UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

RAFAEL ALMEIDA PEREIRA MELO

OTIMIZAÇÃO E DIVERSIFICAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS: MODELOS DE SELEÇÃO

LAVRAS – MG

2023

RAFAEL ALMEIDA PEREIRA MELO

OTIMIZAÇÃO E DIVERSIFICAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS:
MODELOS DE SELEÇÃO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para obtenção do título de Licenciado.

Prof. Paulo Henrique Sales Guimarães
Orientador

Prof. Helvécio Geovani Fargnoli Filho
Coorientador

LAVRAS – MG
2023

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar matematicamente os modelos de seleção de carteiras de investimentos. Para isso, foram estabelecidos objetivos específicos, que incluem a minimização dos riscos associados à seleção de carteiras, a análise e construção de uma carteira de investimentos utilizando o modelo clássico de Markowitz (1952) e utilizar o modelo simplificado do Índice Único de Sharpe proposto por Sharpe (1963) para calcular o índice da carteira construída e realizar uma análise desse indicador. A justificativa para este trabalho reside na importância de compreender como a diversificação de carteiras e o entendimento dos modelos de seleção podem auxiliar na construção de estratégias eficientes de investimentos, contribuindo também para a educação financeira. Os dados sobre os ativos financeiros (ações) foram obtidos por meio do site *Yahoo Finance*, por meio do uso do *software* R, no qual a importação de dados e as análises também foram realizadas com este. Como resultado, este trabalho apresentou a obtenção de uma carteira otimizada com base na melhor relação entre risco e retorno dos ativos selecionados. Utilizando o modelo de Markowitz, foi possível determinar os pesos de cada ativo na carteira, e verificou-se que a carteira construída obteve um índice de Sharpe positivo em relação ao ativo livre de risco.

Palavras-chave: Carteiras eficientes. Modelos matemáticos. Risco. Markowitz. Índice de Sharpe.

ABSTRACT

This study aims to mathematically analyze investment portfolio selection models. Specific objectives were established, including minimizing risks associated with portfolio selection, analyzing and constructing an investment portfolio using the classical Markowitz model (1952), and applying the simplified Sharpe Ratio model (1963) to calculate the portfolio's Sharpe Ratio and conduct an analysis of this indicator. The justification for this study lies in the importance of understanding how portfolio diversification and the understanding of selection models can assist in constructing efficient investment strategies, thereby contributing to financial education as well. The financial asset (stock) data was obtained from the Yahoo Finance website using the R software. The importation of data and subsequent analyses were also conducted using R. As a result, this study achieved an optimized portfolio based on the best risk-return relationship of the selected assets. By employing the Markowitz model, it was possible to determine the weights of each asset in the portfolio, and it was observed that the constructed portfolio obtained a positive Sharpe Ratio compared to the risk-free asset.

Keywords: Efficient Portfolios. Mathematical Models. Risk. Markowitz. Sharpe Ratio.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A cada dia que passa, aumenta-se o número de pessoas que se inserem no mundo dos investimentos com intuito de promover um maior rendimento de seu dinheiro. De acordo com o site infomoney (2022), o número de contas abertas em corretoras alcançou 5 milhões em fevereiro de 2022, atingindo um crescimento de 56% em comparação com dezembro de 2020, na B3, Bolsa de Valores do Brasil.

De acordo com Nischiguti, Kubayashi e Macedo (2021), o aumento de investidores na bolsa de valores durante a crise do COVID-19 em 2020 foi impulsionado principalmente pelo desejo de obter maiores rendimentos (33% dos entrevistados mencionaram a B3 como um motivador), diversificar ativos e aprender a aplicar em outras modalidades (38% dos entrevistados mencionaram a B3). Um fator importante nesse cenário foi a disseminação do conhecimento e a facilidade de acesso, que destacou o papel dos canais no site YouTube e influenciadores digitais como a principal fonte de informações para os entrevistados, com 73% mencionando-os como fonte de conhecimento.

A seleção de carteiras de investimentos é um dos principais desafios financeiros. Nosso objetivo é trabalhar com a seleção de carteiras eficientes, ou seja, carteiras que maximizem o retorno para um risco aceitável ou minimizem o risco para um retorno estabelecido. É importante ressaltar que não é possível superar o retorno de uma carteira eficiente sem assumir um risco maior.

A escolha da carteira depende muito do perfil de cada investidor, que é caracterizado principalmente pela sua tolerância ao risco. Pessoas com menor tolerância ao risco buscam mais segurança e previsibilidade de retornos, mesmo que isso signifique menor retorno total em suas carteiras. Por outro lado, pessoas com maior tolerância ao risco incluem ativos financeiros[1] mais voláteis em

[1] Ativos financeiros são instrumentos ou títulos que possuem valor monetário e podem ser comprados, vendidos ou negociados no mercado financeiro. Eles representam propriedade, dívida ou direitos a receber fluxos de caixa futuros. Exemplos comuns de ativos financeiros incluem ações, títulos, commodities, moedas estrangeiras e derivativos. (HULL, 2018)

suas carteiras, embora essa volatilidade possa causar desconforto para aqueles que não suportam ver flutuações em seu patrimônio. No entanto, ativos mais voláteis também têm maior potencial de retorno.

Investimentos de maior risco não são recomendados no curto prazo, pois há uma maior chance de perdas. No entanto, no médio e longo prazo, podem ser uma ótima escolha. As carteiras de investimentos são importantes porque buscam diversificar o investimento em diferentes ativos financeiros, reduzindo assim o risco de perda. Além disso, existem estratégias para escolher uma carteira eficiente, que serão abordadas neste trabalho.

Nesse contexto, analisaremos dois modelos de seleção de carteiras eficientes. Além do modelo clássico proposto por Harry Markowitz (1952), conhecido como a teoria moderna do portfólio, também iremos considerar o modelo desenvolvido por William Sharpe.

O modelo proposto por Markowitz (1952), estabelece que o retorno esperado para um conjunto de ativos é a média ponderada dos retornos esperados para cada ativo individual. Além disso, o risco desse conjunto de ativos não é simplesmente a média dos riscos dos ativos individuais, mas uma função das variâncias individuais de cada ativo e de uma parcela das covariâncias entre os ativos, calculadas dois a dois.

Sharpe (1963) desenvolveu um modelo simplificado conhecido como Modelo de Índice Único (MIU). O modelo de Sharpe adota uma abordagem diferente da proposta de Markowitz. Ao invés de considerar a correlação entre os retornos de cada ativo, o modelo de Sharpe parte do pressuposto de que os retornos estão correlacionados apenas com um índice único, que representa o retorno de todo o mercado no qual esses ativos são transacionados. Essa simplificação resulta em uma redução significativa no número de cálculos necessários, embora possa acarretar em uma perda eventual de precisão, devido às simplificações introduzidas.

Diante dessa perspectiva, este trabalho tem como objetivo Este trabalho tem como objetivo analisar matematicamente os modelos de seleção de carteiras de Markowitz e de Sharpe. Além disso, serão investigados os possíveis benefícios da aplicação desses modelos no contexto do investidor.

1.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é a analisar matematicamente os modelos de seleção de carteiras de investimentos.

1.2 Objetivos específicos

- Minimizar os riscos associados à seleção de carteiras de investimentos;
- Analisar e construir uma carteira de investimentos com ativos financeiros utilizando o modelo clássico de Markowitz (1952);
- Utilizar o modelo simplificado do Índice Único de Sharpe proposto por Sharpe (1963) para calcular o índice da carteira construída e realizar uma análise desse indicador.

1.3 Justificativa

Este trabalho se justifica pela importância no entendimento de como a diversificação de carteiras e seu entendimento podem ajudar na construção de estratégias eficientes de investimentos e também como parte de educação financeira.

2 REVISÃO TEÓRICA

Neste item serão discutidos conceitos importantes e essenciais para este trabalho, tais como conceitos básicos de Estatística, o modelo de Markowitz (1952) e o modelo de Índice Único de Sharpe (1963).

2.1 Conceitos de estatística básica

Trataremos agora de alguns conceitos de Estatística Básica, retirados de Morettin e Bussab (2017).

Definição 1 (Variável Aleatória Discreta). *Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita variável aleatória discreta.*

Definição 2 (Esperança). *Dada a variável aleatória X discreta, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, chamamos de valor médio ou esperança matemática de X ao valor*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{2.1}$$

em que p_i denota as probabilidades assumidas pela variável aleatória X.

A **esperança**, ou **média**, ou **valor esperado** é o resultado da multiplicação de cada valor $X = x_i$ por sua respectiva probabilidade, somados. É o primeiro momento não central.

Definição 3 (Variância). *Chamamos de variância da variável aleatória X discreta o valor*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i, \tag{2.2}$$

sendo ela o segundo momento central.

