



**GABRIEL MACEDO CARDOSO DOS SANTOS**

**LÍVIA VILELA DOS SANTOS**

**MODELAGEM, ESTUDO DE TRANSMISSIBILIDADE DE  
VIBRAÇÃO E ANÁLISE PARAMÉTRICA DA SUSPENSÃO  
DE UM VEÍCULO DE PASSEIO**

**LAVRAS-MG**

**2023**

**GABRIEL MACEDO CARDOSO DOS SANTOS**  
**LÍVIA VILELA DOS SANTOS**

**MODELAGEM, ESTUDO DE TRANSMISSIBILIDADE DE VIBRAÇÃO E ANÁLISE  
PARAMÉTRICA DA SUSPENSÃO DE UM VEÍCULO DE PASSEIO**

Artigo apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Mecânica, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira

Orientador

**LAVRAS-MG**

**2023**

**GABRIEL MACEDO CARDOSO DOS SANTOS**  
**LÍVIA VILELA DOS SANTOS**

**MODELAGEM, ESTUDO DE TRANSMISSIBILIDADE DE VIBRAÇÃO E ANÁLISE  
PARAMÉTRICA DA SUSPENSÃO DE UM VEÍCULO DE PASSEIO**

**MODELING, VIBRATION TRANSMISSIBILITY STUDY AND PARAMETRIC  
ANALYSIS OF A PASSENGER VEHICLE SUSPENSION**

Artigo apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Mecânica, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADO em 11 de Dezembro de 2023.

Prof. Dr. Belisario Nina Huallpa      DAT-UFLA  
Prof. Dr. Wander Gustavo Rocha Vieira      DEG-UFLA

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira

Orientador

**LAVRAS-MG**

**2023**

## AGRADECIMENTOS

Aos nossos pais, Edvaldo e Janaina, Carlos Alberto e Khátia, por serem inspirações, pelo apoio e amor incondicionais e pelo direcionamento pessoal e profissional.

Aos nossos irmãos Felipe, Thaís e Sarah, pelo apoio até nos momentos mais difíceis, pelo amor incondicional e pelo companheirismo eterno.

Aos nossos sobrinhos Arthur e Heitor, por nos apresentar o amor verdadeiro e nos fazer amadurecer como pessoas.

Às nossas famílias pelo suporte ao longo dessa jornada e pelos momentos de apoio e motivação.

Aos nossos amigos Helio, Iury, Lucas, Gabriel G., Luís Felipe, Maria Clara e Mayara, por nos acompanhar em nossa jornada e estarem presentes quando necessitamos.

Aos nossos amigos Igor B., Igor C., Javier, Leonardo, Marcus, Maria Eduarda, Matheus, Rodrigo, pelos conhecimentos compartilhados e pelo apoio em conciliar o trabalho com os estudos.

Ao nosso orientador Prof. Dr. Henrique, pela orientação, paciência, disponibilidade, ensinamentos e oportunidades a nós oferecidas.

Aos professores Henrique, Diogo, Fábio e Francisco, pela orientação durante nossas passagens pelas equipes de competição estudantil.

Aos professores Belisario, Carlos, Dimas e Wander pelas conversas, ajudas e dicas ao longo de nossa graduação.

Às equipes Buffalo Baja UFLA, Hybrid Fórmula-E e Zeus Fórmula SAE, pelas amizades que permanecem, pelo aprendizado e por compartilharem a paixão pelo mundo automotivo.

Ao Brendow, que infelizmente não pôde compartilhar este momento conosco, mas que sempre esteve em nossas memórias.

## RESUMO

A modelagem matemática de sistemas mecânicos é uma etapa de suma importância no desenvolvimento de projetos de engenharia, possibilitando o estudo da análise paramétrica do sistema através da manipulação dos dados de entrada, bem como da imposição de diversos *inputs* de características distintas. Essa etapa é, atualmente, realizada com auxílio de recursos computacionais como o software de cálculo matemático MATLAB®, permitindo prever o comportamento dinâmico do sistema, viabilizando melhorias sem a necessidade do preparo de protótipos e, portanto, reduzindo os custos e o tempo necessário para o desenvolvimento dos projetos. No presente trabalho foi realizado um estudo sobre suspensão automotiva utilizando os modelos com 2 graus de liberdade (1/4 de veículo) e com 7 graus de liberdade (veículo completo), os quais são apresentados no presente trabalho e submetidos aos *inputs* de lombada convencional e lombada com defasagem lateral. A análise da influência de valores de rigidez e amortecimento em um sistema de suspensão veicular auxiliam o processo de calibração do sistema, a fim de se obter a melhor configuração possível, considerando os resultados que se deseja atingir, que podem ser resultados de análises de Manobrabilidade, Conforto ou de Cinemática e Deformabilidade. Neste trabalho são avaliados, com foco em análise de conforto (*Ride*), os resultados obtidos para aceleração vertical, frequência natural e ângulos de *pitch* e *roll*, que são os ângulos referentes aos movimentos rotacionais em torno dos eixos y e x, respectivamente, consequentes da variação dos seguintes parâmetros do sistema: massa suspensa, massa não-suspensa, rigidez de suspensão, rigidez de pneu e coeficiente de amortecimento. As análises de resultados, os quais se apresentam de forma coerente com o que se espera na prática, e que corroboram com o fato de que os modelos utilizados são satisfatórios em termos de representatividade do comportamento dinâmico de veículos de passeio, mostra que para um sistema de suspensão veicular, é possível manipular esses parâmetros isoladamente ou de forma combinada, para que atenda as especificações de conforto desejadas.

**Palavras-chaves:** Ride, Conforto, Dinâmica Veicular, Transmissibilidade de vibração.

## **ABSTRACT**

Mechanical systems mathematical modeling is a stage of utmost importance on the development of engineering projects, enabling the study of system's parametric analysis by the manipulation of the entrance data. This stage is presently done with assistance of computational resources, as the mathematical calculation software MATLAB, that allows the prediction of the dynamical behavior of the system, allowing improvements without the need to prepare prototypes, reducing costs and time of projects development. In this work the automotive suspension was explored the models with 2 degrees of freedom ('quarte-car model') and with 7 degrees of freedom ('full vehicle model'), both presented in this work and submitted to the inputs of conventional speed bumps and speed bumps with side lag. The analysis of the influence of stiffness and damping values on a vehicle suspension system assists the process of system's calibration, in order to obtain the best setup possible, considering the results that must be achieved, which can be results of Handling, Ride Comfort or Kinematics and Compliance analysis. In this work are evaluated, focusing on comfort analysis (Ride), the results obtained for vertical acceleration, natural frequency and pitch and roll angles, which refer to the rotational movement around the axles y and x, respectively, which are consequences of variation of the following system parameters: sprung mass, unsprung mass, suspension stiffness, tire stiffness and damping coefficient. The results analysis, which present themselves coherently with what is expected practically and corroborate with the fact of the models used being satisfactory in terms of representativity of the dynamic behavior of passenger vehicles, shows that, for a suspension vehicular system, it is possible to manipulate these parameters isolated or combined, so that it meets the desired comfort specifications.

**Keywords:** Ride, Comfort, Vehicle Dynamics, Transmissibility of vibration.

## Lista de Figuras

Figura 1 - Ângulos de cáster, camber, toe e pino mestre.....	16
Figura 2 - Mola a) Helicoidal e a) de Viga.....	17
Figura 3 - Amortecedores Monotubo e Bitubo, respectivamente.....	18
Figura 4 - Esquema representativo do pneu.....	18
Figura 5 - Barra estabilizadora.....	18
Figura 6 - Suspensão Independente.....	19
Figura 7 - Suspensão Double Wishbone.....	19
Figura 8 - Suspensão McPherson.....	20
Figura 9 - Suspensão Multilink.....	21
Figura 10 - Suspensão Traseira de Eixo Rígido do tipo a)Hotchkiss e b)Four Link.....	21
Figura 11 - Curva de Transmissibilidade X Relação $f/f_n$ .....	22
Figura 12 - Modelo Quarter-Car.....	23
Figura 13 - Diagrama de Corpo Livre para o modelo 2 GDL.....	24
Figura 14 - Modelo de Transmissibilidade de Vibração.....	26
Figura 15 - Modelo de Dinâmica Vertical de um Carro com 7 GDL.....	28
Figura 16 - Diagrama de Corpo Livre.....	29
Figura 17 - Perfil da Lombada do Modelo 2GDL.....	35
Figura 18 - Perfil da Lombada do Modelo 7GDL com defasagem longitudinal.....	36
Figura 19 - Perfil da Lombada do Modelo 7GDL com defasagem longitudinal e lateral.....	38
Figura 20 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando massa suspensa.....	42
Figura 21 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando massa suspensa...	43
Figura 22 - Transmissibilidade de força (em módulo) no solo variando massa suspensa.....	43
Figura 23 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando massa não-suspensa...	44
Figura 24 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando massa não-suspensa .....	45
Figura 25 - Transmissibilidade de Força no solo variando massa não-suspensa.....	45
Figura 26 - Transmissibilidade de Aceleração para a massa suspensa variando coeficiente de amortecimento.....	46
Figura 27 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando coeficiente de amortecimento.....	47
Figura 28 - Transmissibilidade de força no solo variando coeficiente de amortecimento.....	47
Figura 29 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando rigidez de suspensão..	48
Figura 30 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando rigidez de suspensão .....	49
Figura 31 - Transmissibilidade de força no solo variando rigidez de suspensão.....	49
Figura 32 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando rigidez de pneu.....	50
Figura 33 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando rigidez de pneu...	50
Figura 34 - Transmissibilidade de força no solo variando rigidez de pneu.....	51
Figura 35 - Curva de aceleração vertical variando a massa suspensa.....	52
Figura 36 - Curva de aceleração vertical variando rigidez de suspensão.....	53
Figura 37 - Curva de aceleração vertical variando coeficiente de amortecimento.....	54
Figura 38 - Curva de aceleração vertical variando massa não-suspensa.....	55
Figura 39 - Curva de aceleração vertical variando rigidez de pneu.....	56
Figura 40 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando massa suspensa.....	58
Figura 41 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando rigidez de suspensão.....	59

Figura 42 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando coeficiente de amortecimento.....	60
Figura 43 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando massa não-suspensa .....	61
Figura 44 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando rigidez de pneu .....	63
Figura 45 - Curvas de ângulo de roll variando massa suspensa.....	64
Figura 46 – Curvas de ângulo de roll variando rigidez de suspensão .....	65
Figura 47 - Curvas de ângulo de roll variando coeficiente de amortecimento.....	66
Figura 48 - Curvas de ângulo de roll variando massa não-suspensa.....	66
Figura 49 - Curvas de ângulo de roll variando rigidez de pneu .....	67

## Lista de Tabelas

Tabela 1 - Nomenclatura das Forças do Modelo 2GDL .....	24
Tabela 2 - Nomenclatura dos Parâmetros do Modelo 2GDL .....	25
Tabela 3 - Parâmetros do Sistema 7 GDL.....	28
Tabela 4 - Nomenclatura de Forças do Modelo 7GDL .....	29
Tabela 5 - Parâmetros da Pista .....	34
Tabela 6 - Parâmetros Base do Modelo 7GDL .....	38
Tabela 7 - Parâmetros Base do Modelo 2GDL .....	39
Tabela 8 - Frequências Naturais do Sistema com 2GDL .....	41
Tabela 9 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a massa suspensa – 2GDL.....	52
Tabela 10 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a rigidez de suspensão – 2GDL.	53
Tabela 11 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando o coeficiente de amortecimento – 2GDL.....	54
Tabela 12 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a massa não-suspensa – 2GDL..	55
Tabela 13 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a rigidez de pneu – 2GDL .....	56
Tabela 14 - Frequências Naturais do Sistema com 7 GDL .....	56
Tabela 15 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a massa suspensa – 7GDL .....	58
Tabela 16 - Frequências naturais variando a massa suspensa – 7GDL.....	58
Tabela 17 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a rigidez de suspensão – 7GDL .	59
Tabela 18 - Frequências naturais variando a rigidez de suspensão – 7GDL.....	59
Tabela 19 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando o coeficiente de amortecimento– 7GDL.....	60
Tabela 20 - Frequências naturais variando o coeficiente de amortecimento– 7GDL .....	61
Tabela 21 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a massa não-suspensa – 7GDL..	62
Tabela 22 - Frequências naturais variando a massa não-suspensa – 7GDL.....	62
Tabela 23 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a rigidez de pneu – 7GDL .....	63
Tabela 24 - Frequências naturais variando a rigidez de pneu– 7GDL .....	63
Tabela 25 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a massa suspensa – 7GDL.....	64
Tabela 26 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a rigidez de suspensão – 7GDL.....	65
Tabela 27 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando o coeficiente de amortecimento – 7GDL .	66
Tabela 28 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a massa não-suspensa – 7GDL.....	67
Tabela 29 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a rigidez de pneu – 7GDL .....	67

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	14
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	23
<b>3.1</b>	<b>Modelagem matemática de ¼ de veículo</b> .....	23
<b>3.2</b>	<b>Modelo de transmissibilidade de vibrações com o <i>quarter car</i></b> .....	25
<b>3.3</b>	<b>Modelagem matemática <i>full vehicle</i> com sete graus de liberdade</b> .....	27
<b>3.4</b>	<b>Obtenção das Equações de Movimento</b> .....	29
<b>3.5</b>	<b>Perfil de pista</b> .....	34
<b>3.6</b>	<b>Método de Newmark</b> .....	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	41
<b>4.1</b>	<b>Análise da influência dos parâmetros de suspensão no conforto do veículo</b> .....	41
<b>4.2</b>	<b>Modelo 2 GDL no Domínio da Frequência</b> .....	41
<b>4.2.1</b>	<b>Massa Suspensa</b> .....	41
<b>4.2.2</b>	<b>Massa não-suspensa</b> .....	44
<b>4.2.3</b>	<b>Coefficiente de Amortecimento</b> .....	46
<b>4.2.4</b>	<b>Rigidez da Suspensão</b> .....	48
<b>4.2.5</b>	<b>Rigidez do Pneu</b> .....	49
<b>4.3</b>	<b>Modelo 2 GDL no Domínio do Tempo</b> .....	51
<b>4.3.1</b>	<b>Massa suspensa</b> .....	51
<b>4.3.2</b>	<b>Rigidez de Suspensão</b> .....	52
<b>4.3.3</b>	<b>Coefficiente de Amortecimento</b> .....	53
<b>4.3.4</b>	<b>Massa não-suspensa</b> .....	54
<b>4.3.5</b>	<b>Rigidez do Pneu</b> .....	55
<b>4.4</b>	<b>Modelo 7 GDL no domínio do tempo com defasagem longitudinal</b> .....	56
<b>4.4.1</b>	<b>Massa Suspensa</b> .....	57
<b>4.4.2</b>	<b>Rigidez de Suspensão</b> .....	58
<b>4.4.3</b>	<b>Coefficiente de Amortecimento</b> .....	60
<b>4.4.4</b>	<b>Massa não-suspensa</b> .....	61
<b>4.4.5</b>	<b>Rigidez do Pneu</b> .....	62
<b>4.5</b>	<b>Modelo 7 GDL no domínio do tempo com defasagem longitudinal e lateral</b> .....	63
<b>4.5.1</b>	<b>Massa Suspensa</b> .....	64
<b>4.5.2</b>	<b>Rigidez da Suspensão</b> .....	64

<b>4.5.3</b>	<b>Coeficiente de Amortecimento.....</b>	<b>65</b>
<b>4.5.4</b>	<b>Massa não-suspensa.....</b>	<b>66</b>
<b>4.5.5</b>	<b>Rigidez do Pneu.....</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento e preparo de modelos de sistemas é uma das etapas mais relevantes de um projeto, especialmente quando se trata de produtos de alto custo. A modelagem, matemática, possibilita que testes sejam simulados através de softwares apropriados, revelando a provável resposta do sistema frente a uma condição de operação imposta, facilitando avaliar possíveis alterações e seus efeitos, reduzindo os custos gerais do produto, em especial pela minimização da construção de protótipos para testes.

Em projetos modernos de veículos de passeio, um dos principais enfoques é o conforto tanto do piloto quanto dos passageiros, ou seja, há forte interesse em minimizar a resposta às perturbações externas, como a influência de irregularidades da pista e até da própria geometria da pista (MILLIKEN e MILLIKEN, 1995). Dentre os muitos tipos de análises feitas pela indústria para validar um projeto a ser lançado no mercado, esse tipo de resposta, associada à dinâmica vertical do veículo, é obtida principalmente por testes abrangidos no que é denominado análise de *Ride Comfort*. *Ride Comfort* na engenharia automotiva é compreendido como conforto geral dos ocupantes do automóvel e o bem-estar dos mesmos durante viagens ou longos trajetos. O desconforto é causado principalmente por oscilações que atingem a carroceria do veículo de forma a afetar os ocupantes, seja por meio de vibração, ruídos ou ambos (HEIßING e ERSOY, 2011).

O sistema de suspensão de um veículo é determinante para a performance de manobrabilidade e conforto dos passageiros, uma vez que esse sistema é o responsável por transmitir, absorver e dissipar as forças resultantes do contato pneu-solo. O comportamento dinâmico de um veículo é extremamente dependente das frequências naturais e os modos de vibrar do mesmo (JAZAR, 2008). Diante disso, faz-se necessário prever, através de simulações e, posteriormente, testes, o comportamento do veículo quando excitado verticalmente, assim como compreender as frequências naturais e seus modos de vibrar para que se obtenha um carro confortável para os passageiros e motoristas.

A fim de prever ou analisar o comportamento e a resposta de dinâmica de um automóvel, já existem *softwares* robustos no mercado que podem, através de simulações, indicar o que seria o comportamento do veículo real. Contudo estes *softwares* não são acessíveis a todos, devidos custos associados, tanto em termos monetários quanto a respeito de custo computacional. Além disso estes *softwares*, normalmente, necessitam de muitos detalhes do projeto, tais como: tipo e geometria de suspensão, massas e inércias de componentes, rigidez de molas e buchas, entre outros. Todavia, dependendo da etapa de projeto, não se têm ainda todas essas informações bem definidas ou sequer previstas, logo, se torna difícil a utilização daqueles. Dito isso, algumas ferramentas extremamente úteis para prever o *Ride Comfort* são os modelos simplificados de veículo.

Os modelos mais utilizados são: *quarter-car* (um quarto de veículo), *half-car* (metade de carro) e *full vehicle* (veículo completo). Estes modelos simplificam o veículo para sistemas massa-mola-amortecedor os quais são utilizados para representar massa suspensa e não suspensas, rigidez e amortecimento de suspensão e, por fim, rigidez e amortecimento dos pneus.

## 1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise paramétrica de um sistema de suspensão veicular, avaliando a influência de parâmetros específicos sobre a resposta dinâmica do sistema em questão, frente à variação quantitativa desses, em vista de proporcionar maior conforto aos passageiros do veículo.

## 1.2 Objetivos Específicos

Nos estudos realizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho, para atingir o objetivo geral, foi necessário estabelecer objetivos intermediários. São eles:

- Construir os modelos espaciais de um *quarter-car* e *full-vehicle*, considerando excitação pela base;
- Obter o modelo de um *quarter-car* de resposta em frequência para estudar a transmissibilidade de aceleração;
- Investigar o comportamento dinâmico do veículo em função de alterações paramétricas dos componentes da suspensão.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A cerca da temática deste trabalho, é possível encontrar vários outros artigos que tratam da mesma com diferentes abordagens. Vários destes visam a utilização de um modelo menos robusto, ou seja, mais simplificado para representar e analisar o comportamento dinâmico de um veículo de maneira mais rápida.

Dentre os vários trabalhos desenvolvidos nesse âmbito, alguns se sobressaem. Palli et al. (2017) propuseram um estudo para avaliar o comportamento dinâmico de um modelo de 7 graus de liberdade com suspensão semiativa construído em ambiente MATLAB®. Para realizar esse estudo e validá-lo, os autores calcularam as frequências naturais amortecidas e os modos de vibrar do modelo teórico e o compararam com os resultados obtidos no *software* ANSYS® utilizando o método de elementos finitos. Como resultados, os autores observaram que as frequências naturais e os modos de vibrar de ambos os modelos, em ANSYS® e MATLAB®, foram praticamente os mesmos.

Além destes resultados os autores ainda discutem sobre os modos de vibrar do modelo de 7 GDL. Segundo Palli et al. (2017), através da análise modal pode-se observar que o movimento vertical de carroceria é associado com o movimento de rolagem da mesma e isso se dá pelo acoplamento do sistema. Já o movimento de arfagem da carroceria (*pitch*) não depende do movimento vertical e de rolagem dela.

Há de se destacar também o trabalho de Mahala et al. (2009) que estudaram diferentes modelos matemáticos para avaliar a resposta de um veículo em termos de conforto e avaliar para quais ocasiões cada um destes modelos é recomendado. Os modelos matemáticos construídos pelos autores foram: modelo de 2 graus de liberdade (quarto de veículo); modelo de 4 graus de liberdade (metade de veículo); e modelo de 7 graus de liberdade (veículo completo). Os autores concluíram que os modelos mais simplificados, quarto e metade de veículo, não são capazes de representar o comportamento da carroceria em todas as situações, uma vez que eles não abordam a entrada de sinal em todas as rodas do veículo. Já o modelo de veículo completo, com 7 GDL, acaba sendo mais representativo. Contudo, modelos com mais graus de liberdade significam mais gasto de recursos computacionais e tempo para resolução das equações do sistema. Portanto, a utilização de modelos mais simplificados como o modelo de 4 GDL se faz importante e pode ser utilizada principalmente para avaliar estudo de movimento de arfagem (*pitch*).

Dumitriu (2015) Apresentou um modelo 3D com 7 DOF utilizado para simular a resposta entre o veículo e a pista. Sua modelagem se baseou na metodologia aplicada também em outros artigos similares, porém focos distintos, como o de Sireteanu, Gündisch e Părăian (1981), cujo objetivo foi estudar as vibrações em carros de passeio, e o de Demić et al. (2006), o qual apresenta uma metodologia de *design* para suspensão ativa. Desta forma, seu modelo apresenta confiabilidade para que as simulações realizadas apresentem resultados próximos dos desejados. Dumitriu (2015) sugere que as equações de movimento para um sistema como o proposto em seu artigo, podem ser resolvidas numericamente pelo método de Runge Kutta, e que o ideal para o estudo é utilizar como *input* o perfil de uma pista/estrada real.

