



ANDRÉ JUNIOR DA SILVA ALVES

**A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
A PARTIR DE NEWTON E LEIBNIZ**

LAVRAS/MG

2023

ANDRÉ JUNIOR DA SILVA ALVES

**A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: A PARTIR DE
NEWTON E LEIBNIZ**

Monografia apresentada à Universidade
Federal de Lavras, como parte das
exigências do curso de Matemática, para
a obtenção do título de Licenciado.

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy
Orientador

LAVRAS/MG

2023

ANDRÉ JUNIOR DA SILVA ALVES

**A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: A PARTIR DE
NEWTON E LEIBNIZ**

**THE HISTORY OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS: FROM
NEWTON AND LEIBNIZ**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADA em 27 de junho de 2023

Banca Examinadora

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy - orientador
(DFM/ICET/UFLA)

Profa. Dra. Amanda Castro Oliveira
(DFM/ICET/UFLA)

Prof. Dr. Mário Henrique Andrade Claudio
(DFM/ICET/UFLA)

LAVRAS/MG

2023

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral são conceitos básicos, historicamente descobertos por Newton e Leibniz, ao analisarem a Matemática e as formas de lidar com suas grandezas, descobrindo-se que as mesmas, podem ser lidas e sofrem variações que podem ser trabalhadas. O presente trabalho, portanto, trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho descritivo, que buscou apresentar a história do cálculo. A partir da obtenção dos dados de forma secundária, utilizando o banco de dados *Google Acadêmico* e *Scielo*, coletamos trabalhos datados dos últimos 10 anos, a partir dos descritores, “história do cálculo”; “cálculo segundo Newton”; “Cálculo segundo Leibniz”; “Leibniz”; “Newton”; “Cálculo Diferencial”. Sendo selecionados os cinco trabalhos que melhor se adequam aos nossos critérios de inclusão. Concluimos, que diversos estudos vem sendo realizados nos últimos anos sobre a história do Cálculo anteriormente a Newton e a Leibniz, pontuando após, as prerrogativas do Cálculo Diferencial segundo estes dois autores. Visualizamos a necessidade de esta temática pois está cada vez mais presente nos cursos de graduação da área de ciências exatas, como aporte para o ensino dessas disciplinas.

Palavras-chaves: Cálculo Diferencial. Cálculo Integral. Newton. Leibniz.

ABSTRACT

Differential and Integral Calculus are basic concepts, historically discovered by Newton and Leibniz, when analyzing Mathematics and ways of dealing with their magnitudes, discovering that they can be read and undergo variations that can be worked on. The present work, therefore, is qualitative descriptive research, which sought to present the history of calculus. From obtaining the data in a secondary way, using the data base Academic Google and Scielo, we collected works dated from the last 10 years, from the descriptors, "history of calculus"; "calculus according to Newton"; "Calculus according to Leibniz"; "Leibniz"; "Newton"; Differential calculation". The five works that best fit our inclusion criteria were selected. We conclude that several studies have been carried out in recent years on a history of Calculus before Newton and Leibniz, punctuating after the prerogatives of Differential Calculus according to these two authors. We see the need for this theme to be increasingly present in undergraduate courses in the area of exact sciences, as a contribution to the teaching of these disciplines.

Keywords: Difference Calculation. Integral Calculus. Newton. Leibniz.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	5
2	METODOLOGIA.....	7
3	UM BREVE PANORAMA DO CÁLCULO ANTES DE NEWTON E LEIBNIZ.....	8
4	NEWTON E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	11
4.1	O CÁLCULO DE NEWTON.....	13
5	LEIBNIZ E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	20
5.1	O CÁLCULO DE LEIBNIZ.....	21
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	25
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	27

1. INTRODUÇÃO

Alguns conceitos são partes integrantes dos percursos do curso de graduação em Matemática, sendo de fundamental importância compreender e buscar analisar seu contexto histórico, e os aspectos que levaram ao seu desenvolvimento. Pois, são fontes promissoras para apontar meios para atividades e metodologias para o ensino da Matemática, que estabeleça uma relação entre a história do cálculo e a metodologia utilizada.

No decorrer do meu processo de graduação, meu primeiro contato com a disciplina de Cálculo se deu enquanto cursava Engenharia Ambiental, porém, me aprofundi na temática com a realização de um trabalho complementar, também sobre o Cálculo. Devido a familiaridade com a disciplina, fui monitor da mesma, juntamente com o professor regente por quatro períodos letivos, auxiliando os alunos na aprendizagem dos conteúdos.

Posteriormente, visualizando a necessidade de acompanhamento por parte dos alunos que deveriam cursar a disciplina, ou por aqueles que reprovaram ao cursar a mesma, decidi dar aulas particulares da disciplina de Cálculo. Neste meio tempo, por decisões de âmbito pessoal, larguei o curso de Engenharia Ambiental, e transferei minha matrícula na Graduação em Licenciatura Matemática.

Portanto, tal aproximação minha com o tema deste Trabalho de Conclusão de Curso deu-se devido ao percurso formativo que transpassei, e ao meu contato com esta disciplina, fazendo surgir a vontade de pesquisar e saber mais sobre como se deu a evolução histórica do Cálculo Diferencial e Integral.

Os tópicos de Cálculo Diferencial e Integral são conceitos historicamente definidos por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e ao analisarmos as formas destes estudiosos lidarem com as grandezas, podemos verificar que estes conceitos apresentam variações nas abordagens, e tem potencial para ser trabalhadas nas disciplinas de Cálculo utilizando sua historicidade no ensino da Matemática. De acordo com Moraes *et al.* (2019), durante o período formativo da graduação muito se fala pelos professores de Física sobre Newton, e em contrapartida pelos professores de Matemática sobre Leibniz, contudo, há pouca ocorrência nas disciplinas de uma abordagem histórica que discorre sobre estes cientistas e seus avanços no que diz respeito a estas disciplinas tanto no Ensino Superior como no Ensino Básico.

O presente trabalho trata-se de uma análise documental e descritiva sobre a História do Cálculo Diferencial e Integral a partir do que apresenta as últimas pesquisas sobre sua

história e ensino atualmente. A partir de uma investigação documental, buscamos descrever de forma breve: a História do Cálculo anteriormente a Newton e a Leibniz, a partir dos gregos, no Período Helenista, com os matemáticos Alexandrinos (330-200 a.C.) e os cenários que levaram a criação do Cálculo Diferencial por Newton e Leibniz, contextualizando brevemente suas biografias, mostrando um paralelo entre as abordagens a partir da demonstração de suas semelhanças e diferenças, suas aproximações e divergências, originárias da autoria travada por estes dois personagens fundamentais da história da ciências a respeito do Cálculo.