Definição 4 (Variável Aleatória Contínua). *Uma função X, definida no espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita variável aleatória contínua.*

Definição 5 (Esperança). *A **esperança**, ou **média**, ou **valor esperado** de uma variável aleatória contínua é dada por*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{2.3}$$

Definição 6 (Variância). *A variância de uma variável aleatória contínua é dada por*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{2.4}$$

Segundo Macerau (2012) podemos definir assimetria da seguinte maneira:

Definição 7 (Assimetria). *Chamamos de assimetria de uma distribuição da variável aleatória X o valor*

$$\gamma_1 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{2.5}$$

denotado por γ_1.

A **assimetria** é o terceiro momento central, em que μ_3 é o terceiro momento em torno da média μ e σ o desvio padrão da variável aleatória X.

Definição 8 (Covariância). *Se X e Y são duas variáveis aleatórias, a covariância entre elas é definida por*

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))), \tag{2.6}$$

ou seja, o valor médio do produto dos desvios de X e Y em relação às suas respectivas médias.

Definição 9 (Variância da soma de duas variáveis aleatórias). *Para duas variáveis aleatórias quaisquer, temos*

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y). \tag{2.7}$$

A covariância é uma medida de associação linear entre duas variáveis aleatórias. Quando duas variáveis aleatórias são independentes, em termos lineares, elas não são associadas e, portanto, a covariância entre essas duas variáveis é igual a zero. Dessa forma, se X e Y são independentes, então

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y). \tag{2.8}$$

Definição 10 (Vetor aleatório). *Vamos considerar que possamos representar um conjunto de p variáveis aleatórias X_1, X_2, $\ldots X_p$ por meio de um vetor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$. Da mesma forma, as suas realizações x_1, x_2, $\ldots$, x_p são representadas pelo vetor* $\mathbf{x}$. *Portanto, temos que*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definição 11 (Matriz de covariâncias). *A covariância de um vetor aleatório é uma matriz definida por*

$$
\begin{aligned}
Cov(X) &= E(X-\mu)(X-\mu)^T \\
&= \begin{bmatrix}
E\left[(X_1-\mu_1)^2\right] & \dots & E\left[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)\right] \\
E\left[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)\right] & \dots & E\left[(X_2-\mu_2)(X_n-\mu_n)\right] \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
E\left[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)\right] & \dots & E\left[(X_n-\mu_n)^2\right]
\end{bmatrix}, \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

em que,

$$E(X_k-\mu_k)(X_l-\mu_l) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_k-\mu_k)(x_l-\mu_l)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n,$$

para $k,l = 1,2,\dots,n$, é a covariância entre os vetores de variáveis aleatórias X_k e X_l, também representada por σkl. A designação atribuída à matriz mencionada em (2.9) é a de *matriz de covariância populacional*, a qual é expressa por

$$Cov(X) = \Sigma = \begin{bmatrix}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\
\sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}
\end{bmatrix}.$$

Muita das vezes, a comparação de duas ou mais covariâncias não é fácil. Uma medida de associação que ajuda nessa comparação é a correlação linear, que é a covariância ponderada pelos seus respectivos desvios padrões, como apresentada na definição a seguir.

Definição 12 (Correlação). *Medida que não depende das unidades de medida de X e Y:*

$$p(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (2.10)$$

O coeficiente de correlação é uma medida da relação *linear* entre X e Y, e seu valor varia de -1 a 1.

Agora enunciaremos os modelos de carteiras eficientes de Markowitz (1952), e o modelo Índice Único de Sharpe (1963), utilizando como referência o trabalho de Martins, Vasconcellos e Silva (2014) e o livro de Assaf Neto (2018).

2.2 Modelo de Markowitz

Uma carteira de investimentos deve ser escolhida analisando diretamente dois fatores que são base neste modelo: o retorno e o risco. Modelar um problema de escolha ótima de carteira de investimentos deve levar em conta estes fatores, lembrando que o investidor tem em suas mãos a escolha de como formar uma carteira, seja maximizando o retorno a um certo risco aceitável ou seja minimizando o risco a um certo retorno estabelecido.

Segundo Markowitz (1952), existem duas etapas a seguir no processo de uma seleção de carteiras de investimentos. A primeira etapa começa com a observação e experiência, e termina com as crenças sobre futuras performances de títulos disponíveis. A segunda etapa começa com as crenças observadas que foram relevantes e termina com a escolha da carteira.

No modelo de Markowitz não apenas se maximiza o retorno. Isso ocorre pois maximizar o retorno sem levar em conta as imperfeições do mercado nos supõe que poderia investir em um único ativo com o máximo de retorno, e que essa carteira com apenas um ativo seria equivalente a qualquer carteira diversificada. Se dois ou mais ativos têm o mesmo valor, ou possuem o mesmo retorno, qualquer um desses, separados ou em conjunto em uma carteira seriam boas opções de investimento, sem se importar em como os retornos são formados ou em suas taxas de desconto.

Então além de maximizar o retorno, deve-se diversificar a carteira. Há uma regra que determina que o investidor deveria diversificar seus fundos em todos ativos que conferem retorno esperado máximo. Desse modo, o rendimento real de sua carteira será quase o mesmo que o rendimento esperado, pela lei dos grandes números[2]. Esta seria a melhor opção para o investidor de uma carteira, que dá o máximo retorno com a variância mínima.

O retorno ϕ da carteira de investimentos como um todo é dado por

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \tag{2.11}$$

em que:

- n é o número de ativos disponíveis;
- X_i é o retorno do i-ésimo ativo;
- α_i é o percentual de ações do investidor que estão alocados no i-ésimo ativo.

Os X_i e o ϕ são considerados variáveis aleatórias.

Os α_i representam os pesos de capital a serem investidos em ativos disponíveis, sendo este valor fixado pelo investidor, não se caracterizando como variável aleatória. Representam frações do investimento, tal que $\sum \alpha_i = 1$.

O modelo de Markowitz não considera vendas a descoberto[3], por isso temos que $\alpha_i \geq 0$ para todo i. Isso significa que o modelo de Markowitz pressupõe que um investidor só pode deter ativos em sua carteira, não podendo assumir posições negativas ou vender ativos que ele não possui, pois incluir este tipo de ação envolve um nível maior de complexidade e riscos adicionais que podem afetar os resultados esperados.

O retorno ϕ da carteira como um todo é a soma ponderada de variáveis aleatórias. As frações de investimentos α_i serão escolhidas de forma a proporcionar o melhor retorno possível.

[2] Lei dos grandes números é um teorema fundamental da teoria da probabilidade, que descreve o resultado de uma mesma experiência várias vezes. Assim, quanto mais tentativas ocorrerem, mais a média aritmética dos resultados tende a se aproximar do valor esperado.

[3] Vender ativos que não são de propriedade do investidor com a intenção de recomprá-los a um preço mais baixo no futuro.

O retorno esperado E da carteira como um todo será definido por

$$E[\phi] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[X_i] \tag{2.12}$$

e a variância é dada por

$$Var[\phi] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov[X_i, X_j] \alpha_i \alpha_j. \tag{2.13}$$

em que:

- $E[X_i]$ é o valor esperado de X_i;
- $cov[X_i, X_j]$ é a covariância entre os retornos, assim, $cov[X_i, X_i]$ é a variância de X_i.

Também podemos mensurar o risco de uma carteira mais simples, constituída por 2 ativos, por meio do desvio padrão, de acordo com Assaf Neto (2018):

$$\sigma_p = [(\alpha_1^2 \sigma_1^2) + (\alpha_2 \sigma_2^2) + 2\alpha_1 \alpha_2 COV(X_1, X_2)]^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

onde:

- σ_1^2, σ_2^2 é a variância dos ativos 1 e 2, respectivamente;
- α_1, α_2 é a participação do ativo 1 e do ativo 2 no portfólio;
- $COV(X_1, X_2)$ é a covariância entre os ativos 1 e 2.

O retorno esperado da carteira como um todo é calculado somando os retornos esperados de cada ativo ponderados pelos pesos correspondentes. Essa equação é uma maneira de estimar o retorno médio que se espera obter ao investir em uma carteira específica, levando em consideração as características de cada ativo e sua proporção de alocação na carteira.

O risco equivale ao grau de volatilidade associado aos retornos esperados representado pela variância da carteira. É calculada somando as covariâncias entre todos os pares possíveis de ativos, ponderadas pelos produtos dos pesos correspondentes. Esse cálculo leva em consideração tanto as variações individuais dos ativos quanto as relações entre eles para estimar a dispersão geral dos retornos da carteira. Quanto maior for o valor resultante dessa equação, maior será o risco associado à carteira de investimentos.