Vale ressaltar que Dumitriu et al. (2015) desenvolveram um modelo de veículo completo de 7 graus de liberdade para representar vibrações verticais do veículo, sendo válido apenas

para pequenos ângulos de rolagem e arfagem, o que corresponde a perfis de estradas retas e suaves. Os resultados obtidos pelos autores no modelo implementado em MATLAB® foram comparados com os resultados obtidos através do software CARSIM® que tem uma abordagem muito mais completa e complexa, com muitos graus de liberdades e que leva em conta praticamente todas as características do veículo, sendo muitas vezes quase tão preciso quanto um teste real no veículo. Os autores observaram que os resultados do modelo de 7 GDL em MATLAB® são praticamente idênticos aos obtidos com o CARSIM®. As pequenas diferenças observadas em termos de rolagem e arfagem nos resultados podem ser explicadas, segundo os autores, pelo fato de que o modelo do CARSIM® também leva em conta deslocamentos laterais e longitudinais, os quais são desconsiderados na abordagem de 7 graus de liberdade realizada por eles.

Também com foco em modelagem com 7 graus de liberdade, Sulaiman et al. (2012) apresentaram a mesma metodologia utilizada pelos demais autores, porém aplicada a veículos pesados, como tanques militares, para análise de performance em termos de dinâmica vertical. O modelo desenvolvido foi validado a partir da comparação de resultados, para as mesmas condições de operação e pista, com um software de dinâmica de sistemas multicorpos, denominado TruckSim, de modo que poderá ser usado em estudos futuros para mais análises de veículos pesados.

Na indústria automotiva, em termos de dinâmica veicular, são comumente realizadas análises de Manobrabilidade (*Handling*), Conforto (*Ride*) e Cinemática e Deformabilidade (K&C, do inglês '*Kinematics and Compliance*'), em cada tipo são coletados dados específicos. *Handling*, segundo Dixon (2007), é a capacidade do veículo de ser controlado de forma segura pelo condutor, e a facilidade de controlá-lo em acelerações elevadas, mantendo a rota desejada. A análise de K&C está relacionada ao movimento relativo entre rodas e carroceria, ou seja, à cinemática do sistema (*Kinematics*), e *Compliance*. Este, segundo Milliken e Milliken (1995), pode ser entendido como o inverso de rigidez, ou seja, um componente irá fletir quando este é submetido a carga. O *compliance* é introduzido no sistema através de buchas e pivôs elastoméricos, componentes mecânicos que sofrem flexão sob carga, entre outros, e é de suma importância em veículos de passeio com respeito a controle de ruído, vibração e até mesmo manobrabilidade. Isso dito, o *compliance* é de extrema importância no projeto de suspensão de um veículo de passeio.

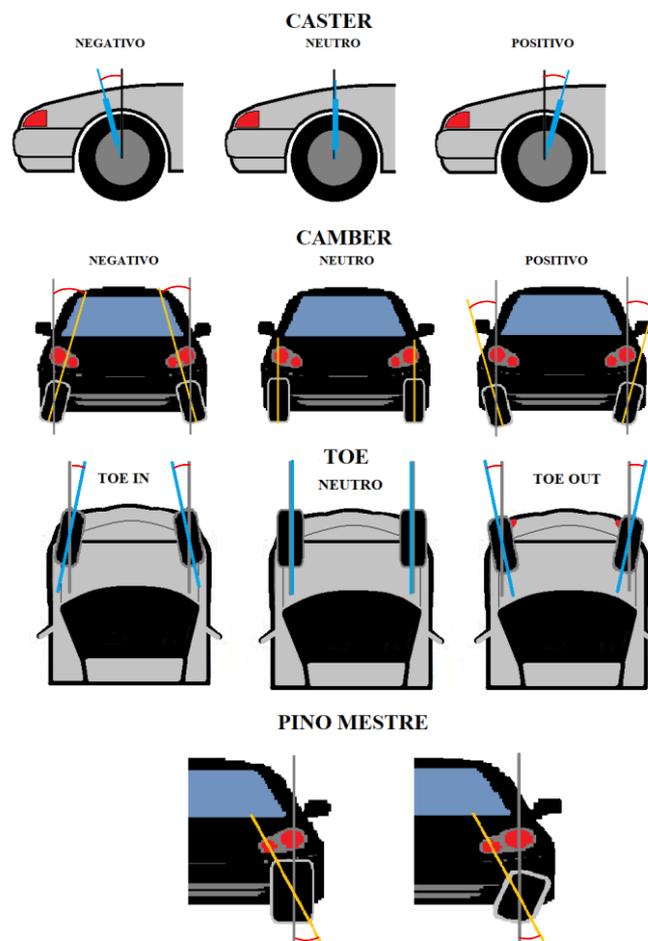
A análise de *ride*, por sua vez, permite que sejam feitos estudos acerca da performance do veículo em termos de dinâmica vertical, bem como em termos de conforto, tanto do condutor quanto dos passageiros, principalmente a partir dos resultados de *bounce*, *pitch* e *roll*. Tais parâmetros correspondem ao movimento vertical (deslocamento no eixo z) da carroceria e aos movimentos rotacionais em torno do eixo y e do eixo x, respectivamente (DIXON, 2007).

Segundo Guiggiani (2018), a melhora do conforto do veículo está associada à limitação da aceleração vertical, enquanto, entre outros fatores, a limitação das forças verticais entre a pista e os pneus promove melhora na aderência à estrada. Guiggiani (2018) afirma também que a rigidez e o amortecimento são os parâmetros de maior influência nos resultados de dinâmica vertical.

O sistema de suspensão é o que gera a conexão entre as rodas e a carroceria do veículo, e é ele quem absorve e/ou transfere a energia do contato dos pneus com as irregularidades da

pista na qual transita. A cinemática desse sistema é diretamente dependente de alguns parâmetros geométricos, os principais, e mais conhecidos, são os ângulos de cáster, câmber, *toe* e do pino mestre (Figura 1). O primeiro ângulo é formado pela vertical que passa pelo centro de roda e o eixo axial do pino mestre (eixo de deslocamento do conjunto mola-amortecedor) em vista lateral do veículo, e o segundo corresponde à angulação da roda em relação à vertical, em vista frontal do veículo (BOSCH, 2005). O ângulo de *toe* se divide em dois, *toe in* e *toe out*, e é comumente denominado por ângulo convergente e divergente, respectivamente. O *toe* corresponde a angulação do pneu em relação ao eixo x do veículo em vista superior. Por fim, o ângulo de pino mestre, assim como cáster, é formado pela vertical e eixo axial do pino mestre, porém, diferentemente de cáster, este é analisado em vista frontal do veículo, não importando o ângulo de câmber do veículo, como mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Ângulos de cáster, camber, toe e pino mestre.



Fonte: Dos Autores (2023)

Os sistemas de suspensão são compostos, basicamente, por mola, amortecedor, buchas, o pneu associado e, em alguns casos, a barra estabilizadora, também chamada de barra anti rolagem (*Anti-roll Bar*). Cada componente desempenha uma função no sistema geral e seus parâmetros específicos podem ser manipulados de forma a se obter o resultado desejado, porém para isso é necessário que se compreenda o que é e como opera cada um deles.

A mola e o amortecedor em um sistema de suspensão influem principalmente no conforto e nas cargas dinâmicas atuantes na roda, além da característica de *handling* do veículo e nos

movimentos de *roll* e *pitch* (REIMPELL, STOLL e BETZLER, 2001). Esses elementos são discutidos a seguir no texto.

- **Mola**

As molas apresentam um coeficiente de rigidez que é determinada pela inclinação da curva força-deflexão, portanto, para molas lineares, que se comportam segundo uma função de reta, o valor da rigidez é constante. Esse comportamento é associado à Lei de Hooke, a qual expressa que a deformação sofrida pela mola é proporcional à tensão aplicada, logo, a deflexão da mola é a razão entre a força imposta e o coeficiente de rigidez da mola (NORTON, 2013).

A mola do sistema de suspensão tem a função de absorver a energia do movimento da roda devido às deformações da pista, o que ocorre através da conversão da energia cinética deste deslocamento em energia potencial de deformação, que relaciona a rigidez de mola com a deformação da mesma. Apesar da variedade de tipos, os aplicados a suspensões automotivas podem ser tanto do tipo helicoidal quanto mola de feixe (Figura 2), de acordo com a construção do sistema, carga e tipo de sollicitação submetida.

*Figura 2 - Mola a) Helicoidal e a) de Viga*



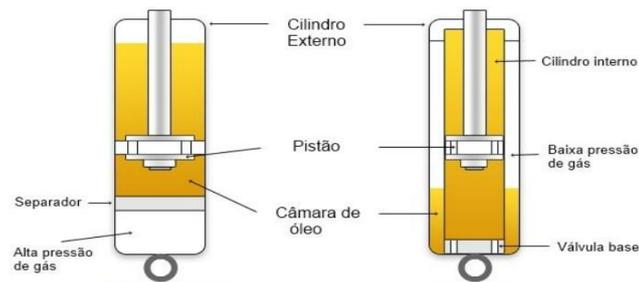
Fonte: Cofap (2023)

- **Amortecedor**

O propósito do amortecedor no sistema de suspensão, ao contrário da mola, é dissipar a energia do movimento vertical da massa suspensa ou da massa não suspensa (DIXON, 1996), reduzindo, portanto, a oscilação tanto do sistema de suspensão em si, quanto da carroceria do veículo. A atuação do amortecedor converte a energia de vibração em calor ou som, segundo Rao (2008).

O tipo mais comum de amortecimento é o viscoso e pode operar com uso de gases, água ou óleo, e o coeficiente de amortecimento é proporcional à viscosidade do fluido. A Figura 3 apresenta os amortecedores monotubo e bitubo. A modelagem de um amortecedor a êmbolo, tal que o fluido escoar no espaçamento entre o pistão e o cilindro, de forma que ao movimentar o pistão, as paredes se comportam como placas paralelas e o coeficiente de amortecimento pode ser definido pela tensão cisalhante gerada (RAO, 2008).

Figura 3 - Amortecedores Monotubo e Bitubo, respectivamente.

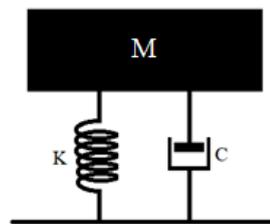


Fonte: Confraria Land Rover (2023)

- **Pneu**

Os pneus de veículos de passeio são constituídos de borracha, assim são comumente retratados como uma mola simples, porém, este material apresenta ainda um coeficiente de amortecimento devido à sua natureza viscoelástica. Portanto, cada pneu do veículo pode ser representado por um conjunto massa-mola-amortecedor (GILLESPIE, 1992), como mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Esquema representativo do pneu

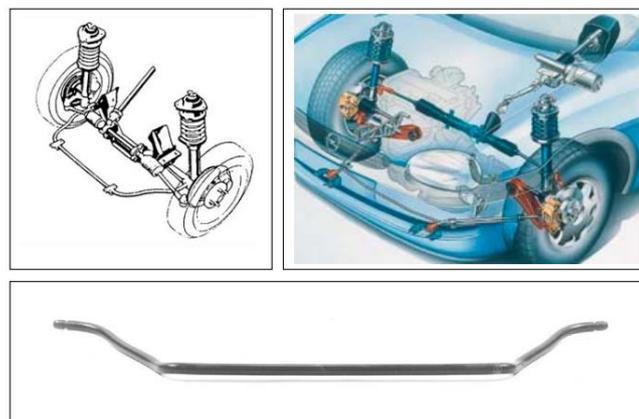


Fonte: Dos Autores (2023)

- **Barra Anti rolagem**

A barra estabilizadora (Figura 5), ou barra anti rolagem, é fixada paralelamente ao plano horizontal do eixo de rodas, e tem a função de conectar as duas suspensões no mesmo eixo, o que ajuda a impedir uma elevada inclinação do veículo ao realizar uma curva (SENAI, 2006).

Figura 5 - Barra estabilizadora



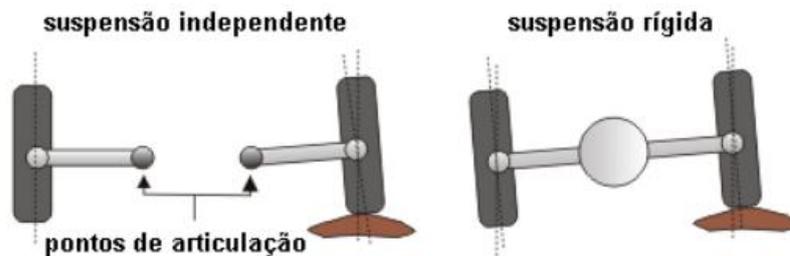
Fonte: SENAI (2006)

Atualmente, são 5 os principais tipos de suspensão veicular encontrados em carros de passeio, as quais podem ser classificadas como suspensões dependentes ou independentes:

- **Suspensão independente**

Diferentemente dos tipos anteriores, a suspensão independente (Figura 6) tem esse nome pelo movimento independente das 4 rodas, o que garante maior conforto ao transitar em pistas com muitas deformações ou estradas de terra.

*Figura 6 - Suspensão Independente*



Fonte: SENAI (2006)

- **Suspensão Duplo A**

A suspensão *Double Wishbone*, também denominado por SLA (*Short-long arm*) ou *A-arm* (braço A), é o tipo mais comum em veículos de passeio e é constituído de dois braços de controle em forma similar à fúrcula (“osso da sorte”), conforme apresentado na Figura 7.

Para este tipo de suspensão, quanto maior for a distância efetiva dos *links* transversais, menor serão as forças resultantes nos braços da mesma. A grande vantagem deste tipo de suspensão se dá pela sua cinemática e suas possibilidades, onde o projetista possui diversas opções para alterar o comportamento e resposta do sistema. A inclinação dos braços define parâmetros importantíssimos de uma suspensão, como a altura do centro de rolagem, enquanto a diferença de comprimento dos braços altera a variação de câmbor com curso da suspensão (REIMPELL, STOLL e BETZLER, 2001).

*Figura 7 - Suspensão Double Wishbone*



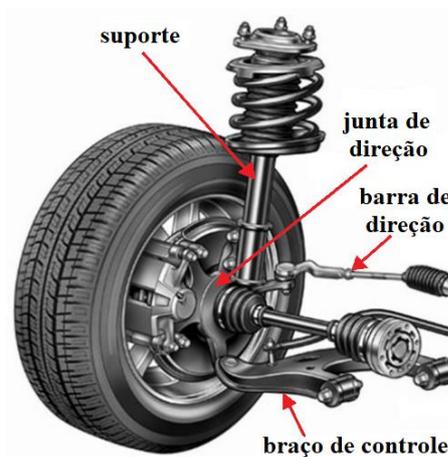
Fonte: Zivković et al. (2020)

- **McPherson**

A suspensão do tipo McPherson parte do conceito da suspensão duplo A, onde o braço superior é substituído por um ponto de articulação localizado no painel de compartimento da roda, que vai até a extremidade da haste do conjunto mola-amortecedor. As grandes vantagens desta suspensão estão relacionadas ao fato de que todas os componentes podem ser agrupados em uma só montagem e que é possível ter mais curso de mola. Contudo, as desvantagens estão associadas à características cinemáticas reduzidas, já que o sistema é simples e tem-se poucas opções de mudanças disponíveis em termos de geometria (REIMPELL, STOLL e BETZLER, 2001).

Essa suspensão é fixada na parte inferior por uma junta de direção, que recebe forças laterais e longitudinais aplicadas ao sistema, e em seu ponto superior está fixada ao chassi ou carroceria (GILLESPIE, 1992). A Figura 8 apresenta um exemplo da suspensão do tipo McPherson

Figura 8 - Suspensão McPherson



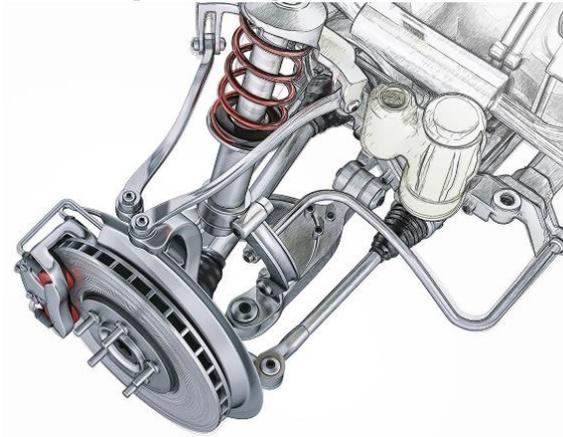
Fonte: Adaptado de Van der Auweraer et al. (2017)

- **Multilink**

A principal característica atribuída à suspensão *multilink* (Figura 9) são seus conectores do tipo *ball-joint* em suas extremidades, de forma que o mecanismo não sofra flexão. Um maior número de pontos de conexão permite ao projetista maior liberdade para atingir a configuração de suspensão desejada, em casos com 6 pontos, por exemplo, é possível ter melhor controle do ângulo de *toe* em curvas (Gillespie, 1992).

Além disso, em termos de geometria, uma suspensão *multilink* é excelente para alterar parâmetros cinemáticos da mesma de maneira que não afete tanto outros parâmetros, ou até mesmo individualmente. Ou seja, o projetista pode “individualizar” certos parâmetros e otimizá-los sem necessariamente alterar toda a geometria e consequentemente afetar parâmetros de maneira indesejada.

Figura 9 - Suspensão Multilink



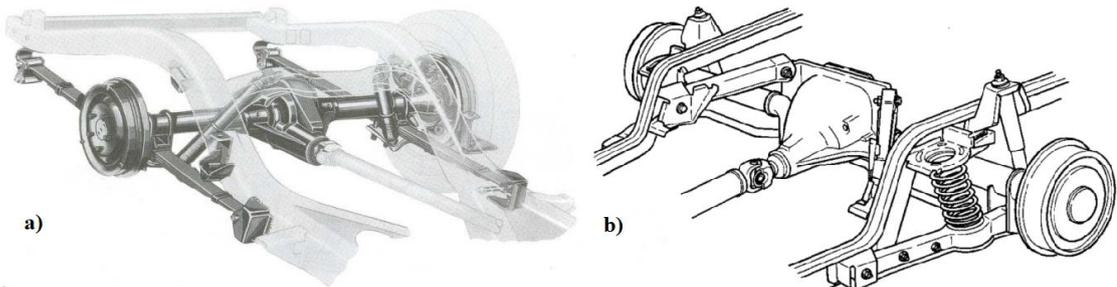
Fonte: InstaCarro (2022)

- **Barra de torção / Eixo rígido**

Consiste em uma viga na qual as rodas são montadas em suas extremidades, assim o movimento de uma roda é transmitido à outra, ocasionando esterçamento e cambagem simultânea (GILLESPIE, 1992). É comumente encontrado na traseira de carros e caminhões, e na dianteira de caminhões de carga elevada ou de tração nas quatro rodas (4x4).

Segundo Gillespie (1992), suspensão de eixo rígido apresenta a vantagem de o movimento de *roll* da carroceria não influir no ângulo de câmbor das rodas, ocasionando em pouca curvatura em trajetos curvos, tendo menor desgaste dos pneus uma vez que o alinhamento é mantido. Os tipos mais comuns são o Hotchkiss e o Four Link, sendo distintos pelo tipo de mola, tal que o primeiro modelo é constituído do tipo semielíptica (Figura 10) e o segundo por molas helicoidais.

Figura 10 - Suspensão Traseira de Eixo Rígido do tipo a) Hotchkiss e b) Four Link



Fonte: GILLESPIE (1992)

Um conceito de extrema importância para o estudo e compreensão da resposta dinâmica de amortecedores é a frequência de oscilação ( $f$ ), ou só frequência, a qual indica o número de ciclos observados por unidade de tempo, sendo calculada conforme a Equação XX, onde  $T$  é o período, ou seja, tempo necessário para completar 1 ciclo. De forma análoga, pode-se calcular a frequência para movimento circular a partir da velocidade angular ( $\omega$ ), como definido na Equação XX.

$$f = \frac{1}{T} \quad (1a)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1b)$$

Outro termo comumente encontrado em literaturas associada é a frequência natural, que é a frequência com a qual, ao cessar a excitação após uma perturbação inicial, o corpo oscila sem ação de forças externas. Para sistemas com múltiplos graus de liberdades, cada grau apresenta uma frequência natural associada, portanto, para um modelo com 7 graus de liberdade, serão identificadas 7 frequências naturais (RAO, 2008).

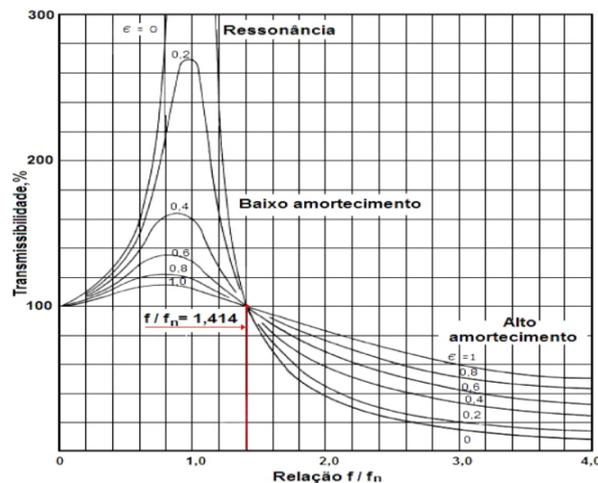
A frequência natural para um sistema de 1 grau de liberdade é obtida através da relação entre a rigidez e a massa do sistema, como mostrado na Equação 2.

$$f_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2)$$

Segundo Rao (2008), a transmissibilidade é a razão entre a força transmitida pelo sistema e a força com a qual este está excitado. Esse conceito auxilia a compreensão e a previsão do comportamento de um sistema amortecido e, portanto, é comumente relacionado graficamente com a razão da frequência de vibração do sistema e sua frequência natural, e com o coeficiente de amortecimento associado, como mostrado na Figura 11.

Observa-se que, dada uma razão de frequências de até  $\sqrt{2}$ , para taxas menores de amortecimento, maior será a transmissibilidade e, logo, a amplitude de deslocamento. É possível notar ainda, que com a razão de frequência igual a um, ou seja, quando a frequência de excitação do sistema coincide com a frequência natural do mesmo, a baixas taxas de amortecimento, o sistema tende a entrar em regime de ressonância.