2. METODOLOGIA

Cabe ressaltar que, esta pesquisa, trata-se de um trabalho qualitativo, de cunho descritivo e exploratório, que busca a análise documental, realizada por meio da consulta de artigos científicos, teses e dissertações, e demais materiais encontrados nas bases de dados, Google Acadêmico e Scielo.

Sendo utilizado os descritores: “a história do cálculo”, “a história do cálculo and newton”, “a história do cálculo and leibniz”, “ensino do cálculo”, “cálculo segundo Newton”, e o “cálculo segundo Leibniz”. Foram encontrados 3.310 resultados inicialmente, sendo assim foi realizada uma pesquisa mais aprofundada datando os artigos a serem analisados entre os anos de 2019 a 2023, por serem datadas dos últimos 5 anos, e serem as publicações mais atuais. Sendo estes ordenados por relevância, e por meio de pesquisa avançada. Utilizadas fontes secundárias para análise.

De acordo com Gil (2002), a pesquisa qualitativa é um tipo de investigação que visa compreender o significado das ações, pensamentos e sentimentos dos indivíduos em um determinado contexto. Sendo que geralmente se utiliza abordagens não-estruturadas, como entrevistas em profundidade e grupos focais, e prioriza a interpretação subjetiva dos dados coletados.

“A pesquisa bibliográfica ou a pesquisa documental, é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (GIL, 2002, p. 44). Cabe ainda ressaltar que “Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas” (GIL, 200, p. 44).

A partir da leitura inicial dos resumos dos artigos encontrados, compõem este trabalho o material dos autores: Roque (2012); Silva (2013); Brandemberg (2017); Moraes *et al.* (2019); Frazão (2020).

3. UM BREVE PANORAMA DO CÁLCULO ANTES DE NEWTON E LEIBNIZ

Inicialmente abordamos a fase dos matemáticos Alexandrinos, sendo esta conhecida como a fase inicial da construção do Cálculo Diferencial e Integral (BRANDEMBERG, 2017). Ao realizarem experimentos para obter a quadratura de um círculo, ou de figuras curvas, os estudiosos gregos acabaram fornecendo as primeiras formas de caracterização do Cálculo. A quadratura do círculo é um problema da geometria clássica, que visava construir, usando apenas um compasso e uma régua não-graduada, um quadrado com área exatamente igual à de um círculo dado (ORSI, 2022).

Tal meio buscou historicamente, obter a quadratura dos círculos, ou demais figuras geométricas curvas, pois com base nesses aspectos se foca na construção e determinação das áreas e dos volumes de figuras restringidas por estas superfícies, curvilíneas. Esta Matemática, também recebe a denominação de Matemática Grega, por estar neste idioma, ou ainda como Período Helenista, pois o grego nesta época, era considerado a língua dominante no mediterrâneo, como também em quase todo o território de Alexandre Magno (356-323 a.C.)(BRANDEMBERG, 2017).

Entre estes matemáticos gregos de grande renome, podemos destacar: Diofanto (201/204- 284/298 a.C.) considerado por muitos como o “Pai da Álgebra”, Euclides (Séc. II a.C., denominado “Pai da Geometria”), Arquimedes (287-212 a.C.), Apolônio (262 a.C. - 194 a.C.) conhecido como “ o Grande Geômetra”, Eratóstenes (276 a.C. - 194 a.C.) e Heron de Alexandria (10 d.C. - 80 d.C.).

Todos estes, associados à Escola de Alexandria, uma instituição qualificada, com designação coletiva para certas tendências da literatura, filosofia, medicina e nas ciências, sendo desenvolvidos no centro cultural helenístico de Alexandria, no Egito, durante os períodos helenista e romano (ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA, 1911). De acordo com Dunham (1991) *apud* Brandemberg (2017), sobre a história da Escola de Alexandria:

formação da grande biblioteca de Alexandria, que logo suplantou a Academia como o centro mais importante do mundo em erudição. Em um ponto, a instalação teve mais de 600.000 rolos de papiro, uma coleção muito mais completa e surpreendente do que qualquer coisa que o mundo já vira. Na verdade, Alexandria permaneceria o foco intelectual do mundo Mediterrâneo através dos períodos gregos e romanos até sua destruição final em 641 d. C. nas mãos dos árabes (DUNHAM, 1991, p. 29, *apud* BRANDEMBERG, 2017, p.15).

Retornando ao período em destaque, os trabalhos dos matemáticos Alexandrinos exprimiam relevantes temáticas da arte construtivista e experimental, com foco em medidas de distância, quadraturas e cubaturas. Cabe destacar que os conceitos aritméticos dos gregos, “não lhes permitiam associar as figuras geométricas números para medir suas áreas e seus volumes” (BRANDEMBERG, 2017, p. 16), portanto eles utilizavam sua magnitude para determinar a quadratura ou área ou a cubatura ou volume, a partir de um figura já conhecida, como os quadrados e os cubos, a fim de determinar sua razão.

Assim, os gregos desenvolveram uma elaborada Teoria de Magnitudes, ou Grandezas e Proporções, vinculadas a Eudoxo de Cnido. Ainda de acordo com Brandemberg (2017), “Foi Eudoxo, o pai da Teoria das Proporções, quem idealizou um método para relacionar magnitude de uma área (ou volume) de uma figura curvilínea com o "limite" das áreas progressivas de polígonos”. Denominado posteriormente como, o método de exaustão de Eudoxo, utilizado por Euclides.

Com isto, se inicia a utilização da ideia de uma constante que prende todos os círculos, que relaciona-se a sua circunferência ou perímetro ao seu diâmetro, sendo este o foco do trabalho de Arquimedes denominado “Sobre a medida do Círculo”, momento decisivo para que a Matemática grega-oque exclusivamente no geométrico.

De acordo com Urbaneja (2008), Arquimedes busca a partir disto estabelecer a razão entre "um segmento de parábola e um triângulo inscrito nesse segmento, o que gera um processo de divisão de retas ou segmentos em números infinitos de pontos indivisíveis, que segundo Brandemberg (2017), “se consolidaram em um dos suportes do Cálculo Infinitesimal”.

