28}$$

aplicando o operador $J^{\alpha-m}$ em ambos membros da Eq. (2.28) temos

$$J^{\alpha-m}J^{m-\alpha}D^m f(t) = J^{\alpha-m}J^{m-\alpha}D^m g(t).$$

que ao simplificar fica,

$$D^m f(t) = D^m g(t). \tag{2.29}$$

tomando o operador J^m em ambos membros da Eq.(2.29) obtemos

$$J^m D^m f(t) = J^m D^m g(t).$$

Utilizando a Eq.(2.10) podemos escrever

$$f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} g^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

isolando o termo $f(t)$,

$$f(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \left[f^{(k)}(0) - g^{(k)}(0)\right]\frac{t^k}{k!}. \tag{2.30}$$

Consideremos a mudança de índices $j = m - k$ no somatório da Eq.(2.30). Logo,

$$f(t) = g(t) - \sum_{j=m}^{1} \left[f^{(m-j)}(0) - g^{(m-j)}(0)\right]\frac{t^{m-j}}{(m-j)!}. \tag{2.31}$$

Note que $\dfrac{f^{(m-j)}(0) - g^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$ é uma constante arbitrária, logo podemos chamar esse termo de c_j . Assim podemos reescrever a Eq.(2.31) na forma $f(t) = g(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}$, como queríamos mostrar. ■

2.2.3 Riemann-Liouville x Caputo

Observemos que a derivada de Caputo é uma integral fracionária de uma derivada de ordem inteira e a derivada de Riemann-Liouville, é a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária. No entanto, a derivada fracionária de Caputo é mais restritiva que a derivada fracionária de Riemann-Liouville, uma vez que para que a derivada fracionária de Caputo de ordem α de uma função f exista é necessário a integrabilidade da derivada de ordem m de f, sendo $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$.

Além disso, temos a seguinte relação entre as derivadas de fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo para $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$.

$$_{*}D^{\alpha} f(t) = D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}. \tag{2.32}$$

Para demonstração, consultar (TEODORO, 2019).

3 Função de Mittag-Leffler

O Cálculo fracionário está associado a várias funções, sendo as funções de Mittag-Leffler um dos destaques notáveis. Estas funções surgem de maneira natural na resolução de equações diferenciais lineares fracionárias com coeficientes constantes. De forma análoga à função exponencial no Cálculo tradicional, as funções de Mittag-Leffler desempenham um papel essencial nesse contexto. Isso ocorre porque a função exponencial é a solução para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em Cálculo de ordem inteira.

Neste estudo, concentraremos nossa atenção nas funções de Mittag-Leffler que possuem um e dois parâmetros, explorando suas propriedades dentro do contexto do Cálculo fracionário.

3.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

Em 1903, Mittag-Leffler definiu uma função, conhecida na literatura como função de Mittag-Leffler de um parâmetro, como sendo uma generalização da função exponencial (MITTAG-LEFFLER, 1903).

Definição 6. *A Função de Mittag-Leffler com um parâmetro é dada pela série*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \tag{3.1}$$

sendo $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$.

De fato, a função $E_\alpha(x)$ assim definida é uma generalização da função exponencial, pois quando consideramos $\alpha = 1$ temos,

$$E_1(x) \;\;=\;\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k)}$$

Como sabemos pelos conhecimentos adquiridos da função Gama que $\Gamma(1+k) = k!$, podemos escrever o somatório da seguinte forma,

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Sabendo que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$[1] chegamos no resultado esperado,

$$E_1(x) = e^x.$$

[1] Série de MacLaurin

Teorema 3. *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ e primos relativos e $x \in \mathbb{C}$ então vale a relação,*

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^{\frac{p}{q}k-p}}{\Gamma\left(k\frac{p}{q}+1-p\right)} \tag{3.2}$$

Demonstração. Como $Re\left(\frac{p}{q}\right) > 0$ temos,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{d^p}{dx^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)}$$

agora, vamos calcular a p-ésima derivada da série. Aplicamos a regra de Leibniz p vezes à série, chegando na fórmula abaixo.