Figura 11 - Curva de Transmissibilidade X Relação  $f/f_n$



Fonte: CTB (2022)

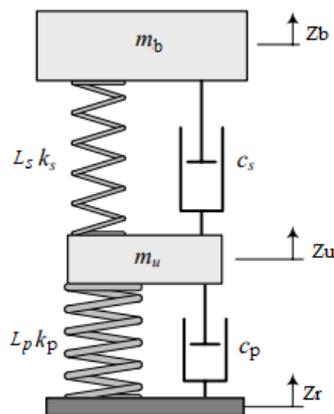
A partir dos conhecimentos expostos no presente capítulo, evidencia-se a necessidade e a importância do desenvolvimento de estudos acerca do sistema de suspensão automotiva, a fim de prever a resposta dinâmica deste. Para isso, modelos matemáticos podem ser implementados de forma a facilitar a manipulação dos dados de entrada. Desta maneira, é possível desenvolver o proposto neste trabalho, aplicando a metodologia discutida no próximo capítulo.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Modelagem matemática de ¼ de veículo

No intuito de estudar e analisar o comportamento dinâmico de um veículo, alguns modelos simplificados auxiliam para executar tais tarefas. Quando se trata de dinâmica vertical, o modelo mais simples que se tem é o modelo de dois graus de liberdade, também chamado de um quarto de veículo. Este consiste em uma massa suspensa ( $m_b$ ) que é suportada pela suspensão (simplificada, representada apenas por mola e amortecedor), que está conectada a uma massa não-suspensa ( $m_u$ ). Esta, por sua vez, é conectada a uma mola que representa a rigidez do pneu e essa mola está conectada ao solo simulando o contato pneu-solo. Por vezes, também é considerado um amortecedor junto a mola que representa o pneu, a fim de levar em conta o pequeno, porém existente, amortecimento do pneu devido a sua natureza viscoelástica. Os termos  $z_u$  e  $z_b$  são referentes ao movimento vertical das massas não-suspensa e suspensa, respectivamente, enquanto o termo  $z_r$  diz respeito ao deslocamento vertical do perfil de pista. A Figura 12 apresenta modelo de 2 GDL (graus de liberdade).

Figura 12 - Modelo Quarter-Car



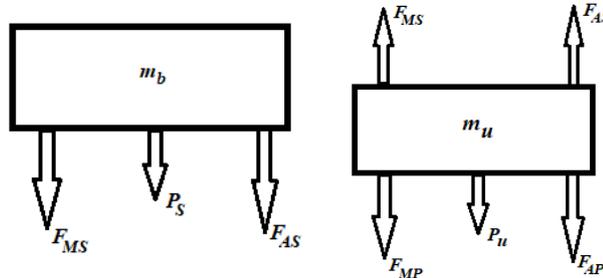
Fonte: Adaptado de Jazar (2008)

O um quarto de veículo é relativamente simples e pode ser analisado de maneira facilitada matematicamente, dito isso, ele se torna bastante útil para compreender alguns princípios e comportamentos dinâmicos de resposta vertical. Para a análise através deste modelo, são assumidas algumas hipóteses, as quais são:

- A carroceria é representada como um corpo rígido;
- A massa não-suspensa é assumida como um único corpo rígido;
- Molas e amortecedores possuem comportamento puramente linear;
- O sistema é linear;
- O pneu é modelado como uma mola e amortecedor linear;
- O pneu sempre está em contato com o solo (a perda de contato entre pneu-solo não é modelada);
- A massa suspensa nesse modelo representa ¼ da massa suspensa de um veículo completo;
- A geometria de suspensão e compliance são desconsiderados;
- Movimentos laterais, longitudinais, de *pitch* e *roll* são também desconsiderados;
- Força de atrito entre pneu e solo é nula.

A Figura 13 apresenta o diagrama de corpo livre do modelo de 2 GDL e as equações de movimento resultantes. Os dois graus de liberdade são referentes aos movimentos verticais da massa suspensa e da massa não-suspensa.

Figura 13 - Diagrama de Corpo Livre para o modelo 2 GDL



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 1 - Nomenclatura das Forças do Modelo 2GDL

Força de Amortecimento da Suspensão	$F_{AS}$
Força de Amortecimento do Pneu	$F_{AP}$
Força de Mola da Suspensão	$F_{MS}$
Força de Mola do Pneu	$F_{MP}$
Força Peso da Massa Suspensa	$P_S$
Força Peso da Massa Não Suspensa	$P_U$

Fonte: Dos Autores (2023)

A partir do diagrama de forças e aplicando a segunda lei de Newton pode-se obter as equações de movimento do sistema:

$$m_b \ddot{z}_b - F_{AS} - F_{MS} - P_S = 0 \quad (3)$$

$$m_u \ddot{z}_u + F_{AS} + F_{MS} - F_{AP} - F_{MP} - P_U = 0 \quad (4)$$

Tal que,

$$F_{AS} = C_S(\dot{z}_b - \dot{z}_u)$$

$$F_{AP} = C_p(\dot{z}_u - \dot{z}_r)$$

$$F_{MS} = -k_S(z_b - z_u - L_S)$$

$$F_{MP} = -k_p(z_u - z_r - L_p)$$

$$P_S = m_S g$$

$$P_U = m_U g$$

Onde,

*Tabela 2 - Nomenclatura dos Parâmetros do Modelo 2GDL*

Massa suspensa	$m_b$
Massa não suspensa dianteira esquerda	$m_u$
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão	$C_s$
Coefficiente de Amortecimento do Pneu	$C_p$
Coefficiente de Rigidez da Mola de Suspensão	$k_s$
Coefficiente de Rigidez do Pneu	$k_p$
Comprimento Não Deformado da Mola de Suspensão	$L_s$
Comprimento Não Deformado do Pneu	$L_p$

Fonte: Dos Autores (2023)

A fim de facilitar a visualização e a implementação destas equações no MATLAB®, as equações de movimento do sistema podem ser reescritas em forma matricial, portanto:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = [F] \quad (5)$$

Tal que,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & (k_s + k_p) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_s & -C_s \\ -C_s & (C_s + C_p) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} -m_s g + k_s L_s \\ -m_u g - k_s L_s + k_p L_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3.2 Modelo de transmissibilidade de vibrações com o *quarter car*

A modelagem desenvolvida para o sistema de transmissibilidade de vibração se baseia no modelo *quarter car* (1/4 de veículo), e tem o intuito de possibilitar o estudo e análise da transmissibilidade de vibração nos pontos de interesse (massa suspensa e não suspensa) no domínio da frequência. Isso possibilita identificar as frequências naturais do sistema através dos picos onde ocorre ressonância e também averiguar a transmissibilidade para diferentes frequências.

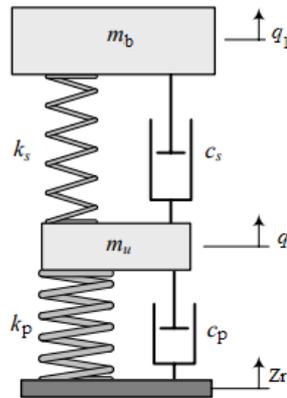
São assumidas algumas hipóteses para realizar a modelagem e análise deste modelo, tais como:

- A carroceria é representada como um corpo rígido;
- A massa não-suspensa é assumida como um único corpo rígido;

- Molas e amortecedores possuem comportamento puramente linear;
- O sistema é linear;
- O pneu é modelado como uma mola e amortecedor linear;
- O pneu sempre está em contato com o solo (a perda de contato entre pneu-solo não é modelada);
- A massa suspensa nesse modelo representa  $\frac{1}{4}$  da massa suspensa de um veículo completo;
- A geometria de suspensão e compliance são desconsiderados;
- Movimentos laterais, longitudinais, de *pitch* e *roll* são também desconsiderados;
- Os movimentos verticais das massas e do contato pneu-solo são assumidos como harmônicos;
- Força de atrito entre pneu e solo é nula.

A Figura 14 apresenta o modelo de dois graus de liberdade utilizado para realizar o equacionamento do sistema a fim de se avaliar a transmissibilidade de deslocamento que ocorre no sistema como um todo.

Figura 14 - Modelo de Transmissibilidade de Vibração



Fonte: Adaptado de Jazar (2008)

A partir deste modelo, pode-se obter as equações de movimento do sistema, que são:

$$m_u \ddot{q}_1 - C_S \dot{q}_2 + (C_S + C_P) \dot{q}_1 - k_S q_2 + (k_S + k_p) q_1 = k_p z_r + C_P \dot{z}_r \quad (10)$$

$$m_b \ddot{q}_2 + C_S \dot{q}_2 - C_S \dot{q}_1 + k_S q_2 - k_S q_1 = 0 \quad (11)$$

Assumindo que o movimento vertical das massas e da base são harmônicos, tem-se que:

$$z_r = A_1 e^{i\omega t}$$

$$\dot{z}_r = i\omega A_1 e^{i\omega t}$$

$$q_1 = Q_1 e^{i\omega t}$$

$$\dot{q}_1 = i\omega Q_1 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 Q_1 e^{i\omega t}$$

$$q_2 = Q_2 e^{i\omega t}$$

$$\dot{q}_2 = i\omega Q_2 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{q}_2 = -\omega^2 Q_2 e^{i\omega t}$$

Onde  $A_1$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  são as amplitudes do movimento harmônico. Substituindo estes termos nas equações 10 e 11, obtém-se:

$$-m_u Q_1 \omega^2 - i\omega C_S + i\omega(C_S + C_P)Q_1 - k_S Q_2 + (k_S + k_p)Q_1 = k_p A_1 + i\omega C_P A_1 \quad (12)$$

$$-m_b Q_2 \omega^2 + i\omega C_S Q_2 - i\omega C_S Q_1 + k_S Q_2 - k_S Q_1 = 0 \quad (13)$$

Rearranjando as equações descritas acima de forma matricial e tendo como referência o equilíbrio estático, é possível obter:

$$[D]\{X\} = \{E\}$$

Dado que,

$$[D] = \begin{bmatrix} -m_u \omega^2 + i\omega(C_S + C_P) + (k_S + k_p) & -(i\omega C_S + k_S) \\ -(i\omega C_S + k_S) & -m_b \omega^2 + i\omega C_S + k_S \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} (i\omega C_P + k_p)A_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Para as análises neste modelo, foi considerado uma entrada (*input*) senoidal puro com amplitude de 1 metro e variando a frequência de 0 a 50 Hz, e então determinadas as amplitudes de aceleração vertical (em módulo) na massa suspensa e não-suspensa por metro de deslocamento.

A partir desta modelagem, pode-se avaliar a resposta dinâmica do sistema de 2 graus de liberdade no domínio da frequência. Desta maneira é possível determinar o comportamento do modelo para diferentes frequências e analisar de maneira mais assertiva a influência dos parâmetros de suspensão.

### 3.3 Modelagem matemática *full vehicle* com sete graus de liberdade

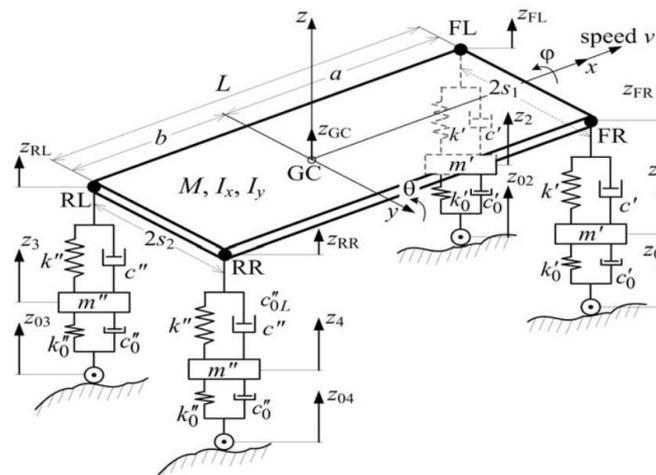
A modelagem desenvolvida no presente artigo se baseia no modelo *full vehicle* (veículo completo), o qual considera cinco massas, sendo quatro referentes às massas não suspensas (*unsprung masses*), e uma referente à massa suspensa (*sprung mass*). Além disso, são considerados 8 conjuntos mola-amortecedor representando os coeficientes de rigidez e amortecimento dos quatro pneus e dos quatro conjuntos de suspensão. De forma análoga às modelagens anteriores, faz-se necessário assumir algumas hipóteses para modelar matematicamente este sistema, as quais são:

- A carroceria é representada como um paralelepípedo rígido;
- As massas não-suspensas são assumidas como corpos rígidos;
- Molas e amortecedores possuem comportamento puramente linear;
- O sistema é linear;
- Os pneus são modelados como mola e amortecedor linear;

- Os pneus sempre estão em contato com o solo (a perda de contato entre pneu-solo não é modelada);
- A massa suspensa nesse modelo representa a massa total do veículo;
- A geometria de suspensão e compliance são desconsiderados;
- Movimentos laterais e longitudinais, são também desconsiderados.
- O centro de gravidade da massa suspensa coincide com o centro geométrico da mesma;
- Força de atrito entre pneu e solo é nula.

A Figura 15 apresenta um esquema do modelo em questão, desenvolvido para análises de dinâmica vertical.

Figura 15 - Modelo de Dinâmica Vertical de um Carro com 7 GDL



Fonte: Dumitriu (2012)

A Tabela 3 lista as variáveis utilizadas na modelagem.

Tabela 3 - Parâmetros do Sistema 7 GDL

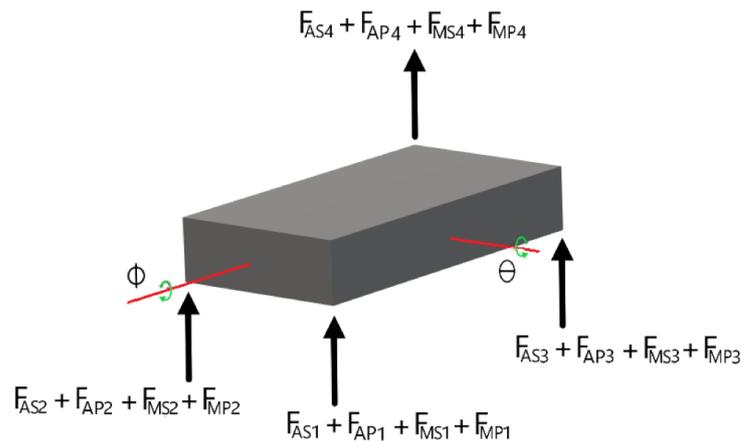
Massa suspensa	$m_b$
Massa não suspensa dianteira esquerda	$m_1$
Massa não suspensa dianteira direita	$m_2$
Massa não suspensa traseira esquerda	$m_3$
Massa não suspensa traseira direita	$m_4$
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão dianteira esquerda	$C_{s1}$
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão dianteira direita	$C_{s2}$
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão traseira esquerda	$C_{s3}$
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão traseira direita	$C_{s4}$
Coefficiente de Amortecimento do Pneu dianteiro esquerdo	$C_{p1}$
Coefficiente de Amortecimento do Pneu dianteiro direito	$C_{p2}$
Coefficiente de Amortecimento do Pneu traseiro esquerdo	$C_{p3}$
Coefficiente de Amortecimento do Pneu traseiro direito	$C_{p4}$
Coefficiente de Rigidez da Suspensão dianteira esquerda	$K_{s1}$
Coefficiente de Rigidez da Suspensão dianteira direita	$K_{s2}$
Coefficiente de Rigidez da Suspensão traseira esquerda	$K_{s3}$
Coefficiente de Rigidez da Suspensão traseira direita	$K_{s4}$
Coefficiente de Rigidez do Pneu dianteiro esquerdo	$K_{p1}$

Fonte:	Coefficiente de Rigidez do Pneu dianteiro direito	$K_{p2}$	Dos
	Coefficiente de Rigidez do Pneu traseiro esquerdo	$K_{p3}$	
	Coefficiente de Rigidez do Pneu traseiro direito	$K_{p4}$	
	Comprimento do Eixo (Bitola)	$bit$	
	Distância do Eixo Dianteiro ao CG	$a$	
	Distância do Eixo Traseiro ao CG	$b$	
Distância entre eixos		$L$	
Autores (2023)			

### 3.4 Obtenção das Equações de Movimento

Para a obtenção das equações de movimento (EDMs), as quais ditam o comportamento do sistema, são analisadas as forças atuantes em cada massa constituinte do modelo, a partir de seu diagrama de forças (Figura 16). Dado que o sistema possui sete graus de liberdade, o mesmo pode ser descrito por sete EDMs.

Figura 16 - Diagrama de Corpo Livre



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 4 - Nomenclatura de Forças do Modelo 7GDL

Força de Amortecimento da Suspensão	$F_{AS}$
Força de Amortecimento do Pneu	$F_{AP}$
Força de Mola da Suspensão	$F_{MS}$
Força de Mola do Pneu	$F_{MP}$

Fonte: Dos Autores (2023)

Dessa forma, é possível determinar as seguintes equações referentes ao movimento vertical da carroceria, movimento de rolagem da carroceria, movimento de *pitch* da carroceria e movimento vertical das rodas dianteira esquerda, dianteira direita, traseira esquerda e traseira direita, respectivamente:

$$m_1 \ddot{z}_b + (F_{AS1} + F_{AS2} + F_{AS3} + F_{AS4} + F_{MS1} + F_{MS2} + F_{MS3} + F_{MS4}) = 0 \quad (17)$$

Tal que,

$$F_{AS1} = C_1 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_1 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{AS2} = C_2 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_2 - \dot{\theta}a - \dot{\phi} \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{AS3} = C_3 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_3 + \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{AS4} = C_4 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_4 - \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{MS1} = K_{s1} \left( z_b - z_1 - \theta a + \phi \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{MS2} = K_{s2} \left( z_b - z_2 - \theta a - \phi \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{MS3} = K_{s3} \left( z_b - z_3 + \theta a + \phi \frac{bit}{2} \right)$$

$$F_{MS4} = K_{s4} \left( z_b - z_4 + \theta a - \phi \frac{bit}{2} \right)$$

$$I_y \ddot{\theta} - a(F_{AS1} + F_{AS2} + F_{MS1} + F_{MS2}) + b(F_{AS3} + F_{AS4} + F_{MS3} + F_{MS4}) = 0 \quad (18)$$

Tal que,

$$F_{AS1} = C_1 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_1 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frrt}}{2} \right)$$

$$F_{AS2} = C_2 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_2 - \dot{\theta}a - \dot{\phi} \frac{track_{frrt}}{2} \right)$$

$$F_{AS3} = C_3 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_3 + \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{track_{rr}}{2} \right)$$

$$F_{AS4} = C_4 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_4 - \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{track_{rr}}{2} \right)$$

$$F_{MS1} = K_{s1} \left( z_b - z_1 - \theta a + \phi \frac{track_{frrt}}{2} \right)$$

$$F_{MS2} = K_{s2} \left( z_b - z_2 - \theta a - \phi \frac{track_{frrt}}{2} \right)$$

$$F_{MS3} = K_{s3} \left( z_b - z_3 + \theta a + \phi \frac{track_{rr}}{2} \right)$$

$$F_{MS4} = K_{s4} \left( z_b - z_4 + \theta a - \phi \frac{track_{rr}}{2} \right)$$

$$I_x \ddot{\theta} - \frac{track_{frrt}}{2} (F_{AS1} + F_{MS1}) + \frac{track_{frrt}}{2} (F_{AS2} + F_{MS2}) - \frac{track_{rr}}{2} (F_{AS3} + F_{MS3}) + \frac{track_{rr}}{2} (F_{AS4} + F_{MS4}) = 0 \quad (19)$$

Tal que,

$$F_{AS1} = C_1 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_1 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{AS2} = C_2 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_2 - \dot{\theta}a - \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{AS3} = C_3 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_3 + \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{AS4} = C_4 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_4 - \dot{\theta}b - \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS1} = K_{s1} \left( z_b - z_1 - \theta a + \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS2} = K_{s2} \left( z_b - z_2 - \theta a - \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS3} = K_{s3} \left( z_b - z_3 + \theta a + \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS4} = K_{s4} \left( z_b - z_4 + \theta a - \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$m_1 \ddot{z}_1 - (F_{AS1} + F_{MS1}) + F_{MP1} = 0 \quad (20)$$

Tal que,

$$F_{AS1} = C_1 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_1 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS1} = K_{s1} \left( z_b - z_1 - \theta a + \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MP1} = K_{p1} (\dot{z}_1 - \dot{z}_r(t))$$

$$m_2 \ddot{z}_2 - (F_{AS2} + F_{MS2}) + F_{MP2} = 0 \quad (21)$$

Tal que,

$$F_{AS2} = C_2 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_2 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MS2} = K_{s1} \left( z_b - z_2 - \theta a + \phi \frac{track_{frr}}{2} \right)$$

$$F_{MP2} = K_{p2} (\dot{z}_2 - \dot{z}_r(t))$$

$$m_3 \ddot{z}_3 - (F_{AS3} + F_{MS3}) + F_{MP3} = 0 \quad (22)$$

Tal que,

$$F_{AS3} = C_3 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_3 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frit}}{2} \right)$$

$$F_{MS3} = K_{S3} \left( z_b - z_3 - \theta a + \phi \frac{track_{frit}}{2} \right)$$

$$F_{MP3} = K_{P3} (\dot{z}_3 - \dot{z}_r(t))$$

$$m_4 \ddot{z} - (F_{AS4} + F_{MS4}) + F_{MP4} = 0 \quad (23)$$

Tal que,

$$F_{AS4} = C_4 \left( \dot{z}_b - \dot{z}_4 - \dot{\theta}a + \dot{\phi} \frac{track_{frit}}{2} \right)$$

$$F_{MS4} = K_{S4} \left( z_b - z_4 - \theta a + \phi \frac{track_{frit}}{2} \right)$$

$$F_{MP4} = K_{P4} (\dot{z}_4 - \dot{z}_r(t))$$

Com a finalidade de tornar mais prática a implementação em MATLAB® e a visualização das variáveis no equacionamento, tais EDMs podem ser reescritas na forma matricial, conforme o exposta na Equação 8. Em Equações 9, 10, 11 e 12, respectivamente, tem-se as matrizes de massa e inércia, rigidez, amortecimento e forças aplicadas.

$$[M][\ddot{z}] + [C][\dot{z}] + [K][z] = 0 \quad (24)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -C_{S1} & -C_{S2} & -C_{S3} & -C_{S4} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & aC_{S1} & aC_{S2} & -bC_{S3} & -bC_{S4} \\ -C_1 & C_{42} & aC_{S1} & C_{S1} + C_{P1} & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & C_{52} & aC_{S2} & 0 & C_{S2} + C_{P2} & 0 & 0 \\ -C_3 & C_{62} & -bC_{S3} & 0 & 0 & C_{S3} + C_{P3} & 0 \\ -C_4 & C_{72} & -bC_{S4} & 0 & 0 & 0 & C_{S4} + C_{P4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Tal que,

$$C_{11} = C_{S1} + C_{S2} + C_{S3} + C_{S4}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} = C_{21} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S1} - \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S2} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S3} - \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S4} \\
C_{13} = C_{31} &= 2bC_3 - 2aC_1 \\
C_{22} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right)^2 C_{S1} + \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right)^2 C_{S2} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right)^2 C_{S3} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right)^2 C_{S4} \\
C_{23} = C_{32} &= a \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S2} - a \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S1} - b \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S3} + b \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S4} \\
C_{24} = C_{42} &= -\left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S1} \\
C_{25} = C_{52} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) C_{S2} \\
C_{26} = C_{62} &= \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S3} \\
C_{27} = C_{72} &= -\left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) C_{S4} \\
C_{33} &= 2C_{S1}a^2 + 2C_{S3}b^2
\end{aligned}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & -K_{S1} & -K_{S2} & -K_{S3} & -K_{S4} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & aK_{S1} & aK_{S2} & -bK_{S3} & -bK_{S4} \\ -K_{S1} & K_{42} & aK_{S1} & K_{44} & 0 & 0 & 0 \\ -K_{S2} & K_{52} & aK_{S2} & 0 & K_{55} & 0 & 0 \\ -K_{S3} & K_{62} & -bK_{S3} & 0 & 0 & K_{66} & 0 \\ -K_{S4} & K_{72} & -bK_{S4} & 0 & 0 & 0 & K_{77} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Tal que,

$$\begin{aligned}
K_{11} &= K_{S1} + K_{S2} + K_{S3} + K_{S4} \\
K_{12} = K_{21} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S1} - \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S2} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S3} - \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S4} \\
K_{13} = K_{31} &= 2(bK_{S3} - aK_{S1}) \\
K_{22} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right)^2 K_{S1} + \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right)^2 K_{S2} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S3} + \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right)^2 K_{S4} \\
K_{23} = K_{32} &= a \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S2} - a \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S1} - b \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S3} + b \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S4} \\
K_{24} = K_{42} &= -\left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S1} \\
K_{25} = K_{52} &= \left(\frac{\text{track}_{frt}}{2}\right) K_{S2} \\
K_{26} = K_{62} &= \left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S3} \\
K_{27} = K_{72} &= -\left(\frac{\text{track}_{rr}}{2}\right) K_{S4} \\
K_{33} &= 2(a^2K_{S1} + b^2K_{S3}) \\
K_{44} &= K_{S1} + K_{P1} \\
K_{55} &= K_{S2} + K_{P2} \\
K_{66} &= K_{S3} + K_{P3} \\
K_{77} &= K_{S4} + K_{P4}
\end{aligned}$$

$$[F] = [F_{11} \quad F_{12} \quad F_{13} \quad F_{14} \quad F_{15} \quad F_{16} \quad F_{17}] \quad (28)$$

Tal que,

$$F_{11} = -m_b g + L_{S0}(K_{S1} + K_{S2} + K_{S3} + K_{S4})$$

$$F_{12} = L_{S0} \left( \frac{track_{frt}}{2} \right) (-K_{S1} + K_{S2} - K_{S3} + K_{S4})$$

$$F_{13} = L_{S0}(a)(K_{S1} + K_{S2} - K_{S3} - K_{S4})$$

$$F_{14} = K_{P1}(L_{T0}) - K_{S1}(L_{S0}) - m_1 g$$

$$F_{15} = K_{P2}(L_{T0}) - K_{S2}(L_{S0}) - m_2 g$$

$$F_{16} = K_{P3}(L_{T0}) - K_{S3}(L_{S0}) - m_3 g$$

$$F_{17} = K_{P4}(L_{T0}) - K_{S4}(L_{S0}) - m_4 g$$

### 3.5 Perfil de pista

Os modelos utilizados para as análises foram codificados no software matemático MATLAB® para a realização dos cálculos. Nessa etapa, é necessário definir o tipo de *input* ao qual o veículo será submetido, assim, a fim de simular uma situação próxima à realidade, foi estabelecida uma função correspondente à uma lombada (ondulação transversal), conforme as Equações 29 e 30 que correspondem ao perfil de deslocamento e de velocidade respectivamente, e que foi aplicada nos estudos no domínio do tempo.