Cabe ainda ressaltar, que segundo o mesmo autor, Arquimedes realizou diversos avanços, seja na Geometria ou Matemática, estabeleceu relações entre as esferas, cilindros, prismas e cones com as figuras planas como círculos e polígonos. Como também determinou os volumes de sólidos e as áreas de figuras planas utilizando alavancas, sendo estas máquinas simples, que são capazes de multiplicar a força que é aplicada a um corpo ou objeto, quando apoiadas em um ponto fixo e determinando seus resultados a partir do método de exaustão. Se tornando o primeiro a mensurar sólidos redondos e superfícies curvilíneas (BRANDEMBERG, 2017).

A partir do século XV, alguns exemplos de fatores sociais, além do surgimento e desenvolvimentos históricos foram relevantes para as demonstrações do Cálculo Infinitesimal. Esta forma de cálculo se deu como campo de pesquisa anteriormente aos

autores supracitados nesta pesquisa, que buscou analisar matematicamente as mudanças fundamentais ocorridas.

Segundo Roque (2012),

A história da análise, ou do cálculo infinitesimal, possui um papel central nessas transformações e costuma ser dividida em três momentos: um primeiro, de natureza geométrica, em que problemas e métodos de investigação geométrica eram predominantes; um estágio analítico, ou algébrico, que começou por volta de 1740 com os trabalhos de Euler e atingiu sua forma final com Lagrange, no final do século XVIII; e o período em que foi forjada uma nova arquitetura para a Análise Matemática proposta inicialmente por Cauchy no início do século XIX e continuada por diversos outros matemáticos nas décadas seguintes (ROQUE, 2012, p. 343).

Podemos citar, os trabalhos de Cavalieri em 1635, em que, a partir dos séculos XIX e XX, segundo Roque (2012) *apud* Brandemberg (2017, p. 42), houve um desenvolvimento fundamental no campo da análise matemática ou Cálculo Infinitesimal, que determinaram a imagem atual da Matemática. Sendo que nesta época, já se desenvolvia os trabalhos de Newton e Leibniz, como veremos a seguir.

Cabe ressaltar também que, na Europa no século XVII, estudiosos que se encontravam no exterior aos ambientes acadêmicos da época, mas denominados como cientistas ativos, se dispunham a continuar os trabalhos anteriormente iniciados por Galileu e Kepler (COURANT, 2000) .

A Matemática pós século XVII e durante o percurso do século seguinte, colocou em segundo plano o ideal grego, abandonando-o, sendo sua razão substituída pela intuição. Com a Revolução Francesa, os conhecimentos avançados tiveram destaque, a partir de uma revisão crítica da nova análise, aumentando o rigor, e introduzindo conceitos básicos e elementares (COURANT, 2020) .

4. NEWTON E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Isaac Newton (1643-1727) nasceu na Inglaterra na casa Woolsthorpe Manor, situada em Lincolnshire, uma pequena aldeia, em um condado da região leste, prematuro em 4 de janeiro de 1643, e logo em sequência acabou ficando órfão de pai. Aos 2 anos de idade sua mãe se casou novamente, e este passou a morar com sua avó.

Figura 1 - Isaac Newton.



Fonte: Encyclopaedia Britannica (2023).

Segundo Frazão (2020) “Desde cedo manifestava interesse por atividades manuais. Ainda criança, fez um moinho de vento, que funcionava, e um quadrante solar de pedra, que se acha hoje na Sociedade Real de Londres”. Aos 14 anos retornou para a casa de sua mãe, onde seu padrasto acabara de falecer, para auxiliar na lavoura. Aos 18 anos, foi aceito no Trinity College, da Universidade de Cambridge, onde passou 4 anos, e recebeu

posteriormente em Cambridge, seu diploma de Bacharel em Artes em 1665 (FRAZÃO, 2020).

De acordo com alguns autores, ele era visto como muito reservado, com uma personalidade fechada, introspectiva e de temperamento difícil (MORAES *et al.*, 2019). Se tornando, segundo os mesmos autores, estudante de um vasto campo das Ciências, como Astronomia, Alquimia, Filosofia natural, Teologia, Física e Matemática.

Ao matricular-se em 1661 no Trinity College, sendo esta a mais famosa faculdade da Universidade de Cambridge, foi aluno de Isaac Barrow, sendo seu sucessor, em 1669, como professor de Matemática e influenciado em seus estudos por suas *Lectiones Geometricae*. Além da influência também, da *Arithmetica infinitorum* de John Wallis (BRANDEMBERG, 2017).

Por volta de 1664, as primeiras ideias de Newton começaram emergir, as quais foram registradas num livro que intitulou como *Quaestiones Quaedam Philosophicae* (Certas Questões Filosóficas). Isto acarretou a Newton, o recebimento de seu grau acadêmico em abril de 1664 e o grau de bacharel em 1665. Até o momento, não demonstrava ainda sua genialidade, a qual foi apenas despertada quando teve de retornar a Lincolnshire, já que a universidade foi fechada por causa da peste de 1665.

Em Lincolnshire, em menos de dois anos e com menos de 25 anos, Newton iniciou avanços revolucionários nas áreas da Matemática, da Física, da Óptica e da Astronomia, além de estar muito perto de inventar o cálculo.

Durante 1665 e 1667, uma epidemia de peste bubônica assolou a Inglaterra, e fez com que sua universidade fechasse, neste momento Isaac retornou para casa, e realizou importantes descobertas científicas, “descobriu a lei fundamental da gravitação, imaginou as Leis Básicas da Mecânica e as aplicou em corpos celestes, inventou os métodos de cálculo diferencial e integral, e estabeleceu alicerces de grandes descobertas ópticas” (FRAZÃO, 2020).

De acordo com Moraes *et al.*, (2019, p. 3),

Newton formulou o teorema conhecido como Binômio de Newton, escreveu sobre séries infinitas (o embrião do cálculo diferencial e integral), construiu o primeiro telescópio refletor, dentre outras várias realizações. Sua principal obra foi *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Principia*), considerada uma das mais influentes na história da ciência.

Ainda, de acordo com a Royal Society (2005), Newton foi considerado o cientista de maior impacto na história da ciência, de acordo com a mesma publicação:

Newton formulou o teorema conhecido como Binômio de Newton, escreveu sobre séries infinitas (o embrião do cálculo diferencial e integral), construiu o primeiro telescópio refletor, dentre outras várias realizações. Sua principal obra foi *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Principia*), considerada uma das mais influentes na história da ciência (SILVA, 2013).

Segundo Medeiros (2009) *apud* (Brandemberg, 2017), deve-se a Newton o conceito de primitiva função, sendo esta:

Denomina-se primitiva de uma função f , a uma função F tal que sua derivada F' seja igual a f . Newton empregava esta nomenclatura para definir os conceitos de velocidade e aceleração por meio da noção de espaço percorrido por uma partícula. Adota-se a notação $F = f$ ou $fJ = F + \text{constante}$. Diz-se que até a integral indefinida da f ou primitiva da f (MEDEIROS, 2009).