A volatilidade, no contexto do mercado financeiro, é uma medida estatística que indica a magnitude das variações dos preços dos ativos ao longo do tempo. Ela representa a instabilidade e a incerteza presentes nos mercados, refletindo a rapidez e intensidade com que os preços dos ativos podem se mover para cima ou para baixo. Quanto maior a volatilidade, maior é a amplitude das flutuações de preço, indicando um ambiente de maior risco e potencial de ganhos ou perdas significativas. Segundo Melo (2020), a volatilidade dos ativos financeiros no mercado brasileiro é influenciada por uma variedade de fatores, incluindo eventos econômicos, políticos, notícias relevantes e dinâmica da oferta e demanda.

Nota-se que quanto menor for a covariância entre os retornos de duas ações, menor será o risco da carteira. Isso significa que se as ações possuem baixa correlação entre si, elas tendem a se comportar de forma independente, reduzindo o risco geral da carteira. Isso pode ser percebido ao analisar as expressões 2.7, 2.13 e 2.14.

É possível observar que à medida que o número de ativos em uma carteira aumenta, o risco individual de cada ativo, representado pela variância, torna-se menos relevante. Em vez disso, o foco passa a ser na inter-relação dos ativos, representada pela covariância, que representa o risco sistêmico, influenciado por fatores conjunturais comuns a todos os ativos no mesmo mercado (BRUNI et al., 2009).

O modelo de Markowitz é um modelo matemático que possui um problema de Otimização Quadrática. A otimização refere-se a maximização ou minimização de uma função, na qual se procura obter uma solução ótima de um problema, neste caso, a seleção ótima de carteira de investimentos de Markowitz.

Um dos objetivos do modelo é a construção da Fronteira Eficiente, na qual ela representa todas as combinações de portfólios ótimos de acordo com o risco e retorno. Maximiza-se o retorno esperado para um dado desvio padrão, ao qual, se repetir a maximização para diferentes desvios padrões, o resultado é um conjunto de portfólios eficientes, gerando a fronteira. De forma análoga se faz ao minimizar-se o desvio padrão dado um retorno esperado. Quanto maior o retorno e menor o desvio padrão, melhor a carteira de investimento (VASCONCELOS, 2013).

2.2.1 Otimização do modelo de Markowitz

Uma das abordagens comumente utilizadas é a utilização dos multiplicadores de Lagrange. Essa técnica matemática auxilia na determinação das alocações de pesos ótimos para os ativos financeiros, considerando as restrições definidas. Isto pode ser visto em detalhes em Martins (2015).

O objetivo é maximizar o retorno esperado enquanto se mantém um nível de risco aceitável, de acordo com o perfil do investidor. As restrições do problema são definidas pela variância, que é fixada em um valor V, e pela condição de que a soma dos pesos de distribuição do investimento seja igual a 1. Seja:

- $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ é o vetor de pesos;
- $[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ é o vetor de uns;

- O vetor dos retornos esperados de cada ativo da carteira $R_i = E[X_i], i = 1, \ldots, n$, dado por

  $$x = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

- A matriz de covariâncias entre os retornos de cada ativo, dada por

  $$M_2 = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix};$$

Utilizando Multiplicadores de Lagrange, encontra-se o seguinte Lagrangiano:

$$L(\alpha; \lambda_1, \lambda_2) = \alpha^t x - \lambda_1(\alpha^t[1] - 1) - \lambda_2(\alpha^t M_2 \alpha - V),$$

Dessa forma, a resolução de maximização do retorno, para o problema de seleção da carteira de investimentos seria encontrada na solução α^* do sistema a seguir:

$$\begin{cases} \alpha^t[1] = 1 \\ \alpha^t M_2 \alpha = V \\ \alpha = \dfrac{1}{2\lambda_2}\left(M_2^{-1}x - \lambda_1 M_2^{-1}[1]\right). \end{cases}$$

Para obter analiticamente a carteira de investimentos com a variância mínima, considerando um retorno esperado desejado, o problema de otimização é sujeito a duas restrições. A primeira é o retorno esperado da carteira, fixado em um valor específico. A segunda restrição é que a soma dos pesos de distribuição dos investimentos deve ser igual a 1. Utilizando Multiplicadores de Lagrange, encontra-se o seguinte Lagrangiano:

$$L(\alpha;\lambda_1,\lambda_2) = \alpha^t M_2 \alpha - \lambda_1(\alpha^t[1]-1) - \lambda_2(\alpha^t x - r)$$

Portanto, a resolução de minimização da variância, para o problema de seleção da carteira de investimentos seria encontrada na solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2M_2\alpha - \lambda_1[1] - \lambda_2 x = 0 \\ x^t\alpha = r \\ [1]^t\alpha = 1. \end{cases}$$

2.3 Conjunto de Oportunidades de Investimento em Ativos de Risco

É possível construir o conjunto de oportunidades de investimento em ativos de risco, que consiste em representar todas as combinações viáveis de investimentos, a partir do conceito de diversificação.

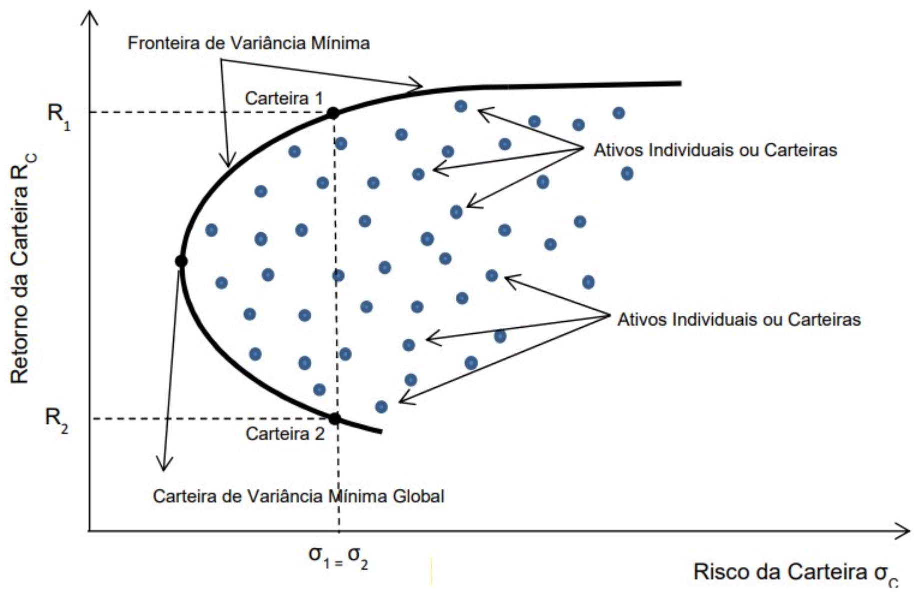
Assim, ao variar as participações α_i, é possível obter todas as diferentes combinações do conjunto de ativos em análise.

A fronteira de variância mínima inclui todas as combinações de carteiras que têm a menor variância ou desvio padrão possível e que podem ser construídas com base no conjunto de oportunidades de investimento em ativos de risco analisados.

Verifica-se que as carteiras 1 e 2 estão localizadas exatamente sobre a fronteira de variância mínima. É importante notar que a carteira 1 e a carteira 2 possuem o mesmo desvio padrão, ou seja, são carteiras que possuem o mesmo risco. Porém, o retorno da carteira 1 é maior que o retorno da carteira 2, sendo a carteira 1 a escolha racional de qualquer investidor.

Além disso, é importante destacar que todas as carteiras com retornos inferiores ao retorno da carteira de variância mínima global serão descartadas e não serão consideradas como opções de investimento viáveis. Essas carteiras são con-

Figura 2.1 – Fronteira de variância mínima de ativos de risco.



