UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

AYSLLAN ANTONIO CASTRO DA COSTA

TEOREMA DE PASCAL NA PERSPECTIVA DA GEOMETRIA DE PROJEÇÕES E GEOMETRIA ANALITICA

LAVRAS- MG

2023

AYSLLAN ANTONIO CASTRO DA COSTA

TEOREMA DE PASCAL NA PERSPECTIVA DA GEOMETRIA DE PROJEÇÕES E GEOMETRIA ANALITICA

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy

Orientador

LAVRAS- MG

2023

AYSLLAN ANTONIO CASTRO DA COSTA

TEOREMA DE PASCAL NA PERSPECTIVA DA GEOMETRIA DE PROJEÇÕES E GEOMETRIA ANALITICA

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADO em 27 de julho de 2023

Banca Examinadora

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy - orientador
(DFM/ICET/UFLA)
Profa. Dra. Amanda Castro Oliveira
(DFM/ICET/UFLA)
Prof. Dr. Marlon Pimenta Fonseca
(DMM/ICET/UFLA)

LAVRAS- MG

2023

À minha mãe Luciene Gomes de Castro (in memorian), por ter sido sempre uma grande inspiração e motivação para sempre continuar, ainda, agradeço por me dar as bases que deram pra me tornar na pessoa que sou hoje.

"Alô mãe? Te amo minha estrelinha!!"

Dedico

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, sem ele eu não teria capacidade para desenvolver este trabalho.

À minha mãe Luciene Gomes (*in memorian*), por sempre ter me apoiado, encorajado e dado forças e incentivo para concluir esta etapa, exemplo de pessoa e mulher, guerreira, trabalhadora, corajosa, carismática e sorridente, como sempre me recordo. “Muitas mulheres são exemplares, mas você a todas supera”. (Provérbios 31:28-29). Principalmente agradeço a Deus por ter me dado o dom da vida e nela eu ter a honra de ser seu filho, e dentre todas as outras vidas que eu poderia ter, trocaria todas para estar ao seu lado, assim, “Agradeço a meu Deus toda vez que me lembro de vocês." (Filipenses 1:3), Te amo mamãe!

Aos meus irmãos Luiz e João Vitor, agradeço por ter sido minha base, quando tudo se desmoronou, por sempre estar ao meu lado e me incentivado, não deixando abandonar um sonho que não é só meu, e agradeço por nunca terem me abandonado. Te amo, meus maninhos!

À minha segunda mãe que por obra do destino se chama Luciene, nunca acreditei em coincidências, mas nunca duvidei do seu carinho, afeto e preocupação, obrigado por sempre estar presente. Te amo Dada!

Aos colegas com quem morei, pela minha primeira passagem em Lavras, os ensinamentos, memórias que levarei comigo para sempre!

Aos meninos do 304, na qual compartilhei grande parte dos meus dias, por sempre estar ao meu lado e principalmente me apoiar, obrigado pelos momentos e risadas, será sempre eternizado em minha memória, nosso truco da quinta feira!

À Rafaela e sua família, por terem me acolhido e compartilhado momentos incríveis, por terem me apoiado e por vários outros conselhos e lições, sou eternamente grato!

À A.A.A.C.Odisseia UFLA, por me proporcionar momentos inesquecíveis e todo apoio ao decorrer da vida acadêmica!

Aos colegas do PIBID e RP, pelos momentos compartilhados e ensinamentos recebidos.

À minha amiga Leandra, por ter me apoiado e segurado minha mão em um momento crucial de minha vida, por me incentivar a continuar e pelos momentos incríveis ao seu lado. Te amo Lê!

Ao apoio do meu Daniel, que em momentos cruciais nesta reta final esteve presente e apoiando.

Ao meu orientador Kleyton, primeiramente pela paciência e calma, por sua dedicação e preocupação, sei que não foi uma tarefa fácil me acompanhar, e por ter me apresentado um projeto no qual estamos concluindo que foi enriquecedor e cheio de ensinamentos, sem você este trabalho nunca iria acontecer.

Ao Centro Acadêmico de Matemática (CAMAT), gestão “Maria Laura Mouzinho”, por vários momentos compartilhados.

Às professoras e professores da UFLA, por tantos ensinamentos e momentos compartilhados.

A todos, que passam ou já passaram pela minha vida, me deixando ensinamentos, momentos e lições.

E por fim ao João Antônio, por ter sido meu progenitor. Obrigado pai!

Obrigado por fazer parte da minha vida, amo vocês!

“A educação, qualquer que seja ela,
é sempre uma teoria do
conhecimento posta em prática.”

(Desafios da educação de adultos
ante a nova reestruturação tecnológica,
Paulo Freire (2003, p.40))

RESUMO

Este trabalho, de caráter qualitativo e de análise documental, advém de um campo pouco explorado no cenário brasileiro e com grande potencial de investigação acadêmica. O presente trabalho se propõe em apresentar uma ideia de movimento das estruturas matemáticas tomando como base o que denominamos atualmente como Teorema de Pascal ou Teorema do Hexagrama Místico, sob duas perspectivas de abordagens: Geometria de Projeções e a Geometria Analítica. No campo da Geometria de Projeções, consideramos o panfleto *Essay pour les coniques* (Ensaio para as Cônicas) publicado em 1640 por Blaise Pascal (1623-1662) e no campo da Geometria Analítica, o artigo *Demonstration of Pascal's Theorem* (Demonstração do Teorema de Pascal) publicado no ano de 1843 por Arthur Cayley (1821-1895). Este trabalho apoia-se na História da Matemática, uma vez que, pudemos verificar uma reformulação conceitual de um tópico matemático com aspectos característicos dos períodos em que foram desenvolvidos. Assim, considerando estas duas obras como fontes históricas para investigação, pudemos perceber algumas mudanças que ocorreram nas estruturas matemáticas por meio do avanço de novas descobertas: no caso de Pascal (1640), a demonstração foi realizada por meio da Geometria Sintética, enquanto, Cayley (1843) demonstrou utilizando uma Geometria Algébrica. Deste modo, acreditamos que a apresentação destas duas concepções pode contribuir como um exemplo para compreensão do movimento de conceitos matemáticos no decorrer do tempo.

Palavras-chave: Teorema de Pascal. Geometria de Projeções. Geometria Analítica. História da Matemática. Estruturas Matemáticas.

LISTA DE ABREVIAÇÕES

A. A. A. C. Odisseia	Associação Atlética Acadêmica das Ciências Odisseia
CAMAT	Centro Acadêmico de Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
RP	Residência Pedagógica
UFLA	Universidade Federal de Lavras

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Com o intuito de aprofundar meus estudos no campo da História da Matemática, voltei ao pensamento dos caminhos que matemáticos do passado tiveram até suas descobertas. Contudo, sem ter por onde começar, em conversa com meu orientador e com sua motivação, ele me propôs um tópico pouco explorado no cenário brasileiro e com potencial de investigação acadêmica: o movimento das estruturas matemáticas.

De acordo com Leite e Godoy (2018), a matemática, assim como outras áreas da ciência, ao longo da história, passou por (re)formulações em sua própria estrutura. Em cada período encontramos "uma matemática" que se desenvolvia e produzia elementos de caráter funcional (ou não) e assim suas estruturas se desenvolviam. Deste modo, as estruturas matemáticas foram se desenvolvendo acompanhando as modificações na forma da produção do conhecimento ao longo da história, não necessariamente na mesma direção, mas havia um movimento interno da matemática, como destaca Magossi e Poletti (2013, p.4):

> Fatos históricos da matemática revelam a existência de estruturas, de padrões e, de certa forma, como elas se entrelaçam no decorrer da história da matemática, acarretando o que se chama, aqui, de movimento das estruturas matemáticas.

Compreendemos que a matemática assim como a ciência, passa por alterações em suas estruturas e formulações, muitas vezes estimulada pelo contexto histórico que pode ter influenciado a necessidade de mudanças na concepção ou até mesmo no avanço de um determinado conhecimento matemático. Portanto, a partir de uma pesquisa histórica, é possível encontrar estruturas envolvidas no desenvolvimento da matemática. Pensando nela para além do campo funcional, podemos considerar a existência de seu desenvolvimento próprio. Neste caso, seria uma "matemática pura", ou um conhecimento voltado para o interior da matemática, com suas estruturas lógico axiomáticas. Logo:

> é compreensível que, ao longo da história, o conhecimento aplicado tivesse o "foco" das produções dos saberes expressando-se por meio de criações de instrumentos e ferramentas, enquanto que o conhecimento puro se desenvolvia de outra maneira. Deste modo, assim como a ciência, a matemática também conseguiu trabalhar em suas duas (conhecimento puro x aplicado) ou mais "faces" (LEITE; GODOY, 2018, p.35).

Bachelard (1996, p.97) afirma que “todo o pensamento científico deve mudar diante duma experiência nova; um discurso sobre o método científico será sempre um discurso de circunstância, não descreverá uma constituição definitiva do espírito científico”, portanto é compreensível que com os progressos do conhecimento, novos campos surgissem e assim cada vez mais elementos seriam incorporados à matemática e suas necessidades.

As estruturas matemáticas começaram a ser amplamente estudadas a partir do século XIX, processos em que surgem elementos como “o rigor” da matemática representam importante elemento a ser considerado dentro do desenvolvimento da própria matemática como destaca Roque (2012, p.407):

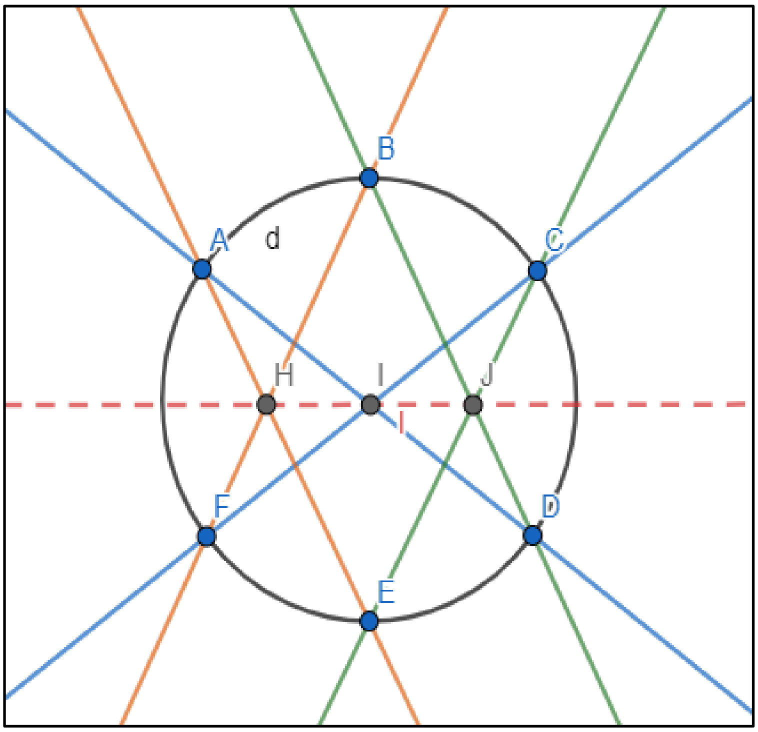
> A noção de rigor se transformou na virada do século XVIII para o XIX porque os matemáticos da época se baseavam em crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiam no interior da própria matemática. [...] O rigor é um conceito histórico, e a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que, por sua vez, também será criticado por Weierstrass, baseado em sua própria concepção.