O conceito de Integral indefinida, se assemelha no cálculo da área sob o gráfico da função y a valores reais, definida em um intervalo $[a, b]$ (BRANDEMBERG, 2017).

Em seus últimos anos de vida buscou ampliar seus trabalhos, se dedicando a pesquisar sobre os raios luminosos, e chegou a conclusão de que “a luz é resultado do veloz movimento de uma infinidade de minúsculas partículas emitidas por um corpo” (FRAZÃO, 2020), como também descobriu do que resultava a luz branca, sendo a mistura de sete cores básicas, além de inventar um sistema novo de cálculo infinitesimal, aperfeiçoando a fabricação dos espelhos e das lentes, o que culminou na fabricação do primeiro telescópio refletor (FRAZÃO, 2020).

Segundo a mesma autora, ele ainda analisou os fenômenos das marés, e de acordo com as escrituras bíblicas, como a do livro de Daniel, fez previsões para o fim do mundo, que viria a acontecer, segundo o mesmo em 2060, de acordo com o calendário gregoriano.

Newton faleceu na cidade de Londres, em 20 de março de 1727, sepultado na Abadia de Westminster, sendo em sua homenagem erguida uma estátua em Cambridge, com a seguinte mensagem: "Ultrapassou os humanos pelo poder de seu pensamento" (FRAZÃO, 2020).

4.1 O CÁLCULO DE NEWTON

Isaac Newton é conhecido como um dos mais importantes cientistas da história. Ele nasceu em 1642 e dedicou sua vida à pesquisa e descoberta em várias áreas, incluindo Física, Matemática e Astronomia. Um de seus maiores feitos foi o desenvolvimento do Cálculo,

uma ferramenta matemática que revolucionou a forma como entendemos e estudamos a natureza.

Porém cabe lembrar que, quando Newton ingressou no Trinity College, em Cambridge, em 1661, não pensava em estudar matemática, o seu interesse era na área da química (BOYER, 1996). O seu período de maior produção e de suas pesquisas mais significativas, foi quando a universidade fechou as portas e ele retornou para casa. Esse período durou de 1665 a 1667 e trabalhou intensamente, "imaginando como o Universo funcionava, e fazendo uma descoberta espetacular atrás de outra, enquanto esperava a reabertura da universidade. Este foi seu *anni mirabiles*, ou 'ano milagroso', como é chamado" (BARDI, 2006, p. 44).

O Cálculo permite a resolução de problemas complexos relacionados à mudança e ao movimento. Antes dele, os matemáticos tinham dificuldade em descrever e prever com precisão as transformações que ocorriam na natureza, como a queda de um objeto ou o movimento de um planeta. Com o Cálculo, Newton conseguiu explicar essas transformações com precisão, o que o tornou um dos mais importantes contribuidores para a ciência.

Seu desenvolvimento se deu de forma independente de outro matemático, Gottfried Wilhelm Leibniz. Embora ambos tenham trabalhado simultaneamente no desenvolvimento da teoria, cada um chegou a suas conclusões de maneira diferente.

Newton desenvolveu o Cálculo como uma forma de resolver problemas relacionados ao movimento e à mudança. Ele usou conceitos matemáticos como as séries infinitas e as equações diferenciais para descrever a variação de quantidades como a velocidade e a aceleração. Além disso, ele introduziu a noção de derivada e integral, que se tornaram as ferramentas principais do Cálculo (BRANDEMBERG, 2017).

De acordo com Brandemberg (2017), "Newton elaborou seu Cálculo na forma de uma Teoria que ele denominou Método das Fluxões e dos Fluents". Sendo Fluents, definida pelas grandezas que são variáveis, introduzidas para representar as diversas formas de movimentos. Sendo ainda, as velocidades desses fluents, as derivadas com relação ao tempo, denominada por ele como Fluxões.

De acordo com Courant (2000), a primeira meta de Newton, buscava determinar a velocidade de um movimento não- uniforme, ao considerar os movimentos de uma partícula ao longo de uma reta dada pela função $x = f(t)$.

De acordo com Eves (2011), as principais obras de Newton são:

Principia, 1687; Opticks, com dois apêndices, Cubic Curves e Quadrature

and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series, 1704; Arithmetica universalis, 1707; Analysis per séries, Fluxiones, etc. e Methodus differentialis, 1711; Lectiones opticae, 1729; e The Method of Fluxions and Infinite Series, traduzido do original latino de Newton por J. Colson em 1736.

Cabe relembrar, que Newton foi aluno de Isaac Barrow, isto gerou a influência das pesquisas de Barrow em seus estudos, pois este foi o primeiro estudioso que relacionou os resultados sobre os problemas de tangente com o cálculo de áreas e volumes (BRANDEMBERG, 2017).

Além disso, o Cálculo permitiu a Newton aplicar seus conhecimentos em sua obra mais famosa, a "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", ou "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural". Nesta obra, ele apresentou as três leis do movimento e a lei da gravitação universal, que mudaram a forma como compreendemos o universo (BRANDEMBERG, 2017).

Em resumo, a experiência de Sir Isaac Newton com o Cálculo foi fundamental para a evolução da ciência. Suas descobertas e contribuições para a Matemática e a Física ainda são estudadas e aplicadas até hoje, mais de três séculos depois de sua morte. Ele é um dos mais importantes cientistas de todos os tempos e um modelo para todos aqueles que buscam entender e explicar o mundo à sua volta.

A sistematização lógica do Cálculo, cabe atentar, se deu anteriormente à definição de limite. Sendo sua noção, confundidas com as ideias vagas, como números infinitamente grandes ou pequenos, bem como com intuições geométricas subjetivas. Porém o termo, visto como é atualmente provém dos séculos XVIII e XIX. Sendo sua primeira ideia datada por volta do ano 450 a.C., no transcorrer da discussão dos quatro paradoxos de Zeno (IME-USP-SP, 2000).

Arquimedes foi o segundo a refletir sobre os paradoxos, e visando provas rigorosas de fórmulas de algumas áreas e volumes, encontrou diversas somas que continham um número infinito de termos. Porém apenas Newton, em sua obra *Principia Mathematica*, reconheceu a necessidade de dar sentido ao limite. Sendo o primeiro a descobrir o papel preliminar que o *limite* traria ao Cálculo, este acabaria por ser definido como a base para o cálculo diferencial posteriormente. Tais sugestões de Newton porém não foram analisadas (BRANDEMBERG, 2017).

