ERLIZEI LUIZ JUNIOR

Um breve estudo das definições e operações com matrizes nas obras Remarques (1855) e A Memoir on the Theory of Matrices (1858) de Arthur Cayley

LAVRAS – MG
2023

ERLIZEI LUIZ JUNIOR

Um breve estudo das definições e operações com matrizes nas obras Remarques (1855) e A Memoir on the Theory of Matrices (1858) de Arthur Cayley

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

____

Orientador Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy

____

Discente Erlizei Luiz Junior

LAVRAS – MG
2023

ERLIZEI LUIZ JUNIOR

Um breve estudo das definições e operações com matrizes nas obras Remarques (1855) e A Memoir on the Theory of Matrices (1858) de Arthur Cayley

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADO em 19 de julho de 2023

Banca Examinadora

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy - orientador
(DFM/ICET/UFLA)
Profa. Dr. Mário Henrique Andrade Claudio
(DFM/ICET/UFLA)
Prof. Dr. José Alves Oliveira
(DMM/ICET/UFLA)

LAVRAS- MG

2023

À minha mãe Rita por me acompanhar em todas as etapas até aqui sempre com amor e carinho.

Ao meu pai Erlizei por todo apoio e por ser o meu maior exemplo.

Dedico

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar as obras do matemático Arthur Cayley (1821-1895), especialmente "*Remarques sur la notation des fonctions algébriques*" e "*A Memoir on the Theory of Matrices*", publicadas em 1855 e 1858, respectivamente. A pesquisa tem um enfoque na História da Matemática, onde foi apresentada uma breve biografia de Cayley, além de buscar analisar as definições pioneiras da teoria das matrizes apresentadas por ele. Também buscamos analisar e explorar as principais definições presentes no estudo de matrizes quadradas e matrizes retangulares, no que tange aos tipos de matrizes e suas operações, como a adição, a multiplicação por um escalar, composição de matrizes, entre outras. Após os estudos, verificamos que Cayley define uma matriz como um conjunto de equações de um sistema linear e consequentemente, ao se realizar uma operação com matrizes, estamos operando com as equações deste sistema.

Palavras-Chave: Arthur Cayley, Matrizes, Sistemas Lineares, História da Matemática.

ABSTRACT

This work aims to explore the works of mathematician Arthur Cayley (1821-1895), especially "Remarques sur la notation des fonctions algébriques" and "A Memoir on the Theory of Matrices", published in 1855 and 1858, respectively. The research has an approach in the History of Mathematics, where a brief biography of Cayley was presented, in addition to seeking the pioneering configurations of matrix theory satisfied by him. We also seek to analyze and explore the main definitions present in the study of square matrices and rectangular matrices, regarding the types of matrices and their operations, such as addition, multiplication by a scalar, matrix composition, among others. After the studies, we verified that Cayley defines a matrix as a set of permanence of a linear system and consequently, when performing an operation with matrices, we are operating with the permanencies of this system.

Keywords: Arthur Cayley, Matrices, Linear Systems, History of Mathematics.

SUMÁRIO

1. Introdução 8

2. Metodologia 11

3. Uma breve biografia de Arthur Cayley 13

4. Cayley e a Teoria das Matrizes 16

4.1 Cayley e uma primeira definição de matriz 16

4.2 Cayley e a Memória da Teoria das Matrizes 20

4.2.1 Alguns tipos de matrizes 23

4.2.2 Adição e Subtração de Matrizes 25

4.2.3 Multiplicação de Matriz por uma quantidade única (escalar) 28

4.2.4 Composição de Matrizes (Multiplicação de Matriz por Matriz) 29

4.2.5 Matriz Inversa ou Matriz Recíproca 35

4.2.6 Matriz transposta 41

5 Considerações finais 44

Referências bibiográficas 46

1. Introdução

Depois de iniciado minha vida acadêmica, me pego fazendo uma das etapas finais de minha Graduação em Licenciatura em Matemática. Desde o primeiro semestre, venho analisando e pensando a respeito do que seria relevante, e acima de tudo, que englobasse assuntos de meu interesse para se fazer uma pesquisa. Os semestres foram passando, e em virtude da pandemia da covid-19, vivi uma fase do curso tendo aulas remotas por meio da modalidade do Ensino Emergencial Remoto (ERE).

Durante o período de ensino remoto, participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), e comecei a ter contato com meu orientador, que era um dos professores que coordenavam as reuniões com a professora supervisora da escola parceira, e a partir daquele momento me senti a vontade para procurá-lo e contar com a ajuda para tomar uma decisão tão importante: a escolha de um tema para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Durante nossas conversas, o professor Kleyton me propôs alguns temas relacionados a História da Matemática, e por fim, acabei escolhendo abordar a sugestão referente ao tópico de Matrizes.

De acordo com o historiador matemático Eves (2011), além dos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), os matemáticos Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897) foram os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes. Salientamos que seria interessante olhar para as obras de Cauchy e Sylvester, contudo, por questões de exequibilidade, iremos focar somente nas definições introduzidas por Cayley.

Com isso, iremos analisar as obras , ambas de autoria do matemático inglês Arthur Cayley, *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*[1] e *A Memoir on the Theory of Matrices*[2], publicados, respectivamente, no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) em 1855 e na *Philosophical Transactions of Royal Society of London* no ano de 1858. Consideramos que o estudo das obras deste matemático, sob uma perspectiva da História da Matemática se faz importante dado que as publicações de Cayley (1855,1858), de acordo com Bernardes e Roque (2016), apresentaram as primeiras definições da Teoria das Matrizes[3].

Sabemos que no decorrer da História da Matemática, a noção de ideia do que viria a ser

---

[1] Observações sobre a notação de funções algébricas.
[2] Uma Memória sobre a Teoria das Matrizes.
[3] As autoras Bernardes e Roque (2016) também destacam as contribuições de Sylvester no campo da Teoria das Matrizes.

denominado como matriz já é conhecida desde a Antiguidade, como apontam Lima, Pereira e Chaquiam (2018). Contudo, as matrizes foram definidas como uma teoria somente em meados do século XIX, posterior ao conceito de Determinantes. Além disso, podemos dizer que a noção e estratégias de resoluções de sistemas lineares são conhecidas por civilizações desde a Antiguidade, porém, neste trabalho, iremos nos limitar à Teoria das Matrizes.

Inicialmente, buscamos verificar se haviam produções no Brasil que abordassem o tema de matrizes sob uma perspectiva histórica e para isso, consultamos os Anais das edições do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e sites como o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) e periódicos CAPES, e encontramos algumas obras: Bernardes e Roque (2016), Lima, Pereira e Chaquiam (2018), Matos e Nunes (2019) e Bernardes (2019).

No artigo de Bernardes e Roque (2016, p.11), as autoras apresentam dois episódios referentes à matrizes: a introdução do termo matriz por Sylvester e a elaboração do cálculo simbólico formulado por Cayley. Elas consideram os problemas de pontos de contato entre duas cônicas como objetos sistêmicos para investigação do primeiro episódio, enquanto a noção de matriz foi o objeto do segundo episódio. Ao analisar os dois objetos, identificaram os determinantes como técnicas sistêmicas comum aos dois episódios.

Lima, Pereira e Chaquiam (2018) realizam uma pesquisa bibliográfica contendo algumas passagens cronológicas dos matemáticos contemporâneos a Cayley, traços biográficos a respeito do matemático e uma breve evolução do conceito de matrizes no decorrer do tempo. Bernardes (2019) apresenta uma proposta que visa correlacionar o ensino de matemática e a História da Matemática, e a partir do uso da teoria de Sfard (2008) em relação as regras do nível do objeto e regras metadiscursivas ou metarregras, obteve resultados em sua pesquisa que apontam a potencialidade da utilização de fontes históricas em sala de aula.

Matos e Nunes (2019), apoiados pela Teoria Antropológica do Didático, realizaram uma análise epistemológica das Matrizes de cunho histórico com o intuito que os professores ainda em formação inicial de Matemática, possam (re)construir as tarefas que não estão presentes nos livros didáticos. Desta forma, estes futuros professores por meio de conhecerem a gênese das propriedades da Teoria das Matrizes, tenham elementos para repensar o ensino de matrizes no contexto escolar.

O diferencial de nosso trabalho em relação aos citados anteriormente, se dá pelo fato de explorarmos e dar ênfase às propriedades enunciadas por Cayley (1855,1858) no que refere-se às regras para operação de adição de matrizes, multiplicação de matriz por uma quantidade única (multiplicação de matriz por escalar), composição de matrizes (multiplicação de matriz por matriz) e matriz inversa, bem como exploramos estes procedimentos não só para matrizes quadradas, mas também para matrizes retangulares. Deste modo, cumprimos com o objetivo deste trabalho, que consiste em apresentar aspectos originais da definição de matrizes formulados por Arthur Cayley.

No caso da matemática, em virtude do caráter lógico da ciência, muito da estrutura original se mantém, contudo, no caso das matrizes, por meio deste trabalho poderemos verificar que o conceito de matriz é introduzido para simbolizar os coeficientes de equações de sistemas lineares e formas quadráticas, enquanto que - ressaltando que não é nosso propósito aprofundar nas comparações - ao contrastar com a notação dos dias de hoje, a ideia de matriz é dada para representar tabelas, disassociando-se da sua definição original e gênese da origem do conceito.