Portanto, como discorre Roque (2012), podemos considerar que o rigor matemático pode ser interpretado como um elemento histórico, em que a própria matemática necessitou de longo período de ampliação, para assim receber uma estrutura para sua consistência e explicação de elementos em seu interior. Em meio a provas e refutações, o conhecimento se desenvolve e deste modo é necessário certo tempo de amadurecimento dos conceitos matemáticos para que então se inicie o processo de questionar os pilares da matemática.

Para realizar este estudo do movimento das estruturas matemáticas, consideramos apenas aspectos internos da matemática (conhecimento puro), e tomamos como exemplo o que atualmente denominamos como Teorema de Pascal, para investigar essas mudanças nas abordagens matemáticas. O Teorema de Pascal nos dias de hoje é um teorema da Geometria Projetiva, válido para qualquer cônica.

De acordo com Hefez (1985, p.41), podemos enunciar o Teorema de Pascal do seguinte modo: “Se os seis vértices de um hexágono estão sobre uma cônica, então os três pontos de interseção dos pares de lados opostos são colineares”.

Figura 1 - Teorema de Pascal versão moderna



Fonte: Dos autores (2023).

Neste trabalho, iremos trabalhar com a análise do Teorema de Pascal, tendo em vista duas abordagens distintas: a Geometria de Projeções[1] e a Geometria Analítica. Eves (2011) relata que:

> Enquanto Desargues e Pascal abriam um novo campo, a geometria projetiva, Descartes e Fermat concebiam as ideias da geometria analítica moderna. Há uma diferença fundamental entre as duas matérias, pois enquanto a primeira é um *ramo* da geometria a segunda é um *método* da geometria (EVES, 2011, p.382).

Em relação à primeira abordagem, temos o trabalho original do panfleto[2] *Essay pour les coniques* (Ensaio para as cônicas) formulado por Blaise Pascal (1623-1662) no século XVII, contudo, em virtude da não familiarização com o idioma francês, utilizaremos como base uma

[1] Adotamos o termo Geometria de Projeções ao invés de Geometria Projetiva, pois, somente a partir dos trabalhos do matemático francês Jean Vitor Poncelet (1788-1867), mais especificamente, a partir da obra *Traité des propriétés projectives des figures* (Tratado das propriedades projetivas das figuras), publicado em 1822, que o ramo da Geometria Projetiva se consolidou como um campo da área das ciências matemáticas.

[2] Eves (2011) relata que Pascal elaborou aproximadamente 400 corolários, no entanto, "o manuscrito nunca foi publicado, e provavelmente sequer completado, mas em 1640 Pascal imprimiu um trabalho em uma página larga intitulado *Essay pour les Coniques*, que divulgava algumas de suas descobertas. Somente se sabe de duas cópias desse famoso folheto, uma entre os papéis de Leibniz em Hanover e a outra na Biblioteca Nacional de Paris. O segundo lema do panfleto envolve o teorema do hexagrama místico de Pascal (EVES, 2011, p.363-364)".

tradução em inglês por Field e Gray (1987) e uma versão traduzida em português por Cortese (2021) e Eves (2011) destacam que os trabalhos de Pascal foram essenciais para o desenvolvimento do ramo que futuramente iria se denominar Geometria Projetiva.

Quanto à segunda abordagem, iremos apresentar uma demonstração realizada, no século XIX, pelo matemático Arthur Cayley (1821-1895), no artigo *Demonstration of Pascal's Theorem* (Demonstração do Teorema de Pascal) publicado no ano de 1843, utilizando elementos da Geometria Analítica.

Motivado pelo desafio, por meio deste trabalho, será possível apresentarmos uma concepção matemática sob duas abordagens distintas, uma irá explorar o Teorema de Pascal dentro da Geometria de Projeções e a outra, irá explorar a demonstração do referido teorema dentro da Geometria Analítica, com isso, acreditamos que este trabalho pode contribuir com o entendimento e avanço de compreensão de desenvolvimento dos conceitos matemáticos na perspectiva da História da Matemática.

2. METODOLOGIA

A pesquisa é de caráter qualitativo, e conforme Godoy (1995, p.21), a pesquisa qualitativa ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes. Pois “descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente” (SOUZA, 2018, p.17).

Para obter os dados referentes à pesquisa, iremos recorrer ao processo de análise de documentos, pois como bem afirmam Lüdke e André (1986), “a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema”.

De acordo com Barros (2012) as fontes diretas são aquelas que não possuem intermediações nas informações, ou seja, são aquelas fontes que iremos estudar a partir da obra original. No decorrer do trabalho, iremos manter as notações matemáticas dos artigos originais como figuras, com isso, nossa intenção é mostrar o modo de representação e a escrita dos entes matemáticos daquele período. Neste trabalho utilizaremos duas fontes históricas, que consistem em fontes diretas: Cayley (1848)[3] e Pascal (1640)[4].

Além destes materiais citados, iremos nos apoiar em outros trabalhos que discorrem sobre a biografia de Pascal e Cayley e outros materiais que também abordam o Teorema de Pascal, tais como: Field e Gray (1987), Cortese (2021), Crilly (2006), e Godoy (2013). Estas fontes são denominadas como indiretas, dado que são aquelas que:

> o autor ou enunciador do texto chega ao seu objeto ou nos transmite alguma informação passando por um intermediário ou mais (...) em uma cadeia documental, testemunhal ou informativa, colocando-se, por exemplo, entre o historiador e um primeiro documento ou testemunho, anterior a todos” (BARROS, 2012, p.134).

Por meio destes documentos, “a análise documental inicia-se pela avaliação preliminar de cada documento, realizando o exame e a crítica do mesmo, (...). Após a análise de cada

---

[3] As publicações do matemático Arthur Cayley foram reunidas e organizadas em uma coleção de 13 volumes, intituladas *The collected mathematical papers of Arthur Cayley* que foram editadas por Andrew Russel Forsyth (1858-1942), sucessor de Cayley como Professor Sadleirian de Matemática Pura da Universidade de Cambridge e publicada no ano de 1889. O artigo *Demonstration of Pascal’s Theorem* encontra-se no volume 1 da coleção. Esclarecemos que iremos manter as páginas da publicação no *Cambridge Mathematical Journal*, 18-20, e a data original da publicação, 1843. Contudo, na coletânea, este artigo encontra-se nas páginas .43-45.

[4] Documento obtido no site da Biblioteca Nacional da França: https://gallica.bnf.fr/accueil/fr/content/accueil-fr?mode=desktop (Acesso em 12 de julho de 2023).

documento, segue-se a análise documental propriamente dita” (CECHINEL et al., 2016, p. 4), sendo assim, será possível realizar uma série de coletas de informações que serão fundamentais para cumprir os objetivos do trabalho.

3 BLAISE PASCAL E O SEU TEOREMA NA GEOMETRIA DE PROJEÇÕES

A Geometria de Projeções começou muito antes do próprio Pascal, ela surgiu na Itália no século XV, da necessidade dos artistas da época, em busca de maiores realismos em suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectiva. Porém, demorou cerca de dois séculos para que essas idéias pudessem ser formuladas matematicamente. Entretanto, em 1639, com o célebre trabalho sobre a teoria geométrica das cônicas, o *Broullion Projet*, que Girard Desargues (1591-1661) traz uma ideia do que seria a Geometria Projetiva. Contudo, talvez pela própria maneira como tinham sido escritos, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as ideias de Desargues não foram bem aceitos na época. Desta forma o termo Geometria Projetiva só foi introduzido devido aos trabalhos de Jean-Victor Poncelet (1788-1867) no século XIX, devido a este fato, trataremos nesta pesquisa somente como Geometria de Projeções.

Segundo Watermann e Franco (2008) a Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas. Ele ainda completa: "Enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos (propriedades visuais e táteis) a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos (propriedades visuais)". Ao exemplificarmos isso, utilizando-se da proposição de que na geometria euclidiana duas retas paralelas nunca se interceptam. Já na visão projetiva, se admite esta suposição. "Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam" (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p.2).

Com essa nova geometria ainda sendo idealizada, Pascal com seus 16 anos, publica seu primeiro *Essay pour les coniques*[5] (1640) e é uma continuação dos trabalhos feitos por Girard Desargues, no qual teve grande influência para desenvolver seus trabalhos. Neste artigo ele propõe que os pontos de interseção dos pares de lados de um hexágono inscritos em uma cônica, estão em uma linha reta, ou seja, são colineares.

3.1 BLAISE PASCAL

Pascal (Figura 2) foi um filósofo, físico, matemático e inventor. Nasceu em 19 de junho de 1623, na cidade de Clemont-Ferrand, na França. Filho do chefe fiscal e matemático Étienne

[5] Tradução: Ensaio para as Cônicas

Pascal (1588-1651), Etienne era segundo presidente do Tribunal de Aids de Clermont e de Antoinette Begon (1596-1626), junto a duas irmãs, Blaise se destacou desde cedo pela predisposição ao estudo de matemática, ciências naturais e pela formação escolástica[6] (ARCHAMBAULT, 1930, p.8). Segundo Eves (2011) algo que não é muito comentado sobre Pascal é que toda sua educação foi feita em casa e sob forte influência de seu pai, que a princípio não instruiu o jovem a adentrar na área da matemática, para encorajá-lo a desenvolver outros interesses, mas aos 12 anos o menino mostrou tal talento geométrico que a partir daí sua inclinação foi encorajado. Devido a sua saúde frágil, Blaise nunca frequentou a universidade e nem a faculdade.