Esta modelagem do perfil de pista foi implementada no software MATLAB®, a fim de que fosse possível representar o perfil de pista a cada instante de tempo da simulação (Figura 17). Os parâmetros da pista utilizados para gerar o perfil analisado são apresentados na Tabela 5, cujos valores foram baseados nos utilizados por Phalke e Mitra (2017), assim como o próprio perfil de pista.

*Tabela 5 - Parâmetros da Pista*

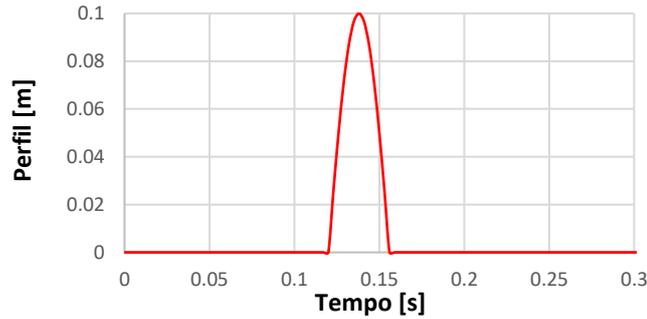
Parâmetro	Valor	Unidade
Altura da Lombada ( $h_L$ )	0.10	m
Comprimento da Lombada ( $L_L$ )	0.30	m
Velocidade Linear do Veículo ( $v$ )	8.33	m/s
Distância do Veículo à Lombada ( $d_L$ )	1.00	m
Defasagem ( $def$ )	1.00	m

Fonte: Dos Autores (2023)

$$zr = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L}{v} \right) \right] \quad zr = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ zr, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (29)$$

$$\dot{z}r = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ \dot{z}r, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (30)$$

Figura 17 - Perfil da Lombada do Modelo 2GDL



Fonte: Dos Autores (2023)

Para as análises do modelo de 7 graus de liberdade foram utilizados dois *inputs*: um defasado apenas entre os eixos dianteiro e traseiro e o outro defasado entre os eixos e entre as rodas, fazendo com que a lombada atinja as rodas individualmente em diferentes espaços de tempo para provocar a rolagem da carroceria. A amplitude dos *inputs* utilizados foi igual à amplitude apresentada anteriormente. As Equações 31 a 34 apresentam o equacionamento do perfil de deslocamento e de velocidade da ondulação transversal defasada entre eixos.

$$zr_1 = zr_2 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L}{v} \right) \right] \quad zr_1 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ zr_1, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (31)$$

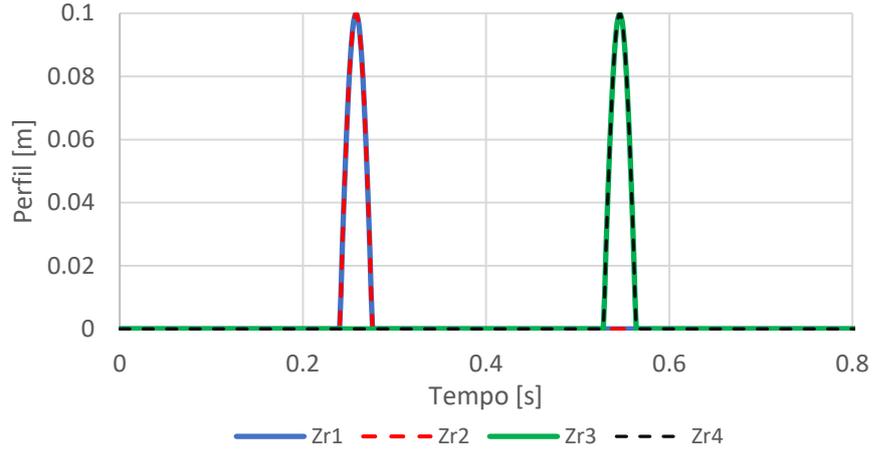
$$\dot{z}r_1 = \dot{z}r_2 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_1 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ \dot{z}r_1, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (32)$$

$$zr_3 = zr_4 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L + L_L}{v} \right) \right] \quad zr_3 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ zr_3, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (33)$$

$$\dot{z}r_3 = \dot{z}r_4 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L + L}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_3 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + L}{v} \\ \dot{z}r_3, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L + L_L}{v} \end{cases} \quad (34)$$

A partir destas equações, o perfil da pista para a lombada com defasagem entre eixos foi gerado, conforme demonstra a Figura 18.

Figura 18 - Perfil da Lombada do Modelo 7GDL com defasagem longitudinal



Fonte: Dos Autores (2023)

As Equações 35 a 42 e a Figura 19 apresentam a modelagem matemática e o perfil da pista com lombada defasada individualmente entre as rodas, respectivamente.

$$zr_1 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L + def}{v} \right) \right] \quad zr_1 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + def}{v} \\ zr_1, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + def}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + def}{v} \end{cases} \quad (35)$$

$$\dot{z}r_1 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L + def}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_1 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + def}{v} \\ \dot{z}r_1, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + def}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + def}{v} \end{cases} \quad (36)$$

$$zr_2 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L}{v} \right) \right] \quad zr_2 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ zr_2, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (37)$$

$$\dot{z}r_2 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_2 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L}{v} \\ \dot{z}r_2, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L}{v} \end{cases} \quad (38)$$

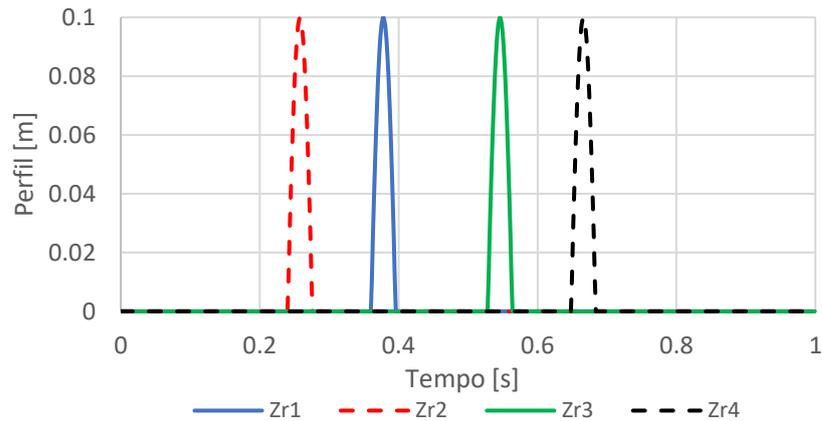
$$zr_3 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L + L}{v} \right) \right] \quad zr_3 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + L}{v} \\ zr_3, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + L}{v} \end{cases} \quad (39)$$

$$\dot{z}r_3 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L + L}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_3 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + L}{v} \\ \dot{z}r_3, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + L}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + L}{v} \end{cases} \quad (40)$$

$$zr_4 = h_L \text{sen} \left[ \frac{\pi v}{L_L} \left( t - \frac{d_L + L + def}{v} \right) \right] \quad zr_4 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + L + def}{v} \\ zr_4, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + L + def}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + L + def}{v} \end{cases} \quad (41)$$

$$\dot{z}r_4 = \frac{\left\{ h_L v \pi \cos \left[ \frac{v \pi \left( t - \frac{d_L + L + def}{v} \right)}{L_L} \right] \right\}}{L_L} \quad \dot{z}r_4 = \begin{cases} 0, & t < \frac{d_L + L + def}{v} \\ \dot{z}r_4, & \frac{d_L}{v} \geq t \leq \frac{d_L + L_L + L + def}{v} \\ 0, & t > \frac{d_L + L_L + L + def}{v} \end{cases} \quad (42)$$

Figura 19 - Perfil da Lombada do Modelo 7GDL com defasagem longitudinal e lateral



Fonte: Dos Autores (2023)

Para realizar as análises nos modelos *quarter car* e *full vehicle*, foram necessários definir os valores dos parâmetros base dos modelos, para, só então, variá-los individualmente. As Tabelas 6 e 7 apresentam os valores dos parâmetros utilizados para os modelos de 7GDL e 2GDL, respectivamente, cujos valores são baseados nos utilizados por Chitale, Patil e Pathan (2021).

Tabela 6 - Parâmetros Base do Modelo 7GDL

Parâmetro	Valor	Unidade
Massa suspensa	1000	kg
Massa não suspensa dianteira esquerda	75	kg
Massa não suspensa dianteira direita	75	kg
Massa não suspensa traseira esquerda	75	kg
Massa não suspensa traseira direita	75	kg
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão dianteira esquerda	1050	Ns/m
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão dianteira direita	1050	Ns/m
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão traseira esquerda	1050	Ns/m
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão traseira direita	1050	Ns/m
Coefficiente de Rigidez da Suspensão dianteira esquerda	14500	N/m
Coefficiente de Rigidez da Suspensão dianteira direita	14500	N/m
Coefficiente de Rigidez da Suspensão traseira esquerda	14500	N/m
Coefficiente de Rigidez da Suspensão traseira direita	14500	N/m
Coefficiente de Rigidez do Pneu dianteiro esquerdo	135000	N/m
Coefficiente de Rigidez do Pneu dianteiro direito	135000	N/m
Coefficiente de Rigidez do Pneu traseiro esquerdo	135000	N/m
Coefficiente de Rigidez do Pneu traseiro direito	135000	N/m
Comprimento do Eixo (Bitola)	1.50	m
Distância do Eixo Dianteiro ao CG	1.20	m
Distância do Eixo Traseiro ao CG	1.20	m
Distância entre eixos	2.40	m

Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 7 - Parâmetros Base do Modelo 2GDL

Parâmetro	Valor	Unidade
Coefficiente de Amortecimento da Suspensão	1050	Ns/m
Rigidez de Mola da Suspensão	19165	N/m
Rigidez de Mola do Pneu	135000	N/m
Massa Suspensa	250	kg
Massa Não-Suspensa	100	kg

Fonte: Dos Autores (2023)

### 3.6 Método de Newmark

Para a solução numérica dos modelos com 2 GDL e 7 GDL, foi aplicado o método de Newmark, o qual consiste na integração direta implícita das equações de movimento que definem o sistema dinâmico em questão (NEWMARK, 1959). Segundo Newmark (1959), esse método é capaz de solucionar matematicamente situações com quaisquer relações entre força e deslocamento e níveis de complexidade.

Este método considera o movimento no instante de tempo igual a  $(t + \Delta t)$  para cálculos de resultados no mesmo instante de tempo. As Equações 43, 44 e 45 definem o deslocamento (representado por  $\vec{x}(t_i)$  em  $t$ ,  $\vec{x}(t_{i+1})$  em  $t + \Delta t$ ), a velocidade (representado por  $\dot{\vec{x}}(t_i)$  em  $t$ ,  $\dot{\vec{x}}(t_{i+1})$  em  $t + \Delta t$ ) e aceleração (representado por  $\ddot{\vec{x}}(t_i)$  em  $t$ ,  $\ddot{\vec{x}}(t_{i+1})$  em  $t + \Delta t$ ), respectivamente, variando no tempo (SILVEIRA, 2015).

$$\vec{x}(t_{i+1}) = (a_0[M] + a_5[C] + [K])^{-1} \left\{ \vec{F}(t_{i+1}) + [M](a_0\vec{x}(t_i) + a_1\dot{\vec{x}}(t_i) + a_2\ddot{\vec{x}}(t_i)) + [C](a_5\dot{\vec{x}}(t_i) + a_6\ddot{\vec{x}}(t_i) + a_7\ddot{\vec{x}}(t_i)) \right\} \quad (43)$$

$$\dot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_5(\dot{\vec{x}}(t_{i+1}) - \dot{\vec{x}}(t_i)) - a_6\ddot{\vec{x}}(t_i) + a_7\ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (44)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_0(\ddot{\vec{x}}(t_{i+1}) - \ddot{\vec{x}}(t_i)) - a_1\dot{\vec{x}}(t_i) + a_2\ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (45)$$

Tal que,

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha\Delta t}$$

$$a_2 = \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right)$$

$$a_3 = (1 - \delta)\Delta t$$

$$a_4 = \delta\Delta t$$

$$a_5 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}$$

$$a_6 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_7 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

Segundo Silveira (2015) os coeficientes  $\alpha$  e  $\delta$  são determinantes para a estabilidade do método, de modo que Newmark utiliza os valores  $\alpha = 0,25$  e  $\delta = 0,5$ , obtendo um método considerado incondicionalmente estável. O processo de iteração parte da Equação 46 de aceleração, a qual considera valores iniciais de deslocamento de velocidade conhecidos.

$$\vec{\ddot{x}}(t_0) = [M]^{-1} \left( \vec{F}(t_0) - [C]\vec{\dot{x}}(t_0) - [K]\vec{x}(t_0) \right) \quad (46)$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As análises realizadas no presente trabalho foram feitas a partir dos resultados obtidos através dos cálculos com auxílio computacional do software MATLAB®.

### 4.1 Análise da influência dos parâmetros de suspensão no conforto do veículo

Compreender como cada um dos parâmetros de suspensão influenciam na resposta dinâmica de um veículo auxilia de forma extrema nas tomadas de decisão em relação a qual o melhor parâmetro a se alterar a fim de se obter a resposta dinâmica do sistema desejada e tomar essa decisão de maneira assertiva. Esse entendimento é de suma importância para toda a performance do veículo.

No caso do estudo de conforto, os engenheiros envolvidos conhecerem como cada parâmetro atua é de grande ajuda quando se está no processo de calibragem da suspensão, que é o momento em que se define os componentes, as rigidezes, constante de amortecimento, entre outros.

Uma das maneiras que se pode avaliar o conforto de um determinado automóvel é através das acelerações verticais no sistema, em especial a aceleração atrelada à massa suspensa, pois essa indica a aceleração sentida pelos ocupantes do veículo durante um trajeto

Dito isso, o intuito desta seção é investigar a influência de rigidez de mola, rigidez de pneu, coeficiente de amortecimento, massa suspensa e massa não-suspensa, na resposta de aceleração vertical na massa não-suspensa e principalmente na massa suspensa dos modelos.

### 4.2 Modelo 2 GDL no Domínio da Frequência

Para a análise da resposta dinâmica do sistema no domínio da frequência, foram usados como referência os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 7. A partir destes parâmetros foram calculadas as frequências naturais do sistema, as quais têm seus modos de vibrar relacionados ao movimento vertical da massa suspensa (*bounce*) e movimento vertical da massa não-suspensa. A Tabela 8 apresenta os valores das frequências naturais não amortecidas do sistema. Além disso, foram geradas as curvas que relacionam a transmissibilidade de aceleração vertical para a massa suspensa e para a massa não suspensa, e a transmissibilidade de força no contato pneu-solo com a frequência do *input* de pista.

*Tabela 8 - Frequências Naturais do Sistema com 2GDL*

Modo de Vibrar	Frequência [Hz]
<i>Bounce</i> da Carroceria	1.3182
Movimento da Massa Não Suspensa	6.9369

Fonte: Dos Autores (2023)

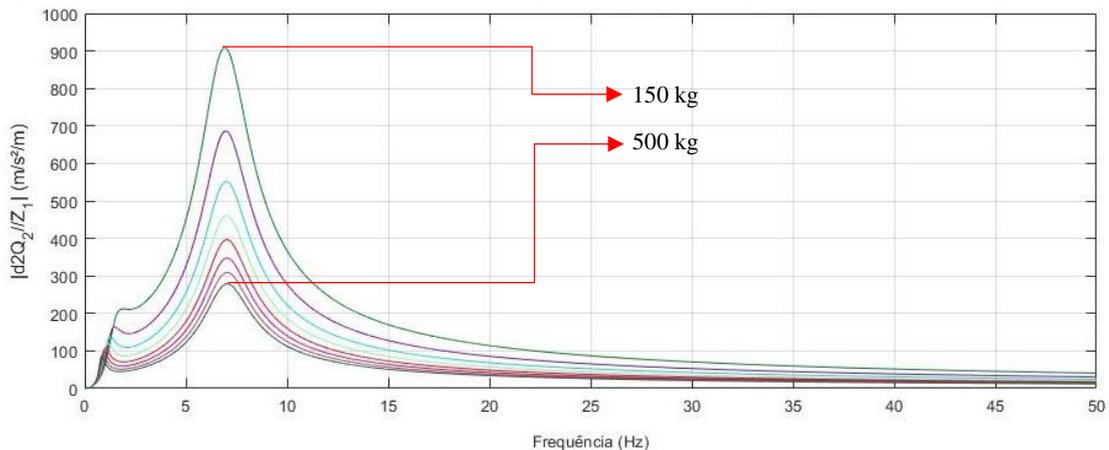
#### 4.2.1 Massa Suspensa

Para a análise da influência da massa suspensa na resposta dinâmica do veículo, foi assumido um intervalo de 150 a 500 kg, obtendo curvas distintas em 50 kg entre si (Figuras 20 a 22).

Foi analisada a influência da variação da massa suspensa sobre a resposta de aceleração vertical transmitida para a mesma. A partir da Figura 20, observa-se que veículos com menor massa apresentam maior transmissão de aceleração para a carroceria, quando avaliados em frequências mais baixas, principalmente quando coincidem com as frequências naturais do sistema. Em contrapartida, veículos com massas maiores têm essa transmissão consideravelmente reduzida, o que favorece o conforto atribuído ao veículo. Esse comportamento está relacionado à inércia do veículo de modo que para romper essa inércia é necessária maior força para veículos mais pesados, o que resulta em menor amplitude de deslocamento, ou seja, menor aceleração vertical.

Vale ressaltar que a frequência natural relativa ao modo de vibrar do movimento vertical da massa suspensa (que pode ser observada no primeiro pico do gráfico) aumenta ao passo que se reduz o valor da massa.

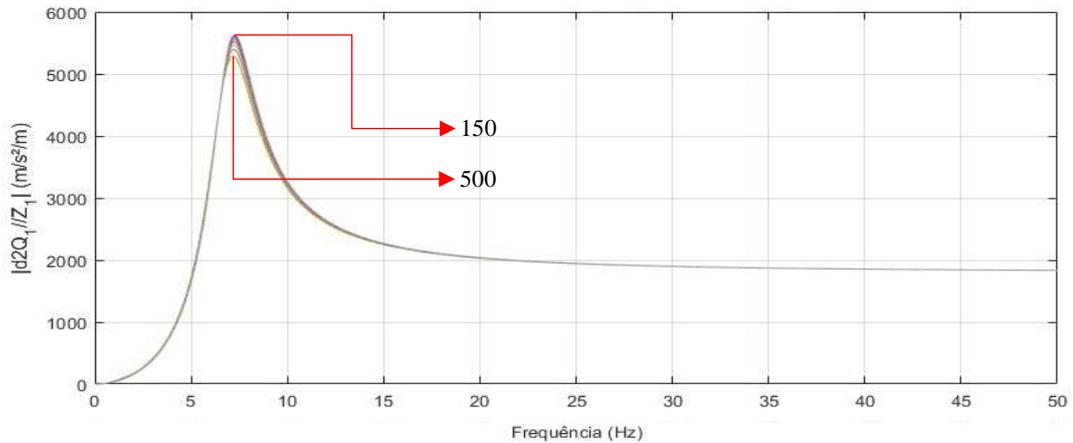
Figura 20 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando massa suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Conforme apresentado na Figura 21, nota-se que a variação da massa suspensa tem pouca influência na resposta dinâmica da massa não-suspensa. A faixa de frequência na qual pode-se constatar esta pequena influência de forma mais acentuada, é a região próxima da frequência de movimento vertical da massa não-suspensa, onde a amplitude de deslocamento é maior para menores valores de massa.