2. Metodologia

A pesquisa será de caráter qualitativo, prática que de acordo com André (1995), tem se tornado crescente para concretizar pesquisas em Educação atualmente. Para obter os dados referentes à pesquisa, iremos recorrer ao processo de análise de documentos, pois como bem diz Lüdke e André (1986), a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema. Sá Silva, Almeida e Guindani (2009, p.5) destacam que "a análise documental é um procedimento que se utiliza de métodos e técnicas para a apreensão, compreensão e análise de documentos dos mais variados tipos”.

Todos os documentos utilizados neste trabalho serão encontrados nas fontes de pesquisas históricas. Segundo Barros, “fonte histórica” se trata de:

> É tudo aquilo que, produzido pelo homem ou trazendo vestígios de sua interferência, pode nos proporcionar um acesso à compreensão do passado humano. Neste sentido, são fontes históricas tanto os já tradicionais documentos textuais (crônicas, memórias, registros cartoriais, processos criminais, cartas legislativas, obras de literatura, correspondências públicas e privadas e tantos mais) como também quaisquer outros que possam nos fornecer um testemunho ou um discurso proveniente do passado humano, da realidade um dia vivida que se apresenta como relevante para o presente do historiador. (BARROS, 2012, p.130).

Neste trabalho iremos utilizar como principais fontes históricas as obras do matemático Cayley (1855, 1858). Estas fontes que consideramos em nosso trabalho, são denominadas como fontes diretas. De acordo com Barros (2012) as fontes diretas são aquelas que não possuem intermediações nas informações, ou seja, são aquelas fontes que iremos estudar a partir da obra original. Neste aspecto, gostaríamos de destacar, que no decorrer do trabalho iremos manter as notações matemáticas dos artigos originais como figuras ao invés de digitá-las. Optamos por apresentar e manter a estética e tipografia do texto original o mais próximo possível do modo que os entes matemáticos eram representados no período.

Além das fontes diretas, para compor este trabalho, iremos utilizar fontes que traçam um percurso histórico da teoria das matrizes e obras que abordam a vida e obra do matemático Arthur Cayley, tais como: Crilly (2006), Godoy (2013), Gillispie (1981), Boyer (1974) e Eves (2011). Estas fontes são denominadas como indiretas, dado que são aquelas que:

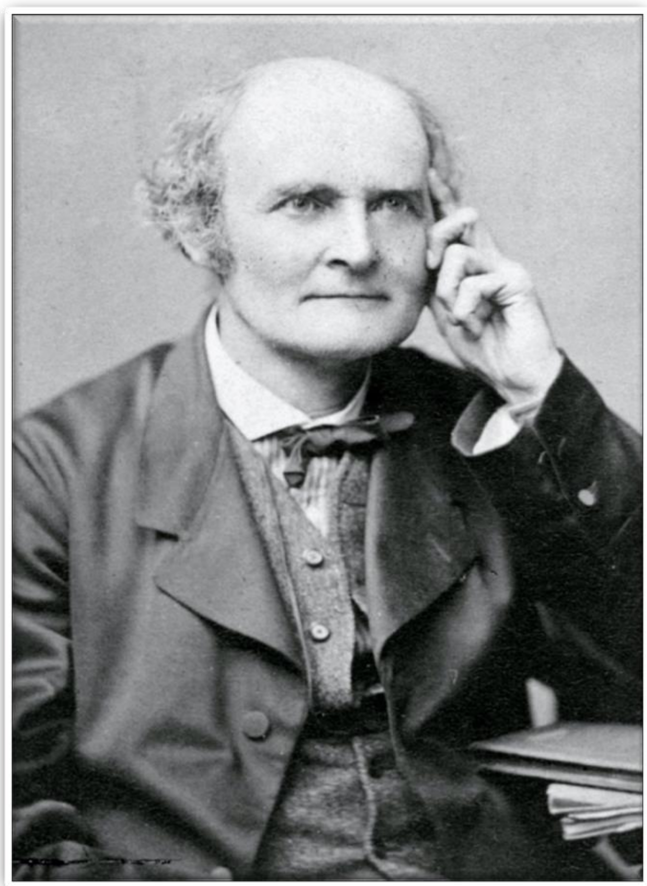
> o autor ou enunciador do texto chega ao seu objeto ou nos transmite alguma informação passando por um intermediário ou mais (...) em uma cadeia documental, testemunhal ou informativa, colocando-se, por exemplo, entre o historiador e um primeiro documento ou testemunho, anterior a todos” (BARROS, 2012, p.134).

Por meio destes documentos, a “análise documental inicia-se pela avaliação preliminar de cada documento, realizando o exame e a crítica do mesmo, (...). Após a análise de cada documento, segue-se a análise documental propriamente dita” (CECHINEL et al., 2016, p. 4), sendo assim, será possível listas cada tipo de informação coletada que serão fundamentais para cumprir os objetivos do projeto.

3. Uma breve biografia de Arthur Cayley

Arthur Cayley (Figura 1) nasceu em Surrey, Richmond, Inglaterra, em dezesseis de agosto de 1821. Em 1829, Arthur e seus pais fixaram residência em *Blackheath*, na Inglaterra, local onde ele estudou num colégio privado durante 4 anos. De acordo com Macfarlane (1895), aos seus 14 anos, Cayley foi enviado para o *King's College of London*, localizado em Londres, onde demonstrou ter um futuro promissor nas áreas da matemática. Em 1838, agora com 17 anos, ingressou em seu curso superior de Direito no *Trinity College*, em *Cambridge*, local onde também se destacou entre os demais, sendo o primeiro em seus exames durante os anos da graduação.

Figura 1 – Arthur Cayley (1821-1895)



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley acesso em: 19/06/2023

Segundo Eves (1995), Cayley ocupa o terceiro lugar entre os escritores de matemática mais prolíficos em toda a história dessa ciência, sendo superado apenas por Euler (1707-1783) e Cauchy (1789-1857). Além das atividades na área de matemática, Arthur Cayley exerceu o ofício da advocacia durante o intervalo de tempo de sete anos. Ainda como aluno de graduação em Cambridge, começou a publicar artigos matemáticos com certa frequência. Publicou entre 200 e 300 artigos durante seus anos de prática jurídica e continuou prolífico nessa atividade pelo resto da vida. Eves (1995) também ressalta as contribuições de Cayley em diversos conteúdos matemáticos:

> Cayley deu contribuições pioneiras à geometria analítica, à teoria das transformações, teoria dos determinantes, geometrias de dimensões superiores, teoria da partição, teoria das curvas e superfícies, o estudo de formas binárias e ternárias e a teoria das funções abelianas, teta e elípticas (EVES, 1995, p.560).

Godoy (2013, p.13-14), se baseando nos estudos de Crilly (2006), fez uma breve cronologia da vida de Arthur Cayley, destacando alguns fatos relevantes.

> 1821: Nascimento de Arthur Cayley, em 16 de Agosto, filho de Henry Cayley (1768-1850) e Maria Antonia Doughty (1794-1875).
> 1835: Ano de ingresso no *King´s College* de Londres.
> 1838: Inicia seus estudos no *Trinity College*, em Cambridge.
> 1841: Publica seu primeiro artigo matemático.
> 1842: Graduação na Universidade de Cambridge, *Trinity College*.
> 1845: Descobre a Álgebra dos Octônios, que passou a ser denominado como “Cayley numbers”. Faz visitas a Escandinávia e a Alemanha.
> 1846: Adentra ao Lincoln´s Inn como um estudante de advocacia.
> 1847: Cayley conhece Sylvester, que viria a ser seu maior amigo.
> 1848: Visita Dublin e conhece diversos matemáticos irlandeses.
> 1849: Inicia seu trabalho como *Bar* no Lincoln´s Inn.
> 1851: Descobre uma nova base para a Teoria dos Invariantes.
> 1852: Eleito um *fellow* na *Royal Society of London*.
> 1854: Início da sua série de dez publicações sobre a Memória dos Quânticos. Amplia a noção de grupo de permutações de Galois.
> 1858: Desenvolve a noção de Matrizes e explora a Álgebra das Matrizes.
> 1859: Define a noção de distância em Geometria Projetiva. Premiado com a *Royal Medal* na *Royal Society of London*.
> 1863: Se casa com Susan Moline (1831-1923). Eleito a Cadeira de Sadleirian de Matemática Pura na Universidade de Cambridge.
> 1864: Introduz a Geometria Não-Euclidiana na Inglaterra.
> 1868-1870: Presidente da *London Mathematical Society*.
> 1870: Nascimento de seu primeiro filho, Henry Cayley (1870-1949).
> 1872: Nascimento de sua filha: Mary (1872-1950).
> 1872-1874: Presidente da *Royal Astronomical Society*.
> 1878: Publicação da Décima Memória dos Quânticos.
> 1880: Visita Felix Klein em Munique.
> 1882: Visita a *Johns Hopkins University*, Baltimore, USA. Premiado com a *Copley Medal* na *Royal Society of London*.
> 1883-1884: Presidente da *British Association for the Advancement of Science*.
> 1884: Premiado com a primeira *De Morgan Medal* da *London Mathematical Society*.
> 1895: Falece em 26 de Janeiro, em Cambridge.