Figura 2 – Blaise Pascal

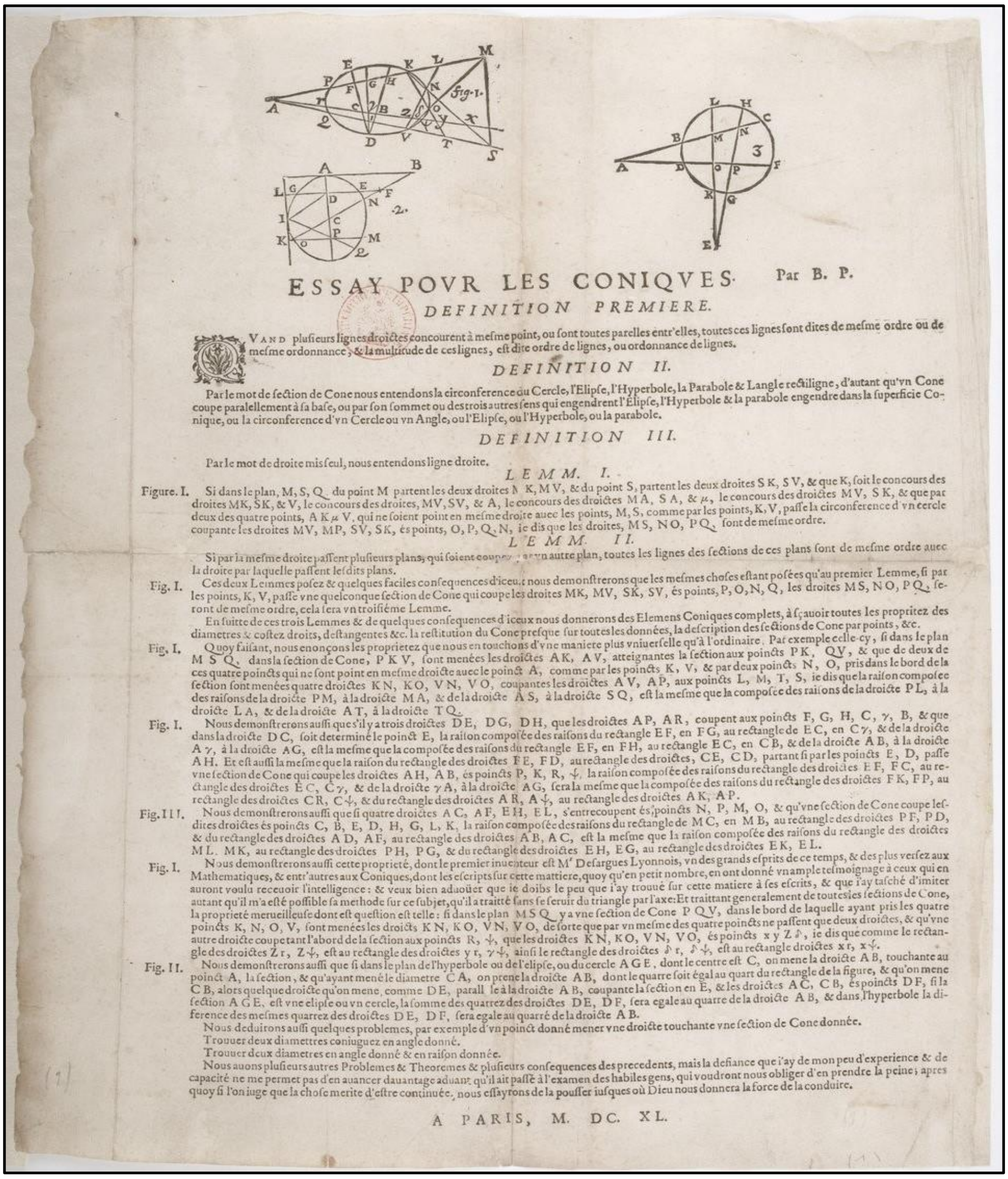
Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/biografia/blaise-pascal.htm> (Acessado em 24 de julho 2023)

Pascal, com seu pai, passou a frequentar as reuniões informais da Academia do padre Mersenne em Paris. Lá ele veio conhecer Girard Desargues, Gilles Personne de Roberval (1602-1675).

[6] “Termo que significa originariamente "doutrina da escola" e que designa os ensinamentos de filosofia e teologia ministrados nas escolas eclesiásticas e universidades na Europa durante o período medieval, sobretudo entre os sécs.IX e XVII. A escolástica caracteriza-se principalmente pela tentativa de conciliar os dogmas da fé cristã e as verdades reveladas nas Sagradas Escrituras com as doutrinas filosóficas clássicas, destacando-se o *platonismo e o aristotelismo*. (JAPIASSÚ e MARCONDES, 2001).

Dois anos depois, em 1640, o jovem Pascoal então com 16 anos publicou um Proposição de escrita pelo autor como *Mysterium Hexagrammicum*[7], que a partir daí foi denominado como Teorema de Pascal.

Figura 3 **-** Ensaio para as cônicas



ESSAY POVR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.

QVAND plusieurs lignes droictes concourent à mesme point, ou sont toutes parelles entr'elles, toutes ces lignes sont dites de mesme ordre ou de mesme ordonnance, & la multitude de ces lignes, est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Elipse, l'Hyperbole, la Parabole & Langle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupe paralellement à sa base, ou par son sommet ou des trois autres sens qui engendrent l'Elipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Elipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure. I. Si dans le plan, M, S, Q du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droictes MA, SA, & μ, le concours des droictes MV, SK, & que par deux des quatre points, A K μ V, qui ne soient point en mesme droite auec les points, M, S, comme par les points, K, V, passe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, és points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, sont de mesme ordre.

LEMM. II.

Si par la mesme droite passent plusieurs plans, qui soient coupez par vn autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de mesme ordre auec la droite par laquelle passent lesdits plans.

Fig. I. Ces deux Lemmes posez & quelques faciles consequences d'iceux nous demonstrerons que les mesmes choses estant posées qu'au premier Lemme, si par les points, K, V, passe vne quelconque section de Cone qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, és points, P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de mesme ordre, cela sera vn troisiéme Lemme.

En suitte de ces trois Lemmes & de quelques consequences d'iceux nous donnerons des Elemens Coniques complets, à sçauoir toutes les propritez des diametres & costez droits, des tangentes &c. la restitution du Cone presque sur toutes les données, la description des sections de Cone par points, &c.

Fig. I. Quoy faisant, nous enonçons les proprietez que nous en touchons d'vne maniere plus vniuerselle qu'à l'ordinaire. Par exemple celle-cy, si dans le plan M S Q, dans la section de Cone, P K V, sont menées les droictes AK, AV, atteignantes la section aux poincts PK, QV, & que de deux de ces quatre poincts qui ne sont point en mesme droicte auec le poinct A, comme par les poincts K, V, & par deux poincts N, O, pris dans le bord de la section sont menées quatre droictes KN, KO, VN, VO, coupantes les droictes AV, AP, aux poincts L, M, T, S, ie dis que la raison composée des raisons de la droicte PM, à la droicte MA, & de la droicte AS, à la droicte SQ, est la mesme que la composée des raisons de la droicte PL, à la droicte LA, & de la droicte AT, à la droicte TQ.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, γ, B, & que dans la droicte DC, soit determiné le poinct E, la raison composée des raisons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en Cγ, & de la droicte Aγ, à la droicte AG, est la mesme que la composée des raisons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et est aussi la mesme que la raison du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD, partant si par les poincts E, D, passe vne section de Cone qui coupe les droictes AH, AB, és poincts P, K, R, ⱴ, la raison composée des raisons du rectangle des droictes EF, FC, au rectangle des droictes EC, Cγ, & de la droicte γA, à la droicte AG, sera la mesme que la composée des raisons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, Cⱴ, & du rectangle des droictes AR, Aⱴ, au rectangle des droictes AK, AP.

Fig. III. Nous demonstrerons aussi que si quatre droictes AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent és poincts N, P, M, O, & qu'vne section de Cone coupe lesdites droictes és poincts C, B, E, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC, en MB, au rectangle des droictes PF, PD, & du rectangle des droictes AD, AF, au rectangle des droictes AB, AC, est la mesme que la raison composée des raisons du rectangle des droictes ML, MK, au rectangle des droictes PH, PG, & du rectangle des droictes EH, EG, au rectangle des droictes EK, EL.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi cette proprieté, dont le premier inuenteur est M^r Desargues Lyonnois, vn des grands esprits de ce temps, & des plus versez aux Mathematiques, & entr'autres aux Coniques, dont les escripts sur cette mattiere, quoy qu'en petit nombre, en ont donné vn ample tesmoignage à ceux qui en auront voulu receuoir l'intelligence: & veux bien adouöer que ie doibs le peu que i'ay trouué sur cette matiere à ses escrits, & que i'ay tasché d'imiter autant qu'il m'a esté possible sa methode sur ce subjet, qu'il a traitté sans se seruir du triangle par l'axe: Et traittant generalement de toutes les sections de Cone, la proprieté merueilleuse dont est question est telle: si dans le plan MSQ y a vne section de Cone PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre poincts K, N, O, V, sont menées les droicts KN, KO, VN, VO, de sorte que par vn mesme des quatre poincts ne passent que deux droictes, & qu'vne autre droicte coupe tant l'abord de la section aux poincts R, ⱴ, que les droictes KN, KO, VN, VO, és poincts x y Z ♪, ie dis que comme le rectangle des droictes Zr, Zⱴ, est au rectangle des droictes yr, γⱴ, ainsi le rectangle des droictes ♪r, ♪ⱴ, est au rectangle droictes xr, xⱴ.

Fig. II. Nous demonstrerons aussi que si dans le plan de l'hyperbole ou de l'elipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mene la droicte AB, touchante au poinct A, la section, & qu'ayant mené le diametre CA, on prene la droicte AB, dont le quarre soit égal au quart du rectangle de la figure, & qu'on mene CB, alors quelque droicte qu'on mene, comme DE, parallele à la droicte AB, coupante la section en E, & les droictes AC, CB, és poincts DF, si la section AGE, est vne elipse ou vn cercle, la somme des quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarre de la droicte AB, & dans l'hyperbole la diference des mesmes quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB.

Nous deduirons aussi quelques problemes, par exemple d'vn poinct donné mener vne droicte touchante vne section de Cone donnée.

Trouuer deux diamettres coniuguez en angle donné.

Trouuer deux diametres en angle donné & en raison donnée.

Nous auons plusieurs autres Problemes & Theoremes & plusieurs consequences des precedents, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience & de capacité ne me permet pas d'en auancer dauantage aduant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy si l'on iuge que la chose merite d'estre continuée, nous essayrons de la pousser iusques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

A PARIS, M. DC. XL.