Fonte: Santos (2016)

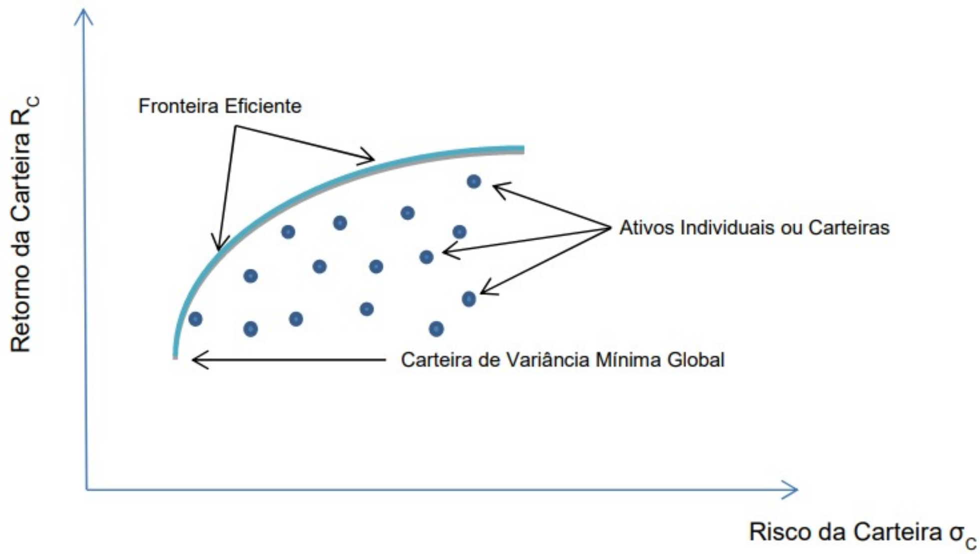
sideradas ineficientes quando comparadas à carteira de variância mínima global, pois apresentam um retorno menor e um risco maior. (SANTOS, 2016)

2.4 Fronteira Eficiente

A utilização da Fronteira Eficiente é capaz de satisfazer todos os tipos de investidores, pois analisar um ponto da fronteira, significa olhar o preço do risco naquele ponto. Assim, o investidor pode optar por maior retorno, ou por menor risco, ou estabelecer um retorno possível ou determinar um risco máximo para seu investimento.

A Fronteira Eficiente é traçada utilizando técnicas de otimização matemática, como a minimização da variância do portfólio para um determinado nível de retorno esperado ou a maximização do retorno esperado para um determinado nível de risco.

Figura 2.2 – Fronteira Eficiente de Investimentos



Fonte: Santos (2016)

Com base nesses dados, a otimização matemática permite encontrar a combinação ideal de ativos financeiros que maximiza o retorno esperado para um determinado nível de risco ou minimiza o risco para um determinado nível de retorno esperado.

Desta forma, a combinação ideal de ativos financeiros que oferecem o máximo retorno esperado para um determinado nível de risco pode ser determinada através da análise da Fronteira Eficiente utilizando técnicas de otimização matemática.

É importante notar que a determinação da combinação ideal de ativos financeiros é única para cada investidor, uma vez que a aversão ao risco e as expectativas de retorno podem variar de pessoa para pessoa.

Basicamente, sempre que o retorno de uma carteira diversificada equivale a média ponderada dos retornos de seus ativos individuais, a variância da carteira será menor que a variação média dos ativos. Desse modo, uma carteira de investimenos não pode ser montada a partir da análise individual de cada elemento, mas sim considerando o comportamento da carteira agrupada, sendo necessário a diversificação da carteira de acordo com a covariância e correlação entre os ativos. (GOMES, 2018)

2.5 Capital Market Line - CML

A *Capital Market Line*, conhecida também como a reta (linha) do mercado de capitais, tem a ver com a escolha de carteiras pelo investidor. Basicamente, nela temos carteiras formadas por ativos com risco e por ativos livre de risco *(risk free)*. No Brasil, a taxa livre de risco é a Taxa Selic e representa o investimento mais conservador disponível no mercado brasileiro

O ponto M representa uma carteira composta com 100% de ativos com risco (no caso deste trabalho, ações). A carteira ótima neste caso, dependerá do investidor, no qual, se ele for mais avesso ao risco, escolherá uma carteira situada à esquerda da carteira de mercado (ponto M). Estas carteiras possuem participação tanto de ativos com risco e de ativos livre de risco.

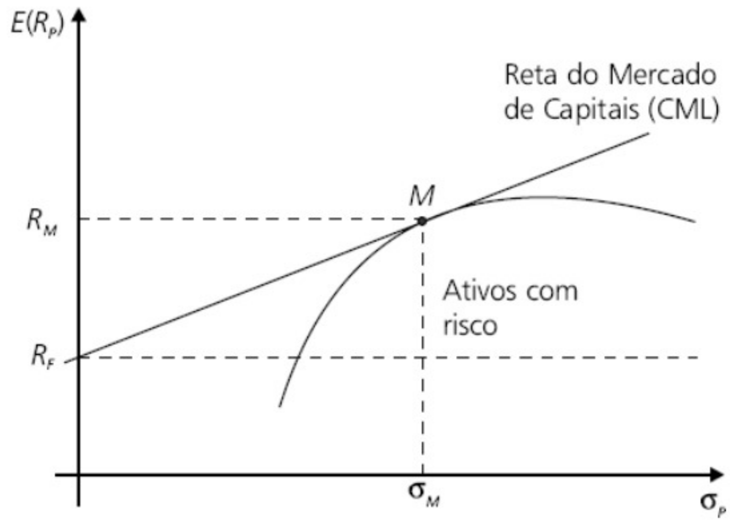
Uma carteira posicionada à direita do ponto M na CML (Linha do Mercado de Capital) é geralmente escolhida por investidores que têm maior tolerância ao risco. Essas carteiras, que apresentam um nível de risco mais elevado, são formadas através do empréstimo de recursos a uma taxa livre de risco para investir em ativos com risco (carteira M).

2.6 O Modelo De Índice Único De Sharpe – MIU

Abordaremos o índice de Sharpe, uma métrica amplamente utilizada na avaliação de investimentos. O leitor que estiver interessado em uma leitura mais aprofundada sobre o assunto pode encontrar mais em Assaf Neto (2018).

Ao compreendermos o conceito de mercado de capitais, podemos então utilizar o índice de Sharpe como uma medida para avaliar a relação entre risco e

Figura 2.3 – Reta do mercado de capitais CML



Fonte: Assaf Neto (2018)

retorno. O índice de Sharpe é amplamente utilizado por analistas de investimentos como uma métrica para análise e é calculado ao considerar a relação entre o prêmio de risco obtido em relação ao risco assumido pelo investimento.

Essa relação é expressa por meio de uma fórmula que compara o retorno excedente (prêmio de risco) ao desvio padrão (risco) do investimento.

$$\text{Índice de Sharpe} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m} \tag{2.15}$$

em que:

- R_m representa o retorno esperado do investimento;
- R_f representa o retorno do ativo livre de risco;
- σ_m representa o desvio padrão do investimento.

Perceba que o Índice de Sharpe retrata a inclinação da reta (CML), ou seja:

$$\text{Inclinação da CML} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m - 0} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m} \tag{2.16}$$

O índice de Sharpe revela a compensação adicional que um ativo oferece em relação ao risco assumido, expresso pelo desvio padrão. Por exemplo, se o índice de Sharpe for de 0,60, significa que o ativo apresenta um desempenho (prêmio pelo risco) de 0,60 unidades para cada aumento de 1 unidade no risco. Em outras palavras, quanto maior o índice de Sharpe, maior é a recompensa que um investidor pode esperar em relação ao risco assumido.

Suponha uma carteira formada de um ativo livre de risco, com retorno esperado de 6%, e um ativo com risco, que possui retorno esperado de 13% e um desvio padrão e 10%. Esta carteira é formada por 65% do ativo com risco e 35% com ativo livre de risco.

O retorno esperado da carteira é mensurado pelo retorno de cada ativo ponderado por sua respectiva participação percentual:

$$E[\phi] = [(13\% \times 0,65) + (6\% \times 0,35)]$$

$$E[\phi] = 8,45 + 2,1 = 10.55\%$$

O risco da carteira, pode ser visto, pela formualção de Markowitz, em 2.14. Apenas olharíamos o índice 1 representando o ativo livre de risco e o índice 2 pelo ativo com risco.

Como o ativo 1 representa o retorno de um ativo livre de risco, seu desvio padrão é nulo (σ_1 = 0). Logo, o risco da carteira reduz-se para:

$$\sigma_p = [(\alpha_2 \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo-se os valores da carteira na expressão, temos:

$$\sigma_p = [(0.65^2 \times 0.10^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\sigma_p = 6,5\%$$

O índice de Sharpe é calculado, por:

$$\text{Índice de Sharpe} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$\text{Índice de Sharpe} = \frac{10,55\% - 6\%}{6,5\%}$$

$$\text{Índice de Sharpe} = 0,70$$

O resultado obtido revela que o ativo com maior risco apresenta um prêmio de risco de 0,70% para cada 1% adicional de risco assumido durante o período analisado. Em resumo, o índice de Sharpe reflete a conexão direta entre o retorno (recompensa pelo risco) e o nível de risco de um investimento. Isso significa que quanto maior o retorno esperado em relação ao risco assumido, melhor será o desempenho da carteira de investimentos, de acordo com o Índice de Sharpe.

Podemos avaliar carteiras pelo índice de Sharpe. Em resumo, quanto maior o risco assumido por uma carteira de investimentos, espera-se que seja correspondido por um prêmio de risco mais elevado. Em outras palavras, um maior nível de risco está associado a um retorno proporcionalmente maior, como forma de compensação pelo risco adicional assumido.