Além de seu trabalho em matrizes, Cayley também fez contribuições notáveis em outras áreas da matemática. Ele fez avanços significativos na teoria dos invariantes, que estuda propriedades que permanecem inalteradas sob certas transformações. Seus estudos em geometria e álgebra linear foram fundamentais para o desenvolvimento da geometria algébrica moderna.

4. Cayley e a Teoria das Matrizes

Nesta seção do trabalho, apresentamos resultados de um estudo realizado a partir das obras *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* (Observações sobre a notação de funções algébricas) e *A Memoir on the Theory of Matrices* (Uma Memória sobre a Teoria das Matrizes), publicados, respectivamente, no *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[4] (Crelle) em 1855 e na *Philosophical Transaction of Royal Society of London* no ano de 1858.

Em relação ao primeiro artigo, veremos que Cayley usa a notação de matriz para se referir a sistemas lineares e formas ou funções quadráticas, enquanto que somente na obra de 1858, o matemático irá apresentar uma teoria substancial ao conceito de matriz, associando-as como uma notação abreviada para representar um conjunto de equações de um sistema linear, bem como, definir e apresentar regras para operações com matrizes.

4.1 Cayley e uma primeira definição de matriz

De acordo com Bernardes e Roque (2016, p.11), a "noção de matriz foi utilizada por Cayley, pela primeira vez, no artigo *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*", publicado em 1855 no Crelle[5].

Desta forma, com o intuito de buscarmos um entendimento das primeiras definições de matrizes, verificamos que Cayley introduziu a seguinte notação (Figura 2) para "representar o que chamo de uma matriz; ou seja, um sistema de quantidades arranjadas na forma de um quadrado, mas, também totalmente independentes (não estou falando aqui de matrizes retangulares)." (CAYLEY, 1855, p.282, tradução nossa)[6]:

---

[4] Jornal (Periódico) para Matemática Pura e Aplicada. Esta revista matemática também era conhecida simplesmente por Crelle em razão do início de suas atividades na Alemanha em 1826 sob edição do matemático August Leopold Crelle (1780-1855).

[5] É importante salientarmos que as publicações do matemático Arthur Cayley foram reunidas e organizadas em uma coleção de 13 volumes, intiluladas *The collected mathematical papers of Arthur Cayley* que foram editadas por Andrew Russel Forsyth (1858-1942), sucessor de Cayley como Professor Sadleirian de Matemática Pura da Universidade de Cambridge e publicada no ano de 1889**.** O artigo *Remarques sur la notation des functions algébriques* encontra-se no volume 2 da coleção, porém, esclarecemos que afim de evitar quaisquer anacronismos, iremos manter as páginas da publicação no Crelle, 282-285, e a data original da publicação, 1855. Contudo, na coletânea, este artigo encontra-se nas páginas 185-188.

[6] No original: *représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré, mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires)*.

Figura 2 - Notação de Matriz por Cayley (1855)[7]

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha'\,, & \beta'\,, & \gamma'\,, & \ldots \\ \alpha''\,, & \beta''\,, & \gamma''\,, & \ldots \\ \vdots & & & \end{array}\right|$$

Fonte: Cayley (1855, p.282)

Como podemos ver na Figura 2, Cayley utilizava as reticências[8] para representar apenas uma continuação das linhas de colunas da matriz representada. O matemático considera que essa notação é conveniente para representar um conjunto de equações, dessa forma, facilitando o manejo ao abordar propriedades relacionadas à Teoria das Equações Lineares. Sendo assim, Cayley exemplifica que um conjunto de equações (Figura 3):

Figura 3 - Notação matricial para representar conjuntos de equações lineares por Cayley (1855)

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \ldots) = \left(\left|\begin{array}{llll} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \ldots \\ \alpha'\,, & \beta'\,, & \gamma'\,, & \ldots \\ \alpha''\,, & \beta''\,, & \gamma''\,, & \ldots \\ \vdots & & & \end{array}\right|\right)(x,\ y,\ z,\ \ldots)$$

Fonte: Cayley (1855, p.282)

Cayley (1855) apresenta uma regra para composição de matrizes, ou seja, uma multiplicação de matriz por matriz, que deixaremos para abordar na próxima seção deste trabalho. Assim, as quantidades dispostas nesta notação são independentes no sentido em que cada um dos elementos estão relacionados a um determinado valor desconhecido $(x, y, z, \ldots)$, uma vez que correspondem à:

[7] Cayley (1855) utilizou originalmente a notação | | - a mesma notação utilizada por Sylvester - como podemos ver nas Figuras 2 e 4, porém na edição, Forsyth realizou algumas alterações quando a notação pudesse apresentar alguma ambiguidade com os determinantes, como nas Figuras 3 e 5, por exemplo. Na próxima seção abordaremos a memória de Cayley (1858), em que o próprio matemático utiliza uma simbologia para distinguir as matrizes dos determinantes.

[8] Nos dias atuais, as reticências são usadas para representar que a continuação pode ser infinita.

$$
\begin{aligned}
\xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots \\
\eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \cdots \\
\zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nesta mesma obra, Arthur Cayley indica uma notação para representação de uma matriz inversa (Figura 4), que serão definidas porteriormente, onde temos uma representação de um sistema de equações em relação ao valores desconhecidos $(x, y, z, \ldots)$ em relação aos termos de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, como sendo:

Figura 4 - Notação para representar matriz recíproca ou inversa

$$
\begin{vmatrix}
\alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \\
\alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\
\alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\
\vdots & & &
\end{vmatrix}^{-1}
$$

Fonte: Cayley (1855, p.283)

Cayley comenta que estes elementos são frações, cujo denominador comum é o determinante resultante da matriz original, enquanto os numeradores são calculados por meio de determinantes menores excluindo qualquer uma das linhas e qualquer uma das colunas. Cayley irá explicitar e definir essas propriedades em sua futura memória da Teoria das Matrizes, a ser publicada em 1858.

Gostaríamos de destacar ainda, que além de definir matrizes associando-as como uma notação para representar sistemas lineares, Arthur Cayley também denota as matrizes como uma forma de representação de formas quadráticas. Desta forma, uma forma quadrática pode ser escrita em forma matricial (Figura 5):

Figura 5 - Notação matricial para representar formas quadráticas por Cayley (1855)

$$\left(\begin{array}{|llll|} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \dots \\ \alpha'\,, & \beta'\,, & \gamma'\,, & \dots \\ \alpha''\,, & \beta''\,, & \gamma''\,, & \dots \\ \vdots & & & \end{array}\right)(\xi,\ \eta,\ \zeta)(x,\ y,\ z)$$

Fonte: Cayley (1855, p.284)

Que expressa a função líneo-linear[9]:

$$(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \cdots)x + (\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \cdots)y + (\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \cdots)z + \cdots$$

Resultando na transformação:

Figura 6 – Notação matricial da transformação linear pela função líneo-linear

$$\left(\begin{array}{|llll|} a, & h, & g, & \dots \\ h, & b, & f, & \dots \\ g, & f, & c, & \dots \\ \vdots & & & \end{array}\right)(x,\ y,\ z,\ \dots)^2$$

Fonte: Cayley (1855, p.284)

E esta transformação (Figura 6), indica a representação da forma quadrática:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + \cdots$$

Cada uma das colunas referem-se a $(x, y, z, \dots)$. Podemos notar que Cayley relaciona os coeficientes em relação aos fatores desconhecidos, por exemplo, vemos que os elementos da diagonal principal aparecem somente uma vez enquanto que os elementos que não estão nesta diagonal, aparecem duas vezes. Observe ainda que em cada um dos termos, a soma das potências dos fatores desconhecidos $(x, y, z, \dots)$ resultam uma soma igual a dois, daí vem a denominação *quadrática*. Quando a soma das potências dos valores desconhecidos em cada um dos termos sempre resultam um mesmo valor, eram denominadas formas homogêneas, atualmente denominamos como polinômios homogêneos. Estas formas podem ser representadas geometricamente, dado que por meio

[9] O matemático escreve originalmente "*fonction lineo-linéaire*", o intuito é expressar que foi aplicado uma transformação linear entre duas formas lineares, resultando posteriormente, em uma forma quadrática.

dos sistemas que as formas inicialmente são descritas, elas denotam curvas, mais especificamente cônicas e um dos estudos matemáticos efervescentes no século XIX, era sobre a determinação de pontos de contatos entre cônicas.

Concluindo, podemos ver que na primeira definição de matriz formulada por Cayley (1855), o matemático relaciona a notação de matrizes para representar um conjunto de equações que compõem um sistema linear e também, para caracterizar formas ou funções quadráticas homogêneas.

4.2 Cayley e a Memória da Teoria das Matrizes

O propósito desta seção se trata de apresentar algumas definições presentes na obra *A Memoir on the Theory of Matrices* (Uma Memória sobre a Teoria das Matrizes), publicada originalmente em 1858 na *Philosophical Transaction of Royal Society of London* pelo matemático Arthur Caley. O matemático assume que para a escrita desta Memória das Matrizes, ele irá definir os conceitos utilizando-se de matrizes de ordem 3, mas ressalta que as definições podem ser aplicadas a uma matriz de ordem qualquer.