Fonte: Pascal (1640, p.1)

Archambault (1930 p.10) destaca que o promissor e jovem Pascal, com seus 18 anos, com o intuito de ajudar seu pai, foi capaz de criar uma máquina aritmética, na qual dispensava

[7] Tradução: Hexagrama Místico.

seu operador de fazer deduções, contudo essas descobertas deram ao célebre matemático uma reputação de prodígio.

No ano de 1646, Etienne, sofre uma lesão ao cair no gelo e foi atendido por dois senhores, MM de la Bouteillerie et des Landes, por intermédio deles, Pascal passa a conhecer Agostinho de Jansenius e entre cartas e diálogos, impressiona Pascal, ele entende que o propósito da vida não é a ciência, mas a santidade (ARCHAMBAULT, 1930 p.10). Assim temos, o que Archambault denomina, a "primeira conversão de Pascal", em que ele leva os conhecimentos para seus familiares e os convertendo, primeiro sua irmã Jacqueline, encorajando-a a vida monástica, e com a ajuda dela conseguiu levar aos demais familiares.

Em uma visita a família Pascal, no mesmo ano, Pierre Petit, intendente de Portos e Fortificações, trás as descobertas feitas por Torricelli na Itália. Etienne Pascal e seu filho interessados no assunto passam a se aprofundar sobre o estudo do vácuo. Em 1647, Pascal publicou pelo menos uma breve exposição das *Nouvelles expériences touchant le vide*[8]. *(*ARCHAMBAULT,1930, p.11*)*.

Com o desenvolver destas novas descobertas, Pascal pode fazer experimentos sobre pressão atmosférica, o que permitiu que ele pudesse calculá-la. Além de definir o que é pressão atmosférica, também definiu o que era vácuo. Estes estudos foram de grande importância para área da mecânica dos fluidos, formulando o princípio de Pascal (teoria geral do equilíbrio dos fluidos).

Após a morte de seu pai em 1651, Pascal retorna ao seu trabalho científico e, mais precisamente, matemático. Ele publica ou compõe os tratados sobre o triângulo aritmético, ordens numéricas e soma das potências numéricas, que poderia ser dito conter os elementos de uma demonstração completa do binômio de Newton, e toda a substância diferencial e cálculo integral. Com Fermat ele cria o cálculo de probabilidades. *(*ARCHAMBAULT, 1930, p.14*)*.

Segundo Archambault (1930), no ano de 1655, Pascal com sua saúde debilitada, e incrédulo com o mundo, demonstrava insatisfações com a vida em cartas para sua irmã. No ano de 1656 foi o momento que segundo ele, Pascal passa por uma "provação divina", sua sobrinha sendo curada milagrosamente. Sendo assim, ele retorna para Port-Royal e se dedica aos seus estudos de teologia.

Pascal morreu em 19 de agosto de 1662. Primeiro por influência de seu pai e apaixonado por matemática e física, depois totalmente voltado para Deus, nunca se casou ou adquiriu

[8] Tradução: Novas Experiências do Vazio

posição, não deixando descendentes. A sua herança é intelectual e testemunha a sua influência nos três mundos que frequentou: o das mentes finas, o dos estudiosos e o de Port-Royal (ARCHAMBAULT, 1930).

3.2 COMPREENSÃO DO TEOREMA

O trabalho e a tradução feita por Cortese (2021) nos ajudou a compreender o Teorema de Pascal, em que iremos utilizar das três definições e o Lema 1 apresentado por Pascal (1640) para apresentarmos o teorema.

O resultado que iremos expor, decorre da utilização da Geometria Sintética[9], este método de geometria se apoia nos fundamentos sólidos, baseando sua ideologia em axiomas e postulados fundamentais, sem usufruir de coordenadas ou cálculos algébricos, se concentrando na essência das propriedades geométricas e suas interações, técnica da qual Pascal se apropria para descrever seu teorema, a partir do pensamento abstrato e da intuição geométrica.

A primeira definição permite que lidemos simultaneamente com retas concorrentes e retas paralelas, considerando sua "ordem" ou "ordenança":

> Quando várias linhas retas concorrem em um mesmo ponto, ou são todas paralelas entre elas, todas essas linhas são ditas de mesma ordem ou de mesma ordenança, e a multiplicidade dessas linhas é dita ordem de linhas, ou ordenança de linhas. (CORTESE 2021 p.219).

Entendemos que as retas concorrentes são duas ou mais retas que se encontram em um ponto comum. Por exemplo, se duas retas se cruzam em um mesmo ponto, elas são consideradas concorrentes. Por outro lado, retas paralelas são aquelas que nunca se encontram, independentemente de quão longas sejam. Elas são sempre equidistantes, mantendo a mesma distância uma da outra ao longo de toda a extensão. Isso significa que elas nunca se cruzam e não possuem pontos em comum.

Já ordem ou ordenança se refere à disposição ou sequência de elementos em um conjunto. Ela descreve a maneira pela qual os elementos estão organizados ou classificados em relação uns aos outros. Em resumo, a ordem ou ordenança na matemática se relaciona à

[9] Geometria Sintética, para Klein (1927), é aquela que dá tratamento aos objetos geométricos, sem utilização de coordenadas, como é feito no tratamento dado pela Geometria Analítica. Ao elaborar conjecturas e demonstrações de propriedades geométricas, sem o uso de fórmulas, utilizou-se o aspecto visual da Geometria Descritiva, com o uso dos instrumentos de desenho geométrico.

organização ou sequência dos elementos em um conjunto. A ordem ou ordenança das retas não afeta sua natureza de serem concorrentes ou paralelas.

Essa propriedade é determinada apenas pela relação entre as retas em si. Retas concorrentes podem ser encontradas em qualquer ordem ou disposição, desde que elas se cruzem em um ponto. Por outro lado, retas paralelas permanecerão paralelas independentemente da ordem em que são dispostas.

A segunda definição, chamada de "seção cônica", revela a visão unificada de Pascal:

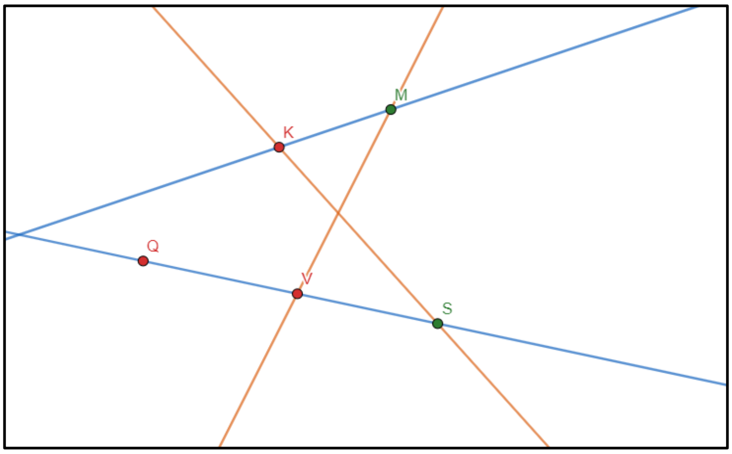
> Pelo termo de seção de cone, entendemos a circunferência do círculo, a elipse, a hipérbole, e parábola e o ângulo retilíneo, na medida em que um cone, cortado paralelamente à sua base, ou por seu vértice, ou em três outros sentidos que engendram a elipse, a hipérbole e a parábola, engendra na superfície cônica, ou a circunferência de um círculo, ou um ângulo, ou a elipse, ou a hipérbole, ou a parábola. (CORTESE 2021 p.219).

Nesta seção ele nos traz a generalização sobre as diferentes formas de seções cônicas, como círculo, elipse, hipérbole, parábola e ângulo retilíneo. Esta definição é importante, pois, no Teorema de Pascal veremos que o hexagrama está inscrito em uma cônica, no caso, uma circunferência.

A terceira definição traz clareza ao compilado relacionado às retas: “Pelo termo de reta, tomado isoladamente, entendemos linha reta”. (CORTESE 2021 p.219).

Portanto para retratar o que Pascal descreve, podemos compreender o Teorema usufruindo do primeiro lema, onde: “no plano MSQ, do ponto M partem as duas retas MK, MV, e do ponto S partem as duas retas SK, SV”. (CORTESE 2021, p 219).

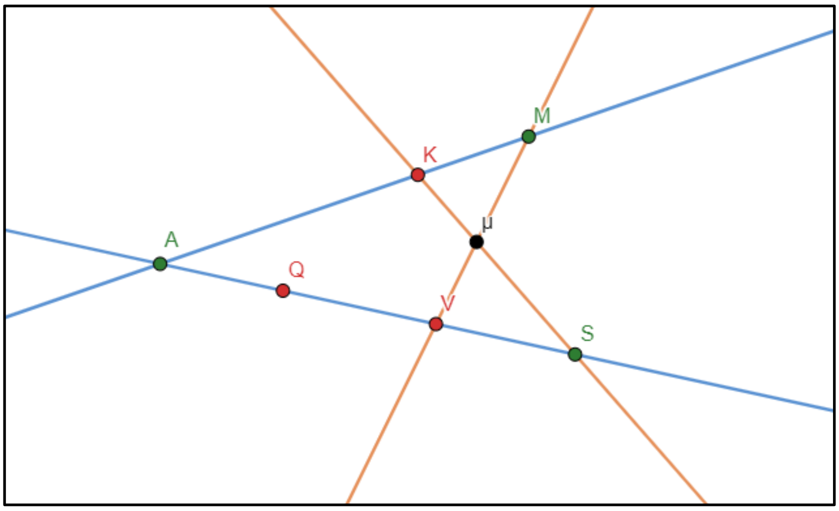
Figura 4 – Primeiro passo



Fonte: Dos autores (2023)

Sendo assim, aqui impusemos já a primeira definição feita por Pascal, tratando simultaneamente as retas, tendo várias linhas retas concorrentes em um mesmo ponto. E “V a concorrência das retas MV, SV, e A a concorrência das retas MK, SV, e µ a concorrência das retas MV, SK”. (CORTESE 2021, p 219).