Com o passar do tempo algumas considerações foram realizadas, até que em 1840 e 1850, Karl Weierstrass, determinou a primeira etapa para corrigir erros, sendo esta

iniciada a partir da definição de limite, anteriormente proposta por Augustin Louis Cauchy no século XIX.

Sua definição formal discorre, de acordo com Ime-USP-SP (2000):

Seja f uma função de valor real definida em um subconjunto D dos números reais. Seja c um ponto de acumulação de D e seja L um número real. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, se $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

(Lembre que c é um ponto de acumulação de $D \subseteq \mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto de centro c , $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ contém algum ponto x pertencente a D diferente de c).

Portanto cabe também ressaltar: “O conceito de limite constitui um dos fundamentos do Cálculo, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, utilizamos esse conceito” (IME.USP-SP, 2000).

Newton também fez quatro de suas principais descobertas: *o teorema binomial; o cálculo; a lei de gravitação e a natureza das cores*. De acordo com Almeida,

[...] publicou o seu trabalho sobre a luz, acompanhado pela sua reflexão filosófica, foi fortemente criticado por quase todos os seus contemporâneos, incluindo Robert Hooke e Huygens, que defendiam ideias diferentes acerca da natureza da luz. Newton ficou tão desmotivado que decidiu não publicar mais no futuro. Contudo, em 1675, ele voltou a publicar mais um trabalho sobre a luz, que continha a sua ideia que a luz era um raio de partículas - a Teoria Corpuscular da Luz. Novamente foi desgastado por uma tempestade de crítica tendo sido inclusivamente acusado por outros de estas ideias já terem sido descobertas. Nesta altura, Newton resolveu que os seus resultados só seriam publicados após a sua morte (ALMEIDA, 2003, p. 6-7).

Newton tinha receio em difundir suas publicações, salvo seu trabalho Principia. Os demais, só foram divulgados após grande pressão de seus companheiros. Entre essas obras podemos citar, *De analysi per arquationes numero terminorum infinitas* - Sobre a análise de equações com números ilimitados de termos, tratava-se de um ensaio sobre o Cálculo,

demonstrando os resultados obtidos sobre o método de Nicholas Mercator. Tal obra foi vinculada a um segundo livro, o *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*- Um tratado dos métodos das fluxões e das séries, ambas não sendo publicadas, mas entregues a Barrow, que divulgou-o a Collins que o colocou em circulação, sendo permitido por Newton sua publicação em 1711.

Neste meio tempo, foi desenvolvido ainda, outro tratado, denominado *Methodus fluxionum et serierum infinitum*- O método de fluxões e séries infinitas, escrito em 1671. Em 1666, o autor deixou o trabalho *The october 1666 tract on fluxions*, e o *De Methodis*, uma revisão do anterior. Em 1693, o autor elaborou *Tractatus de quadratura curvarum*- Tratado Sobre a Quadratura de Curvas, um apêndice de *Optica*, publicado em 1704, sendo este o primeiro trabalho relacionado ao Cálculo, segundo Bardi (2006, p. 21). Além de ser ainda definida como o início da invenção do Cálculo Diferencial e Integral, campo de disputa entre Newton e Leibniz (CALÁBRIA & BONFIM, 2017, p. 27).

Philosophiae naturalis principia mathematica- Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, conhecido como *Principia*, tinha um movimento relevante do Cálculo, porém com foco na geometria, sendo revolucionário, publicado em 1687, iniciado seu desenvolvimento em 1685. Segundo Calábria & Bonfim (2017), “*Principia* é considerado um clássico e os comparam à obra *Origem das espécies* de Darwin, o qual também é conceituado como um dos livros científicos mais famosos da nossa era”.

Posteriormente, Newton confeccionou seus ensaios sobre o Cálculo, entre eles podemos destacar, *O método das séries infinitas*, advindo da *Série de Potências* vinculado aos estudos de *Arithmetica infinitorum* de Wallis. E, 1676, Newton escreveu duas cartas enviadas a Oldenburg e a Leibniz, descrevendo e exemplificando sobre as séries infinitas, e o Teorema do Binômio Generalizado, denominadas pelo autor como *Epístola Prior* e *Epístola Posterior* (CALÁBRIA & BONFIM, 2017, p. 30).

O método das Séries Infinitas, advém das séries de potência, que iniciou com os trabalhos de Wallis sobre a área de um círculo, onde o autor analisava sua área sob uma curva entre dois valores fixos, o 0 e o 1. Já Newton calculou as áreas a partir de 0 até um valor X arbitrário, além de analisar uma sequência de curvas do tipo $y = (1 - X^2)^n$.

O método de extração de raízes, Newton o representava:

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc$$

Fonte: Calábria & Bonfim (2017, p. 35).

Onde P + PQ significa a quantidade daquela raiz ou mesmo de qualquer potência, ou a raiz de uma potência; P significa o primeiro termo da quantidade; Q os termos restantes divididos pelo primeiro, e m/n o índice numérico da potência de P + PQ, que pode ser um número inteiro ou fracionário, ou positivo ou negativo (CALÁBRIA & BONFIM, 2017).

Aplicando este método a $\sqrt{1+x^2}$, calculou facilmente o resultado como

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \dots \text{ (KATZ, 2009)}$$

Fonte: Calábria & Bonfim (2017, p. 35).

A área sob uma curva, era calculada a área do círculo e da hipérbole, onde Newton considerava uma série de curvas cujo eixo era X e as ordenadas eram:

$$(1-x^2)^{0/2}, (1-x^2)^{1/2}, (1-x^2)^{2/2}, (1-x^2)^{3/2}, (1-x^2)^{4/2}, (1-x^2)^{5/2}, \text{ etc, ...}$$

Posteriormente, calculando-se cada área das curvas intercaladamente, segundo:

$$x, x - \frac{1}{3}x^3, x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \text{ etc. (1)}$$

Fonte: Calábria & Bonfim (2017, p. 35).

Como expresso na Tabela abaixo, Newton utilizou o coeficiente para calcular as áreas, como expressado por Kartz (2009) *apud* Calábria & Bonfim (2017, p. 35):

Tabela 1: Tabela expandida extraída de Calábria & Bonfim (2017).

(Continua).