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)x^{\frac{pk}{q}-p}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)}$$

Em seguida, se expandirmos a função Gamma, notamos que os termos no numerador e no denominador têm fatores em comum,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)x^{\frac{pk}{q}-p}}{\left(\frac{pk}{q}\right)\left(\frac{pk}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)\Gamma\left(\frac{pk}{q}-(p-1)\right)}$$

para finalizar simplificamos a expressão,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{p\left(\frac{k}{q}-1\right)}}{\Gamma\left(p\left(\frac{k}{q}-1\right)+1\right)}$$

Considerando a mudança de índices $k \to k+q$, temos

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=-q}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)}$$

Agora com a mudança de índices podemos separar os termos negativos e positivos do somatório,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=-q}^{-1} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)}$$

Note que a parte positiva do somatório é igual a $E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$, com isso, ao simplificar temos,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \sum_{k=-q}^{-1} \frac{x^{\frac{pk}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pk}{q}+1\right)} + E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right).$$

Mais uma vez, efetuamos a mudança de índices $k \to k - q$ chegando no resultado desejado,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = E_{\frac{p}{q}}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x^{\frac{p}{q}k-p}}{\Gamma\left(k\frac{p}{q}+1-p\right)}$$

$\blacksquare$

Como caso particular do **Teorema 3** temos a seguinte proposição:

Proposição 3. *Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{C}$ então,*

$$\frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) = E_p(x^p).$$

Demonstração. Tomando $q = 1$ na Eq.(3.2) temos

$$\frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) = E_p\left(x^p\right) + \sum_{k=0}^{1-1} \frac{x^{pk-p}}{\Gamma\left(kp+1-p\right)},$$

note que do somatório nos resta o valor de $k = 0$ logo, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{x^{p(k-1)}}{\Gamma\left(kp+1-p\right)} = \frac{x^{-p}}{\Gamma\left(1-p\right)}$ e assim nossa expressão toma a forma,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) = E_p\left(x^p\right) + \frac{x^{-p}}{\Gamma\left(1-p\right)},$$

como sabemos que $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(1-p\right) \to \infty$, assim o termo $\dfrac{x^{-p}}{\Gamma\left(1-p\right)}$ assume o valor 0, logo chegamos em,

$$\frac{d^p}{dx^p} E_p(x^p) = E_p\left(x^p\right),$$

conforme o enunciado da proposição. $\blacksquare$

Veremos agora um teorema que nos apresenta a fórmula de duplicação para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Teorema 4. *Sejam $x \in \mathbb{C}$ e α um parâmetro real, assim*

$$E_{2\alpha}(x) = \frac{1}{2}\left[E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Demonstração. Desenvolveremos as funções $E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ e $E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$ presentes no segundo membro da Eq.(3.3). Assim,

$$E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

ao expandirmos a série chegamos em,

$$E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots$$

e

$$E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^{\frac{1}{2}})^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

expandindo novamente,

$$E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots$$

Logo, ao somarmos as duas expressões expandidas, temos

$$E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) = 2 + \frac{2x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{2x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots$$

colocando 2 em evidência,

$$E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1 + \frac{x}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \cdots\right)$$

por fim note que o termo entre parêntese é o somatório desejado,

$$E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2\alpha k+1)} = 2E_{2\alpha}(x).$$

dividindo os dois lados por 2 chegamos no resultado esperado,

$$E_{2\alpha}(x) = \frac{1}{2}\left[E_\alpha\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + E_\alpha\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

■

Exemplo 5. *Vamos mostrar que* $E_2(x^2) = cosh(x)$.

Usando o **Teorema 4** temos,

$$E_2(x^2) = \frac{E_1(x) + E_1(-x)}{2}$$

usando a definição da função de Mittag-Leffler para continuar obtemos

$$E_2(x^2) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{\Gamma(k+1)}}{2}.$$

Agora, notemos que os dois somatórios em questão representam, respectivamente, e^x e e^{-x} e assim nossa equação fica,

$$E_2(x^2) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

por fim , sabendo que $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh(x)$ chegamos no resultado esperado,

$$E_2(x^2) = cosh(x).$$

□

3.2 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

Em 1905, Wiman apresentou uma extensão da função de Mittag-Leffler. Vamos referir-nos a esta extensão como a "função de Mittag-Leffler com dois parâmetros" a partir de agora (WIMAN, 1905).

Definição 7. *A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é dada pela seguinte série,*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \tag{3.4}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *e* $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$.