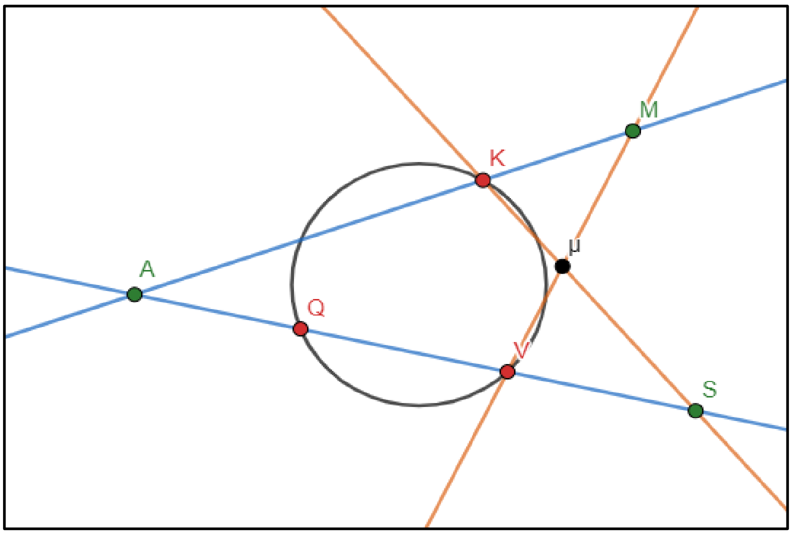
Figura 5 – Segundo passo



Fonte: Dos autores (2023)

“Que por dois dos quatro pontos A, K, µ, V, que não estejam em uma mesma reta com os pontos M, S, como pelos pontos K, V, passe a circunferência de um círculo, que corta as retas MV, MK, SV, SK”. (CORTESE 2021, p 219).

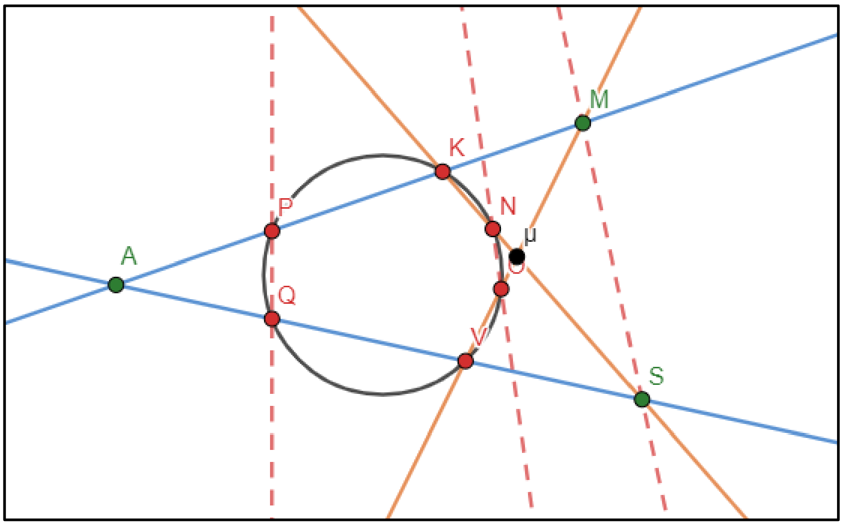
Figura 6– Terceiro Passo



Fonte: Dos autores (2023)

“Nos pontos O, P, Q, N; digo que as retas MS, NO, PQ, são de mesma ordem”. (CORTESE 2021, p 219) uma vez que são paralelas.

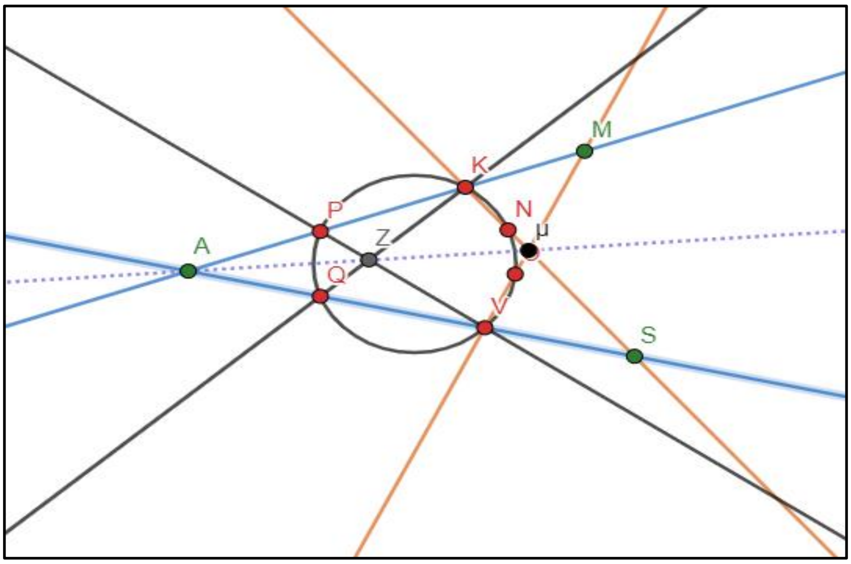
Figura 7 – Quarto passo



Fonte: Dos autores (2023)

Se incluirmos uma concorrência Z das retas VP, KQ, as concorrências A, Z μ, estarão em uma mesma linha reta, conforme a nossa terceira definição.

Figura 8 – Quinto passo



Fonte: Dos autores (2023)

Deste modo, notamos quais princípios Pascal adotou ao transcrever seu teorema, tendo uma perspectiva dele ter o desenvolvido no século XVII, usufruindo somente da geometria em cima de geometria. Portanto usamos uma demonstração sintética na geometria, que nada mais é que uma prova ou argumento que se baseia em construções geométricas simples, advindas da geometria Euclidiana, sem recorrer a coordenadas ou cálculos numéricos. Essa abordagem é considerada mais elegante e intuitiva, permitindo uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos. Uma demonstração sintética usa apenas linhas, pontos, círculos e relações geométricas para estabelecer a veracidade de uma proposição geométrica.

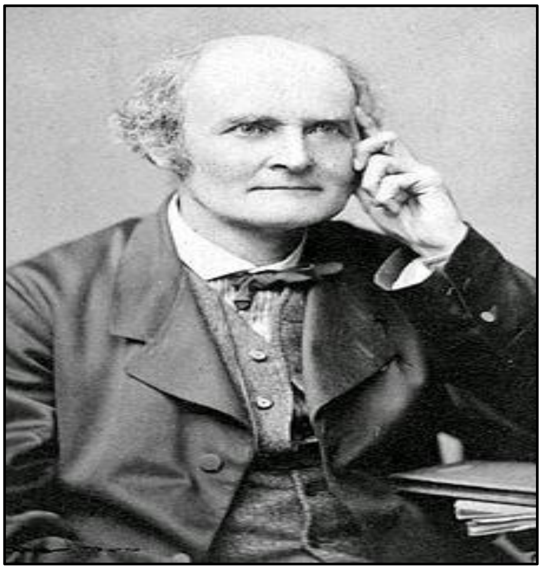
4 ARTHUR CAYLEY E UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PASCAL NA GEOMETRIA ANALÍTICA

Segundo Frensel e Delgado (2011, p.11), a Geometria Analítica[10] foi introduzida por Pierre de Fermat e René Descartes, por volta de 1636, foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática. A Geometria Analítica de Descartes apareceu novamente em 1637, no pequeno texto chamado Geometria, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método racionalista como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos. (RAMOS, 2013).

4.1 ARTHUR CAYLEY

Outro matemático que está diretamente relacionado a este trabalho é Arthur Cayley (1821-1895), que nasceu em 16 de agosto de 1821, Reino Unido. Ele foi o terceiro dos cinco filhos de Henry Cayley (1768-1850) e Maria Antonia Doughty (1794-1875).

Figura 9 – Arthur Cayley



Fonte: <https://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/arthur-cayley> (acesso em 03 de maio 2022)

---

[10] A geometria analítica é um campo da matemática em que é possível representar elementos geométricos, como pontos, retas, triângulos, quadriláteros e circunferências, utilizando expressões algébricas. As expressões algébricas são derivadas da ideia de união de pontos que seguem determinado padrão. Pontos esses que são dispostos em um sistema de coordenadas proposto por René Descartes.

Segundo Crilly (2006), Arthur foi um dos matemáticos mais prolíficos e importantes da era vitoriana. Sua influência ainda permeia a matemática moderna, na teoria dos grupos (teorema de Cayley), álgebra matricial (o teorema de Cayley-Hamilton) e teoria dos invariantes, onde ele fez suas contribuições mais significativas.

Segundo Godoy (2018, p 03), Arthur Cayley era um menino inglês de família de posses. Seu pai, Henry Cayley, era "*merchant*" (podemos entender como comerciante) e era casado com Maria Antonia. Além de Arthur, o casal teve outros 4 filhos: Sophia (1816-1889), William Henry (1818-1819), Charles Bagot (1823-1883) e Henrietta Caroline (1828-1886). A família de Cayley é de procedência russa e Crilly (2006) aponta que os antepassados de Cayley já possuíam posses e ocupavam posições de destaque na sociedade inglesa desde o século XI.

Nascido na Inglaterra, Cayley passou a infância em São Petersburgo, onde seu pai era agente comercial. Depois de retornar à Inglaterra em 1828, Cayley recebeu uma educação de primeira classe.

Crilly (2006) comenta que Henry Cayley (pai) teria conhecido o Reverendo George Brown Francis Potticary durante alguma situação cotidiana, e durante este encontro Potticary teria comentado com o pai de Arthur Cayley sobre um estabelecimento de ensino privado que ele administrava, dessa forma, em 1831, tanto Arthur que na época tinha 10 anos e seu irmão mais novo Charles Bagot Cayley, foram matriculados na *Potticary´s School*. A escola atendia alunos com idades de 8-15 anos e, tal como acontecia com outras escolas particulares na área, teve como objetivo proporcionar uma educação adequada para os jovens cavalheiros.

Segundo Crilly (2006), Arthur mostrou uma habilidade matemática desde cedo, entretanto, Crilly (2006) comenta que essa afirmação não pode ser concluída a partir do sucesso de provas concretas, pois não encontrou registros escolares suficientes desse período que confirmem este fato.