Admita três fundos de investimentos com os seguintes desempenhos anuais conforme é mostrado na Tabela 2.1:

Ao analisar a tabela 2.1, percebemos que os fundos II e III possuem mesmo desvio padrão. Ou seja, eles possuem o mesmo risco, porém o fundo III tem me-

Tabela 2.1 – Ilustração Índice de Sharpe

	Fundo I	*Fundo II*	*Fundo III*
Taxa de retorno(prêmio pelo risco)$R_P - R_F$	13,9%	16,5%	18,7%
Desvio padrão (s_P)	8,5%	13,0%	13,0%
Índice de Sharpe	1,63	1,27	1,44

Fonte: Assaf Neto (2018)

lhor taxa de retorno, sendo obviamente uma melhor escolha. Este comportamento se reflete no índice Sharpe.

Em contrapartida, o fundo I se destaca ao oferecer um prêmio médio superior por unidade de risco assumido, evidenciado por seu índice de Sharpe de 1,63. No entanto, um investidor com menor aversão ao risco poderia optar pelo fundo III, que, embora possua um índice de Sharpe menor, proporciona uma taxa anual de retorno mais elevada.

3 METODOLOGIA

Toda a coleta de dados sobre ativos financeiros foi feita pela internet, no qual será trabalhado carteiras compostas por ações da bolsa de valores do Brasil.

Para a escolha das empresas que foram consideradas neste estudo, optou-se por empresas tradicionais do IBOVESPA, ou seja, empresas que assumem menos riscos por conhecerem o mercado, e estão consolidadas perante o público. Além disso, foi observado a importância nos setores em que atuam.

Os dados sobre os ativos financeiros (ações) foram obtidos por meio do site do *Yahoo Finance*, por meio do uso do *software* R, no qual a importação de dados e as análises também foram realizadas com este.

O *software* R se presta a diversas funções, desde calculadora científica, com integração e derivação de funções matemáticas, até a realização de complexas análises estatísticas e facilidade ao criar gráficos bem delineados e de alta qualidade para impressão (FERREIRA, 2020).

Foram escolhidas ações de nove empresas do índice IBovespa: Petrobrás, Itaú Unibanco, Vale, BB Seguridade, Taesa, Gerdau, WEG, Schulz e Unipar.

Essas empresas foram selecionadas por sua importância nos setores em que atuam, seu destaque no mercado brasileiro, sua representatividade na economia nacional e sua diversificação setorial.

A carteira selecionada possui uma diversificação de setores, abrangendo diferentes segmentos da economia. As empresas escolhidas representam os seguintes setores:

- Petrobrás: Setor de energia e petróleo.
- Itaú Unibanco: Setor financeiro e bancário.
- Vale: Setor de mineração.
- BB Seguridade: Setor de seguros.

- Taesa: Setor de energia elétrica.
- Gerdau: Setor siderúrgico.
- WEG: Setor de bens de capital e soluções em energia.
- Schulz: Setor metalúrgico.
- Unipar: Setor químico.

Assim, com base no histórico de cotação diária foi possível calcular os retornos das carteiras levando em consideração sua variância, desvio padrão e média e montar carteiras eficientes e com risco mínimo.

Por fim, em se tratando dos procedimentos metodológicos desta pesquisa, a mesma pode ser classificada perante a sua natureza como quantitativa; quanto a sua finalidade é descritiva e quanto aos procedimentos é bibliográfica e documental, no qual as análises dos resultados são com base em estatística descritiva (APPOLINARIO, 2009).

A análise dos preços das ações será realizada em três períodos distintos:

- Período total: de 1º de janeiro de 2018 até 30 de junho de 2023.
- Período pré pandemia: de 1º de janeiro de 2018 até 28 de fevereiro de 2020.
- Período durante e pós pandemia: de 1º de março de 2020 até 30 de junho de 2023.

As Figuras 3.1 e 3.2 trazem as séries de preços das ações utilizadas neste trabalho. O período analisado abrange desde o dia 1 de janeiro de 2018 até o dia 30 de junho de 2023.

As Figuras 3.3 e 3.4 trazem as séries de preços das ações utilizadas neste trabalho antes da pandemia. O período analisado abrange desde o dia 1 de janeiro de 2018 até o dia 28 de fevereiro de 2020.

As Figuras 3.5 e 3.6 trazem as séries de preços das ações utilizadas neste trabalho durante e depois da pandemia. O período analisado abrange desde o dia 1 de março de 2020 até 30 de junho de 2023.