Outro ponto que destacamos é o fato de Cayley (1858) enumerar as propriedades definidas no decorrer da obra, de modo que ao todo, são discorridas 58 propriedades e/ou definições no que se refere a teorias das matrizes. Iremos focar naquelas propriedades que são comumente trabalhadas na Educação Básica, tais como: adição, multiplicação de matriz por escalar, multiplicação de matriz por matriz, entre outros.

Cayley definiu Matriz do seguinte modo:

> O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas no presente livro de memórias eu considero apenas as matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz usado sem uma qualificação é entendido como uma matriz quadrada; neste sentido, diz-se que um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado, por exemplo, é uma matriz. (CAYLEY, 1858, p.17, tradução nossa)[10].

Por meio da figura 7, podemos ver que uma matriz pode ser representada da seguinte maneira:

[10] No original: *The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e.g.*, is said to be a matrix.

Figura 7 – Representação dos elementos de uma matriz de ordem 3 por Cayley

$$\left(\begin{array}{lll} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.17)

Cayley comenta que o conceito de matriz surge naturalmente como uma forma de notação abreviada para representar um conjunto de equações de um sistema linear (Figura 8):

Figura 8 – Representação de uma matriz de ordem 3 determinada por um sistema linear x, y e z por Cayley

$$\left(\begin{array}{lll} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)\!\!\left(x,\, y,\, z\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

De tal modo que, podemos obter um conjunto de funções lineares (Figura 9) expresso por:

Figura 9 – Representação de funções lineares obtidas do sistema de uma matriz de ordem 3 por Cayley

$$\big((a,\, b,\, c)\!(x,\, y,\, z),\ (a',\, b',\, c')\!(x,\, y,\, z),\ (a'',\, b'',\, c'')\!(x,\, y,\, z)\big)$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

Assumindo que estas funções podem ser chamadas de (X, Y, Z), temos então o sistema linear de ordem 3 representado em notação matricial (Figura 10):

Figura 10 – Sistema linear de ordem 3 representado em notação matricial

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array} \right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.17)

É possível notar que os coeficientes do sistema linear, são os elementos que compõem a matriz. Enquanto x, y e z são, o que denominamos atualmente como as incógnitas do sistema; e X, Y e Z são os valores que satisfazem o sistema. Portanto, podemos concluir que para Arthur Cayley, a representação de uma matriz (Figura 7) é uma forma abrevida de um sistema linear. Observe que X é o resultado da primeira linha com (x, y, z), Y resulta dos elementos da segunda linha com (x, y, z) e Z é obtido pelos elementos da terceira linha com (x, y, z) :

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z$$

Uma observação apontada pelo matemático no decorrer da obra, refere-se ao fato de enfatizar a importância de abordar as matrizes quadradas ao invés das matrizes retangulares. Para Cayley (1858), o estudo da "teoria das matrizes retangulares parece muito menos importante do que o de matrizes quadradas, e eu não fui além de ter mostrado como algumas das noções aplicáveis a elas podem ser estendidas a matrizes retangulares" (p.18, tradução nossa)[11]. A justificativa para tal afirmação se dá pelo fato de que ao trabalhar com matrizes de mesma ordem (matrizes quadradas), as operações com matrizes são equivalentes ao comportamento do manuseio com grandezas algébricas comuns. Todavia, o mesmo não pode ser dito em relação a matrizes retangulares.

Nas notações de matrizes nos dias de hoje, uma matriz quadrada é aquela que possui a mesma quantidade de linhas e colunas, enquanto que as matrizes retangulares são aquelas que o número de linhas é diferente do número de colunas. Embora Cayley (1858) não defina explicitamente desta

[11] No original: *theory of rectangular matrices appears much less important than that of square matrices, and I have not entered into it further than by showing how some of the notions applicable to these may be extended to rectangular matrices.*

forma, por meio do que analisamos, podemos deduzir que o matemático considera uma matriz quadrada como aquela formada por um sistema linear que apresenta a mesma quantidade de equações e incógnitas, enquanto que, em uma matriz retangular, a quantidade de equações difere da quantidade de incógnitas do sistema linear.

4.2.1 Alguns tipos de matrizes

Ademais, do mesmo modo que nos dias de hoje os professores de matemática, em geral, antes de explicar operações com matrizes apresentam alguns exemplos de tipos de matrizes, o matemático Arthur Cayley segue a mesma proposta na escrita de sua obra. Cayley (1858, p.18, tradução nossa) denota que "As quantidades (X, Y, Z) serão identicamente zero, se todos os termos da matriz forem zero, e podemos dizer que é a matriz zero" [12].

Na Figura 11, vemos que todos os elementos da matriz representada são iguais a zero. Por meio das definições apresentadas pelo matemático, podemos assumir que esta matriz é a forma abreviada de um sistema linear do tipo representado na Figura 10, logo, nos dias de hoje, seria o mesmo que dizermos que a matriz zero ou matriz nula, é uma representação das possiblidades de solução de um sistema linear trivial.

Cayley (1858, p.18, tradução nossa) define que se os valores de (X, Y, Z) "sejam identicamente iguais a (x, y, z), (...) esta é dita ser a matriz unidade" [13].

Figura 11 – Representação da matriz zero (à esquerda) e matriz unidade (à direita) por Cayley[14]

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.18)

[12] No original: *The quantities (X, Y, Z) will be identically zero, if all the terms of the matrix are zero, and we may say the is the matrix zero.*
[13] No original: *will be identically equal to (x, y, z), (...) this is said to be the matrix unity.*
[14] Cayley (1858) comenta que na maioria das vezes, a matriz zero pode ser simplesmente simbolizada por 0 e a matriz unidade por 1.

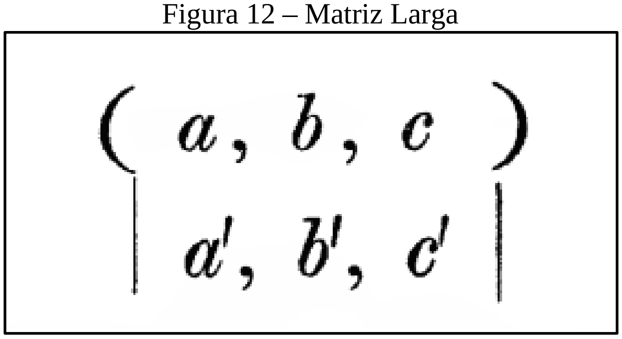
Por meio da Figura 11, vemos que Arthur Cayley denomina aquelas matrizes que possuem as diagonais principais com todos os elementos iguais a um, como matriz unidade. Novamente, entendendo que esta matriz é a representação da forma abreviada de um sistema linear representado na Figura 11, uma vez que os valores de $X = x = 1; Y = y = 1$ e $Z = z = 1$, podemos estabelecer relações com a denominação utilizada nos dias de hoje, matriz identidade, do ponto de vista da representação matricial de um sistema linear. Vale ressaltar que, para que essa equação se mantenha verdadeira, o sistema é do tipo:

$$ax + 0y + 0z = 1$$
$$0x + b'y + 0z = 1$$
$$0x + 0y + c''z = 1$$

Em relação as matrizes retangulares, Cayley afirma que “a matriz zero subsiste na presente teoria, mas não a matriz unidade” (CAYLEY, 1858, p.35, tradução nossa)[15]. Além disso, o matemático apresenta dois tipos de matrizes: larga[16] e profunda[17].

A Figura 12 mostra uma matriz em que o número de colunas é maior do que o número de linhas. Quando isso ocorre, é dito ser uma matriz larga. No exemplo dado por Cayley, vemos que esta matriz apresenta 2 linhas e 3 colunas.

Figura 12 – Matriz Larga



Fonte: Cayley (1858, p.35)

Por meio da definição de Cayley, ao associarmos esta matriz apresentada na Figura 12 como uma forma abreviada de representar um sistema de equações lineares, podemos obter:

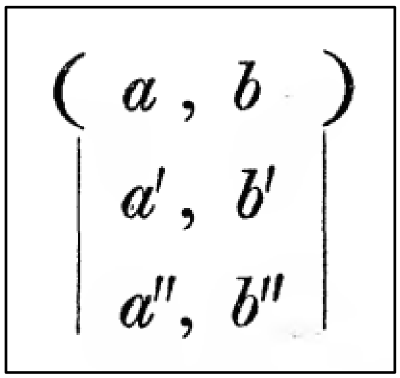
[15] No original: “The matrix zero subsists in the present theory, but not the matrix unity.”
[16] No original: *Broad matrix*. Optamos pela tradução do termo “*broad*” pela palavra largo, que nos remete ao formato de uma matriz larga, isto é, que se expande no plano horizontal em relação ao comprimento.
[17] No original: *Deep Matrix*. Optamos pela tradução do termo “*deep*” pela palavra profundo, que nos remete ao formato de uma matriz profunda, isto é, que se expande no plano vertical em relação à altura.

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$

Ou seja, vemos que este sistema linear possui duas equações e três incógnitas.