Figura 21 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando massa suspensa

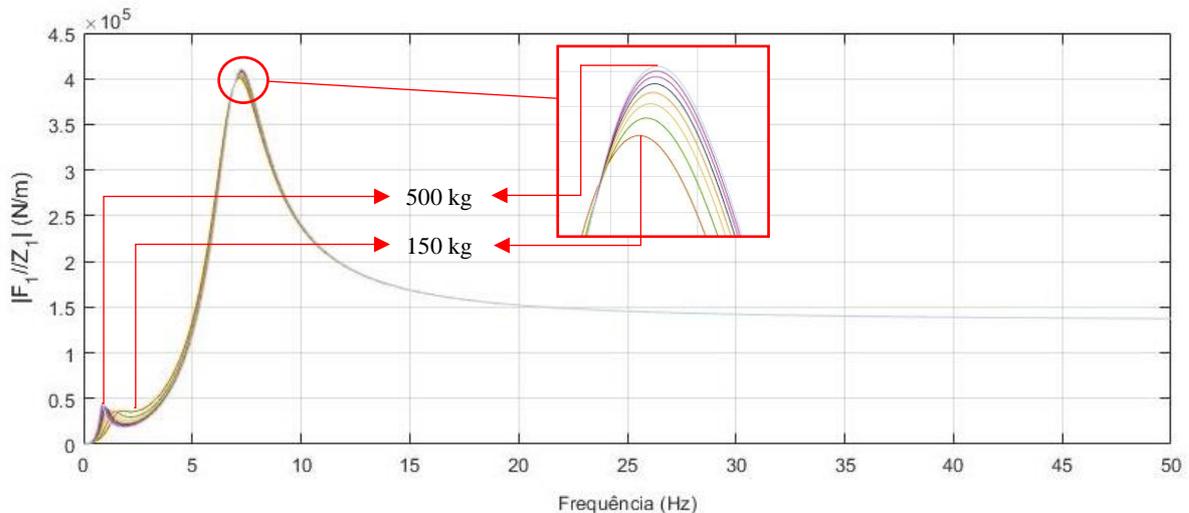


Fonte: Dos Autores (2023)

A partir das curvas mostradas na Figura 22, nota-se que para maiores valores de massa suspensa tem-se maior transmissibilidade de força no solo, tanto para a região da primeira frequência natural do sistema, quanto para a segunda. É possível observar pelo gráfico de transmissibilidade de força no solo, a mesma tendência de variação de frequência natural observada nas análises de transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa.

Vale ressaltar que o aumento da massa do veículo, de modo geral, além de aumentar a força aplicada pelo mesmo sobre o solo, conseqüentemente gera uma força de resposta do solo sobre o veículo de maior intensidade. Assim, para suportar essas forças de maior magnitude, se faz necessário o uso de sistemas de suspensão mais robustos, podendo haver a necessidade de alteração de outros parâmetros para garantir maior conforto aos passageiros do veículo e maior confiabilidade do sistema, além de aumentar os custos de projeto e de produção.

Figura 22 - Transmissibilidade de força (em módulo) no solo variando massa suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

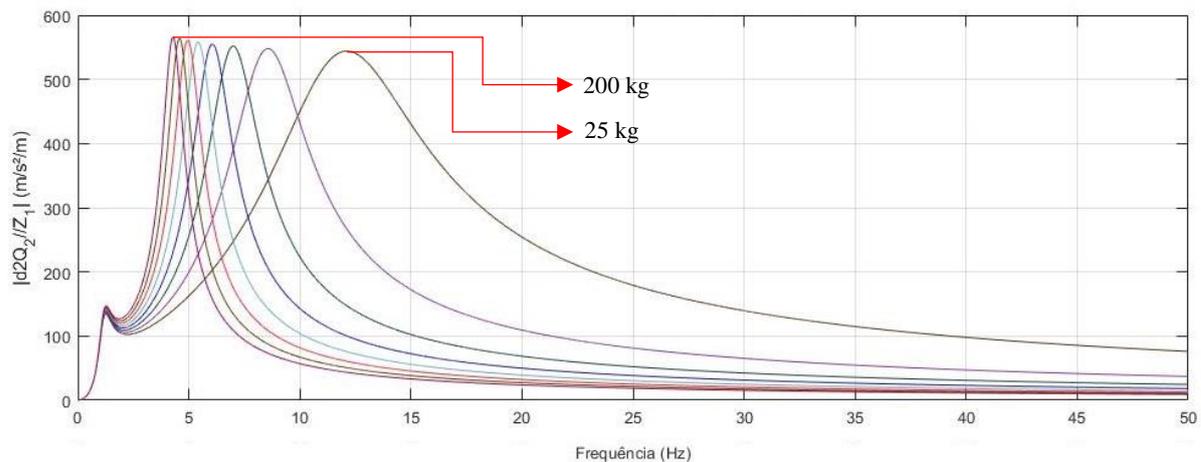
#### 4.2.2 Massa não-suspensa

Para a análise da influência da massa não-suspensa na resposta dinâmica do veículo, foi assumido um intervalo de 25 a 200 kg, obtendo curvas distintas em 25 kg entre si (Figuras 23 a 25).

Ao analisar a influência da massa não-suspensa sobre a resposta dinâmica do veículo, observa-se que, em termos de amplitude de aceleração na massa suspensa, o efeito causado por sua variação não é tão relevante (Figura 23). Todavia, a frequência natural relativa ao movimento vertical da massa não-suspensa (segunda frequência natural do sistema) sofre considerável alteração, tendo que para menores massas são obtidos maiores valores de frequência natural.

Na prática, quando se utiliza rodas de liga leve, a amplificação de deslocamento da massa suspensa ocorre em uma faixa de frequências maiores, as quais não são comumente atingidas por carros de passeio, e o contrário é observado com o uso de rodas mais pesadas como as de aço estampado.

Figura 23 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando massa não-suspensa

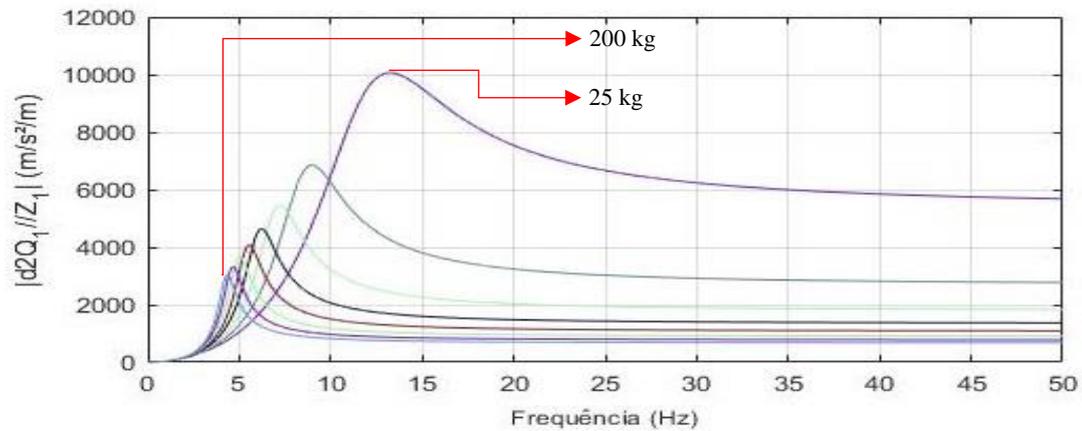


Fonte: Dos Autores (2023)

A influência da variação da massa não-suspensa na resposta dinâmica da mesma é análoga ao observado para a variação de massa suspensa sobre a própria. Portanto, nota-se que com o aumento da massa tem-se uma menor amplitude de aceleração vertical e menor frequência natural (Figura 24).

Assim como para a massa suspensa, esse comportamento observado se deve ao fato que massas maiores requerem forças maiores para romper a inércia, logo a amplitude de deslocamento é menor.

Figura 24 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando massa não-suspensa

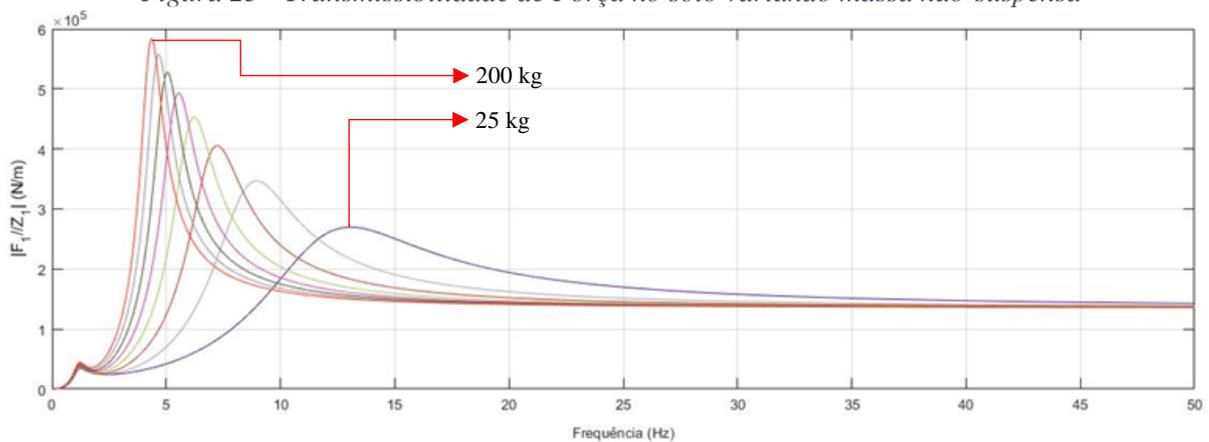


Fonte: Dos Autores (2023)

As curvas plotadas na Figura 25 mostram o comportamento da força de interação entre o pneu e o solo, de modo a tornar possível notar que para menores massas não-suspensas apresentam menores picos de transmissibilidade de força no solo para a faixa de frequência relativa ao movimento da própria massa não-suspensa. Além disso, nota-se também que há um considerável aumento da frequência natural relativa ao movimento vertical da massa não-suspensa.

Assim como comentado na análise de transmissibilidade de aceleração vertical para a massa suspensa, uma maneira de se observar a influência da massa não-suspensa na prática é através do uso de rodas de liga leve, a qual apresenta menor massa quando comparada às convencionais rodas de aço estampado. Conseqüentemente, o sistema será submetido a forças menores, favorecendo a durabilidade do mesmo e das próprias rodas.

Figura 25 - Transmissibilidade de Força no solo variando massa não-suspensa



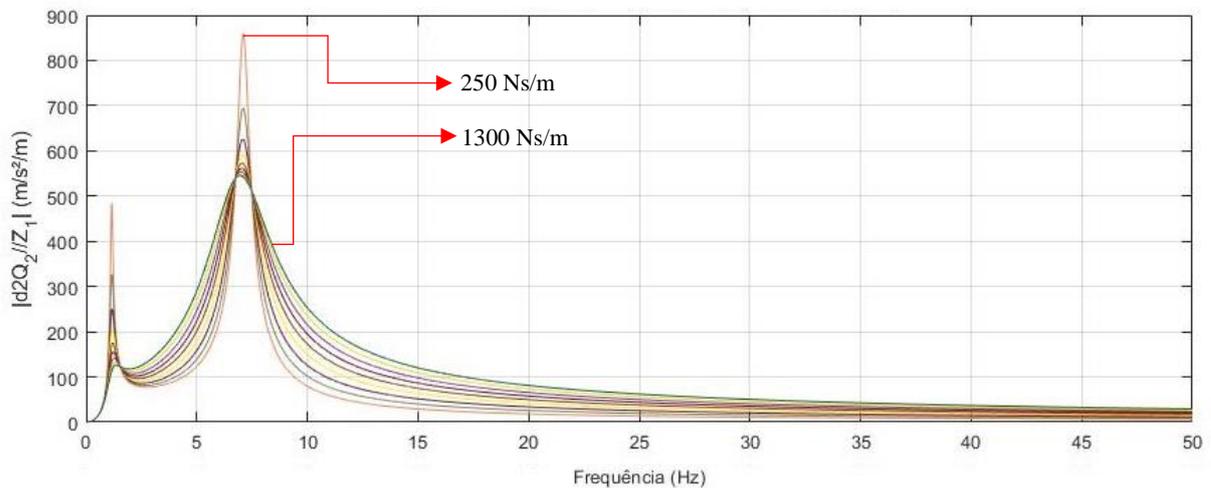
Fonte: Dos Autores (2023)

### 4.2.3 Coeficiente de Amortecimento

Para a análise da influência da massa não-suspensa na resposta dinâmica do veículo, foi assumido um intervalo de 250 a 1300 Ns/m, obtendo curvas distintas em 125 Ns/m entre si (Figuras 26 a 28).

O coeficiente de amortecimento do sistema de suspensão tem notável influência na resposta de aceleração vertical transmitida à massa suspensa em termos de amplitude. A Figura 26 mostra que esse parâmetro possui dois comportamentos distintos conforme a faixa de frequência analisada, sendo que para faixas próximas às frequências naturais do sistema (região onde ocorre a ressonância), a tendência é de se obter maior amplitude para menores coeficientes de amortecimento. Enquanto em regiões fora das faixas de frequência natural, tende a apresentar menor transmissão de aceleração vertical, o que pode ser justificado pelo fenômeno de transmissibilidade.

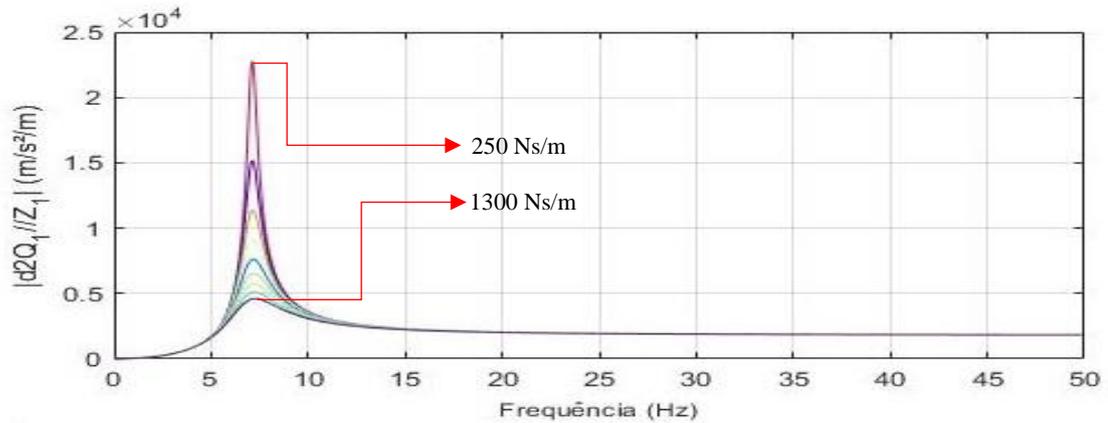
Figura 26 - Transmissibilidade de Aceleração para a massa suspensa variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

Em termos de massa não-suspensa, nota-se que o coeficiente de amortecimento da suspensão tem maior influência na região de ressonância, onde está localizada a segunda frequência natural do sistema, de modo que um sistema mais amortecido apresenta menor amplitude de transmissão de aceleração vertical. Vale notar que para faixas além da região de ressonância, esse parâmetro influi infimamente, vide Figura 27.

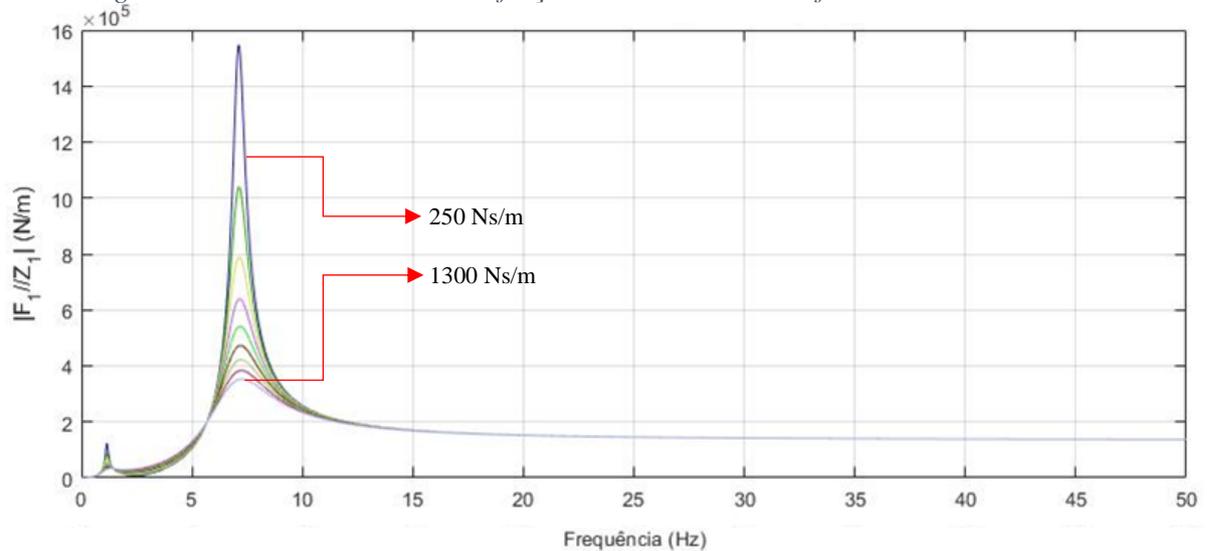
Figura 27 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

As curvas de transmissibilidade de força no solo plotadas na Figura 28 mostram que para maiores valores de coeficiente de amortecimento, para as regiões das frequências naturais o sistema apresenta menores picos de força, que variam de forma notável com a alteração do coeficiente de amortecimento. Esse comportamento se deve ao fato de que sistemas mais amortecidos mitigam o efeito de ressonância, e por gerar forças de interação com o solo de menor magnitude, não há a necessidade de aumentar a robustez do sistema de suspensão utilizado, reduzindo, assim, os custos associados ao projeto e à produção.

Figura 28 - Transmissibilidade de força no solo variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

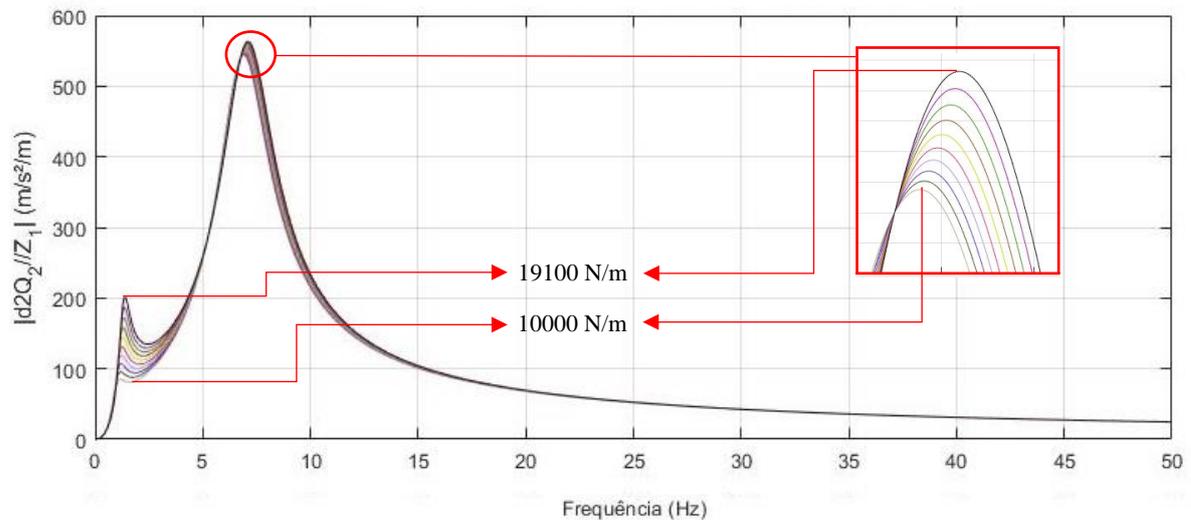
#### 4.2.4 Rigidez da Suspensão

Para a análise da influência da massa não-suspensa na resposta dinâmica do veículo, foi assumido um intervalo de 10000 N/m a 19100 N/m, obtendo curvas distintas em 1000 N/m entre si (Figuras 29 a 31).

O valor de rigidez da suspensão de um veículo influi consideravelmente na faixa de frequências que abrange a primeira frequência natural do sistema (primeiro pico), de modo que quanto maior a rigidez, maior é a transmissibilidade de aceleração para a carroceria, afetando negativamente o conforto dos passageiros. Além disso, o aumento da rigidez ocasiona, também, em maiores frequências naturais para o sistema, visto que a frequência natural é diretamente proporcional à rigidez do sistema.

Um exemplo muito claro dessa influência pode ser notado ao se comparar veículos de passeio com veículos desenvolvidos para competições automobilísticas, dado que o primeiro tipo preza um maior conforto enquanto o segundo foca em performance. Carros de passeio comumente apresentam suspensões menos rígidas (ditas como “macias”), logo, com menor transmissibilidade de aceleração vertical, e carros para competições utilizam suspensões mais rígidas, sendo consideravelmente menos confortáveis ao piloto, porém, garante melhor performance em curvas e melhor controle de movimentos laterais e rotacionais da carroceria.

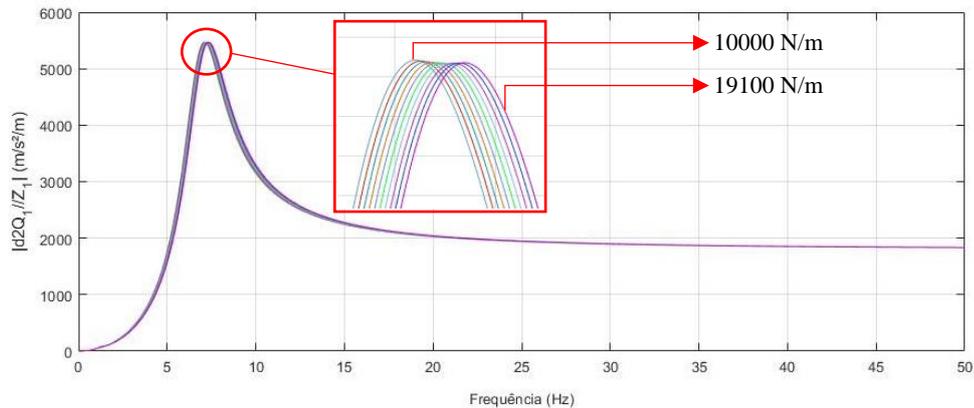
Figura 29 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando rigidez de suspensão



Fonte: Dos Autores (2023)

Como mostrado na Figura 30, nota-se que a variação da rigidez da suspensão não influi de forma considerável na transmissibilidade de aceleração vertical para a massa não suspensa. Esse comportamento se deve ao fato de que no veículo, ao receber um *input*, a suspensão terá maior atuação na absorção e dissipação da energia, reduzindo ao máximo possível a transmissibilidade à massa suspensa, porém, ela não atua de maneira similar na massa suspensa, visto que o pneu é quem absorve a energia de *input* da pista.