Figura 3.1 – Preços diários das ações escolhidas - Período total

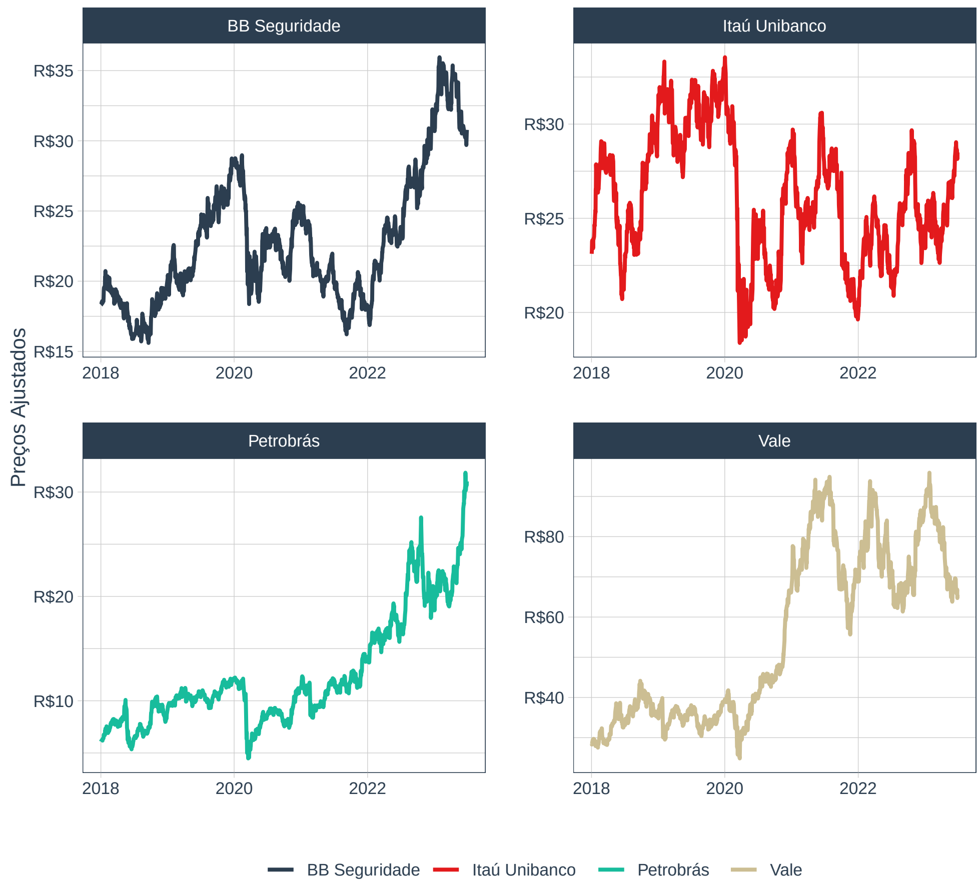


Figura 3.2 – Preços diários das ações escolhidas - Período total

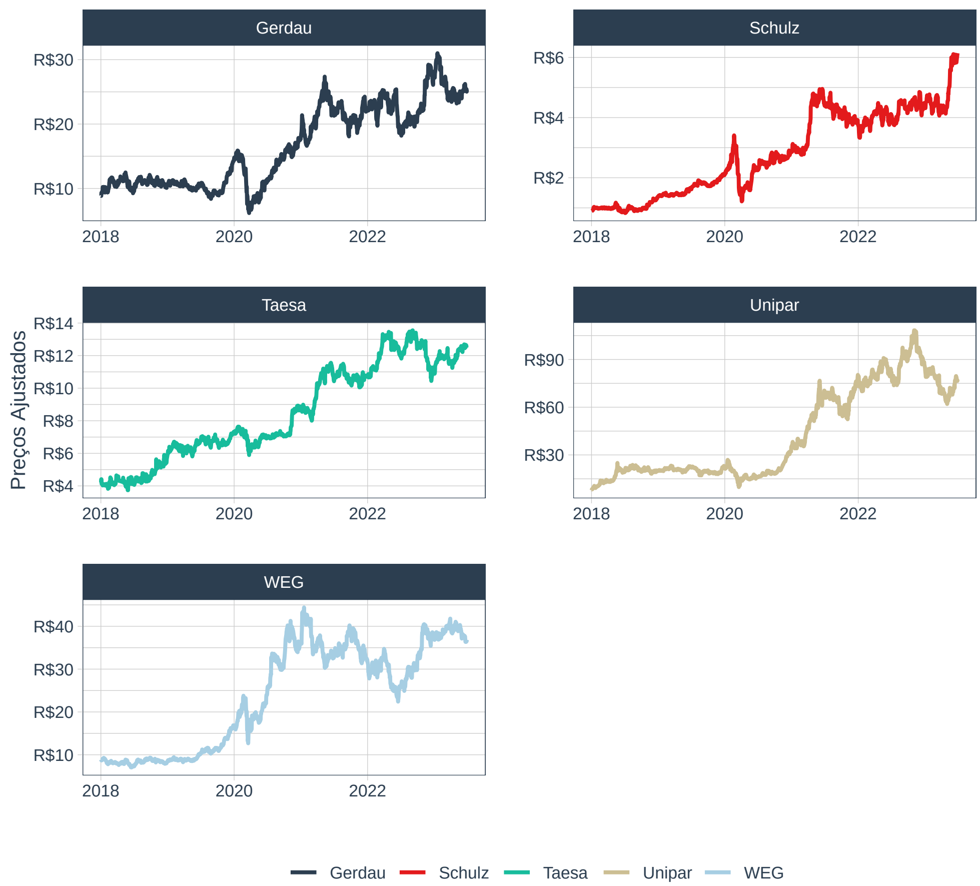


Figura 3.3 – Preços diários das ações escolhidas - Pré Pandemia

Figura 3.4 – Preços diários das ações escolhidas - Pré Pandemia

Figura 3.5 – Preços diários das ações escolhidas - Durante e pós pandemia

Figura 3.6 – Preços diários das ações escolhidas - Durante e pós pandemia

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Período total

Com base nos resultados obtidos ao utilizar o modelo de Markowitz para o período de 1 de janeiro de 2018 até 30 de junho de 2023, foi possível obter a carteira otimizada com os melhores resultados em termos de risco e retorno. A alocação de ativos ótima resultante desse modelo foi a seguinte:

- Petrobrás (PETR4.SA): 0,2%
- Itaú Unibanco (ITUB4.SA): 0,6%
- Vale (VALE3.SA): 8,6%
- BB Seguridade (BBSE3.SA): 4,2%
- Taesa (TAEE3.SA): 30,8%
- Gerdau (GGBR4.SA): 0,4%
- WEG (WEGE3.SA): 31,0%
- Schulz (SHUL4.SA): 0,0%
- Unipar (UNIP6.SA): 24,2%

Essa combinação de alocação de ativos foi determinada considerando a relação entre risco e retorno, buscando maximizar o retorno esperado e minimizar a volatilidade da carteira.

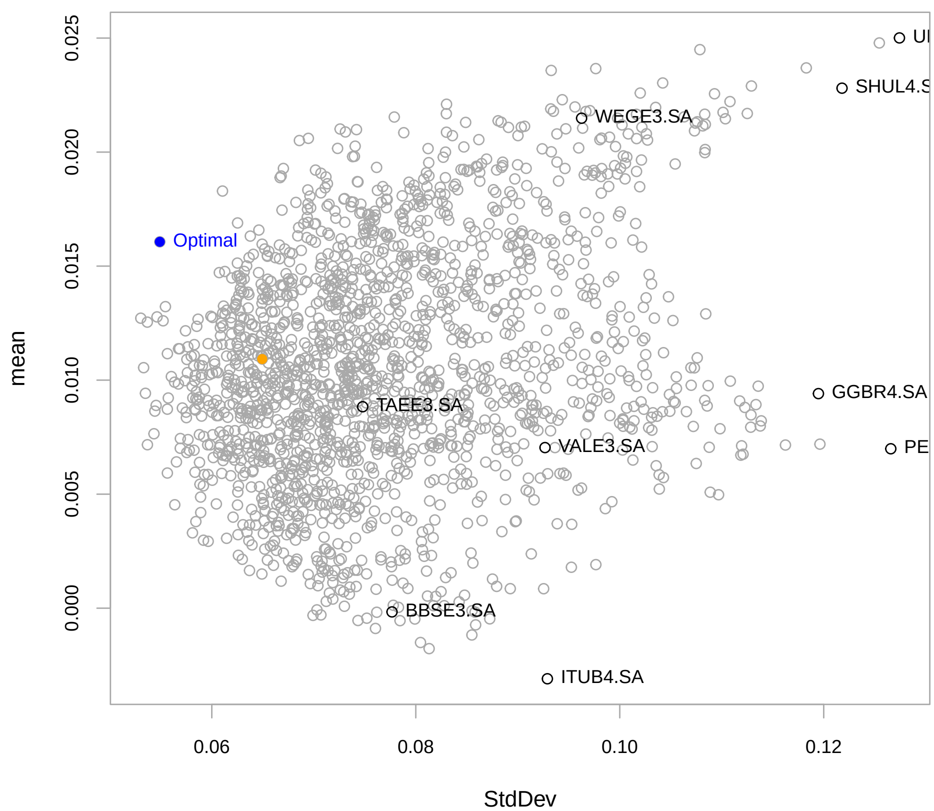
Ao analisar as medidas objetivas, constatou-se que a carteira otimizada apresenta uma média de retorno esperado de 1,606% ao mês. Além disso, o desvio padrão, que é uma medida de risco, foi calculado em 5,49%.

Esses resultados evidenciam a utilidade do modelo de Markowitz na construção de carteiras de investimento que buscam equilibrar risco e retorno. Através da diversificação e otimização da alocação de ativos, é possível encontrar uma combinação que se adapte aos objetivos e tolerância ao risco de cada investidor.

No entanto, é importante considerar que os resultados obtidos são específicos para o período analisado e podem variar em diferentes períodos de tempo e condições de mercado.

Na Figura 4.1 tem-se o gráfico da relação risco x retorno eficiente da nossa carteira.

Figura 4.1 – Resultados: Risco x Retorno - Combinações dos ativos selecionados



O eixo horizontal representa o risco, medido pelo desvio padrão, que indica a volatilidade ou a variabilidade dos retornos dos ativos. Quanto maior o valor no eixo horizontal, maior é o risco associado à combinação de ativos.

O eixo vertical representa o retorno esperado, que indica a média dos retornos esperados para a combinação de ativos. Quanto maior o valor no eixo vertical, maior é o potencial de retorno da combinação.

É possível observar como diferentes alocações de ativos afetam o risco e o retorno esperado da carteira. Cada ponto no gráfico representa uma carteira com diferentes combinações entre os ativos. O ponto *Optimal*, se refere a nossa carteira otimizada pelo modelo de Markowitz, representando a melhor relação risco x retorno.

Ao aplicar o índice de Sharpe na carteira otimizada, utilizando uma taxa livre de risco de 0,7002272% ao mês, obtivemos como resultado de 0,1650687. Essa taxa livre de risco foi adquirida ao analisar o mesmo período da Selic.

Esse valor obtido do cálculo do Índice de Sharpe de 0,1650687 indica que a carteira otimizada apresenta uma relação positiva entre o retorno obtido e o risco assumido. Quanto maior o valor do índice de Sharpe, melhor é considerado o desempenho da carteira, pois indica um retorno superior em relação ao risco assumido.

Nesse caso, o valor obtido sugere que a carteira otimizada conseguiu gerar um retorno positivo em relação à taxa livre de risco, considerando o desvio padrão ou a volatilidade da carteira. Isso significa que a carteira foi capaz de proporcionar um retorno adicional acima do que seria esperado em relação ao nível de risco assumido.