Em 1836, Cayley iniciou seus estudos no *King s College of London* e as autoridades do colégio reconheceram claramente o incomum desempenho escolar do garoto e, após comprovarem a sua proficiência, ele foi autorizado a entrar direto para a Seção Sênior. (GODOY; LEITE, 2017)

Desde 1831, quando o *King´s College* abriu ao público, sempre houve uma cadeira de Matemática. Cayley, assim, recebeu um curso abrangente, semelhante a um nível universitário. No primeiro ano de curso, Hall (Thomas Grainger Hall (1803-1881)) ensinou os livros de Euclides 1-4, 6, 11 (Linhas, Círculos, Áreas, Figuras Regulares Simples, e Sólidos Geométricos), Princípios de Álgebra, Trigonometria Plana, o uso de Tabelas Logarítmicas e

Geometria Descritiva. No segundo ano, acrescentou Seções Cônicas, a aplicação da álgebra à geometria, Trigonometria Esférica e, provavelmente, as três primeiras seções do Principia de Newton. O terceiro ano de curso foi reservado para tópicos como Equações Diferenciais e as partes analíticas de Hidrostática, Optica e Astronomia (CRILLY, 2006). Os temas que Hall ensinou no *King´s College* eram geralmente ensinados em Oxford e Cambridge

Em outubro de 1838, Arthur passou a residir no *Trinity College*, em Cambridge. Durante o primeiro ano na universidade, Cayley teve como tutor George Peacock (1791-1858). Em relação aos estudos matemáticos, Cayley iniciava um curso que duraria dez termos e culminaria em seis dias de exames no Senado. Claramente, um prazo mais longo que o curso normal de três anos para o grau ordinário. A peculiaridade da matemática no currículo em Cambridge, neste momento, e ao longo do século, era que ele não foi ensinado a fim de fornecer uma base para futuros estudos sobre o assunto. (CRILLY. 2006)

Em janeiro de 1842, Cayley despontou como o grande favorito do *Trinity College* para obter uma boa colocação da universidade no exame *Tripos* e obter o título de *Senior Wrangler*. Dentre trinta e oito que obtiveram a classe *Wrangler* (entretanto, na ordem de mérito, continha 114 alunos ao todo), Cayley obteve o primeiro lugar no exame Tripos. (GODOY, 2018).

Segundo Godoy em 1842, ele se tornou o primeiro estudante a receber uma medalha de honra em matemática, o que demonstrava seu talento e promissor futuro na área. Após completar seus estudos, Cayley foi chamado para a advocacia e se tornou um advogado qualificado. No entanto, sua verdadeira paixão era a matemática, e ele acabou abandonando a advocacia para se dedicar inteiramente a essa disciplina.

Em 1846, Cayley publicou um artigo que marcou o início de sua carreira matemática. Nesse trabalho, ele introduziu a teoria das matrizes, que viria a ter aplicações fundamentais em várias áreas da matemática e além dela. Suas contribuições para a álgebra linear e a teoria dos grupos foram revolucionárias, e ele é considerado um dos fundadores desses campos.

Ao longo de sua vida acadêmica, Cayley fez inúmeras descobertas importantes e publicou cerca de 300 trabalhos matemáticos. Ele trabalhou em diversas áreas, incluindo geometria algébrica, teoria dos números, teoria dos invariantes, geometria projetiva e muito mais.

Cayley foi membro da *Royal Society* e recebeu muitas honrarias e prêmios em reconhecimento às suas contribuições para a matemática. Ele também desempenhou um papel significativo na reforma do sistema de educação em matemática no Reino Unido.

A vida acadêmica de Arthur Cayley foi marcada por seu imenso talento, dedicação à matemática e contribuições inovadoras para a disciplina. Seu legado continua a influenciar a matemática moderna e seu trabalho é estudado e admirado até os dias de hoje.

4.2 A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PASCAL POR CAYLEY NA GEOMETRIA ANALITICA

O artigo *Demonstration of Pascal's Theorem* (Demonstração do Teorema de Pascal), foi publicado originalmente no *Cambridge Mathematical Journal* (Revista Matemática de Cambridge) no ano de 1843. Arthur Cayley realiza uma demonstração analítica do Teorema de Pascal fazendo uso de equações homogêneas[11] e descreve o espaço projetivo por meio de um sistema de coordenadas. Destacamos ainda o trabalho de Muir (1889), intitulado *Note on Cayley's Demonstration of Pascal's Theorem* (Nota sobre a demonstração de Cayley do Teorema de Pascal), pois, por meio deste artigo conseguimos compreender diversas passagens consideradas triviais para Cayley.

Advindo da resolução deste teorema, Cayley baseia seu trabalho na Geometria Algébrica, geometria em que se apoia no uso de coordenadas, na geometria analítica. A Geometria Algébrica permite trabalhar em espaços de dimensões superiores, onde a geometria sintética pode ser mais complexa e difícil de aplicar. Ela pode lidar com geometrias abstratas, como espaços projetivos e variedades algébricas, que têm aplicações importantes em diversas áreas, como física teórica, criptografia e teoria dos números.

Portanto, ela une conceitos e técnicas da álgebra e da geometria, permitindo traduzir problemas geométricos em termos algébricos e vice-versa. Isso facilita a resolução de problemas e a aplicação de métodos poderosos para analisar e entender estruturas geométricas. Assim, dando início a uma abordagem analítica, Cayley (1843) introduz:

"**LEMA 1**: Seja $U = Ax + By + Cz = 0$ a equação de um plano que passa por um determinado ponto tomado como origem, e considere os planos"[12] (p.18, tradução nossa):

$$U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0, U_4 = 0, U_5 = 0, U_6 = 0;$$

[11] Godoy e Mattos (2011) mostram que podemos entender estas equações homogêneas como sendo polinômios que sempre mantêm o mesmo valor na soma dos expoentes das variáveis de cada um de seus termos.
[12] No original: *Let* $U = Ax + By + Cz = 0$ *be the equation to a plane passing through a given point taken for the origin, and consider the planes*.

Deste modo, a Figura 10 expressa uma condição para que as intersecções entre os planos U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 estejam sob um mesmo plano, e pode ser descrita da seguinte maneira:

Figura 10 **-** Condição das intersecções de U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 em um mesmo plano

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4 & . & . \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 & . & . \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 & . & . \\ . & . & A_3, & A_4, & A_5, & A_6 \\ . & . & B_3, & B_4, & B_5, & B_6 \\ . & . & C_3, & C_4, & C_5, & C_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Fonte: Cayley (1843, p.18).

Por meio deste primeiro lema, podemos representar as equações que descrevem os seis planos:

$$\begin{aligned} U_1&: A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ U_2&: A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ U_3&: A_3x + B_3y + C_3z = 0 \\ U_4&: A_4x + B_4y + C_4z = 0 \\ U_5&: A_5x + B_5y + C_5z = 0 \\ U_6&: A_6x + B_6y + C_6z = 0 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o hexágono descrito no Teorema de Pascal, por meio desta abordagem na Geometria Analítica, está representado pelas coordenadas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_6, y_6, z_6$, cujos resultados das intersecções em um mesmo plano entre os planos representados por U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6, denotam um ponto do hexágono em uma cone de segunda ordem[13].

Em seguida, o matemático apresenta o segundo lema:

---

[13] Nos dias de hoje, um cone de segunda ordem é conhecido por Cone de Lorentz.

LEMA 2. Esta propriedade enuncia que os determinantes podem ser representados por meio de notações abreviadas:

Figura 11 – Determinante representando a notação abreviada $\overline{123}$

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} \text{ \&c.}$$

Fonte: Cayley (1843, p.18).

Deste modo, Cayley (1843) conclui o **LEMA 2.** afirmando a validade da equação:

$$\overline{345}\,.\,\overline{126} - \overline{346}\,.\,\overline{125} + \overline{356}\,.\,\overline{124} - \overline{456}.\,\overline{123} = 0$$

A Figura 11 mostra a notação abreviada $\overline{123}$. Logo, podemos denotar alguns exemplos:

$$\overline{345} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}$$

$$\overline{126} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}$$

Este resultado do Lema 2, é uma consequência direta da equação obtida pela resolução do determinante (Figura 12):

Figura 12 – Determinante das coordenadas $x_1, y_1, z_1, \dots, x_6, y_6, z_6$

$$\begin{vmatrix} . & . & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ . & . & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 \\ . & . & z_3, & z_4, & z_5, & z_6 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & z_5, & z_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ . & . & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 \\ . & . & z_3, & z_4, & z_5, & z_6 \\ x_1, & x_2, & . & . & . & . \\ y_1, & y_2, & . & . & . & . \\ z_1, & z_2, & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

Fonte: Cayley (1843, p.19)

A obtenção deste segundo lema, foi possível pelo fato de Cayley ter considerado os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 para representar, respectivamente, as coordenadas $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3\ y_3\ z_3), (x_4\ y_4\ z_4), (x_5\ y_5\ z_5), (x_6, y_6, z_6)$. Além disso, com o propósito de abreviar a equação do plano que passa pela origem, o matemático denota uma nova forma de simbolizar estas equações, tais como podemos exemplificar:

Considerando os pontos 1 e 2, e denominando 0 como a origem, podemos utilizar a notação $\overline{12}$ para representar a equação do plano 012 na forma:

$$x\overline{12}_x + y\overline{12}_y + z\overline{12}_z = 0$$

Estas notações da forma $\overline{12}_x$, $\overline{12}_y$ e $\overline{12}_z$ correspondem respectivamente a $y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1$. Podemos exemplificar com outros pontos, tais como, considerarmos os pontos 3 e 4, e destes pontos obter a equação do plano 034, assim, podemos simbolizar pela notação $\overline{34}$, que indica a equação $x\overline{34}_x + y\overline{34}_y + z\overline{34}_z = 0$, em que $\overline{34}_x$, $\overline{34}_y$ e $\overline{34}_z$ é forma abreviada, respectivamente, da expressão $y_3z_4 - y_3z_4, z_3x_4 - z_3x_4, x_3y_4 - x_3y_4$.

Deste modo, temos as equações dos planos 012, 023, 034, 045, 056 e 061 do seguinte modo:

$$x\overline{12}_x + y\overline{12}_y + z\overline{12}_z = 0$$
$$x\overline{23}_x + y\overline{23}_y + z\overline{23}_z = 0$$
$$x\overline{34}_x + y\overline{34}_y + z\overline{34}_z = 0$$

$$x45 + y\overline{45}_y + \ z\overline{45}_z = 0$$

$$x\overline{56}_x + y\overline{56}_y + \ z\overline{56}_z = 0$$

$$x\overline{61}_x + y\overline{61}_y + \ z\overline{61}_z = 0$$

Cayley comenta que se as intersecções dos pontos $\overline{12}$ e $\overline{45}$, $\overline{23}$ e $\overline{56}$, $\overline{34}$ e $\overline{61}$ estão no mesmo plano, por meio do Lema 1, temos então a equação (Figura 13):

Figura 13 – Determinante das coordenadas $x_1, y_1, z_1, \dots, x_6, y_6, z_6$

$$\begin{vmatrix} 12_x, & 45_x, & 23_x, & 56_x, & . & . \\ 12_y, & 45_y, & 23_y, & 56_y, & . & . \\ 12_z, & 45_z, & 23_z, & 56_z, & . & . \\ . & . & 23_x, & 56_x, & 34_x, & 61_x \\ . & . & 23_y, & 56_y, & 34_y, & 61_y \\ . & . & 23_z, & 56_z, & 34_z, & 61_z \end{vmatrix} = 0.$$

Fonte: Cayley (1843, p.19)