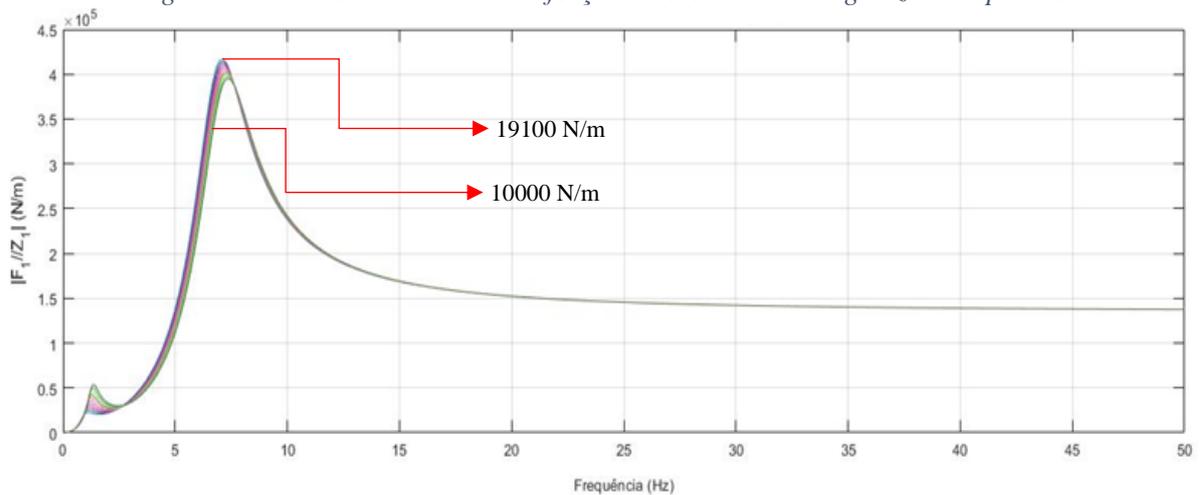
Figura 30 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando rigidez de suspensão



Fonte: Dos Autores (2023)

Conforme observado através das curvas plotadas na Figura 31, é possível notar que suspensão mais rígida apresenta maior transmissibilidade de força no solo para a região da primeira frequência natural do sistema. Contudo, ao analisar a região de segunda frequência natural, é possível notar o comportamento inverso, onde para maior rigidez de suspensão, menor será a transmissibilidade de força no solo.

Figura 31 - Transmissibilidade de força no solo variando rigidez de suspensão



Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.2.5 Rigidez do Pneu

Para a análise da influência da massa não-suspensa na resposta dinâmica do veículo, foi assumido um intervalo de 100000 N/m a 170000 N/m, obtendo curvas distintas em 10000 N/m entre si (Figuras 32 a 34).

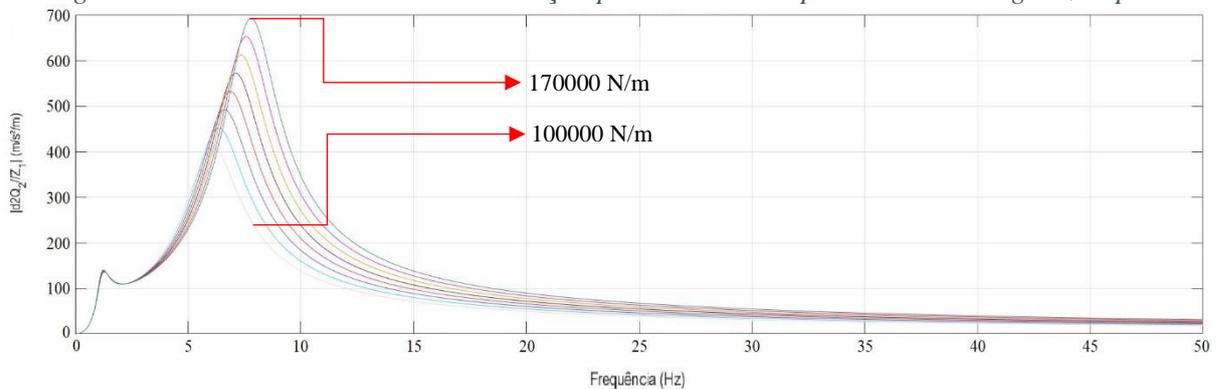
Análogo ao observado nas análises de variação da rigidez da suspensão, o aumento da rigidez do pneu influi no sistema de maneira a causar aumento tanto da segunda frequência natural do sistema (segundo pico), quanto da transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa, em especial, na faixa de frequência que abrange a segunda frequência natural. Nota-

se também que para frequências na faixa que abrange a primeira frequência natural do sistema, a influência desse parâmetro é bastante reduzida, gerando pouca alteração.

Na prática, esse comportamento pode ser observado ao se comparar a condução de um veículo com o pneu calibrado com muita pressão e com pneu vazio. Para a primeira situação, temos que, com o aumento da pressão interna do pneu, ele passa a apresentar maior rigidez e, portanto, maior transmissibilidade. Em contrapartida, com o pneu calibrado a baixa pressão, este apresenta menor rigidez, absorvendo mais energia e transmitindo menos à massa suspensa.

Todavia, a condição de pneu com baixíssima pressão interna não é recomendada, visto que ao passar por uma irregularidade severa de pista, a energia a ser absorvida pode ultrapassar o limite capaz do pneu, ocasionando em um alto impacto na roda que pode ser danificada. Além disso, pneus murchos prejudicam a estabilidade do veículo, desgastam prematuramente o próprio pneu e aumentam o consumo de combustível.

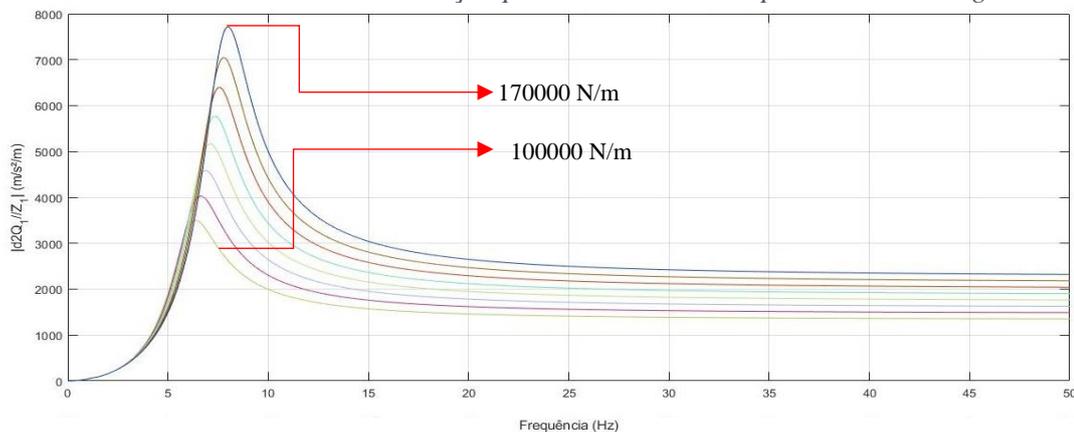
Figura 32 - Transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa variando rigidez de pneu



Fonte: Dos Autores (2023)

Assim como observado na análise anterior, maior rigidez de pneu ocasiona em maior transmissibilidade para a massa não-suspensa, além do aumento da segunda frequência natural. Nota-se que a influência deste parâmetro sobre o comportamento dinâmico do sistema é considerável inclusive em altas frequências, em especial na faixa que abrange a frequência natural relativa ao modo de vibrar do movimento vertical da massa não-suspensa. Isso se deve ao fato de que a frequência natural é diretamente proporcional à raiz da rigidez equivalente do sistema.

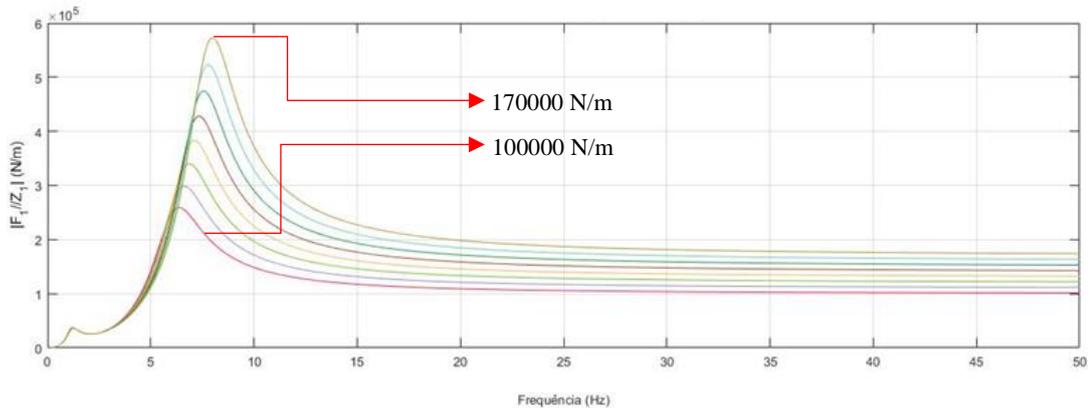
Figura 33 - Transmissibilidade de aceleração para a massa não-suspensa variando rigidez de pneu



Fonte: Dos Autores (2023)

A partir da análise da Figura 34, nota-se que para pneus mais rígidos há um comportamento nitidamente distinto conforme a faixa de frequência analisada, onde para a região da primeira frequência natural, referente ao movimento vertical da massa suspensa, a alteração da rigidez de pneu tem influência praticamente nula. Em contraponto, na região da segunda frequência natural é possível notar um claro aumento tanto da amplitude de transmissibilidade de força no solo quanto do valor da própria frequência natural relativa ao movimento vertical da massa não-suspensa, frente a um aumento da rigidez de pneu.

Figura 34 - Transmissibilidade de força no solo variando rigidez de pneu



Fonte: Dos Autores (2023)

### 4.3 Modelo 2 GDL no Domínio do Tempo

Para a análise da resposta dinâmica do sistema no domínio do tempo, foram geradas as curvas que relacionam a aceleração vertical para a massa suspensa, variando os parâmetros de: massa suspensa, rigidez de suspensão, coeficiente de amortecimento, massa não-suspensa e rigidez do pneu. Tal análise foi realizada com auxílio do software de cálculo matemático MATLAB®, através do qual foi também calculada a frequência natural às massas suspensa e não-suspensa, conforme a Tabela 5.

O *input* utilizado para essas análises foi do tipo ondulação transversal, representando uma lombada, conforme a Figura 17. Para todos os parâmetros, a taxa de variação dos valores foi estabelecida de forma a se obter 5 curvas distintas dentro do intervalo desejado.

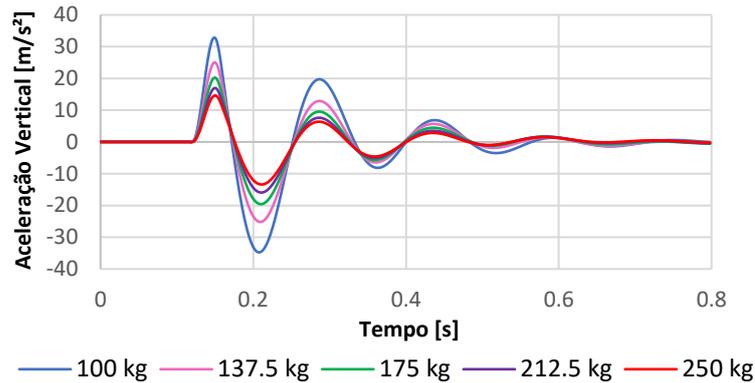
#### 4.3.1 Massa suspensa

Para a análise da influência da variação da massa suspensa na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de 100 kg a 250 kg como mostrado na Tabela 9. Nota-se que para a menor massa suspensa, a amplitude de aceleração vertical é consideravelmente maior, visto que o valor atingido para a massa de 100 kg é 124% maior que o valor para a massa de 250 kg, vide Figura 35. O mesmo foi observado na Figura 20, onde a transmissibilidade de aceleração para a massa suspensa é maior em todo o regime de frequência analisado para a menor massa,

o que é desfavorável ao conforto atribuído ao veículo, dado que será transmitida aos passageiros uma maior taxa de aceleração vertical.

Outra ocorrência observada tanto na análise no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, é o comportamento das frequências naturais do sistema, visto que a frequência associada ao movimento de *bounce* massa suspensa aumenta significativamente com a diminuição desta massa. Este comportamento pode ser comprovado pelos resultados obtidos a partir dos cálculos feitos através do software.

Figura 35 - Curva de aceleração vertical variando a massa suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 9 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a massa suspensa – 2GDL

Massa Suspensa [kg]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Frequência Natural [Hz]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	<i>Bounce</i> da Massa Suspensa	Movimento da Massa não-suspensa
100	32.7591	-34.7497	2.0770	6.9611
137.5	25.0276	-25.1731	1.7742	6.9497
175	20.2312	-19.5727	1.5741	6.9435
212.5	16.9719	-15.9252	1.4292	6.9396
250	14.6147	-13.3832	1.3182	6.9369

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.3.2 Rigidez de Suspensão

Para a análise da influência da variação da rigidez da suspensão na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de 10000 N/m a 19165 N/m como mostrado na Tabela 10. Nota-se que a variação da rigidez da suspensão possui uma influência ínfima na resposta dinâmica do sistema para o *input* em questão. Dado que este *input* tem uma frequência de 13,89 Hz, que coincide com uma faixa de baixa variação de transmissibilidade para diferentes valores de rigidez, em contraponto, caso a frequência de *input* estivesse na faixa próxima à primeira frequência natural, haveria uma notável variação da aceleração vertical.

Além disso, com o aumento da rigidez de suspensão, é possível observar um simultâneo aumento dos valores das frequências naturais do sistema, porém com a primeira apresentando maior impacto, o que também pode ser observado na Figura 36.

Figura 36 - Curva de aceleração vertical variando rigidez de suspensão

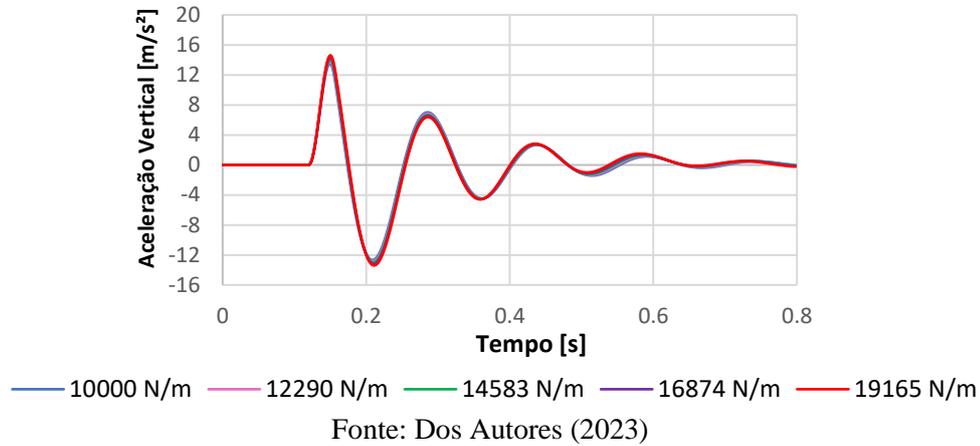


Tabela 10 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a rigidez de suspensão – 2GDL

Rigidez da Suspensão [N/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Frequência Natural [Hz]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Bounce da Massa Suspensa	Movimento da Massa não-suspensa
10000	13.4785	-12.6438	0.9776	6.7566
12290	13.7640	-12.8027	1.0766	6.8015
14583	14.0488	-12.9796	1.1650	6.8466
16874	14.3322	-13.1733	1.2450	6.8917
19165	14.6147	-13.3832	1.3182	6.9396

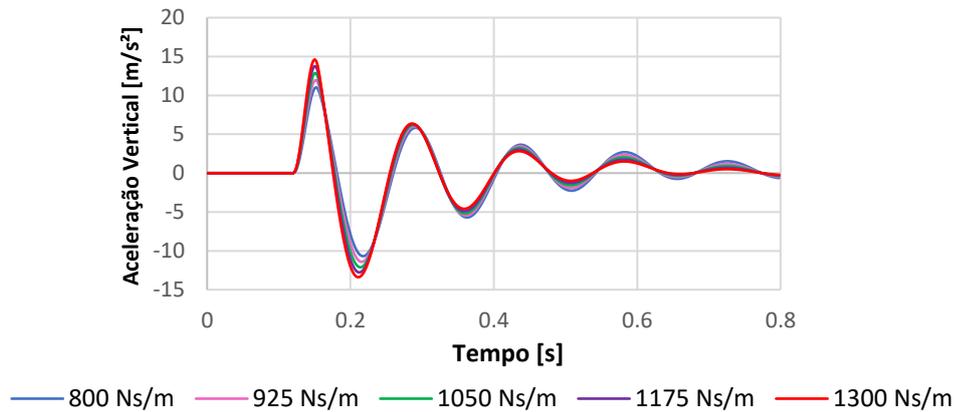
Fonte: Dos Autores (2023)

### 4.3.3 Coeficiente de Amortecimento

Para a análise da influência da variação do coeficiente de amortecimento na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de 800  $Ns/m$  a 1300  $Ns/m$ , como mostrado na Tabela 8. É possível observar que com o aumento do coeficiente de amortecimento da suspensão, há também um aumento da aceleração vertical associada, porém, a uma redução no período de oscilação do sistema. Portanto, o impacto sentido pelo passageiro ao passar com o veículo por um obstáculo na pista será maior, contudo, será mais rapidamente dissipado, logo o carro oscilará por um menor tempo.

Ademais, os cálculos realizados não apresentam alterações nas frequências naturais do sistema, uma vez que o amortecimento irá alterar apenas as frequências naturais amortecidas, que não foram calculadas.

Figura 37 - Curva de aceleração vertical variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 11 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando o coeficiente de amortecimento – 2GDL

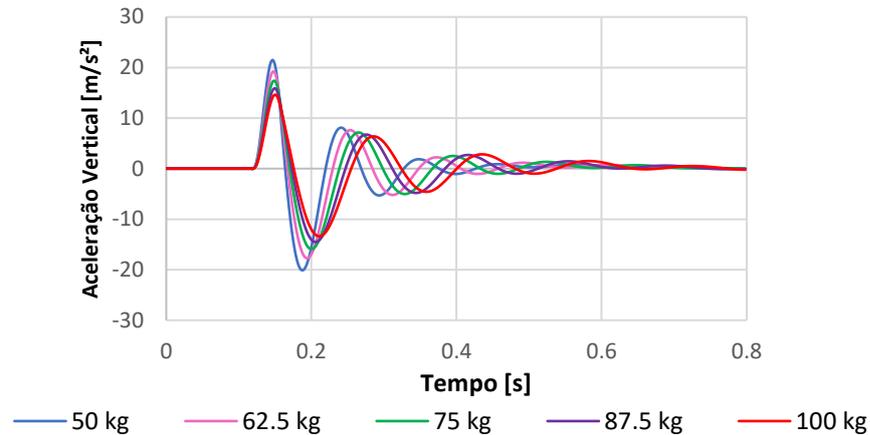
Coeficiente de Amortecimento [Ns/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Frequência Natural [Hz]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Bounce da Massa Suspensa	Movimento da Massa não-suspensa
800	10.9952	-10.6686	1.3182	6.9369
925	11.8963	-11.4109	1.3182	6.9369
1050	12.8470	-12.1032	1.3182	6.9369
1175	13.7524	-12.7652	1.3182	6.9369
1300	14.6147	-13.3832	1.3182	6.9369

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.3.4 Massa não-suspensa

Para a análise da influência da variação da massa não-suspensa na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de 50 kg a 100 kg, como mostrado na Tabela 12. É possível notar que com o aumento da massa, há um gradual aumento do período de oscilação, associado a uma redução da amplitude da aceleração vertical transmitida à massa suspensa (Figura 38). Esse comportamento é acentuado para a faixa de velocidade coincidente com a velocidade crítica da primeira frequência natural do sistema, que é aquela cuja massa entra em ressonância, tendo um decréscimo de aproximadamente 32% entre os picos extremos.

Figura 38 - Curva de aceleração vertical variando massa não-suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 12 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a massa não-suspensa – 2GDL

Massa não-suspensa [kg]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Frequência Natural [Hz]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Bounce da Massa Suspensa	Movimento da Massa não-suspensa
50	21.4669	-20.0560	1.3196	9.7996
62.5	19.1940	-17.7221	1.3193	8.7674
75	17.2919	-15.9251	1.3189	8.0056
87.5	15.8698	-14.5047	1.3186	7.4138
100	14.6147	-13.3832	1.3182	6.9369

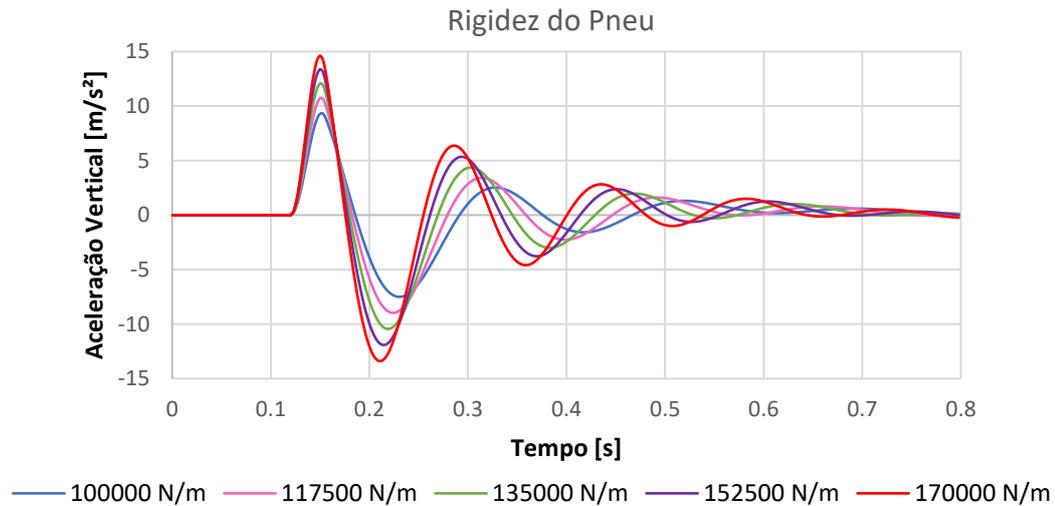
Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.3.5 Rigidez do Pneu

Para a análise da influência da variação da rigidez de pneu na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de  $100000\text{ N/m}$  a  $170000\text{ N/m}$ , como mostrado na Tabela 10. Observa-se que com o aumento da rigidez de pneu, há um crescimento significativo da aceleração vertical, bem como uma redução considerável do período de oscilação (Figura 39).

Pelos resultados expostos na Tabela 13, nota-se também que em termos de frequência natural, a frequência relativa ao modo de vibração vertical da massa não-suspensa apresenta variação crescente, assim como observado na análise feita para a influência da rigidez de pneu no domínio da frequência. Isso corrobora com comportamento observado para o período de oscilação.