A partir de (1), que são as áreas das curvas do tipo $y = (1 + x^2)^n$, Newton, então, tabulou os coeficientes das várias potências de x . Ilustramos esta tabulação a seguir:

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$...	
1	1	1	1	1	...	X
0	1	2	3	4	...	$\frac{-x^3}{3}$
0	0	1	3	6	...	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	...	$\frac{-x^7}{7}$
0	0	0	0	1	...	$\frac{x^9}{9}$

Fonte: Calábria & Bonfim (2017, p. 35).

Em notação moderna, os autores ainda expressão, que o cálculo de áreas é descrito:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^0 dx; \int_0^1 (1 - x^2)^1 dx; \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx;$$

Fonte: Calábria & Bonfim (2017, p. 35).

Podemos perceber que, essas regras já foram introduzidas pelos autores anteriormente a Newton, ele estabeleceu portanto, uma estrutura unificada, e um quadrado onde todos os problemas podiam ser formulados (BARON, 1985, p. 39).

5. LEIBNIZ E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Gottfried Leibniz (1646-1716), nasceu em Leipzig em 1º de julho de 1646, uma cidade independente da Alemanha, denominada Saxônia, sendo seu pai professor de filosofia, morto em 1652, quando o mesmo tinha apenas 6 anos. Sendo criado pela sua mãe que lhe transmitiu rígidos valores religiosos. Aos 7 anos adentrou a escola Nicolau, estudando latim e grego, e adquirindo conhecimentos de forma autodidata (FRAZÃO, 2017).

Figura 2: Leibniz



Fonte: Ciência e Diversão (2014).

De acordo com Frazão (2017), aos 14 anos de idade, entrou na Universidade de Leipzig e se graduou em filosofia, e onde apresentou o conceito de “Mônadas”, uma unidade primária do universo. Já em 1663, recebeu seu título de mestre em filosofia, e em 1666 publicou sua tese denominada “Dissertação sobre a arte combinatória”. Na Universidade de Altdorf, obteve o título de doutor em Direito.

Em Londres, Leibniz participou da Royal Society - academia científica independente do Reino Unido e da Commonwealth, onde foi eleito membro, e exibiu sua invenção da máquina de calcular. Desenvolveu também o teorema fundamental do Cálculo, sendo publicado em 1677, mesmo que Newton tivesse estudado tal tema e não publicado sobre o

mesmo (FRAZÃO, 2017).

Desenvolveu ainda com adicionar a multiplicação automática e a divisão na Calculadora de Pascal, e apurar o sistema de números binários. Na filosofia foi um otimista, por acreditar que nosso universo seria o melhor de todos os mundo possível que Deus criou. Sendo ainda, sua realização mais considerável, as ideias de cálculo infinitesimal, onde introduziu anotações ainda utilizadas atualmente (MORAES; BARROSO E ROSA, 2019).

Ele morreu de forma solitária, em Kensington, vitimado por uma crise de gota, longe da aristocracia, onde viveu grande parte de sua vida em 1716. Porém não deixou de ser considerado um figura central da história da Matemática e da Filosofia. Sendo conhecido por ser “polímata (pessoa que tem conhecimento em várias áreas), filósofo, físico e matemático, além de ter contribuído para outras áreas tais como biologia, medicina, geologia, psicologia, linguística e informática” (MORAES; BARROSO E ROSA, 2019).

5.1 O CÁLCULO DE LEIBNIZ

Leibniz foi um matemático e filósofo alemão que, juntamente com Isaac Newton, desenvolveu o cálculo diferencial e integral. O cálculo diferencial é uma área da Matemática que se concentra na estudar a taxa de mudança de uma função em um ponto específico.

No decorrer do aperfeiçoamento dos seus estudos com o Cálculo Infinitesimal, Leibniz, assim como Johann Bernoulli, utilizou-se dos denominados “Métodos Geométricos”, tendo como inspiração os trabalhos de Cavalieri e Pascal (BRANDEMBERG, 2017). Referenciando o cálculo da integral ao método dos indivisíveis, proposto anteriormente por Cavalieri, sendo este uma técnica utilizada para o cálculo de áreas e volumes.

Leibniz formulou o conceito de derivada, que descreve a taxa de mudança da função em um ponto específico. Em outras palavras, é a inclinação da reta tangente a uma curva naquele ponto. A derivada pode ser usada para encontrar a taxa de mudança de uma quantidade em relação a outra, como, por exemplo, a velocidade de um objeto em relação ao tempo (BRANDEMBERG, 2017).

Leibniz desenvolveu a noção de derivada como uma forma de quantificar a taxa de mudança de uma função, que é representada pela letra "d" (para derivada) seguida pela letra da função. Por exemplo, $d/dx (f(x))$ é a notação para a derivada da função $f(x)$ em relação a x (BRANDEMBERG, 2017).

A **derivada** é uma ferramenta importante para a resolução de problemas em muitas áreas, como física, engenharia e economia, e é uma parte fundamental da teoria do cálculo. Além disso, a noção de derivada desenvolvida por Leibniz é usada em muitos campos para analisar a variação de uma quantidade em relação a outra e para encontrar soluções para equações diferenciais, que descrevem a mudança de uma quantidade ao longo do tempo.

Ele também desenvolveu a notação do delta, que é usada para representar pequenas variações em uma função. A letra grega "delta" - Δ , é usada para representar a variação em uma quantidade, e é usada com frequência no cálculo diferencial para descrever mudanças em uma função em relação a uma variável independente.

Segundo Courant (2000), o experimento de Leibniz na busca de analisar a derivada se iniciou com o quociente de diferenças de uma função $y = f(x)$, com sua substituição do símbolo de diferença pelo Δ , pelo “símbolo de diferencial” d .

Por exemplo, suponha que você tenha uma função $f(x)$ e queira descrever a mudança em $f(x)$ quando x muda de um valor x_0 para $x_0 + \Delta x$. A notação $\Delta f(x)$ é usada para descrever essa mudança na função $f(x)$. De forma geral, Δ representa a diferença entre dois valores de uma quantidade, e é usado para descrever variações pequenas em uma função (BRANDEMBERG, 2017).

A noção de delta é importante porque permite a descrição de mudanças em uma função em termos de pequenas variações em sua variável independente. Isso é útil em muitos campos, como física e engenharia, para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos e para encontrar soluções para equações diferenciais. A noção de delta também é usada em cálculo integral para descrever a aproximação de áreas sob curvas como a soma de pequenos retângulos.

Além disso, Leibniz desenvolveu o cálculo integral, que se concentra em encontrar a área sob uma curva. Ele desenvolveu a noção de integral definida, que representa a área entre a curva e o eixo x em um intervalo específico.