A Figura 13 mostra uma matriz em que a quantidade do número de linhas é maior do que a quantidade do número de colunas. Quando isso ocorre, é dito ser uma matriz profunda. O exemplo de Cayley nos mostra uma matriz do tipo 3 x 2, ou seja, 3 linhas e 2 colunas.

Figura 13 – Matriz Profunda



Fonte: Cayley (1858, p.35)

Segundo a definição de Cayley, podemos representar esta matriz em notação de um sistema linear em que apresenta três equações e duas incógnitas:

$$X = ax + by$$
$$Y = a'x + b'y$$
$$Z = a''x + b''y$$

4.2.2 Adição e Subtração de Matrizes

Uma vez estabelecido alguns tipos de matrizes especiais, Cayley parte para a aplicação destes resultados ao definir propriedades de operações com matrizes. Na notação atual, enfatizamos que só é possível realizar a adição e subtração de matrizes desde que possuam o mesmo tipo, sejam elas quadradas ou retangulares. Assim sendo, realizamos a adição ou subtração de matrizes operando cada elemento com o seu respectivo correspondente entre as matrizes. Como Cayley (1858) utiliza o conceito de matrizes para simplificar a representação de sistemas lineares, a ideia de adição e subtração de matrizes segue uma noção de que ao operarmos duas matrizes, estamos realizando uma operação entre dois sistemas. Desta forma, vemos na Figura 14 que o matemático considera os sistemas em relação de (x, y, z) para obter os valores de (X, Y, Z) e (X', Y', Z'):

Figura 14 – Representação em notação matricial dos sistemas lineares para obter $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) + (\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \quad (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Assim, para descrever a adição de matrizes entre (X, Y, Z) e (X', Y', Z'), Cayley apresenta a seguinte regra:

Figura 15: Regra da adição entre os elementos de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ e $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}', \boldsymbol{Z}')$

$$(\mathrm{X}+\mathrm{X}', \mathrm{Y}+\mathrm{Y}', \mathrm{Z}+\mathrm{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} a+\alpha, & b+\beta, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Os resultados de (X, Y, Z) e (X', Y', Z') apresentados na Figura 15, são obtidos por meio de considerar os elementos que ocupam as mesmas posições nas matrizes em relação aos valores desconhecidos x, y e z:

$$X + X' = (a + \alpha)x + (b + \beta)y + (c + \gamma)z$$
$$Y + Y' = (a' + \alpha')x + (b' + \beta')y + (c' + \gamma')z$$
$$Z + Z' = (a'' + \alpha'')x + (b'' + \beta'')y + (c'' + \gamma'')z$$

Deste modo, a aplicação deste método nos leva ao resultado da adição entre matrizes do mesmo tipo (Figura 16), e podemos dizer, por meio da definição de Cayley (1858), que uma adição de matrizes é o resultado entre a adição dos coeficientes de dois sistemas lineares:

Figura 16 – Resultado da adição entre os elementos de (X, Y, Z) e (X', Y', Z')

$$\begin{pmatrix} a+\alpha, & b+\beta, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Analogamente, este método também vale para subtração entre matrizes. Cayley (1858) elenca quatro propriedades relativas à adição de matrizes:

I. Dado que $L + M = M + L$, a operação de matrizes é comutativa.

II. Além disso, $(L + M) + N = L + (M + N) = L + M + N$, deste modo, a operação de matrizes é associativa.

III. Uma matriz não é alterada ao ser adicionada ou subtraída em relação à matriz zero, isto é, $M \pm 0 = M$. A equação $L = M$, expressa que as matrizes L e M são iguais, de modo que pode ser escrita na forma $L - M = 0$, ou seja, a matriz zero é o resultado da diferença entre duas matrizes iguais;

IV. A equação $L = -M$, pode ser escrita na forma $L + M = 0$, que indica que a soma das matrizes L e M resultam na matriz zero, isto é, estas matrizes são opostas entre si, "em outras palavras, uma matriz cujos termos são iguais, mas de sinais opostos aos termos de uma dada matriz, diz-se que é oposta a matriz dada" (CAYLEY, 1858, p.19, tradução nossa)[18].

Um caso particular entre a soma e a subtração de matrizes é quando tratamos de matrizes retangulares. Devemos ter cuidado ao efetuar operações com esse tipo de matrizes,

[18] No original: *in other words, a matrix the terms of which are equal but opposite in sign to the terms of a given matrix, is said to be opposite to the given matrix.*

sempre verificando que o número de linhas e colunas seja igual entre os dois termos da operação. Nas palavras de Cayley, temos que:

> Matrizes podem ser adicionadas ou subtraídas quando o número de linhas e o número de colunas de uma matriz são respectivamente iguais ao número de linhas e ao número de colunas da outra matriz, e sob a mesma condição qualquer número de matrizes podem ser adicionadas juntas (CAYLEY, 1858, p.35, tradução nossa)[19].

4.2.3 Multiplicação de Matriz por uma quantidade única (escalar)

Em relação ao que denominamos atualmente por multiplicação de matriz por escalar, Cayley (1858) considera o seguinte sistema linear multiplicado por uma quantidade única m:

Figura 17 – Sistema linear em função de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ multiplicado por $\boldsymbol{m}$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(mx, my, mz)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

Este mesmo sistema (Figura 17), pode ser escrito na forma expressa na Figura 18:

Figura 18 – Forma alternativa de expressar a multiplicação de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ por $\boldsymbol{m}$

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = m\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19)

[19] No original: *Matrices may be added or subtracted when the number of the lines and the number of the columns of the one matrix are respectively equal to the number of the lines and the number of the columns of the other matrix, and under the like condition any number of matrices may be added together*.

$$X = m(ax + by + cz) = max + mby + mcz$$
$$Y = m(a'x + b'y + c'z) = ma'x + mb'y + mc'z$$
$$Z = m(a''x + b''y + c''z) = ma''x + mb''y + mc''z$$

Portanto, Cayley define uma regra para multiplicar uma matriz por uma quantidade única (escalar) conforme apresentamos na Figura 19:

Figura 19 – Regra da multiplicação por escalar para obter os valores de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$

$$m\begin{pmatrix} a\ , & b\ , & c \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma\ , & mb\ , & mc \\ ma'\ , & mb'\ , & mc' \\ ma''\ , & mb''\ , & mc'' \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

O matemático inglês define que “o multiplicador m pode ser escrito antes ou depois da matriz, e a operação é, portanto, comutativa[20]” (CAYLEY, 1858, p.20, tradução nossa). Deste modo, pode-se concluir ainda que $m(L + M) = mL + mM$, isto é, a operação de uma matriz por uma quantidade única é distributiva. Cayley observa que se as matrizes L e mL, em particular, se $m = 1$ elas serão iguais, enquanto que se $m = -1$, elas serão opostas.

Em relação as matrizes retangulares, Cayley denota que o procedimento do cálculo deste tipo de matriz por uma quantidade única é da mesma forma realizada nas matrizes quadradas.

4.2.4 Composição de Matrizes (Multiplicação de Matriz por Matriz)

Dada as equações (Figura 20), Cayley busca apresentar uma regra para multiplicação de matriz por matriz, o que ele denomina de composição de matrizes. Vale relembrarmos que, dado que o matemático se utiliza das matrizes para simbolizar uma notação abreviada de sistemas lineares, uma composição de matriz é na verdade uma composição entre sistemas lineares, e, para ser mais preciso, a multiplicação de matrizes é resultante da composição das transformações lineares aplicadas nestes sistemas.

[20] No original: *The multiplier m may be written either before or after the matrix, and the operation is therefore commutative.*

Figura 20 – Equações para mostrar a regra para composição de matrizes

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \qquad (x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

A partir das equações iniciais, podemos obter uma transformação linear em função de (ξ, η, ζ). A Figura 21 mostra o resultado da aplicação desta transformação:

Figura 21 – Aplicação da Transformação Linear em função de (ξ, η, ζ)

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Observe que os valores de (x, y, z) dados na equação original (Figura 20), foram transformado linearmente em relação à uma composição de coeficientes em função de (ξ, η, ζ). Esta composição de coeficientes é o resultado da multiplicação de matrizes que pode ser expressa pelos elementos (Figura 22):

Figura 22 – Elementos resultantes da composição de matrizes

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Contudo, os elementos da Figura 22 são obtidos por uma regra de composição ou multiplicação (Figura 23) entre duas matrizes:

Figura 23 – Regra da multiplicação/composição entre duas matrizes

$$\left(\begin{array}{lll} (a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c)(\beta, \beta', \beta''), & (a, b, c)(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c')(\beta, \beta', \beta''), & (a', b', c')(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'')(\beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'')(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{array}\right) = \left(\begin{array}{lll} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.20)

Deste modo, temos que:

$$A = a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' \qquad B = a\beta + b\beta' + c\beta'' \qquad C = a\gamma + b\gamma' + c\gamma''$$
$$A' = a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'' \qquad B' = a'\beta + b'\beta' + c'\beta'' \qquad C' = a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma''$$
$$A'' = a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'' \qquad B'' = a''\beta + b''\beta' + c''\beta'' \qquad C'' = a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma''$$

Observe que o resultado da composição (Figura 22), obtida pela regra expressa na Figura 23, estabelece uma multiplicação de modo que os elementos da primeira matriz são tomados horizontalmente (linha) e os elementos da segunda matriz são considerados verticalmente (coluna). Apresentamos algumas considerações em relação às propriedades de composição de matrizes atribuídas por Cayley (1858):

I. É possível multiplicar ou compor três ou mais matrizes, de modo que quaisquer duas matrizes consecutivas podem ser compostas e o resultado dessa composição substitui essas duas matrizes por uma única matriz. Este processo de multiplicação entre matrizes consecutivas deve ser repetido até que todas sejam compostas e o resultado expresso em uma única matriz que é o resultado da composição efetuada. As composições $L.MN = LM.N = LMN$ ou $LM.NP = L.MN.P = LM.N.P$ são exemplos de como efetuar a multiplicação entre três ou mais matrizes.