4.2 Período pré-pandemia

Em relação aos resultados obtidos ao utilizar o modelo de Markowitz para o período anterior à pandemia, foi possível obter a carteira otimizada com os melhores resultados em termos de risco e retorno. A alocação de ativos ótima resultante desse modelo foi a seguinte:

- Petrobrás (PETR4.SA): 0,0%
- Itaú Unibanco (ITUB4.SA): 0,2%
- Vale (VALE3.SA): 4,8%
- BB Seguridade (BBSE3.SA): 9,6%
- Taesa (TAEE3.SA): 27,6%
- Gerdau (GGBR4.SA): 0,0%
- WEG (WEGE3.SA): 18,4%
- Schulz (SHUL4.SA): 25,4%
- Unipar (UNIP6.SA): 14,0%

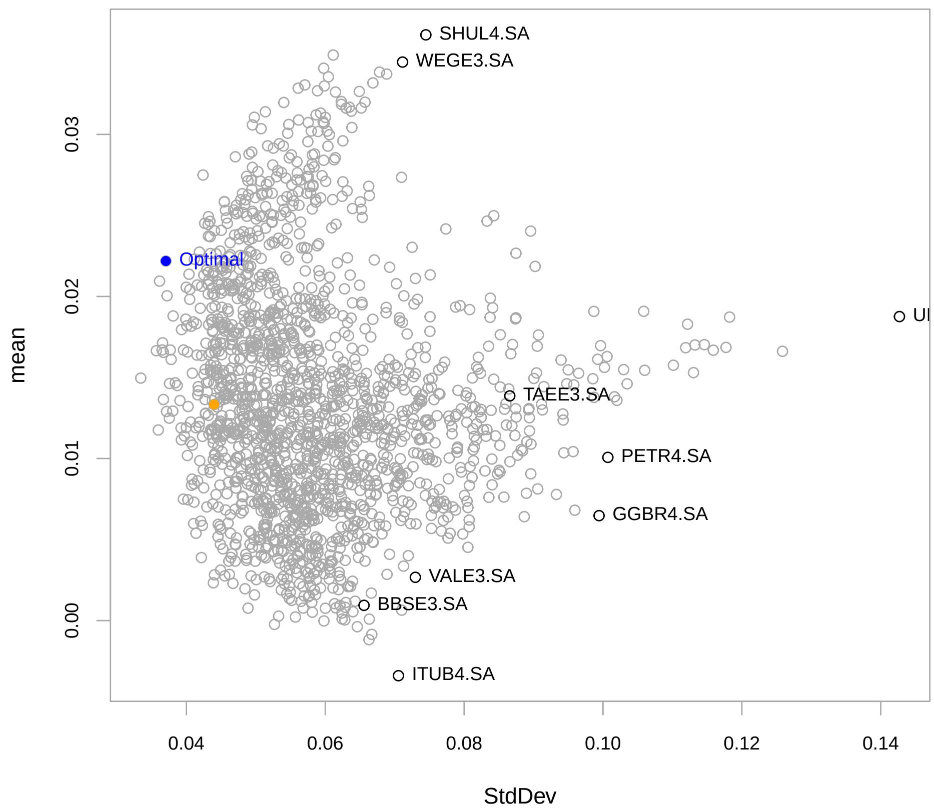
Essa combinação de alocação de ativos foi determinada considerando a relação entre risco e retorno, buscando maximizar o retorno esperado e minimizar a volatilidade da carteira.

Ao analisar as medidas objetivas, constatou-se que a carteira otimizada apresenta uma média de retorno esperado de 2,219% ao mês no período antes da pandemia. Além disso, o desvio padrão, que é uma medida de risco, foi calculado em 3,704%. Percebe-se que esta carteira, analisada no período anterior à pandemia, obteve maior retorno e menor risco em relação a carteira analisada no período total.

Na Figura 4.2 tem-se o gráfico da relação risco x retorno eficiente da nossa carteira, no período anterior à pandemia.

Todas análises feitas em relação à primeira carteira são igualmente aproveitadas para esta carteira. O ponto *Optimal*, se refere a nossa carteira otimizada pelo modelo de Markowitz, representando a melhor relação risco x retorno.

Figura 4.2 – Resultados: Risco x Retorno - Combinações dos ativos selecionados



Ao aplicar o índice de Sharpe à carteira otimizada, foi obtido um resultado de 0,4309404. Esse valor indica que a carteira apresenta uma relação favorável entre o retorno obtido e o risco assumido.

Nesse caso específico, o resultado do índice de Sharpe aumentou em relação ao valor anterior. Isso ocorreu devido a dois fatores: o retorno da carteira aumentou e o desvio padrão, que é uma medida de volatilidade/risco, diminuiu. Isto significa uma maior estabilidade nos retornos.

Dessa forma, o aumento no valor do índice de Sharpe sugere que a carteira otimizada obteve um retorno mais alto em relação ao risco assumido. Essa melhoria no equilíbrio entre retorno e risco é uma indicação positiva, pois evidencia uma maior eficiência da carteira em termos de otimização dos recursos investidos.

4.3 Período durante e pós pandemia

Por último, com relação aos resultados obtidos ao utilizar o modelo de Markowitz para o período durante e posterior à pandemia, foi possível obter a carteira otimizada com os melhores resultados em termos de risco e retorno. A alocação de ativos ótima resultante desse modelo foi a seguinte:

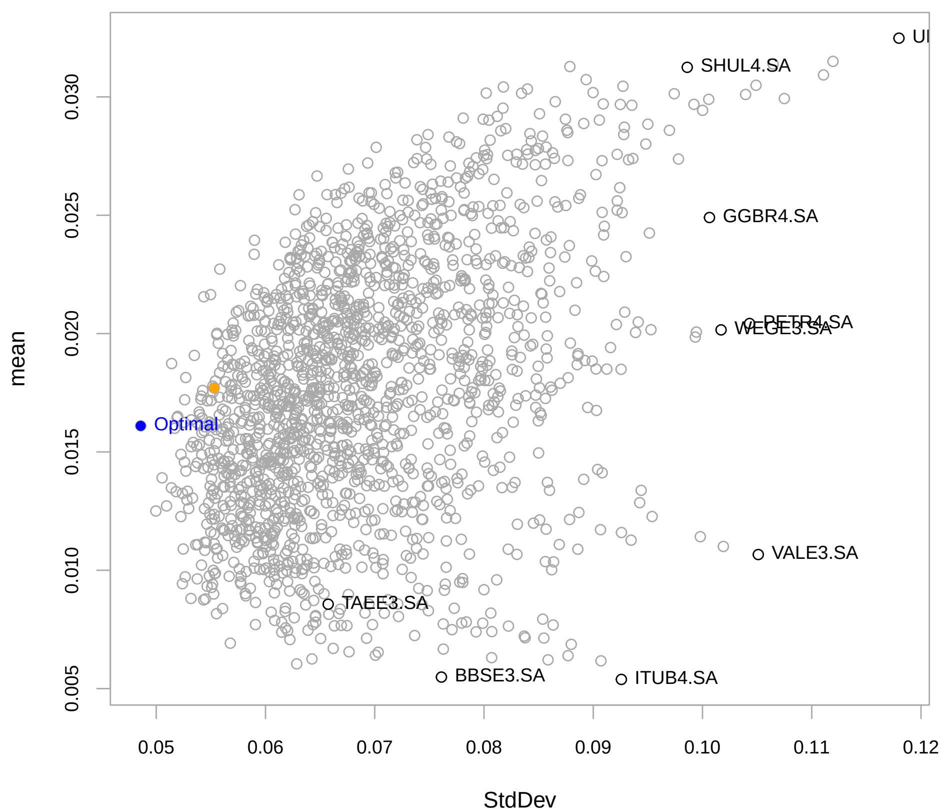
- Petrobrás (PETR4.SA): 1,0%
- Itaú Unibanco (ITUB4.SA): 0,8%
- Vale (VALE3.SA): 1,0%
- BB Seguridade (BBSE3.SA): 27,2%
- Taesa (TAEE3.SA): 24,4%
- Gerdau (GGBR4.SA): 0.0%
- WEG (WEGE3.SA): 19,8%
- Schulz (SHUL4.SA): 16,8%
- Unipar (UNIP6.SA): 9,0%

Ao analisar as medidas objetivas, constatou-se que a carteira otimizada apresenta uma média de retorno esperado de 1,61% ao mês após a pandemia. Além disso, o desvio padrão, que é uma medida de risco, foi calculado em 4,858% após a pandemia.

Na Figura 4.3 tem-se o gráfico da relação risco x retorno eficiente da nossa carteira, no período posterior à pandemia.

Todas análises feitas anteriormente são igualmente aproveitadas para esta carteira. O ponto *Optimal*, se refere a nossa carteira otimizada pelo modelo de Markowitz, representando a melhor relação risco x retorno.

Figura 4.3 – Resultados: Risco x Retorno - Combinações dos ativos selecionados



Ao aplicar o índice de Sharpe à carteira otimizada após o período da pandemia, obteve-se um resultado de 0,1754733. Esse valor indica que a carteira apresenta uma relação favorável, porém menos favorável entre o retorno obtido e o risco assumido em comparação ao período anterior à pandemia.

Nesse caso específico, o resultado do índice de Sharpe diminuiu em comparação ao período anterior à pandemia. Essa diminuição pode ser atribuída a dois fatores principais: o retorno médio da carteira diminuiu e o período da pandemia foi marcado por turbulências e incertezas nos mercados financeiros.