E ao multiplicarmos os dois lados da equação representada na Figura 13 pelos dois lados da equação (Figura 14):

Figura 14 – Operador a ser aplicado na equação representada na Figura 13

$$\begin{vmatrix} x_6, & x_1, & x_2, & . & . & . \\ y_6, & y_1, & y_2, & . & . & . \\ z_6, & z_1, & z_2, & . & . & . \\ . & . & . & x_3, & x_4, & x_5 \\ . & . & . & y_3, & y_4, & y_5 \\ . & . & . & z_3, & z_4, & z_5 \end{vmatrix} = \overline{612} \, . \, \overline{345}$$

Fonte: Cayley (1843, p.19)

Tornando-se (Figura 15):

Figura 15 – Resultado após aplicação do operador (Figura 14)

$$\begin{vmatrix} 612 & . & . & . & . & . \\ 645, & 145, & 245, & . & . & . \\ 623, & 123, & . & . & 423, & 523 \\ . & 156, & 256, & 356, & 456, & . \\ . & . & . & . & . & 534 \\ . & . & . & 361, & 461, & 561 \end{vmatrix} = 0$$

Fonte: Cayley (1843, p.20)

E este resultado, pode ser reduzido (Figura 16) ainda da seguinte forma:

Figura 16 – Redução da expressão dada na Figura 15

$$\overline{612}\ \overline{534}\ \begin{vmatrix} \overline{145}, & \overline{245}, & . & . \\ 123, & . & . & 423 \\ 156, & 256, & 356, & 456 \\ . & . & 361, & 461 \end{vmatrix} = 0$$

Fonte: Cayley (1843, p.20)

E omitindo o fator $\overline{612}\,\overline{534}$, Cayley (1848) expande o resultado do determinante expresso na Figura 16, obtendo:

$$\overline{145}.\overline{256}.\overline{423}.\overline{361} + \overline{245}.\overline{123}.\overline{456}.\overline{361} - \overline{245}.\overline{123}.\overline{356}.\overline{461} - \overline{245}.\overline{156}.\overline{423}.\overline{361} = 0$$

Cayley (1843) comenta que se considerarmos x_6, y_6, z_6 como variável, o ponto 6 encontra-se em um cone de segunda ordem tendo seu vértice como origem, de modo que podemos obter as equações $x_6, y_6, z_6 = x_1, y_1, z_1$ ou x_3, y_3, z_3 ou x_4, y_4, z_4 ou ainda, x_5, y_5, z_5, e assim, o cone passa pelos pontos 1, 3, 4 e 5. No entanto, para $x_6, y_6, z_6 = x_2, y_2, z_2$ ao utilizarmos o Lema 2 e dividirmos a equação por $\overline{245}.\overline{123}$, temos então:

$$\overline{452}.\overline{321} - \overline{352}.\overline{421} + \overline{152}.\overline{423} = 0$$

Tornando assim, a identidade $x_6, y_6, z_6 = x_2, y_2, z_2$ verdadeira. Assim, Cayley conclui que "o cone passa pelo ponto (2) e, portanto, os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6 estão no mesmo cone de segunda ordem, que é o Teorema de Pascal. Eu demonstrei isso no cone, por uma questão de simetria; (...)[14]" (CAYLEY, 1858, p.20, tradução nossa).

Com o propósito de generalizar o resultado acima obtido por Cayley, Muir (1889) comenta que podemos expressar o determinante (Figura 13) da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} |y_1 z_2| & |y_4 z_5| & |y_2 z_3| \\ |z_1 x_2| & |z_4 x_5| & |z_2 x_3| \\ |x_1 y_2| & |x_4 y_5| & |x_2 y_3| \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} |y_5 z_6| & |y_3 z_4| & |y_6 z_1| \\ |z_5 x_6| & |z_3 x_4| & |z_6 x_1| \\ |x_5 y_6| & |x_3 y_4| & |x_6 y_1| \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} |y_1 z_2| & |y_4 z_5| & |y_5 z_6| \\ |z_1 x_2| & |z_4 x_5| & |z_5 x_6| \\ |x_1 y_2| & |x_4 y_5| & |x_5 y_6| \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} |y_2 z_3| & |y_3 z_4| & |y_6 z_1| \\ |z_2 x_3| & |z_3 x_4| & |z_6 x_1| \\ |x_2 y_3| & |x_3 y_4| & |x_6 y_1| \end{vmatrix} = 0$$

Por meio da utilização de algumas propriedades dos determinantes, este resultado pode ser simplificado e generalizado (Figura 17) para um determinante do tipo:

[14] No original: *the cone passes through the point (2), and therefore the points 1, 2, 3, 4, 5, 6 lie in the same cone of the second order, which is Pascal's Theorem. I have demonstrated it in the cone, for the sake of symmetry*; (…).

Figura 17 – Generalização do determinante de coordenadas $\overline{12}$ e $\overline{45}$, $\overline{23}$ e $\overline{56}$, $\overline{34}$ e $\overline{61}$

$$\begin{vmatrix} |y_\alpha z_\beta| & |y_\beta z_\gamma| & |y_\delta z_\epsilon| \\ |z_\alpha x_\beta| & |z_\beta x_\gamma| & |z_\delta x_\epsilon| \\ |x_\alpha y_\beta| & |x_\beta y_\gamma| & |x_\delta y_\epsilon| \end{vmatrix}$$

Fonte: Muir (1889, p.20)

Que ao ser multiplicado por,

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma \end{vmatrix}$$

Resulta em (Figura 18):

Figura 18 – Resultado da Generalização multiplicada pelo operador de coordenadas α, β e γ:

$$\begin{vmatrix} \cdot & |x_\alpha y_\beta z_\gamma| & |x_\alpha y_\delta z_\epsilon| \\ \cdot & \cdot & |x_\beta y_\delta z_\epsilon| \\ |x_\alpha y_\beta z_\gamma| & \cdot & |x_\gamma y_\delta z_\epsilon| \end{vmatrix}$$

Fonte: Muir (1889, p.20)

Que resulta na identidade:

$$\left|x_\alpha y_\beta z_\gamma\right| . \left|x_\beta y_\delta z_\varepsilon\right|$$

E ao operar quatro vezes a identidade acima, resulta em:

$$|x_1 y_2 z_3| . |x_2 y_4 z_5| . |x_5 y_6 z_1| . |x_6 y_3 z_4| - |x_4 y_5 z_6||x_5 y_1 z_2||x_2 y_3 z_4||x_3 y_6 z_1| = 0$$

Este mesmo resultado, se pensarmos na notação utilizada por Cayley (1848), pode ser descrito na forma:

$$\overline{123}.\overline{245}.\overline{561}.\overline{634} - \overline{456}.\overline{512}.\overline{234}.\overline{361} = 0$$

A equação obtida acima "em comparação com a investigação de Cayley, será visto imediatamente (...) é muito mais simples do que a dele, (...)"[15] (Muir, 1889, p.21, tradução nossa).

[15] No original: *On comparison of this with Cayley's investigation, it will at once be seen (...) the resulting equation here much simpler than his, (...).*

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho consistiu em analisar o teorema de Pascal sob duas perspectivas diferentes, tendo como apoio o desenvolvimento de métodos sintéticos e algébricos para provar o mesmo ponto.

Do ponto de vista da história da matemática, Grattan-Guinness (1975) indica que essas reformulações representam uma importante fonte para realizar o exercício de investigação e verificação histórica do desenvolvimento de uma estrutura matemática, e nós vemos suas reformulações como oportunidades para a criação de outros conhecimentos matemáticos. Essas características com relação ao desenvolvimento da matemática representam transformações de suas próprias estruturas, as quais se modificam em fases, cada uma com seus próprios problemas e técnicas que se tornaram importantes por um tempo antes de se reduzir a detalhes insignificantes ou abrir caminhos para novas abordagens (GRATTAN-GUINNESS, 1975).

Blaise Pascal, um matemático francês do século XVII, desenvolveu o Teorema de Pascal como parte de sua investigação na Geometria de Projeções em 1640. Ele observou as propriedades de um hexagrama inscrito em uma cônica e demonstrou que os pontos de interseção opostos nas linhas que ligam os vértices do hexagrama são colineares. A prova de Pascal concentrou-se nas relações de projeção entre pontos, linhas e cônicas, usando técnicas da Geometria Sintética como uma ferramenta poderosa para o estudo das figuras geométricas.

Arthur Cayley, um matemático britânico do século XIX, abordou o mesmo Teorema de Pascal de uma perspectiva diferente, aplicando a Geometria Analítica em 1843. Ele seguiu em um sistema de coordenadas para descrever um cone de segunda ordem e usou a Geometria Algébrica para expressar o caminho das linhas que passam pelos vértices do hexagrama. Cayley também comprovou que os pontos de interseção opostos nessas linhas são colineares. Sua abordagem analítica trouxe uma nova perspectiva para o teorema de Pascal, mostrando como conceitos algébricos podem ser aplicados à geometria.

Por meio deste trabalho, ao realizarmos uma breve comparação entre as duas demonstrações, de modo a frisar o movimento histórico matemático, vemos que Pascal (1640) utiliza das técnicas da Geometria Sintética e Cayley (1843) faz uso da Geometria Algébrica.

Apresentamos em um primeiro momento a demonstração e o Teorema de Pascal formulada por Blaise Pascal em 1640. A demonstração realizada por Pascal está embasada na Geometria Sintética, ou método sintético, que consiste na aplicação de postulados, proposições e definições da Geometria Euclidiana com o intuito de proporcionar construções de proposições geométricas de figuras estudadas por si mesmas, sem intervenção alguma de fórmulas (KLEIN, 1927). Por exemplo, quando Pascal traça e prolonga as linhas retas, ele considerou, respectivamente, os seguintes axiomas da Geometria Euclidiana para a construção de tais entes geométricos: “1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (EUCLIDES, 2009, p.98).

Quanto a demonstração de Cayley, vimos que ele se baseia na Geometria Algébrica, ou método analítico, que consiste em demonstrar os teoremas da Geometria, utilizando a análise ou a álgebra como ferramentas matemáticas, descrevendo o espaço projetivo por meio de um sistema de coordenadas e demonstrando o Teorema de Pascal por meio de equações e propriedades do plano no campo da Geometria Analítica.

Estas duas abordagens matemáticas que apresentamos, pretendemos explorar em trabalhos futuros no sentido de que denotam uma determinada tendência de utilizar os recursos matemáticos do período em que foram formuladas. Outro aspecto que este trabalho pode contribuir, contudo não tivemos a pretensão de aprofundar, se dá na exploração da utilização de softwares para as construções e demonstrações geométricas no campo das Geometrias Sintéticas.