Figura 39 - Curva de aceleração vertical variando rigidez de pneu



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 13 - Amplitude de aceleração e Frequência natural variando a rigidez de pneu – 2GDL

Rigidez do Pneu [N/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Frequência Natural [Hz]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Bounce da Massa Suspensa	Movimento da Massa não- suspensa
100000	9.3033	-7.4991	1.2696	5.5240
117500	10.7094	-8.9620	1.2868	5.9079
135000	12.0687	-10.4383	1.2998	6.2692
152500	13.3701	-11.8983	1.3100	6.6113
170000	14.6147	-13.3832	1.3182	6.9369

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.4 Modelo 7 GDL no domínio do tempo com defasagem longitudinal

As análises desenvolvidas através do modelo *full vehicle* (7 Graus de Liberdade) tem o intuito de verificar os resultados do modelo de 2 GDL e que os comportamentos e tendências se mantém num modelo mais completo e complexo. Para isso, os valores base do modelo de 2 GDL também foram mantidos para este estudo, com exceção da massa suspensa que para o modelo de 7 GDL é 4 vezes maior para representar a massa suspensa total de um veículo de passeio e não mais apenas  $\frac{1}{4}$  como é no modelo de 2GDL.

A Tabela 6 apresentam os valores utilizados no modelo de veículo completo. A partir destes valores, foram calculadas as frequências naturais do sistema, as quais são mencionadas na Tabela 14. Para todos os parâmetros, a taxa de variação dos valores foi estabelecida de forma a se obter 5 curvas distintas dentro do intervalo desejado.

Tabela 14 - Frequências Naturais do Sistema com 7 GDL

Modo de Vibirar	Frequência [Hz]
Bounce da Carroceria	1.1501
Roll	1.9234

<i>Ptch</i>	
Movimento da Massa Não Suspensa 1	1.9462
Movimento da Massa Não Suspensa 2	7.1058
Movimento da Massa Não Suspensa 3	7.1160
Movimento da Massa Não Suspensa 4	7.1361
	7.1369

Fonte: Dos Autores (2023)

Para as análises que se seguem serão monitoradas as respostas de aceleração vertical da massa suspensa e os movimentos angulares de *roll* e *pitch*. Para o ângulo de *pitch*, valores negativos representam que a dianteira do veículo se levanta em relação à traseira, movimento conhecido como *nose up*. Já para o ângulo de *roll*, valores positivos de rolagem indicam que o lado esquerdo do veículo está em mais alto do que o lado direito, portanto o veículo está movimentando em *roll* da esquerda para a direita.

A aceleração vertical e o ângulo de *pitch* serão avaliados segundo o *input* de lombada defasada longitudinalmente entre os eixos, ou seja, as rodas dianteiras passam pelo obstáculo primeiro e depois as rodas traseiras, conforme foi apresentado na metodologia (Figura 18). Visto que para este caso o ângulo de rolagem é praticamente nulo, será utilizado *input* defasado lateralmente, onde cada uma das rodas irar sobrepor o obstáculo em instantes de tempo diferentes, provocando assim a rolagem no veículo.

#### 4.4.1 Massa Suspensa

Para a análise da influência da variação da massa suspensa na resposta dinâmica do sistema com sete graus de liberdade, foi assumido um intervalo de 800 *kg* a 1600 *kg*, como mostrado na Tabela 15. Nota-se que com o aumento da massa suspensa, há uma considerável redução na transmissibilidade de vibração, resultando em menor aceleração vertical. Além disso, é possível observar que a primeira frequência natural também reduz com o aumento da massa suspensa, o que pode ser observado pelos resultados da Tabela 16.

Através da Figura 40b, pela curva de ângulo de *pitch*, observa-se que para massas suspensas maiores, há menor amplitude desse movimento. Isso se deve ao fato de que massas maiores resultam em valores de inércia de maior magnitude, logo, o movimento é mais limitado.

Vale ressaltar que, apesar do comportamento em termos de transmissibilidade de aceleração vertical com o aumento da massa suspensa ser positivo, a redução da frequência natural associada pode ser um contraponto. Isso se deve ao fato de que aumentam as chances de a frequência de *input* da via ser coincidente com a do movimento vertical da carroceria, causando, assim, amplificação da aceleração vertical gerada devido ao efeito de ressonância.

Contudo, como mencionado anteriormente, uma maior massa suspensa implica na alteração dos valores de inércia do veículo e na ação de forças de maior intensidade sobre os demais sistemas, em especial o de suspensão, de modo que se faz necessário empregar sistemas mais robustos. Assim, há aumento no custo total do projeto pela necessidade da aplicação de, por exemplo, buchas com características específicas de rigidez que muitas vezes não são comerciais, ou peças fabricadas em materiais com maior resistência mecânica.

Figura 40 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando massa suspensa

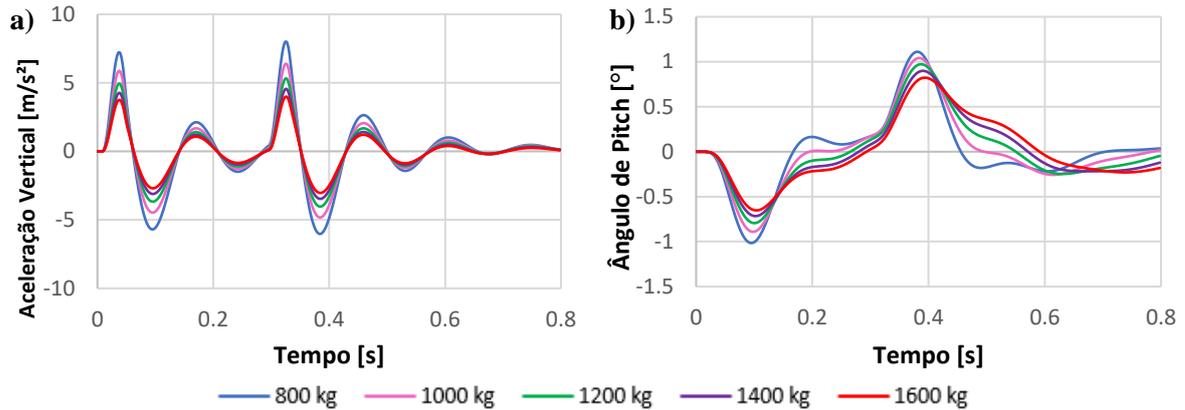


Tabela 15 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a massa suspensa – 7GDL

Massa Suspensa [kg]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Ângulo de Pitch [°]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.
800	7.9879	-6.0250	1.1110	-1.0154
1000	6.3668	-4.8250	1.0414	-0.8906
1200	5.2909	-4.0309	0.9728	-0.7932
1400	4.5334	-3.4609	0.8989	-0.7158
1600	3.9688	-3.0301	0.8229	-0.6517

Fonte: dos Autores (2023)

Tabela 16 - Frequências naturais variando a massa suspensa – 7GDL

Massa Suspensa [kg]	Frequência Natural (Hz)					
	Bounce da Massa Suspensa	Pitch	Movimento Massa não-suspensa 1	Movimento Massa não-suspensa 2	Movimento Massa não-suspensa 3	Movimento Massa não-suspensa 4
800	1.2854	2.1733	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369
1000	1.1501	1.9462	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369
1200	1.0502	1.7780	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369
1400	0.9725	1.6470	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369
1600	0.9098	1.5412	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369

Fonte: Dos Autores (2023)

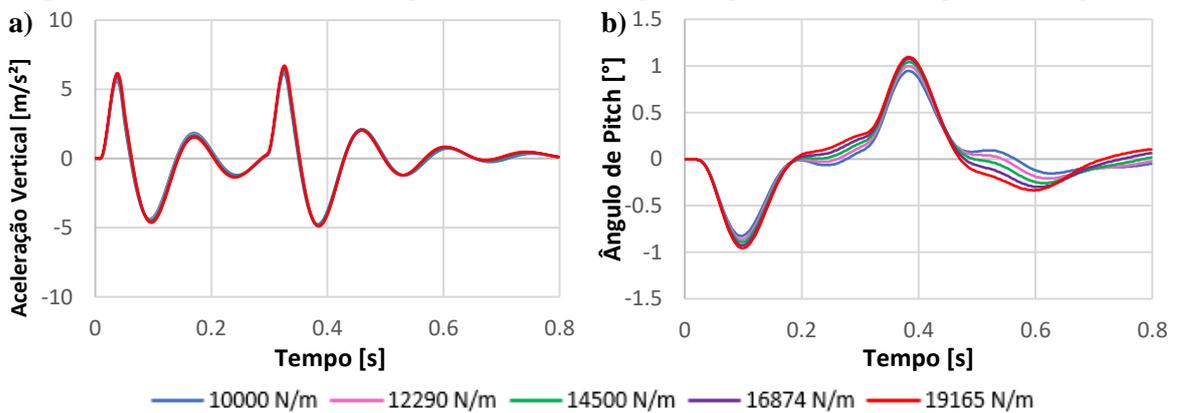
#### 4.4.2 Rigidez de Suspensão

Para a análise da influência da variação da rigidez de suspensão na resposta dinâmica do sistema com sete graus de liberdade, foi assumido um intervalo de 10000 N/m a 19165 N/m como mostrado na Tabela 17. A partir da Figura 41a é possível notar que para a faixa de frequência do *input* em questão, a variação da rigidez de suspensão não afeta de forma considerável a amplitude de aceleração vertical para a carroceria. Todavia, em outras faixas de frequência, com destaque para a faixa de frequência natural de *bounce*, a variação da rigidez de suspensão ocasiona nítida alteração na resposta dinâmica do veículo, como observado na Figura 29. Assim como observado para o modelo com dois graus de liberdade, corroborado com os

resultados da Tabela 18, verifica-se que com o aumento da rigidez de suspensão, há um gradual aumento da frequência natural associada ao movimento de *bounce* da carroceria.

Em termos práticos, tem-se que uma suspensão menos rígida (“mais macia”) tende a absorver de maneira mais eficaz os impactos provenientes da pista, uma vez que a suspensão acompanha melhor o perfil dos obstáculos e, portanto, transmite menos aceleração vertical para os ocupantes do veículo. Logo, uma suspensão extremamente rígida terá comportamento próximo ao de um corpo rígido, ocasionando em uma grande transmissibilidade de vibração. Esse comportamento afeta, também, o resultado de ângulo de *pitch*, observado na Figura 41b, onde nota-se que para suspensões mais rígidas, maior será a amplitude desse movimento.

Figura 41 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de *pitch*, variando rigidez de suspensão



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 17 - Amplitude de aceleração e de ângulo de *pitch* variando a rigidez de suspensão – 7GDL

Rigidez de Suspensão [N/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Ângulo de <i>Pitch</i> [°]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.
10000	6.1236	-4.7494	0.9454	-0.8251
12290	6.3476	-4.8762	0.9969	-0.8594
14500	6.3668	-4.8250	1.0428	-0.8881
16874	6.5205	-4.8600	1.0772	-0.9925
19165	6.6857	-4.8907	1.0943	-0.9568

Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 18 - Frequências naturais variando a rigidez de suspensão – 7GDL

Rigidez de Suspensão [N/m]	Frequência Natural (Hz)					
	<i>Bounce</i> da Massa Suspensa	<i>Pitch</i>	Movimento Massa não-suspensa 1	Movimento Massa não-suspensa 2	Movimento Massa não-suspensa 3	Movimento Massa não-suspensa 4
10000	0.9705	1.6447	6.9980	7.0031	7.0128	7.0132
12290	1.0672	1.8072	7.0530	7.0606	7.0751	7.0757
14500	1.1501	1.9462	7.1058	7.1187	7.1361	7.1369
16874	1.2304	2.0800	7.1619	7.1756	7.2025	7.2035

19165      1.3009      2.1969      7.2158      7.2330      7.2673      7.2687

Fonte: Dos Autores (2023)

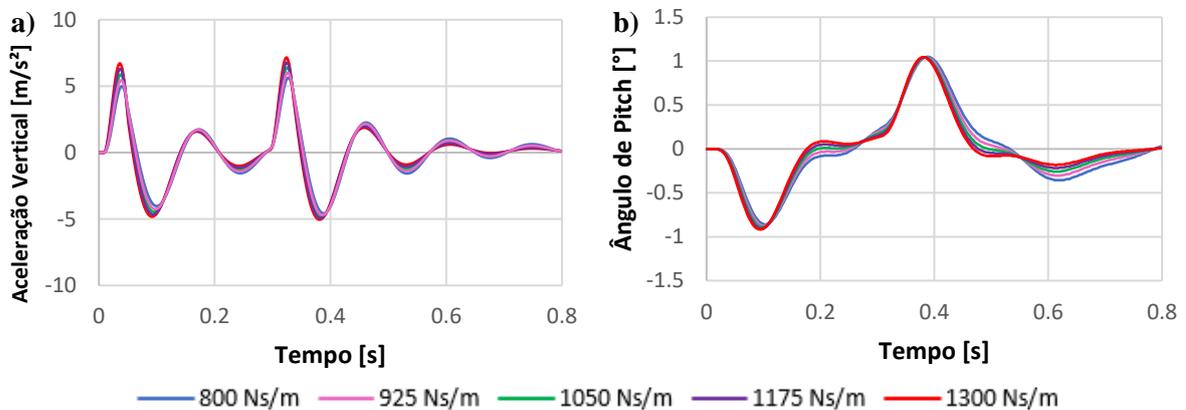
#### 4.4.3 Coeficiente de Amortecimento

Para a análise da influência da variação do coeficiente de amortecimento na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de  $800 \text{ Ns/m}$  a  $1300 \text{ Ns/m}$ , como mostrado na Tabela 19. Pela Figura 42a, é possível notar que, para a região de frequência deste *input*, um coeficiente de amortecimento maior resultará em uma amplitude maior de aceleração vertical. Entretanto, se o sistema possui um amortecimento maior, a energia será dissipada mais rapidamente retomando a estabilidade vertical do veículo gerando uma melhor sensação de conforto aos passageiros e o piloto, devido ao menor tempo de oscilação.

Vale salientar que, para as regiões de frequência próximas às frequências naturais do sistema, o amortecimento é de suma importância para mitigar os efeitos de ressonância no veículo, ou seja, um amortecimento maior provocará um decréscimo da transmissibilidade de aceleração na região de ressonância, o que resulta em maior conforto nesta faixa.

Além disso, observa-se que para o ângulo do movimento de *pitch*, o coeficiente de amortecimento possui pouca influência no valor de amplitude máxima. Todavia, coeficientes maiores controlam o movimento de *pitch* pós excitação do sistema de maneira mais eficaz, dissipando mais rapidamente a energia vibracional.

Figura 42 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de *pitch*, variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 19 - Amplitude de aceleração e de ângulo de *pitch* variando o coeficiente de amortecimento-7GDL

Coeficiente de Amortecimento [Ns/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Ângulo de <i>Pitch</i> [°]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	Massa não-suspensa
800	5.6331	-4.5644	1.0485	-0.8594
925	6.0108	-4.6989	1.0428	-0.8766
1050	6.3668	-4.8250	1.0428	-0.8881
1175	6.7759	-4.9332	1.0428	-0.9053
1300	7.1611	-5.0487	1.0428	-0.9167

Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 20 - Frequências naturais variando o coeficiente de amortecimento– 7GDL

Coeficiente de Amortecimento [Ns/m]	Frequência Natural (Hz)					
	<i>Bounce</i> da Massa Suspensa	<i>Pitch</i>	Movimento Massa não-suspensa 1	Movimento Massa não-suspensa 2	Movimento Massa não-suspensa 3	Movimento Massa não-suspensa 4
800	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
925	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
1050	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
1175	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
1300	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369

Fonte: Dos Autores (2023)

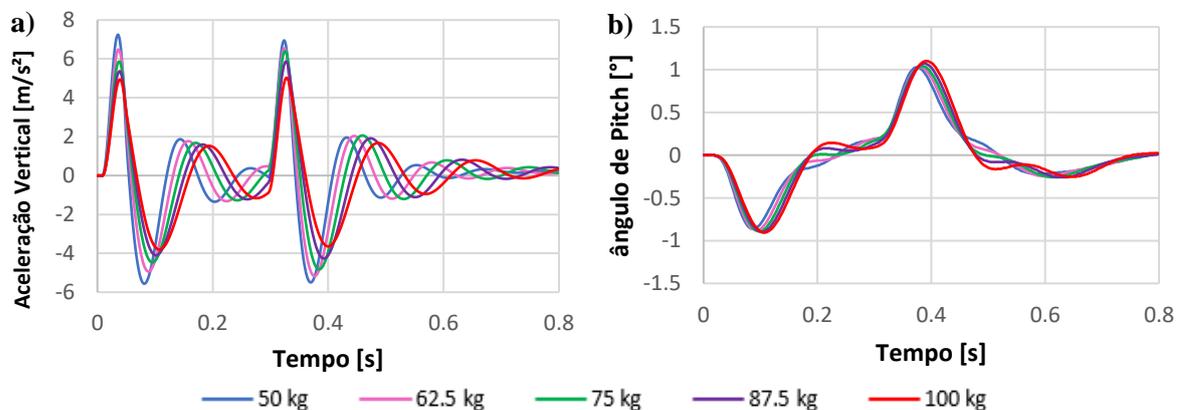
#### 4.4.4 Massa não-suspensa

Para a análise da influência da variação da massa não-suspensa na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de  $50\text{ kg}$  a  $100\text{ kg}$ , como mostrado na Tabela 21. Pela Figura 43a nota-se que um maior valor de massa não-suspensa acarreta menor amplitude de aceleração vertical associada, porém, a um aumento do período e, conseqüentemente, do tempo de dissipação da energia de vibração.

Como observado na Figura 43b, tem-se que para maiores massas não-suspensas, o movimento de *pitch* apresentará maior amplitude e, conseqüentemente, maior tempo de dissipação da energia de vibração. Esse comportamento se deve ao fato de que ao aumentar a massa não-suspensa, haverá um aumento da massa geral do veículo, logo, o sistema de suspensão será solicitado por forças de maior magnitude que acentuam o deslocamento do mesmo.

Analisando os resultados obtidos através do MATLAB®, expostos na Tabela 22, é possível concluir que massas não-suspensas menores apresentam maiores valores de frequência natural. Isso, associado ao fato de ser possível observar na Figura 43a que há uma redução do período de oscilação para massas menores, se deve à relação exposta na Equação 1.

Figura 43 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando massa não-suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 21 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a massa não-suspensa – 7GDL

Massa não-suspensa [kg]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Ângulo de Pitch [°]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.
50	7.2451	-5.5630	1.0256	-0.8594
62.5	6.5500	-5.1629	1.0313	-0.8766
75	6.3668	-4.8250	1.0428	-0.8881
87.5	5.8698	-4.2634	1.0714	-0.8995
100	5.0206	-3.8074	1.1001	-0.9053

Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 22 - Frequências naturais variando a massa não-suspensa – 7GDL

Massa não-suspensa [kg]	Frequência Natural (Hz)					
	<i>Bounce</i> da Massa Suspensa	<i>Pitch</i>	Movimento Massa não-suspensa 1	Movimento Massa não-suspensa 2	Movimento Massa não-suspensa 3	Movimento Massa não-suspensa 4
50	1.1507	1.9491	8.7027	8.7111	8.7269	8.7275
62.5	1.1504	1.9477	7.7840	7.7933	7.8113	7.8120
75	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
87.5	1.1499	1.9446	6.5786	6.5898	6.6119	6.6127
100	1.1496	1.9430	6.1538	6.1657	6.1897	6.1907

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.4.5 Rigidez do Pneu

Para a análise da influência da variação da rigidez de pneu na resposta do sistema, foi assumido um intervalo de 100000  $N/m$  a 170000  $N/m$ , como mostrado na Tabela 23. Nota-se que com o aumento da rigidez de pneu, há um aumento da amplitude de aceleração vertical, como mostrado na Figura 44a, associado a uma redução do período de oscilação. De forma análoga ao resultado observado para aceleração vertical, nota-se pela Figura 44b que para pneus mais rígidos, tem-se maior ângulo de *pitch*. Isso está associado à menores períodos de oscilação do sistema, logo, a energia de vibração é dissipada mais rapidamente.

Assim como ocorre para a rigidez da suspensão, pneus com valores de rigidez muito elevados tendem a se comportar de maneira semelhante a um corpo rígido e, dessa forma, o pneu não acompanha tão detalhadamente o perfil da pista, acentuando o movimento gerado pelos *inputs* da mesma, transmitindo assim maiores deslocamentos para a suspensão e, logicamente, à carroceria.