4.4 Análise Geral

Tabela 4.1 – Porcentagem de Cada Ativo Nas Carteiras

Ativo	Período Total (%)	Pré-pandemia (%)	Durante e Pós-pandemia (%)
Petrobrás	0.20	0.00	1.00
Itaú	0.60	0.20	0.80
Vale	8.60	4.80	1.00
BB Seguridade	4.20	9.60	27.20
Taesa	30.80	27.60	24.40
Gerdau	0.40	0.00	0.00
Weg	31.00	18.40	19.80
Schulz	0.00	25.40	16.80
Unipar	24.20	14.00	9.00

Tabela 4.2 – Métricas das Carteiras

Carteira	Retorno Esperado (%)	Desvio Padrão (%)	Índice de Sharpe
Período Total	1.606	5.49	0.1650687
Pré-pandemia	2.219	3.704	0.4309404
Durante e Pós-pandemia	1.61	4.858	0.1754733

É perceptível que, ao adotar diferentes períodos, as composições das carteiras apresentam variações nos pesos atribuídos a cada ativo. Isso ocorre devido às diferentes performances e volatilidades observadas ao longo do tempo. No entanto, é interessante notar que as empresas Taesa e Weg se destacaram como opções relevantes nas carteiras em todos os períodos analisados.

É importante destacar que o desempenho da carteira no período antes da pandemia apresentou resultados mais favoráveis, com maiores retornos e menor desvio padrão. Isso pode ser atribuído ao cenário econômico e de mercado mais estável e favorável naquele período. No entanto, com a chegada da pandemia e a consequente incerteza e volatilidade nos mercados, houve uma redução nos retornos e um aumento no desvio padrão, o que impactou os resultados da carteira durante e pós-pandemia.

É fundamental reconhecer que o mercado financeiro está sujeito a variações diárias de preços e que eventos externos, como a pandemia, podem causar impactos significativos nas performances das carteiras de investimento. A incerteza e a volatilidade durante esse período desafiador podem ter afetado negativamente os resultados das carteiras.

No entanto, é importante ressaltar que o mercado financeiro tem mostrado resiliência ao longo do tempo e conseguiu se recuperar de adversidades passadas. Portanto, mesmo diante de variações de preços e momentos de instabilidade, os investidores devem estar cientes de que o mercado é dinâmico e pode apresentar oportunidades de recuperação e crescimento.

Nesse contexto, a compreensão dessas flutuações e a adoção de estratégias de investimento sólidas e diversificadas são elementos essenciais para lidar com os desafios e aproveitar as oportunidades que surgem no mercado financeiro.

Em resumo, os resultados obtidos por meio do modelo de Markowitz e o cálculo do índice de Sharpe fornecem informações valiosas para a construção de carteiras diversificadas e eficientes, buscando equilibrar os objetivos de maximização do retorno e minimização do risco. Essas abordagens permitem avaliar a relação entre o retorno esperado e o risco assumido, ajudando a tomar decisões informadas na alocação de ativos e na busca por um equilíbrio adequado entre risco e retorno na construção da carteira.

5 CONCLUSÃO

O modelo de Markowitz, proposto pelo economista Harry Markowitz, é uma importante abordagem para a construção de carteiras de investimento. A utilização do modelo de Markowitz, aliada ao cálculo do índice de Sharpe, permite uma análise mais abrangente e precisa dos investimentos, levando em consideração tanto o retorno esperado quanto o risco assumido.

A utilização do modelo de Markowitz para a construção da carteira de investimentos permitiu a obtenção de uma relação entre risco e retorno favorável. Por meio da otimização da carteira, foi possível selecionar os pesos ideais para cada ativo, levando em consideração suas características e o objetivo do investidor.

Ao aplicar o índice de Sharpe à carteira de investimentos, obtém-se um indicador que mede a relação entre o retorno excedente (retorno acima da taxa livre de risco) e a volatilidade da carteira. Esse índice proporciona uma medida de eficiência, permitindo comparar diferentes carteiras ou estratégias de investimento.

Os resultados obtidos podem servir como base para a tomada de decisão na seleção de investimentos, fornecendo *insights* sobre a composição de uma carteira diversificada e eficiente em termos de risco e retorno.

Um dos problemas do modelo de Markowitz é que ele não leva em consideração a assimetria dos retornos dos ativos. Ele assume que os retornos seguem uma distribuição normal, o que pode não ser realista na prática, já que os retornos dos ativos frequentemente apresentam assimetria, ou seja, uma tendência de se distribuírem de forma assimétrica em relação à média. Por isso, é também interessante utilizar outras metodologias que considerem a assimetria, como o Modelo de Athayde e Flores, que pode ser visto em Martins (2015).

Ao não considerar a assimetria dos retornos, o modelo de Markowitz pode subestimar os riscos associados aos ativos. Isso ocorre porque a assimetria pode indicar a presença de eventos extremos ou de caudas longas na distribuição dos retornos, o que pode levar a perdas significativas além do esperado pelo modelo.

Em relação à aplicação dos princípios de investimento, como a diversificação, alocação de ativos e gestão de risco, na educação financeira nas escolas, isso pode ser muito relevante e benéfico. Embora a aplicação direta do modelo de Markowitz, que é mais complexo, possa não ser viável, ensinar aos estudantes os conceitos e princípios subjacentes desse modelo pode ajudá-los a desenvolver habilidades financeiras fundamentais desde cedo.

Os alunos podem aprender a analisar diferentes ativos, avaliar seu retorno esperado e seu nível de risco. Além disso, eles compreendem como essas informações podem ser utilizadas para construir uma carteira equilibrada que maximize o retorno ajustado ao risco. Nesse contexto, o cálculo do índice de Sharpe desempenha um papel fundamental, pois permite comparar diferentes carteiras ou estratégias de investimento e considerar a relação entre retorno e volatilidade.

Além disso, ao ensinar a relação de risco e retorno de ativos financeiros nas escolas, estamos promovendo uma cultura de educação financeira desde cedo, capacitando os estudantes a lidar com as questões financeiras de forma responsável e consciente. Isso contribui para uma sociedade mais informada financeiramente, com indivíduos capazes de tomar decisões financeiras mais sólidas e de planejar seu futuro financeiro de maneira eficaz.

REFERÊNCIAS

APPOLINARIO, F. **Metodologia da Ciência**. São Paulo: Cengage learning, 2009.

Assaf Neto. **Mercado Financeiro**. 14. ed. São Paulo: Editora Atlas Ltda, 2018.

BRUNI, A. L. et al. A eficiência do modelo de elton-gruber na formação de carteira de ações no brasil. **Revista de Contabilidade da UFBA**, v. 3, n. 2, p. 65–77, ago. 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufba.br/index.php/rcontabilidade/article/view/3808>.

FERREIRA, M. S. d. O. E. B. **Introdução à Estatística com R**. Minas Gerais: Unifal-MG, 2020.

GOMES, P. X. M. da Cruz Stalter; Paulo Ricardo Fiuza Marques; Arian Rodrigues Fagundes; Aline Soares da S. T. Aplicabilidade da teoria da carteira de markowitz como forma de diversifição e minimização de riscos. **SIEPE**, p. 1–7, 2018. Disponível em: <https://guri.unipampa.edu.br/uploads/evt/arq_trabalhos/17609/seer_17609.pdf>.

HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**. [S.l.]: Pearson, 2018.

INFOMONEY. 2022. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/onde-investir/brasil-atinge-a-marca-de-5-milhoes-de-contas-de-investidores-em-renda-variavel-aponta-b3/>.

MACERAU, W. M. d. O. Comparação das Distribuições α-estável, Normal, t de Student e Laplace assimétricas. **Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, 2012**, p. 5–7, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4555/4185.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, [American Finance Association, Wiley], v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. ISSN 00221082, 15406261. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2975974>.

MARTINS, P. R. Aplicação do teorema do ponto fixo a um modelo de seleção de carteiras de investimentos. 2015. Dissertação. Disponível em: <https://www.bdtd.uerj.br:8443/bitstream/1/7709/1/PatriciaReis_PPGCComp.pdf>.

MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F.; SILVA, P. N. D. Análise de Modelos de Seleção de Carteiras de Investimento. **Cadernos do IME - Serie Matematica**, v. 8, p. 11–38, 2014. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/article/view/14160>.

MELO, V. H. d. **Determinantes da volatilidade dos ativos financeiros no mercado brasileiro**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2020.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística Básica 9ª edição**. São Paulo: Saraiva, 2017.

NISCHIGUTI, F. Y.; KUBAYASHI, T. M.; MACEDO, V. H. d. M. **Análise do aumento de investidores brasileiros na bolsa de valores durante a crise do COVID-19 em 2020**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual de Campinas, Limeira, SP. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/3997>.

SANTOS, R. P. d. Otimização de carteiras de investimentos: Uma aplicação ao mercado acionário brasileiro. 08 2016. Mestrado Profissional em ECONOMIA E GESTÃO EMPRESARIAL.

VASCONCELOS, G. F. R. **Precificação de Ativos Sob Qualquer Distribuição de Retornos: A Derivação e Aplicação do OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL(OCAPM)**. 2013. 6-7 p. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2402/1/gabrielfiliperodriguesvasconcelos.pdf>.