II. A composição de matrizes não é uma operação comutativa, porém, é associativa;

III. No processo de composição de uma matriz com a matriz zero, independentemente de ser a primeira ou a segunda matriz, resulta na própria matriz zero; isto é, podemos interpretar que neste processo, a operação da composição é particularmente comutativa em relação à matriz zero;

IV. Uma matriz não altera o seu resultado no processo de composição com a matriz unidade, independentemente de ser a primeira ou a segunda matriz componente da composição; podemos novamente interpretar que a composição também é particularmente comutativa em relação à matriz unidade.

Em relação às matrizes retangulares, é também possível realizar a composição de matrizes. Contudo, quanto a este tipo de matrizes, Cayley (1858, p.35, tradução nossa) ressalta que:

> (…) é necessário que o número de linhas na segunda ou matriz componente mais próxima seja igual ao número de colunas na primeira ou outra matriz componente; a matriz composta terá então tantas linhas quanto a primeira ou outra matriz de componentes e tantas colunas quanto a segunda ou matriz componente mais próxima.

Ou seja, primeiro é necessário verificar se o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da matriz com a qual se pretende realizar uma multiplicação. Caso essa condição seja satisfeita, é possível operar estas matrizes, e o resultado desta composição será uma matriz que possui a quantidade de linhas da primeira matriz e a quantidade de colunas da matriz com a qual foi realizado o procedimento.

Vejamos dois exemplos apresentados por Cayley para explicitar a composição entre matrizes retangulares. Considere as matrizes dadas na Figura 24:

Figura 24 – Exemplo 1 da Composição de matrizes retangulares

$$\left(\begin{array}{l} a, b, c \\ d, e, f \end{array}\right)\left(\begin{array}{l} a', b', c', d' \\ e', f', g', h' \\ i', j', k', l' \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.35)

Temos uma matriz larga do tipo 2 x 3 (2 linhas e 3 colunas) e outra matriz larga do tipo 3 x 4 (3 linhas e 4 colunas). Aplicando o que foi definido pelo matemático, precisamos primeiramente verificar se a quantidade de colunas da matriz à esquerda é igual ao número de linhas da matriz à direita. Temos então que a primeira matriz possui 3 colunas e a segunda possui 3 linhas. Logo, a matriz da composição será a transformação linear resultante da matriz larga do tipo 2 x 4 (2 linhas da primeira matriz e 4 colunas da segunda matriz) dada:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

E o processo para obtenção de cada uma destas transformações lineares é apresentado conforme as funções lineares descritas na regra de composição ilustrada na Figura 24.1. Novamente, podemos observar que a multiplicação entre as matrizes é obtida relacionando os elementos das linhas da primeira matriz com os elementos das colunas da segunda matriz.

Figura 24.1 – Resultado da composição dada no Exemplo 1

$$\left(\begin{array}{llll} (a,\, b,\, c\,)\!(\,a',\, e',\, i'), & (a,\, b,\, c\,)\!(\,b',\, f',\, j') & (a,\, b,\, c\,)\!(\,c',\, g',\, k'), & (a,\, b,\, c\,)\!(\,d',\, h',\, l') \\ (d,\, e,\, f\,)\!(\,a',\, e',\, i'), & (d,\, e,\, f\,)\!(\,b',\, f',\, j') & (d,\, e,\, f\,)\!(\,c',\, g',\, k'), & (d,\, e,\, f\,)\!(\,d',\, h',\, l') \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.35)

A = $aa' + be' + ci'$	A'= d$a' + ee' + fi'$
B = $ab' + bf' + cj'$	$B' = db' + ef' + fj'$
C = $ac' + bg' + ck'$	$C'= dc' + eg' + fk'$
D = $ad' + bh' + cl'$	$D' = dd' + eh' + fl'$

O segundo exemplo dado por Cayley considera as matrizes (Figura 25) para ilustrar o processo de composição entre matrizes retangulares:

Figura 25 – Exemplo 2 da Composição de matrizes retangulares

$$\left(\begin{array}{ll} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right)\!\!\left(\begin{array}{llll} a', & b', & c', & d' \\ e', & f', & g', & h' \end{array}\right)$$

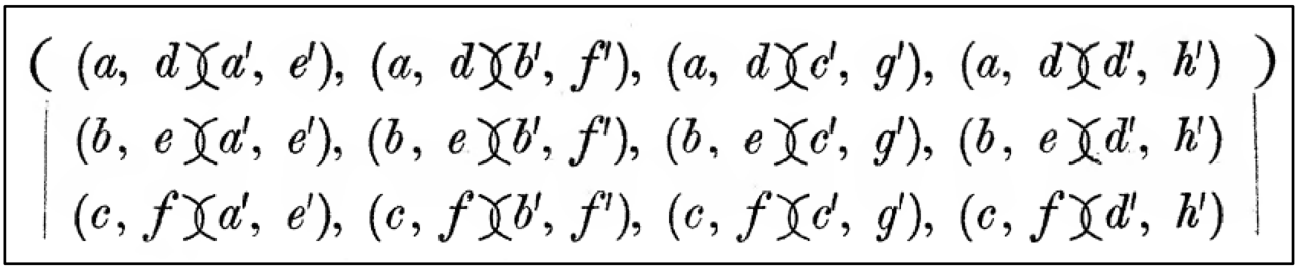
Fonte: Cayley (1858, p.36)

Temos uma matriz profunda do tipo 3 x 2 (3 linhas e 2 colunas) e outra matriz larga do tipo 2 x 4 (2 linhas e 4 colunas). Uma vez que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, teremos como resultado da composição uma matriz larga do tipo 3 x 4:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

O resultado das transformações lineares dos elementos é obtida por meio da regra de composição expressa pelas funções lineares descritas na Figura 25.1:

Figura 25.1 – Resultado da composição dada no Exemplo 1



$$\begin{pmatrix} (a,\ d \between a',\ e'), & (a,\ d \between b',\ f'), & (a,\ d \between c',\ g'), & (a,\ d \between d',\ h') \\ (b,\ e \between a',\ e'), & (b,\ e \between b',\ f'), & (b,\ e \between c',\ g'), & (b,\ e \between d',\ h') \\ (c,\ f \between a',\ e'), & (c,\ f \between b',\ f'), & (c,\ f \between c',\ g'), & (c,\ f \between d',\ h') \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.36)

Temos então:

$$\begin{array}{lll} A = aa' + de' & A' = ba' + ee' & A'' = ca' + fe' \\ B = ab' + df' & B' = bb' + ef' & B'' = cb' + ff' \\ C = ac' + dg' & C' = bc' + eg' & C'' = cc' + fg' \\ D = ad' + dh' & D' = bd' + eh' & D'' = cd' + fh' \end{array}$$

Outro aspecto enfatizado por Arthur Cayley em relação a composição de matrizes retangulareé que, “no caso particular em que as linhas e colunas de uma matriz componente são respectivamente iguais em número às colunas e linhas da outra matriz componente (...)” (CAYLEY, 1858, p.36, tradução nossa)[21], ou ainda, em outras palavras, quando a quantidade de linhas da primeira matriz é igual ao número de colunas da segunda matriz. A particularidade deste caso apontada pelo matemático, se dá pelo fato do resultado da composição ser uma matriz quadrada.

Por meio da Figura 26, vemos que a condição para composição entre matrizes retangulares é satisfeita, uma vez que temos 3 colunas na matriz à esquerda e 3 linhas na matriz à direita, teremos

[21] No original: *In the particular case where the lines and columns of the one component matrix are respectively equal in number to the columns and lines of the other component matrix (...).*

então uma matriz resultante de ordem 2, isto é, 2 x 2.

Figura 26 – Composição entre a matriz larga 2 x 3 e a matriz profunda 3 x 2

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \end{pmatrix} \between \begin{pmatrix} a', & d' \\ b', & e' \\ c', & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a,\ b,\ c \between a',\ b',\ c'), & (a,\ b,\ c \between d',\ e',\ f') \\ (d,\ e,\ f \between a',\ b',\ c'), & (d,\ e,\ f \between d',\ e',\ f') \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.36)

No caso da figura 26.1, a composição entre a matriz profunda 3 x 2 e a matriz larga 2 x 3 resulta na matriz quadrada de ordem 3, isto é, 3 x 3.