Observemos que quando $\beta = 1$ na Eq.(3.4) recuperamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro dada pela Eq.(3.1). De fato,

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} = E_\alpha(x).$$

Exemplo 6. *Mostraremos que* $E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

De fato, a partir da definição temos

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 2)}.$$

Como já visto, da função Gamma podemos tirar que $\Gamma(k + 2) = (k + 1)!$, assim ficamos com,

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k + 1)!}.$$

considerando a seguinte mudança de índices $k \to k - 1$ temos

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

em seguida vamos tirar o $\dfrac{1}{x}$ presente no somatório para fora dele,

$$E_{1,2}(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

mudaremos o valor incial do nosso somatório para $k = 0$. Para fazer isso basta subtrairmos o primeiro termo do somatório, deixando a expressão da seguinte forma,

$$E_{1,2}(x) = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right)$$

agora, como se trata de uma série de MacLaurin, basta resolvermos o somatório e obteremos

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

que é exatamente o resultado esperado.

□

O teorema a seguir nos traz uma propriedade da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Teorema 5. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, assim*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

Demonstração. Pela definição da função Mittag-Leffler de dois parâmetros temos,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{3.5}$$

Inserindo a mudança de índices $k \to k + 1$, temos

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k + 1) + \beta)}$$

expandindo um pouco a expressão chegamos em,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)}$$

em seguida colocamos o x em evidência, separando o termo $k = -1$ e colocando-o de fora da série, por se tratar de um termo que não depende mais de k

$$E_{\alpha,\beta}(x) = x\left(\frac{x^{-1}}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)}\right)$$

depois realizamos a propriedade distributiva da multiplicação,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)}$$

por fim, para chegar no resultado esperado basta notarmos que o somatório em questão é, de fato, $E_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$, logo,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

■

Teorema 6. *Se $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Demonstração. Como $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

subtraindo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ dos dois lados ficamos com,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

realizando a subtração no termo da direita,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Introduzindo a mudança de índices $k \to k + n$ temos,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{\Gamma(\alpha(k+n) + \beta)}$$

colocamos então o x^n em evidência no termo da direta,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}$$

Assim o somatório do termo da direita se torna $E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x)$ e a equação,

$$E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x)$$

Logo, rearranjando, podemos escrever

$$x^n E_{\alpha,\beta+n\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

como queríamos mostrar. ■

Exemplo 7. *Mostraremos que*

$$x^2 E_{\alpha,\beta+2\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{x}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

sendo $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$.

Tomando $n = 2$ no **Teorema 6.**, temos

$$x^2 E_{\alpha,\beta+2\alpha}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(x) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{x}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

□

4 Conclusão

O estudo do Cálculo fracionário tem se destacado como uma ferramenta poderosa e flexível na análise e modelagem de sistemas complexos em diversas áreas da ciência e engenharia. Ao longo deste trabalho, exploramos os pré-requisitos fundamentais e os conceitos-chave que são essenciais para uma compreensão inicial do Cálculo fracionário. Esses pré-requisitos incluíram a função gama, a função beta e a convolução de Fourier.

Iniciamos nossa jornada no mundo do Cálculo fracionário introduzindo a integral fracionária, uma operação que generaliza a noção de integral tradicional, permitindo a inclusão de ordens fracionárias. Além disso, investigamos as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville, duas abordagens distintas para a diferenciação fracionária. Discutimos suas propriedades e vimos alguns exemplos.

Na última parte deste trabalho, exploramos as funções de Mittag-Leffler, que desempenham um papel significativo no Cálculo fracionário. Tanto a função de Mittag-Leffler de um parâmetro quanto a de dois parâmetros desempenham um papel fundamental na representação de soluções de equações diferenciais fracionárias, sendo assim, importantes para modelagem de fenômenos complexos. Com isso, concluímos nosso estudo, esperando que ele tenha fornecido uma visão estimulante a respeito do Cálculo fracionário.

Referências

CAPUTO, M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-ii. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, v. 13, p. 529–539, 1967.

FOLLAND, G. B. **Fourier Analysis and Its Applications**. [S.l.]: Springer, 2000.

MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur la nouvelle fonction $e_\alpha(x)$. **C. R. Acad. Sci. Paris**, v. 137, p. 554–558, 1903.

TEODORO, G. S. **Cálculo Fracionário e as funções de Mittag-Leffler**. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas, 2014.

TEODORO, G. S. **Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas, 2019.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2018.

WIMAN, A. Über den fundamentalsatz in der teorie der funktionen ea(x). **Acta Math.**, 1905.