A contribuição de Leibniz para o cálculo foi fundamental para o desenvolvimento da física, da engenharia e da economia, pois permite a resolução de problemas complexos de uma maneira eficiente e precisa. Além disso, sua obra teve um impacto significativo no desenvolvimento da Filosofia e na Matemática.

Em resumo, o cálculo diferencial de Leibniz é uma parte importante da Matemática que se concentra no estudo da taxa de mudança de funções e na encontrar áreas sob curvas. Sua contribuição para o cálculo teve um impacto significativo em várias áreas e continua a

ser estudada e utilizada até hoje.

Cabe ressaltar que no Cálculo, a notação de Leibniz, nomeada em homenagem ao seu nome, usa os símbolos dx e dy , para representar incrementos infinitamente pequenos, ou também denominados infinitesimais, de x e y , respectivamente. Portanto assim como Δx e Δy representam incrementos finitos de x e y , respectivamente (BRANDEMBERG, 2017).

Mesmo com o desenvolvimento que veio a ocorrer no Cálculo, a notação segundo Leibniz, mantém-se sendo eminentemente útil e vantajosa, pois os limites de quociente e somas, podem ser tratados como eficientes, sendo estes, símbolos levados a serem vinculados a significados completamente não-matemáticos. Porém, de acordo com Courant (2000), se resistir a esta notação de Leibniz, pode-se compreendê-la como uma excelente abreviação explícita mais inquietante de limites, sendo esta indispensável nas partes avançadas da teoria.

De acordo com o mesmo, ao se considerar y , como uma função de uma variável x , ou $y = f(x)$, sendo este o caso, então a derivada de y em relação a x , que mais tarde veio a ser vista como o **limite**.

Já a **integral**, Leibniz usou seu símbolo, um \int alongado, derivando-a da primeira letra da palavra *summa* ou soma, em 1675. Com o intuito de indicar a soma de indivisíveis; Escrevendo em um curto espaço de tempo as diferenciais e derivadas, assim, a $x dy$ e $y dx$ para integrais (BRANDEMBERG, 2017).

Segundo COURANT (2000),

Leibniz algumas vezes se empolgava com a força sugestiva de seus símbolos; eles funcionavam como se representassem uma soma de quantidades "infinitamente pequenas" com as quais se podia contudo operar até um certo ponto, como se faz com quantidades comuns.

A integral surgiu com Pierre Fermat, no século XVII, a partir de seus estudos sobre funções, onde ele necessitava determinar as definições do que era uma reta tangente. Sendo que, algumas dessas funções não batiam com a definição existente na época, isto ficou conhecido como o "problema da tangente".

De acordo com Silva (2006),

Foi então que ele resolveu o problema da seguinte maneira: para determinar uma reta tangente a uma curva no ponto P, ele definiu um outro ponto Q na curva e considerou a reta PQ. Dessa forma, aproximou o ponto Q ao ponto P, obtendo assim retas PQ que se aproximavam de uma reta t , que Fermat chamou de reta tangente ao ponto P.

Porém, já que Fermat não tinha como comprovar o conceito de limite, por ainda não ser conhecido, apenas com Leibniz e Newton, o cálculo diferencial tornou-se possível, o que tornou possível a utilização dessas ferramentas para definir seu conceito. Portanto, de maneira geral a derivada trata-se da inclinação da reta tangente que passa por uma curva determinada.

Cabe ainda ressaltar, que se passou um século, para que se reconhecesse o conceito de limite, sendo nada mais correlacionado à definição de integral.

A **diferenciação**, neste aspecto, segundo Courant (2000), para averiguar a diferenciação de uma diversidade de funções específicas, “transformando os quocientes de diferença em preparação para a passagem do limite”, sendo estes métodos modificados e convertidos para outros mais eficazes.

Perante isto, estes métodos, diferenciam automaticamente qualquer função matemática, a partir da subjugação de regras simples, reconhecendo portanto sua aplicabilidade. Segundo Courant (2000), isto gerou a diferenciação da caracterização de “algoritmo do cálculo”, sendo este o aspecto central da teoria expressada pelo termo cálculo.

De acordo ainda com Courant (2000), ambos os processos de diferenciação e de integração estão intimamente relacionados, sendo um inverso do outro. De acordo com o autor, “Não existe um cálculo diferencial e um cálculo integral separado, mas um só cálculo” (COURANT, 2000).

Portanto, um dos maiores feitos de Leibniz e Newton foi apontar e revelar o **Teorema Fundamental do Cálculo**, sendo este formulado ao se definir a integral de uma função $y = f(x)$, a partir do limite inferior fixo a ao limite superior variável x . De acordo com Courant (2000), este Teorema pode ser definido como:

“ A derivada da integral indefinida (t) como uma função de x é igual ao valor **de** $\int(u)$ no ponto x : $F'(x) = f(x)$. Em outras palavras, o processo de integração, conduzindo da função $f(x)$ a $F(x)$, é desfeito, invertido, pelo processo de $f =$ diferenciação aplicado a $F(x)$ ” (COURANT, 2000).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz são considerados os pais do cálculo, uma Teoria Matemática que liga Matemática e Física e é usada para descrever e resolver problemas relacionados a mudanças e variações. Embora os dois tenham desenvolvido o cálculo independentemente um do outro, há algumas diferenças e semelhanças entre suas abordagens. Sendo suas abordagens diferentes quanto a forma e quanto suas principais influências.

Podemos destacá-las, sendo as semelhanças, 1) Ambas as abordagens foram baseadas na ideia de quantificar e descrever as mudanças em uma função; 2) **Ambas usaram a notação "d" para representar a derivada e "∫" para representar a integral**; 3) Ambos os autores sabiam obter a integral e a derivada como limites; 4) Ambas as abordagens foram influenciadas pela Filosofia e Matemática da época, incluindo o trabalho de matemáticos anteriores como John Wallis e Pierre de Fermat; 5) Foi apenas com ambos, que o cálculo diferencial tornou-se possível e importante para o campo das ciências exatas; 6) O grande feito de ambos, foi identificar e explorar o ***Teorema Fundamental do Cálculo***.