Figura 26.1 – Composição entre a matriz profunda 3 x 2 e a matriz larga 2 x 3

$$\begin{pmatrix} a', & d' \\ b', & e' \\ c', & f' \end{pmatrix} \between \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a',\ d' \between a,\ d), & (a',\ d' \between b,\ e), & (a',\ d' \between c,\ f) \\ (b',\ e' \between a,\ d), & (b',\ e' \between b,\ e), & (b',\ e' \between c,\ f) \\ (c',\ f' \between a,\ d), & (c',\ f' \between b,\ e), & (c',\ f' \between c,\ f) \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.36)

4.2.5 Matriz Inversa ou Matriz Recíproca

Cayley nos traz que a noção de matriz inversa ou recíproca surge diretamente do sistema linear em notação matricial mostrado anteriormente na Figura 10:

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

A partir deste sistema, temos que a matriz inversa do sistema inicial (Figura 27) pode ser indicada por:

Figura 27 – Notação da Matriz Inversa

$$(x, y, z) = \left(\left(\begin{array}{|ccc|} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)^{-1}\right)(X, Y, Z)$$

Fonte: Adaptado pelos autores baseado em Cayley (1858, p.22)

Podemos observar que a matriz que representa o sistema inicial está simbolizado com –1 para indicar a recíproca ou inversa da matriz original. Outro aspecto que podemos destacar nesta representação, é o fato da matriz recíproca estar em função de (X, Y, Z) ao invés de (x, y, z). E os elementos da matriz recíproca podem ser obtidos por uma transformação linear, resultando na igualdade:

Figura 28 – Notação da Matriz Inversa

$$(x, y, z) = \left(\begin{array}{|ccc|} \mathrm{A}, & \mathrm{A}', & \mathrm{A}'' \\ \mathrm{B}, & \mathrm{B}', & \mathrm{B}'' \\ \mathrm{C}, & \mathrm{C}', & \mathrm{C}'' \end{array}\right)(X, Y, Z) = \left(\left(\begin{array}{|ccc|} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)^{-1}\right)(X, Y, Z)$$

Fonte: Cayley (1858, p.22)

A Figura 28 nos mostra que os elementos obtidos por meio da transformação linear na matriz inversa se difere da disposição dos elementos no processo de composição de matrizes. Ao compararmos estes dois processos, percebemos que os elementos A, A', A'', ..., resultam na primeira linha da matriz inversa; B, B', B'', ..., a segunda linha; C, C', C'', ..., indicam a terceira linha; e assim por diante. No entanto, ao multiplicarmos uma matriz por outra matriz, no processo da transformação linear, A, A', A'', ..., indicam a primeira coluna da composição de matrizes; B, B', B'', ..., indicam a segunda coluna; C, C', C'', ..., indicam a terceira coluna; e assim por diante, conforme mostrado na Figura 22.

Uma propriedade importante das matrizes inversas é mostrada pelo matemático em seguida da apresentação da notação. Cayley comenta que o produto entre a matriz original e a matriz inversa resulta na matriz unidade. Além disso, vemos também, por meio da Figura 29, que essa multiplicação é comutativa, propriedade que não é válida na multiplicação entre duas matrizes quaisquer:

Figura 29 – Composição de uma matriz de ordem 3 com sua matriz inversa

$$\left(\begin{array}{ccc} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \\ C, & C', & C'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \\ C, & C', & C'' \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right),$$

Fonte: Cayley (1858, p.22)

Antes de enunciar o método de obter a transformação dos elementos resultantes na matriz recíproca, Cayley usa o símbolo ∇ para representar o cálculo do determinante[22] dos elementos da matriz original, conforme mostrado na Figura 30:

Figura 30 – Determinante da matriz original, representado pelo símbolo ∇

$$\nabla = \left|\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right|$$

Fonte: Cayley (1858, p.22)

Desse modo, os termos da matriz inversa ou recíproca são obtidos um a um por meio da seguinte regra:

[22] O determinante de uma matriz se trata da associação dessa matriz com um único escalar. Em outras palavras, seria uma função que transforma esta matriz em um número real.

Figura 31 – Regra para obtenção dos elementos da matriz inversa

$$A = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 1, & 0\,, & 0 \\ 0, & b'\,, & c' \\ 0, & b'', & c'' \end{vmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 0\,, & 1, & 0 \\ a'\,, & 0, & c' \\ a'', & 0, & c'' \end{vmatrix}, \ \&c.$$

Fonte: Cayley (1858, p.22)

O matemático exemplifica apenas como obter os elementos A e B, segue abaixo os demais cálculos obtidos pela regra expressa na Figura 31:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(b'c'' - b''c')$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a' & 0 & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(a''c' - a'c'')$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(a'b'' - a''b')$$

$$A' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(b''c - bc'')$$

$$B' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(ac'' - a''c)$$

$$C' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(a''b - ab'')$$

$$A'' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(bc' - b'c)$$

$$B'' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a' & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(a'c - ac')$$

$$C'' = \frac{1}{\nabla}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nabla}\,(ab' - a'b)$$

Temos então que a inversa ou recíproca de uma matriz de ordem 3 é dada por:

$$\begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nabla}\,(b'c'' - b''c') & \frac{1}{\nabla}\,(b''c - bc'') & \frac{1}{\nabla}\,(bc' - b'c) \\ \frac{1}{\nabla}\,(a''c' - a'c'') & \frac{1}{\nabla}\,(ac'' - a''c) & \frac{1}{\nabla}\,(a'c - ac') \\ \frac{1}{\nabla}\,(a'b'' - a''b') & \frac{1}{\nabla}\,(a''b - ab'') & \frac{1}{\nabla}\,(ab' - a'b) \end{pmatrix}$$

Arthur Cayley apresenta uma outra forma alternativa de encontrar a inversa ou recíproca de uma matriz, que se dá calculando as derivadas parciais referentes a cada elemento em relação ao determinante dos coeficientes da matriz original, ∇. Ao final, basta multiplicar o resultado por $\frac{1}{\nabla}$, conforme a igualdade expressa na Figura 32:

Figura 32 – Regra de obtenção da matriz inversa de ordem 3 por meio de derivadas parciais

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)^{-1} = \frac{1}{\nabla}\left(\begin{array}{ccc} \partial_a\nabla, & \partial_{a'}\nabla, & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla, & \partial_{b'}\nabla, & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla, & \partial_{c'}\nabla, & \partial_{c''}\nabla \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.22)

Primeiramente temos que encontrar o valor do determinante ∇, mostrado na Figura 30. Através deste cálculo obtemos:

$$\nabla = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$$

Após encontrar este determinante, o próximo passo é calcular as derivadas parciais de cada elemento da matriz original em relação ao resultado do determinante obtido, ∇. Temos então os seguintes resultados:

$$\partial a\nabla = b'c'' - b''c'$$
$$\partial b\nabla = a''c' - a'c''$$
$$\partial c\nabla = a'b'' - a''b'$$
$$\partial a'\nabla = b''c - bc''$$
$$\partial b'\nabla = ac'' - a''c$$
$$\partial c'\nabla = a''b - ab''$$
$$\partial a''\nabla = bc' - b'c$$
$$\partial b''\nabla = a'c - ac'$$
$$\partial c''\nabla = ab' - a'b$$

Por fim, devemos multiplicar cada derivada parcial encontrada pela quantidade única (escalar) $\frac{1}{\nabla}$. E devemos lembrar que na regra da matriz recíproca, cada um dos termos obtidos $A, A', A'', \dots, B, B', B'', \dots, C, C', C'', \dots$, são expressos em cada linha, temos então:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial a\nabla & \partial a'\nabla & \partial a''\nabla \\ \partial b\nabla & \partial b'\nabla & \partial b''\nabla \\ \partial c\nabla & \partial c'\nabla & \partial c''\nabla \end{pmatrix}$$

O processo de obtenção de matrizes inversas se aplica somente às matrizes quadradas, uma vez que “uma matriz retangular não pode ser composta consigo mesma, as noções de matriz inversa ou recíproca (...) e toda a teoria resultante das funções de uma matriz não se aplicam a matrizes retangulares” (CAYLEY, 1858, p.35, tradução nossa)[23].

[23] No original: *a rectangular matrix cannot be compounded with itself, the notions of the inverse or reciprocal matrix (…) and the whole resulting theory of the functions of a matrix, do not apply to rectangular matrices*.

4.2.6 Matriz transposta

No decorrer da obra, Cayley apresenta duas definições de matrizes que costumamos ver presentes em livros do Ensino Médio: matriz transposta e matriz simétrica. A Figura 33 nos mostra claramente uma regra para obter a transposta de uma matriz, que consiste na troca de linhas por colunas, ou vice-versa.

Figura 33 – Representação de uma matriz 2 x 2 e sua respectiva transposta

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 31)

Podemos observar que as linhas da primeira matriz (matriz à esquerda) se tornaram as colunas da segunda matriz (matriz à direita), com isso, esta segunda matriz, é dita ser a transposta da matriz original. Para a obtenção da transposta, Cayley denota pelo símbolo “tr.” para indicar quando essa operação deve ser realizada. Assim, conforme mostrado na Figura 34, temos na matriz à esquerda o resultado da transposta e a matriz à direita indicada por “tr.”.

Figura 34 – A transposta de uma matriz e a denotação tr.

$$\begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix} = \mathrm{tr.}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p.31)

Ou seja, a utilização do símbolo “tr.” indica que o procedimento da transposta deve ainda ser aplicado. O matemático salienta que ao realizarmos a transposta da transposta, obtemos a matriz original.