Figura 44 - a) Curvas de aceleração vertical e b) ângulo de pitch, variando rigidez de pneu

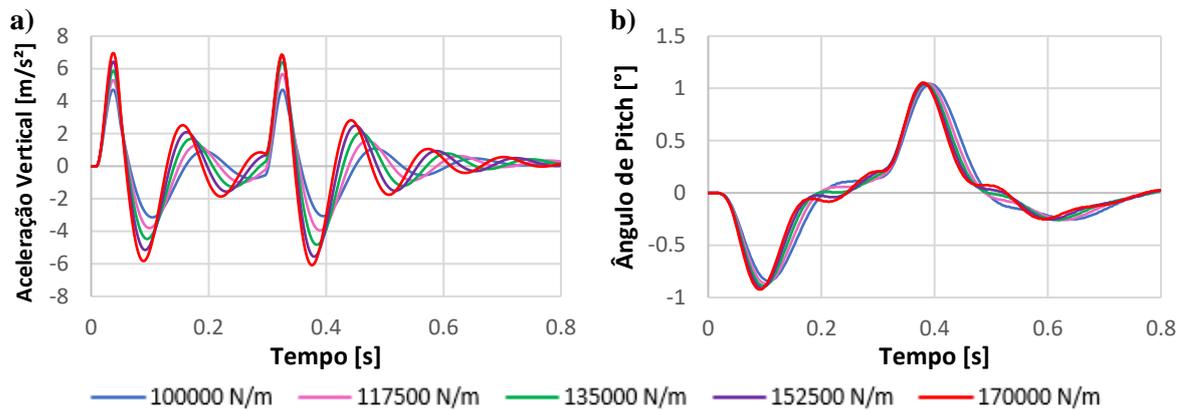


Tabela 23 - Amplitude de aceleração e de ângulo de pitch variando a rigidez de pneu – 7GDL

Rigidez do Pneu [N/m]	Aceleração Vertical [m/s <sup>2</sup> ]		Ângulo de Pitch [°]	
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.
100000	4.6873	-3.1417	1.0428	-0.8422
117500	5.6530	-3.9474	1.0485	-0.8709
135000	6.3668	-4.8250	1.0428	-0.8881
152500	6.7539	-5.5466	1.0428	-0.9110
170000	6.9214	-6.0745	1.0542	-0.9225

Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 24 - Frequências naturais variando a rigidez de pneu – 7GDL

Rigidez de Pneu [N/m]	Frequência Natural (Hz)					
	<i>Bounce</i> da Massa Suspensa	<i>Pitch</i>	Movimento Massa não- suspensa 1	Movimento Massa não- suspensa 2	Movimento Massa não- suspensa 3	Movimento Massa não- suspensa 4
100000	1.1299	1.9078	6.2186	6.2340	6.2648	6.2660
117500	1.1415	1.9298	6.6769	6.6894	6.7138	6.7148
135000	1.1501	1.9462	7.1058	7.1160	7.1361	7.1369
152500	1.1569	1.9588	7.5101	7.5188	7.5357	7.5363
170000	1.1624	1.9689	7.8938	7.9013	7.9157	7.9163

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.5 Modelo 7 GDL no domínio do tempo com defasagem longitudinal e lateral

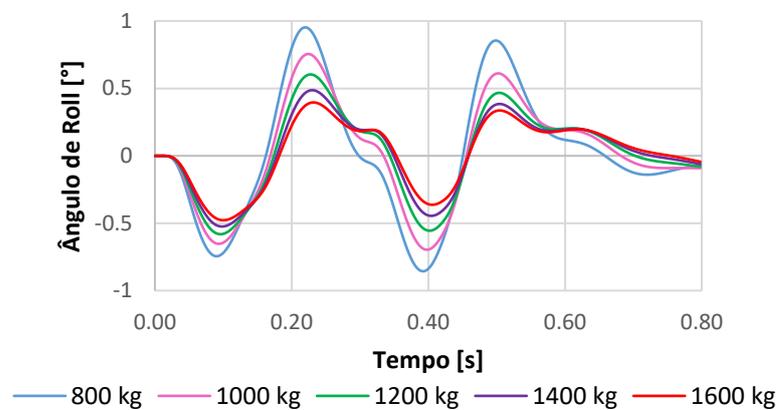
Como mencionado anteriormente, o *input* defasado lateralmente foi utilizado a fim de provocar a rolagem do veículo evidenciando assim o ângulo e, portanto, a influência dos parâmetros de suspensão em relação ao mesmo. Os parâmetros utilizados foram o mesmo da análise anterior, mudando somente o *input*, o qual consiste em quatro ondulações transversais unilaterais, de modo que cada roda do veículo é excitada por uma dessas ondulações em momentos diferentes, conforme apresentado pela Figura 19.

#### 4.5.1 Massa Suspensa

Através da Figura 45, nota-se que os ângulos de *roll* apresentam uma tendência de comportamento similar aos de *pitch*, de modo que para maiores valores de massa tem-se menores ângulos de *roll*. Esse comportamento se deve ao fato de que o aumento da massa suspensa ocasiona em um maior valor de inércia do veículo, fazendo com que seu movimento seja relativamente mais limitado e, portanto, o veículo rola menos.

Além disso, pode-se averiguar uma alteração no valor de frequência natural relativa ao movimento de *roll*, a qual decresce com o aumento da massa suspensa. Consequentemente, o carro oscila por um menor período de tempo até atingir a estabilidade da carroceria.

Figura 45 - Curvas de ângulo de roll variando massa suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 25 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a massa suspensa – 7GDL

Massa suspensa [kg]	Ângulo de Roll [°]		Frequência Natural [Hz]
	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	
800	0.9523	-0.8562	2.1479
1000	0.7549	-0.6962	1.9234
1200	0.6033	-0.5813	1.7572
1400	0.4865	-0.5243	1.6277
1600	0.3957	-0.4776	1.5231

Fonte: Dos Autores (2023)

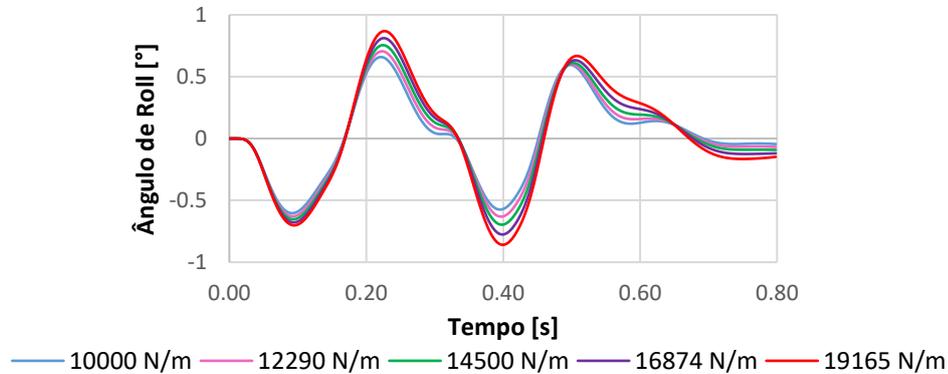
#### 4.5.2 Rigidez da Suspensão

Análogo ao observado para o ângulo de *pitch*, o aumento da rigidez de suspensão provoca maiores ângulos de *roll*, conforme pode ser observado na Figura 46. Como visto nas análises anteriores, uma suspensão mais rígida apresenta maior transmissibilidade de aceleração vertical para a carroceria, especialmente quando submetido a obstáculos unilaterais, fazendo com que o carro role mais, como é o caso, afetando de forma negativa a percepção de conforto dos passageiros, corroborando com os resultados obtidos nas análises de transmissibilidade de vibração.

Outro ponto que se destaca, é o aumento dos valores de frequência natural relativa ao movimento de rolagem do carro, frente a um aumento da rigidez da suspensão. Esse

comportamento de aumento da frequência natural de *roll*, segue uma tendência observada também para os demais graus de liberdade do modelo.

Figura 46 – Curvas de ângulo de roll variando rigidez de suspensão



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 26 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a rigidez de suspensão – 7GDL

Rigidez de Suspensão [N/m]	Ângulo de Roll [°]		Frequência Natural [Hz]
	Amplitude Máx.	Amplitude Máx.	
10000	0.6590	-0.6029	1.6254
12290	0.7052	-0.6312	1.7861
14500	0.7549	-0.6962	1.9234
16874	0.8116	-0.7756	2.0558
19165	0.8681	-0.8590	2.1714

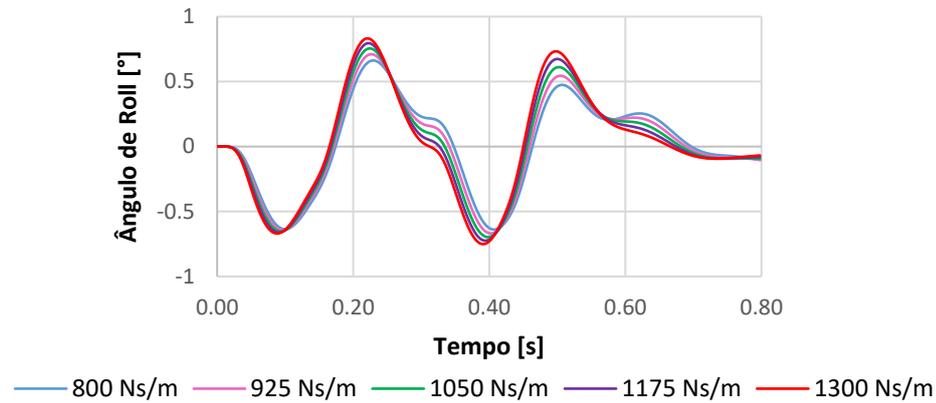
Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.5.3 Coeficiente de Amortecimento

Assim como observado nas análises prévias, o ângulo de *roll* apresenta maior amplitude para maiores coeficientes de amortecimento para a frequência específica do *input* em questão. Porém, coeficientes maiores dissipam energia de maneira mais rápida, permitindo maior controle do movimento oscilatório da carroceria do carro (Figura 47).

Nesta análise é possível notar que a frequência natural relativa ao movimento de rolagem do veículo se mantém inalterada frente à alteração do coeficiente de amortecimento (Tabela 27). Isso se deve ao fato de que o modelo desenvolvido no presente trabalho não considerar o amortecimento no cálculo de frequência natural, ou seja, não é calculada as frequências naturais amortecidas do sistema.

Figura 47 - Curvas de ângulo de roll variando coeficiente de amortecimento



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 27 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando o coeficiente de amortecimento – 7GDL

Coeficiente de Amortecimento [Ns/m]	Ângulo de Roll [°]		Frequência Natural [Hz]
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	
800	0.6620	-0.6380	1.9234
925	0.7101	-0.6679	1.9234
1050	0.7549	-0.6962	1.9234
1175	0.7955	-0.7236	1.9234
1300	0.8319	-0.7503	1.9234

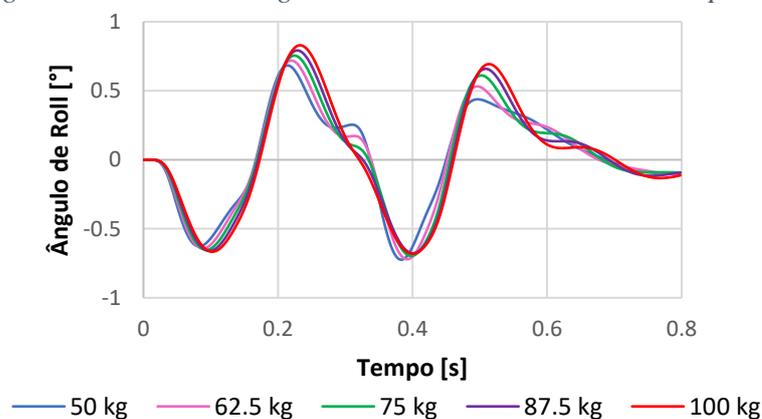
Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.5.4 Massa não-suspensa

Através da Figura 48, é possível averiguar o comportamento do ângulo de rolagem do veículo dada uma alteração no valor de massa não-suspensa, o qual apresenta maior amplitude máxima para maiores massas. Nota-se pela Tabela 28 que, ao contrário do observado nas análises anteriores, a amplitude mínima decresce em módulo com o aumento da massa não-suspensa, não reduzindo, porém, o valor de pico a pico.

Além disso, através dos resultados expostos na Tabela 28, tem-se que a influência da variação da massa não-suspensa sobre a frequência natural relativa ao movimento de *roll* é ínfima.

Figura 48 - Curvas de ângulo de roll variando massa não-suspensa



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 28 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a massa não-suspensa – 7GDL

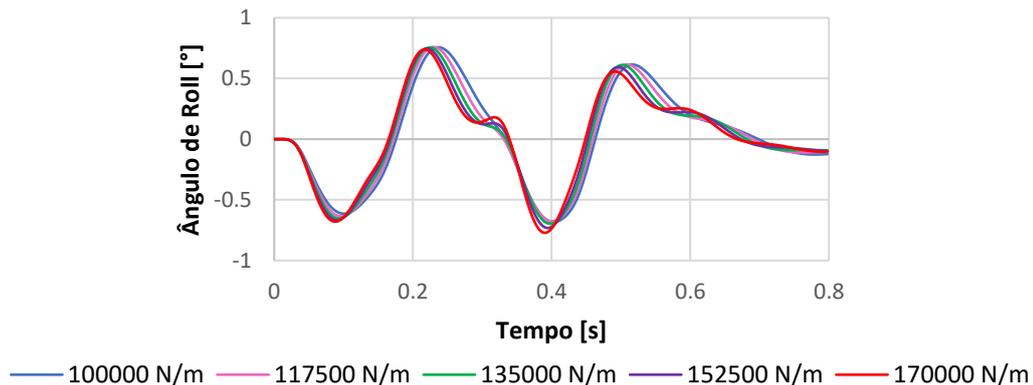
Massa não-suspensa [kg]	Ângulo de Roll [°]		Frequência Natural [Hz]
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	
50	0.6831	-0.7237	1.9263
62.5	0.7191	-0.7204	1.9249
75	0.7549	-0.6962	1.9234
87.5	0.7922	-0.6767	1.9219
100	0.8293	-0.6805	1.9204

Fonte: Dos Autores (2023)

#### 4.5.5 Rigidez do Pneu

A partir da Figura 49, e dos resultados apresentados na Tabela 29, observa-se que a rigidez de pneu possui pequena influência sobre o comportamento do ângulo de *roll*, bem como sobre o valor de pico a pico para as curvas. Além disso, pelos resultados expostos na Tabela 29, nota-se que com o aumento da rigidez de pneu, há um crescimento do valor de frequência natural relativa ao movimento de rolagem da carroceria.

Figura 49 - Curvas de ângulo de roll variando rigidez de pneu



Fonte: Dos Autores (2023)

Tabela 29 - Ângulo de Roll e Frequência natural variando a rigidez de pneu – 7GDL

Rigidez de Pneu [N/m]	Ângulo de Roll [°]		Frequência Natural [Hz]
	Amplitude Máx.	Amplitude Mín.	
100000	0.7568	-0.6825	1.8857
117500	0.7589	-0.6758	1.9073
135000	0.7549	-0.6962	1.9234
152500	0.7469	-0.7314	1.9359
170000	0.7387	-0.7714	1.9458

Fonte: Dos Autores (2023)

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta análises sobre o comportamento dinâmico de um veículo de passeio, sobre a ótica de *ride*, avaliando a influência dos principais parâmetros de um sistema de suspensão sobre a percepção de conforto dos passageiros. Os parâmetros que foram alterados e avaliados foram: massa suspensa, massa não-suspensa, rigidez de suspensão, rigidez de pneu e coeficiente de amortecimento; os quais foram avaliados para ambos os modelos desenvolvidos (2 GDL e 7 GDL), sendo o primeiro submetido a um *input* do tipo lombada, e o segundo a duas variações do mesmo *input*. A primeira variação consiste em uma lombada defasada longitudinalmente, a fim de simular uma situação real, enquanto a segunda possui, também, a defasagem lateral, de modo que as rodas da direita passam pelo obstáculo em momentos diferentes das rodas da esquerda, induzindo, assim, a rolagem do veículo.

As respostas analisadas a partir das simulações realizadas no ambiente MATLAB® são acerca da aceleração vertical transmitida à carroceria, da transmissão de força na relação pneu-solo, das frequências naturais do sistema e dos ângulos relacionados aos movimentos de *pitch* e *roll*. Assim, pode-se concluir o seguinte:

- Massa suspensa – O aumento da massa suspensa provoca redução da transmissibilidade de aceleração vertical para a própria massa suspensa, não influi significativamente na transmissibilidade de aceleração vertical para a massa não-suspensa, aumenta a transmissibilidade de força no solo, reduz a frequência natural da massa suspensa e menores ângulos de *pitch* e *roll*.
- Massa não-suspensa – O aumento da massa não-suspensa provoca redução da transmissibilidade de aceleração vertical para a própria massa não-suspensa, aumento da transmissibilidade de força no solo, redução do valor de frequência natural da massa não-suspensa e maiores ângulo de *pitch* e *roll*.
- Rigidez de suspensão – O aumento da rigidez de suspensão provoca aumento da transmissibilidade de aceleração vertical para a massa suspensa, redução da transmissibilidade de força no solo e não influi significativamente na transmissibilidade de aceleração vertical para a massa não-suspensa e maiores ângulos de *pitch* e *roll*.
- Rigidez de pneu – O aumento da rigidez de pneu provoca aumento da transmissibilidade de aceleração vertical para a massa suspensa, aumento da frequência natural da massa não-suspensa, maiores ângulo de *pitch* e influi pouco sobre o ângulo de *roll*.
- Coeficiente de amortecimento – O aumento do coeficiente de amortecimento provoca redução dos picos de transmissibilidade de aceleração vertical nas regiões das frequências naturais e aumento da transmissibilidade nas demais regiões de frequências, como pôde ser visto nas análises no domínio do tempo. Resulta também, para a frequência específica do *input*, em maior amplitude de aceleração vertical, porém com menor período de oscilação, e maiores ângulo de *roll*, influi pouco no ângulo de *pitch* e provoca também maiores picos de força.

É válido destacar que existe um compromisso entre conforto e manobrabilidade (*Handling*), de modo que se o conforto é priorizado, como é o caso de veículos de passeio, tem-se degradação da performance lateral e longitudinal do veículo, e vice-versa. Portanto, durante o processo de calibração do sistema de suspensão, os engenheiros envolvidos devem se atentar a essa relação.

Como foi observado no trabalho, as análises no domínio do tempo geram resultados coerentes, contudo, para uma única frequência, que é específica do *input* dado ao sistema.

Porém, durante o uso do veículo em pistas reais, o mesmo será submetido a excitações de diferentes frequências, justificando a importância das análises no espectro da frequência, visto que alguns parâmetros influem de maneira distinta na resposta a depender da frequência a qual o sistema é submetido.

Os modelos simplificados desenvolvidos no presente trabalho se mostraram capazes de prever de forma satisfatória o comportamento dinâmico do veículo. O que pôde ser concluído visto que os resultados obtidos para o modelo mais simplificado (*quarter-car*), tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, corroboram com os obtidos para o modelo mais complexo (*full vehicle*).

Para trabalhos futuros é possível desenvolver o mesmo estudo ampliando as considerações do sistema a fim de aproximá-lo mais da realidade, como por exemplo, adicionando mais graus de liberdade e avaliando outros parâmetros como distribuição de massa, a presença de barras estabilizadoras, entre outros. Ademais, a partir do estudo realizado pode-se desenvolver ferramentas de otimização dos parâmetros da suspensão, para se obter respostas dinâmicas específicas, em outras palavras, realizar a calibração do sistema de forma ótima e automatizada.

## REFERÊNCIAS

- BOSCH, Robert. **Manual de tecnologia automotiva**. Tradução de Helga Madjderey, Gunter W. Prokesch, Euryale de Jesus Zerbini e Suely Pfeferman. 25<sup>a</sup> ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005. 1231p.
- CHITALE, V. PATIL, R.B. PATHAN, A. **Quarter Car Model Suspension System and its Validation with the Help of Simulink Model**. India. IJAR SCT. 2021.
- CONFRARIA LAND ROVER. **FL2: Amortecedores: Qual comprar?** 2023. Disponível em: < <https://www.confrariafreelander.com.br/post/2019/11/29/amortecedores-e-molas> >
- CTB. **A borracha no Amortecimento de Vibrações**. 2022. < <https://www.ctborracha.com/artefactos/a-borracha-no-amortecimento-de-vibracoes/> >
- DEMIĆ, M.; DEMIĆ, I.; DEMIĆ, M.; DILIGENSKI, Đ. **A method of vehicle active suspension design**. Forschung Im Ingenieurwesen, [S.L.], v. 70, n. 3, p. 145-158, 18 maio 2006. Springer Science and Business Media LLC.
- DIXON, J. C. **The Shock Absorber Handbook**. 2. ed. Chinchester: John Wiley and Sons, Ltd, 2007.
- DIXON, J. C. **Tyres, Suspension and Handling**. 2. ed. [S.I.]: Arnold, 1996.
- DUMITRIU, D.N.; Car Vertical dynamics 3D Simulator Using a 7 DOF Model. **Applied Mathematics and Mechanics**. Technical University of Cluj-Napoca, 2012.
- DUMITRIU, Dan N.; CHIROIU, Veturia; MUNTEANU, Ligia. Simplified 7 DOF Model of Car Vertical Vibrations for Small Pitch and Roll Angles. **Applied Mechanics And Materials**, [S.L.], v. 801, p. 136-141, out. 2015. Trans Tech Publications, Ltd.
- GILLESPIE, Thomas D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. [S.I.]: Sae, [1992].
- GUIGGIANI, Massimo. **The Science of Vehicle Dynamics: handling, braking, and ride of road and race cars**. 2. ed. Itália: Springer, 2018.
- HEIBING, Bernd; ERSOY, Metin. **Chassis Handbook: fundamentals, driving dynamics, components, mechatronics, perspectives**. Alemanha: Ieweg +Teubner Verlag, 2011.
- INSTACARRO. **Quais são as vantagens da suspensão multilink?** 2022. Disponível em: < <https://www.instacarro.com/blog/tecnologia-automotiva/suspensao-multilink> >
- JAZAR, R. N. **Vehicle Dynamics: Theory and Applications**. New York: Springer, 2008.
- MAHALA, M. K.; GADKARI, P.; DEB, A. **Mathematical Models for Designing Vehicles for Ride Comfort**. Icord 09: Proceedings of The 2Nd International Conference On Research Into Design. [S.I.], p. 168-175. 2009.

- MILIKEN, W. F.; MILIKEN, D.L. **Race Car Vehicle Dynamics**. SAE International. USA, 1995.
- MOLAS. **Cofap**, São Paulo, 2023. Disponível em: <  
<https://loja.cofap.com.br/categoria/suspensao/molas> >
- NEWMARK, N. M. **A Method of Computation for Structural Dynamics**. ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, No. EM3, 1959.
- NORTON, R.L. **Projetos de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. 4ª Edição, Ed. Bookman. 2013.
- PALLI, S.; SHARMA, R.C.; RAO, P.P.D. **Dynamic Behaviour of a 7 DoF Passenger Car Model**. International Journal of Vehicle Structures and Systems, [S.L.]. 2017. MAFTREE.
- PHALKE, T.P. MITRA, A.C. **Analysis of Ride Comfort and Road holding of Quarter car model by SIMULINK**. India. 2017.
- RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. Pearson Universidades, 2008.
- REIMPELL, J.; STOLL, H.; BETZLER, J. W. **The Automotive Chassis: Engineering Principles**. 2. ed. Wiirzburg: Elsevier Science, 2001.
- SENAI (São Paulo) (org.). **Sistema de Suspensão**. São Bernardo do Campo: Senai, 2006.
- SILVEIRA, R. R. **Metodologia Simplificada para Determinação da Probabilidade de Falha de um Estrutura Submetida à Excitação Sísmica**. Engenharia Mecânica, UFRGS. Porto Alegre, p. 22. 2015.
- SIRETEANU, T.; GÜNDISCH, O.; PĂRĂIAN, S. **Random vibrations of road vehicles**. Editura Tehnică, Bucharest, 1981.
- SULAIMAN, S.; MOHD SAMIN, P.; JAMALUDDIN, H.; ABD RAHMAN, R.; SAFWAN BURHAUMUDIN, M. Modeling and Validation of 7-DOF Ride Model for Heavy Vehicle. **International Conference on Automotive, Mechanical and Materials Engineering**. Malásia, 2012.
- VAN DER AUWERAER, H.; TAMAROZZI, T.; RISALITI, E.; SARRAZIN, M.; CROES, J.; FORRIER, B.; NAETS, F.; DESMET, W. **Virtual Sensing Based on Design Engineering Simulation Models**. 2017.
- ZIVKOVIĆ, V.; NEDIĆ, B.; ĐURIĆ, S. Manufacturing specificity of vehicle's independent suspension system parts. **Mobility And Vehicle Mechanics**, [S.L.], v. 46, n. 1, p. 31-41, maio 2020. Faculty of Engineering, University of Kragujevac.