Sendo assim, acreditamos que ao utilizarmos a história do cálculo, com uma abordagem algébrica como é hoje, poderia facilitar a compreensão por parte dos estudantes, se também fosse possível incluir a perspectiva desenvolvida por Leibniz a mesma. A abordagem de Newton, já se encontra em destaque, inserida nas abordagens atuais, porém ambas, tanto a de Newton como a de Leibniz podem ser ainda utilizadas em paralelos. Sendo esta uma ferramenta importante para melhorar o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Diferentemente as diferenças, podemos destacá-las sendo, 1) A abordagem de Newton foi mais enraizada na física, enquanto a de Leibniz foi mais enraizada na Matemática; 2) Newton usou uma abordagem mais geométrica para o cálculo, enquanto Leibniz usou uma abordagem mais algébrica; 3) Newton apresenta uma visão cinemática do Cálculo, sendo a derivada ou Fluxão, vista como uma taxa de variação em função do tempo. Já Leibniz, considera x e y , variando, com variações muito pequenas e em sequência, sendo dx e dy , as diferenças entre os valores consecutivos desta sequência (BRANDEMBERG, 2017); 4) A notação de Leibniz era mais simples e intuitiva, enquanto a notação de Newton era mais complexa; 5) Leibniz desenvolveu o conceito de delta para descrever variações

pequenas em uma função, enquanto Newton não o usou; 6) Leibniz tratou a integração, como uma soma como Arquimedes e Cavalieri. faziam, sendo utilizados os infinitésimos dx e dy , em suas variações, sendo visto como um grande avanço, quando considerado suas notações. Por volta de 1675, Leibniz introduziu portanto, os símbolos de d e \int , para a derivada e para a integral (BRANDEMBERG, 2017); 7) As denominações e notações de Newton, era ligadas a mecânica, sendo assim vistas como não tão manipuláveis quanto as introduzidas por Leibniz, sendo as anotações de Leibniz mais comumente utilizadas atualmente (BRANDEMBERG, 2017); 8) Nem Newton, muito menos Leibniz, queriam reconhecer o conceito de limite e ter seu direito exclusivo, como fonte para métodos novos.

Em geral, as abordagens de Newton e Leibniz para o cálculo são complementares e ambas têm contribuído significativamente para o desenvolvimento da teoria do cálculo. Embora existam diferenças entre suas abordagens, ambos forneceram uma forma de descrever e resolver problemas relacionados a variações e mudanças, tornando o cálculo uma ferramenta importante e amplamente utilizada em muitas áreas.

Sendo a descoberta a inter-relação orgânica, entre o conceito da integral advindo da Antiguidade, e o conceito básico do Cálculo, mesmo sendo definidos anteriormente como bastante diversos, produziu um desenvolvimento análogo à Matemática.

Mesmo que o cálculo seja vinculado de forma direta a estes dois autores, sua evolução ocorreu de forma longínqua, antes mesmo dos estudos de Newton e de Leibniz, porém ambos tiveram ações decisivas para sua formulação. Pois de acordo com Courant (2000), o grande mérito de Newton e de Leibniz foi terem identificado a associação entre as tangentes e a quadratura, unificando métodos, que os tornaram instrumentos para as ciências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A História do Cálculo Diferencial e Integral. Disponível em: A História do Cálculo Diferencial e Integral (professorjanildoarantes.com.br). Acesso em: 03 dez. 2022.

Alguns fatos históricos sobre os limites. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_limites.htm>. Acesso em: 11 fev. 2023.

ALMEIDA, S.G.M. **História da Matemática** - Newton d Leibniz. Monografia. 2003. Universidade Católica Portuguesa (Pré-Versão).

BARON, M. E., BOS, H.J. M. Curso de História da Matemática. Origem e Desenvolvimento do Cálculo. Newton e Leibniz. Unidade 3. Tradução de Rudolf Maier e José M. M. Mendes. Brasília: **Editora da Universidade de Brasília**, 1985.

BRANDEMBERG, João Claudio. Uma história da integral: de Arquimedes a Lebesgue. - São Paulo: **Editora Livraria da Física**, 2017.

BOYER, Carl Benjamin, 1906. História da da matemática: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, Ed. da **Universidade de São Paulo**, 1974.

CALÁBRIA, Angélica Raiz. BONFIM, Sabrina Helena. **O cálculo diferencial e integral de Newton e Leibniz:** aproximações e distanciamentos no método, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. CÁLCULO. **IME**, USP- São Paulo. Disponível em: E-Cálculo (usp.br). Acesso em: 11 fev. 2023.

COURANT, Richard e Robbins, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciências Moderna Ltda., 2000.

DERIVANDO A MATEMÁTICA. Noção de Limite pela definição. **IME**, Unicamp. Disponível em: Limite pela definição – Derivando a matemática (unicamp.br). Acesso em: 11 fev. 2023.

ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA, 1911. Disponível em: https://en.wikisource.org/wiki/1911_Encyclop%C3%A6dia_Britannica/Alexandrian_School. Acesso em: 10 jan. 2023.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRAZÃO, Dilva. **Gottfried Leibniz Filósofo e matemático.** 22 out. 2017. Disponível em: https://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz/.

FRAZÃO, Dilva. **Isaac Newton Cientista inglês.** 13 jan. 2020. Disponível em: https://www.ebiografia.com/isaac_newton/.

GIL, Antônio Carlos, 1946- **Como elaborar projetos de pesquisa**/Antônio Carlos Gil. - 4. ed. - São Paulo : Atlas, 2002.

MORAES, Eberson Luis de Souza; BARROSO, Fábio Ferreira; ROSA, Luiz Pinguelli. Newton e Leibniz: uma proposta de abordagem histórica sobre a origem do cálculo no ensino superior. **Revista Scientiarum Historia**, 2019, v.2;e091. Disponível em: Newton e Leibniz: uma proposta de abordagem histórica sobre a origem do cálculo no ensino superior | Revista Scientiarum Historia.

Newton beats Einstein in polls of scientists and the public. Disponível em: <https://royalsociety.org/news/2012/newton-einstein/#:~:text=The%20results%20showed%20Newton%20to,Newton%20and%2013.8%25%20for%20Einstein>. Acesso em: 10 jan. 2023.

ORSI, Carlos. A Lei da Quadratura do Círculo. **Instituto Questão de Ciência**. 2022. Disponível em: A lei da quadratura do círculo | Questão de Ciência (revistaquestaoodeciencia.com.br). Acesso em: 10 jan. 2023.

ROQUE, **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 2012.

SILVA, Salatiel Dias da. **Estudo do binômio de Newton**. -Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN- João Pessoa. 2013.

SILVA, Guilherme, Santana da. Derivadas. **Todo Estudo**. Disponível em: <https://www.todoestudo.com.br/matematica/derivadas>. Acesso em: 11 fev. 2023.

URBANEJA, P. M. G. Arquímedes y Los orígenes del Cálculo Integral. Espanha: **NIVOLA**, 2008.