Um caso particular das matrizes transpostas são as matrizes simétricas. Este tipo de matriz ocorre quando o resultado da transposta é a própria matriz original, isto é, todos os elementos continuam equivalentes mesmo após a troca das linhas pelas colunas. A Figura 35 mostra uma regra para obter a matriz simétrica de qualquer matriz de ordem 3:

Figura 35 – Regra de obtenção de uma matriz simétrica de ordem 3

$$\begin{pmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 31)

Quando a noção da transposta de uma matriz é aplicada ás matrizes retangulares, sejam largas ou profundas, ocasiona um efeito de modo que, a transposta de uma matriz larga é uma matriz profunda e ao aplicarmos a transposta em uma matriz profunda, ela se torna uma matriz larga. A Figura 36 nos apresenta a transposta de uma matriz larga. Podemos observar que ao aplicar a transposta nos elementos de uma matriz larga 1 x 3, resulta em uma matriz profunda 3 x 1.

Figura 36 – Transposta de uma matriz larga 1 x 3

$$\mathrm{tr.}\begin{pmatrix} a', & b', & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 36)

Como comentamos anteriormente, nem sempre teremos a composição de matrizes retangulares. No entanto, Cayley (1858) finaliza sua obra mostrando que qualquer matriz retangular pode ser composta com a transposta de uma outra matriz retangular, desde que as duas matrizes possuam o mesmo número de linhas e colunas. Desta forma, a primeira matriz manterá a quantidade de linhas e colunas e a segunda matriz, por ser o resultado de uma transposta, irá inverter o número de linhas e colunas. Assim, a quantidade de colunas da primeira matriz será idêntica ao número de linhas da segunda matriz, tornando a composição entre as duas matrizes possível .

A Figura 37 mostra um exemplo de uma matriz larga 2 x 3 à esquerda em composição com outra matriz larga 2 x 3 à direita, na qual, será aplicada a operação transposta:

Figura 37 – Composição entre uma matriz retangular e a transposta de uma matriz de mesmo tipo

$$\begin{array}{llll} (\ a, \ b, \ c \ ) & \text{tr.} (\ a', \ b', \ c' \ ) & = (\ (a, \ b, \ c)(a', \ b', \ c'), & (a, \ b, \ c)(d', \ e', \ f') \ ) \\ | \ d, \ e, \ f \ | & \quad | \ d', \ e', \ f' \ | & \quad | (d, \ e, \ f)(a', \ b', \ c'), & (d, \ e, \ f)(d', \ e', \ f') \ | \end{array}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 37)

Esta composição será possível porque ao obtermos a transposta da matriz à direita, teremos uma matriz profunda 3 x 2. Logo, satisfaz a condição do procedimento, uma vez que a quantidade de colunas da matriz à esquerda será igual ao número de linhas da matriz à direita após a aplicação da transposta:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & d' \\ b' & e' \\ c' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' + cc' & ad' + be' + cf' \\ da' + eb' + fc' & dd' + ee' + ff' \end{pmatrix}$$

Em notações atuais, considerando m: quantidade de linhas e n: quantidade de colunas, uma composição entre duas matrizes retangulares m x n não é possível, entretanto, ao realizarmos a transposta da segunda matriz, temos a multiplicação entre as matrizes do tipo m x n e n x m.

5 Considerações finais

O estudo das obras de Arthur Cayley nos permitiu uma abordagem enriquecedora da História da Matemática, destacando a relevância de suas contribuições para o campo das matrizes e sistemas lineares. A compreensão das definições pioneiras apresentadas pelo matemático nos permitiu vislumbrar como ele estabeleceu as bases para o desenvolvimento posterior dessa teoria fundamental. Ao examinar as principais definições relacionadas a matrizes quadradas e retangulares, fica evidente a relevância das operações matriciais e de como podemos usá-las para manipular os diversos tipos de matrizes existentes. Atualmente, essas propriedades são estudadas em Algebra, onde vemos que o conjunto de matrizes ser torna o que chamamos de Anel, para as operações de soma e multiplicação. Através da realização de operações como soma, multiplicação por um escalar e composição de matrizes, torna-se possível representar e solucionar problemas complexos, simplificando cálculos e aprimorando a manipulação de dados de forma mais eficiente. Ao analisar os trabalhos de Cayley, principalmente a obra "*A Memoir on the Theory of Matrices*", percebemos que essas operações matriciais desempenham um papel crucial na resolução de sistemas lineares.

Um outro aspecto que gostariamos de destacar se dá aos símbolos utilizados para representação de Matrizes. Na obra *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*, Cayley (1855) não faz nenhuma distinção no modo de representação das matrizes e determinantes, isto é, foi empregado a mesma notação ao se referir a estes conceitos, o que poderia ocasionar algumas ambiguidades na compreensão das formulações. Entretanto, na Memória, Cayley (1858), podemos ver que o matemático parece apresentar uma preocupação quanto a simbologia utilizada para diferenciar estes conceitos, uma vez que denota as matrizes representadas entre parênteses e mantém os determinantes indicados por duas barras verticais.

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho, percebe-se que a História da Matemática nos mostra como desenvolveram-se alguns conteúdos matemáticos que estamos acostumados a ver até os dias de hoje. A definição de uma matriz como um conjunto de equações de um sistema linear revela uma conexão profunda entre álgebra e geometria, tornando as matrizes uma ferramenta poderosa para resolver problemas de diversas naturezas. A abordagem de Cayley proporciona uma visão intuitiva da natureza das operações matriciais e mostra como elas podem ser utilizadas de forma eficaz para modelar sistemas e representar relações entre grandezas matemáticas.

Por meio dos resultados apresentados abre a possibilidade de, em trabalhos futuros, desenvolvermos propostas didáticas para aplicação em sala de aula e realizar uma análise de livros didáticos entre as definições apresentadas nos livros e as definições originais, uma vez que, por meio de olharmos as obras originais, podemos verificar como são dadas as definições e o desenvolvimento delas no decorrer do tempo. Ou ainda, do ponto de vista histórico, trabalhos que foquem nas obras de Cauchy e Sylvester.

Em síntese, o estudo das obras de Arthur Cayley foi uma jornada fascinante na história e desenvolvimento da teoria das matrizes. Suas definições pioneiras e visão inovadora abriram caminho para avanços posteriores e estabeleceram as bases para um campo matemático fundamental e aplicável em diversas áreas do conhecimento. O legado de Cayley permanece vivo e relevante, inspirando novas gerações de matemáticos a explorar os mistérios e aplicações das matrizes na busca contínua do conhecimento matemático.

Referências bibiográficas

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escolar**: Campinas: Papirus, 1995.

BARROS, José D`Assunção Barros. Fontes Históricas: revisitando alguns aspetos primordiais para a Pesquisa Histórica. **Mouseion**, n.12, mai-ago, p.129-159, 2012.

BERNARDES, Aline. ROQUE, Tatiana. História da Noção de Matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática** (RBHM), vol. 16, no. 31, p.1-19, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

CAYLEY, A. 1855. Remarques sur le notation des fonctions algébriques. In: FORSYTH, A. R. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**, v. 2. Cambridge: University Press, 1889. 185–188.

CAYLEY, A. **A Memoir on the Theory of Matrices**. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, v. 148, 1858.

CECHINEL, Andre; FONTANA Silvia Aparecida Pereira; GIUSTINA Kelli Pazeto Della; PEREIRA, Antonio Serafim; PRADO Silvia Salvador do. Estudo/Análise Documental: uma revisão teórica e metodológica. **Criar Educação**, Criciúma, v. 5, n.1, p.1-7, 2016. Disponível em: https://periodicos.unesc.net/ojs/index.php/criaredu/article/view/2446/2324. Acesso em: 13 junho de 2023.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2006.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**.Tradução Hygino H. Domingues. 5ªed –

Campinas, Editora da Unicamp, 2011.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dictionary of scientific biography**. New York: Charles Scribner`s sons, vol. 3, 1981.

GODOY, Kleyton Vinicyus. **Um estudo do processo de reconhecimento histórico:** o caso de Arthur Cayley. 2013. 252f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

LIMA, Lucas Antonio Mendes de. PEREIRA, Mayara Gabriella Grangeiro. CHAQUIAM, Miguel. Uma abordagem histórica de matrizes para o uso em sala de aula. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** (BOCEHM), vol. 05, no. 14, p.51-63, 2018.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACFARLENE, A. **Biography – Arthur Cayley.** The American Mathematical Monthly, vol II, no. 4, April, 1895.

MATOS, Fernando Cardoso de. NUNES, Jose Messildo Viana. Praticas com Matrizes a partir do estudo histórico epistemológico. **Revista de Matematica, Ensino e Cultura** (REMATEC), ano 14, no.32, p.09-28, 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica**, **desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SÁ-SILVA, Jackson Ronie; ALMEIDA, Cristóvão Domingos de.; GUINDANI, Joel Felipe. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História e Ciências Sociais**, São Leopoldo, RS, Ano 1, n.1, Jul., 2009.

SFARD, A. **Thinking as communicating:** Human Development, the growth of discourses. New York: Cambridge University Press, 2008.