REFERÊNCIAS

ARCHAMBAULT, P. **Pascal:** escolha de textos e introdução / por Paul Archambault. Louis-Michaud (Paris). 1930.

AUFFINGER, A C. T. C. VALENTIM, F. J. S. **Introdução à Geometria Projetiva**. Universidade Federal do Espírito Santo. 2003. 63f. Notas de aula.

BACHELARD, Gaston. **O novo espírito científico**. Lisboa: Edições 70, 1996.

BARROS, J. D.A. Fontes Históricas: revisitando alguns aspetos primordiais para a Pesquisa Histórica. **Mouseion**, n.12, mai-ago, p.129-159, 2012.

CAYLEY, A. **Demonstration of Pascal's Theorem. Cambridge Mathematical Journal**, vol. Iv, p.18-20, 1843.

CECHINEL, Andre; FONTANA Silvia Aparecida Pereira; GIUSTINA Kelli Pazeto Della; PEREIRA, Antonio Serafim; PRADO Silvia Salvador do. Estudo/Análise Documental: uma revisão teórica e metodológica. **Criar Educação**, Criciúma, v. 5, n.1, p.1-7, 2016. Disponível em: https://periodicos.unesc.net/ojs/index.php/criaredu/article/view/2446/2324. Acesso em: 13 junho de 2023.

CORTESE, J. F. N. B. O "Ensaio Para As Cônicas" de Blaise Pascal. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 21, n. 42, p. 180–205, 2021.

CRILLY, Tony. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2006.

Euclides. **Os Elementos**. Tradução e introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**.Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed – Campinas, Editora da Unicamp, 2011.

FIELD, J. V. GRAY, J. J. **The Geometrical Work of Girard Desargues**. Springer-Verlag New York Inc, 1987.

FRENSEL, K. DELGADO, J. **Geometria Analítica**. Universidade Federal do Maranhão. 2011. 269f. Notas de aula.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa** e suas possibilidades. Revista de Administração de Empresas, v. 35, n. 2, p. 57-63, São Paulo, **1995.**

GODOY, K. V. **Um estudo do processo de reconhecimento histórico:** o caso de Arthur Cayley. 2013. 252f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

GODOY, K. V. O TRIPOS DE MATEMÁTICA DE 1842: o percurso da preparação de A. Cayley para a realização desse exame. **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 2, 2018.

GODOY, K.V. LEITE, D. G. **Boole, Cayley c Sylvester:** o uso de seus métodos para o cálculo de invariantes de polinômios homogêneos. São Paulo: Livaria da Física, 2017.

GODOY, K.V. MATTOS, A. C. Um breve estudo sobre invariantes de formas quadráticas binárias. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais** [...]. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1345/768. Acesso em 10 jun. 2023.

GRATTAN-GUINNESS, I. Preliminary notes on the historical significance of quantification and of the axioms of choice in the development of mathematical analysis. **Historia da Matemática** 2, p.475- 488, 1975.

HEFEZ, A. **Introdução a história da geometria projetiva**. SBM, 1985. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n03_Artigo03.pdf. Acesso em 08 jul. 2023.

JAPIASSÚ, Hilton. MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. Editora: Zahar, Rio de Janeiro, 2001.

KLEIN, F. **Matemática Elemental desde un punto de vista superior**. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática, 1927.

LEITE, D.G. GODOY, K.V. Elementos de uma matemática em transformação. *In*: PINHEIRO, José Milton Lopes; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos (org.). **A matemática e seu ensino:** olhares em educação matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2018, p.23-42.

LUDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. EPU, São Paulo, 1986.

MAGOSSI, José Carlos; POLETTI, Elaine Cristina Catapani. O movimento das estruturas matemáticas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 12, p. 01-13, 2013.

MUIR, Thomas. Note on Cayley's Demonstration of Pascal's Theorem. **Proceedings of Royal Society of Edinburgh**, LLD, 1889.

RAMOS, J. P. S. **Método e Ciências em Descartes**. 2013. 232f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de janeiro: Jorge Zahar; 2012.

SOUZA, T. S. EDITORIAL - "Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente" (Roger Von Oech). **Observatorium: Revista Eletrônica de Geografia**, *[S. l.]*, v. 6, n. 17, 2018. Disponível em:<https://seer.ufu.br/index.php/Observatorium/article/view/45810>. Acesso em: 4 maio. 2022.

WATERMANN, I. FRANCO, V. S. **Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática**. 2008/09. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf? Acesso em 04 de junho de 2023.

ANEXOS

ANEXO 1 - TRADUÇÃO DA OBRA DE PASCAL (1640) POR CORTESE (2021)

ENSAIO PARA AS CÔNICAS

Por B. P.

DEFINIÇÃO PRIMEIRA

Quando várias linhas retas concorrem em um mesmo ponto, ou são todas paralelas entre elas, todas essas linhas são ditas de mesma ordem ou de mesma ordenança, e a multiplicidade dessas linhas é dita ordem de linhas, ou ordenança de linhas.

DEFINIÇÃO II

Pelo termo de seção de cone, entendemos a circunferência do círculo, a elipse, a hipérbole, e parábola e o ângulo retilíneo, na medida em que um cone, cortado paralelamente à sua base, ou por seu vértice, ou em três outros sentidos que engendram a elipse, a hipérbole e a parábola, engendra na superfície cônica, ou a circunferência de um círculo, ou um ângulo, ou a elipse, ou a hipérbole, ou a parábola.

DEFINIÇÃO III

Pelo termo de reta, tomado isoladamente, entendemos linha reta.

LEMA I

Se, no plano MSQ, do ponto M partem as duas retas MK, MV, e do ponto S partem as duas retas SK, SV, e sendo K a concorrência das retas MK, SK, e V a concorrência das retas MV, SV, e A a concorrência das retas MK, SV, e μ a concorrência das retas MV, SK, e que por dois dos quatro pontos A, K, μ, V, que não estejam em uma mesma reta com os pontos M, S, como pelos pontos K, V, passe a circunferência de um círculo, que corta as retas MV, MK, SV, SK, nos pontos O, P, Q, N; digo que as retas MS, NO, PQ, são de mesma ordem.

LEMA II

Se pela mesma reta passam vários planos, sendo cortados por um outro plano, todas as linhas das seções desses planos são da mesma ordem com a reta pela qual passam os planos referidos. Esses dois lemas sendo postos, e algumas consequências fáceis deles, demonstraremos que, as mesmas coisas do primeiro lema sendo postas, se pelos pontos K, V, passa uma seção de cone qualquer que corta as retas MK, MV, SK, SV, nos pontos P, O, N, Q27, as retas MS, NO, PQ, serão de mesma ordem. Isso será um terceiro lema.

Em seguida a esses três lemas, e a algumas consequências deles, apresentaremos Elementos cônicos completos, a saber, todas as propriedades dos diâmetros e lados retos, das tangentes, etc., a restituição de quase todos os dados do cone, a descrição das seções de cone por pontos, etc. Tendo feito isso, enunciamos as propriedades que tratamos aí de maneira mais universal do que é ordinário. Por exemplo, está: se no plano MSQ, na seção de cone PKV, são traçadas as retas AK, AV, que atingem a seção nos pontos PK, QV; e que de dois desses quatro pontos que não estão em mesma reta com o ponto A, como pelos pontos K, V, e por dois pontos N, O, tomados no contorno da seção, sejam traçadas quatro retas KN, KO, VN, VO, cortando as retas AV, AP, nos pontos L, M, T, S: digo que a razão composta das razões da reta PM à reta MA, e da reta AS à reta SQ, é a mesma que a composta das razões da reta PL à reta LA, e da reta AT à reta TQ.

Demonstraremos também que, se há três retas DE, DG, DH, que as retas AP, Ar 36 , cortam nos pontos F, G, H, C, γ, B, e que na reta DC seja determinado o ponto E; a razão composta das razões do retângulo EF em FG ao retângulo de EC em Cγ, e da reta Aγ à reta AG, é a mesma que a composta das razões do retângulo EF em FH ao retângulo EC em CB, e da reta AB à reta AH. E é também a mesma que a razão do retângulo das retas FE, FD, ao retângulo das retas CE, CD. Portanto, se pelos pontos E, D, passa uma seção de cone que corta as retas AH, AB, pelos pontos P, K, r, ψ, a razão composta das razões do retângulo das retas EF, FG, ao retângulo das retas EC, Cγ, e da reta γA à reta AG, será a mesma que a composta das razões do retângulo das retas FK, FP ao retângulo das retas Cr, Cψ, e do retângulo das retas Ar, Aψ, ao retângulo das retas AK, AP.

Demonstraremos também que se quatro retas AC, AF, EH, EL, se entrecortam nos pontos N, P, M, O, e que uma seção de cone corta as referidas retas nos pontos C, B, F, D, H, G, L, K, a razão composta das razões do retângulo de MC em MB, ao retângulo das retas PF, PD, e do retângulo das retas AD, AF, ao retângulo das retas AB, AC, é a mesma que a razão composta das razões do retângulo das retas ML, MK, ao retângulo das retas PH, PG, e do retângulo das retas EH, EG, ao retângulo das retas EK, EL.

Demonstraremos também esta propriedade, cujo primeiro inventor é o Sr. Desargues, de Lyon, um dos grandes espíritos deste tempo, e dos mais versados em matemáticas, e entre outras nas cônicas, cujos escritos sobre essa matéria, embora em pequeno número, deram um amplo testemunho àqueles que quiseram dela receber a compreensão; e quero de fato admitir que devo o pouco que encontrei sobre essa matéria a seus escritos, e que tentei imitar, tanto quanto me foi possível, seu método sobre esse tema, que ele tratou sem se servir do triângulo pelo eixo. E, tratando em sua generalidade todas as seções de cone, a propriedade maravilhosa da qual é questão, é esta. Se no plano MSQ há uma seção de cone PQV, no contorno da qual, tendo tomado os quatro pontos K, N, O, V, são traçadas as retas KN, KO, VN, VO, de modo que por um mesmo dos quatro pontos passem apenas duas retas, e que uma outra reta corte tanto no contorno da seção, nos pontos r, ψ, quanto as retas KN, KO, VN, VO, nos pontos x, y, z, δ: digo que, como o retângulo das retas zr, zψ, está para o retângulo das retas yr, yψ, assim o retângulo das retas δr, δψ, está para o retângulo das retas xr, xψ.

Demonstraremos também que, se no plano da hipérbole, ou da elipse, ou do círculo, AGE, cujo centro é C, traça-se a reta AB, tangente à seção no ponto A, e, tendo traçado o diâmetro CA, toma-se a reta AB, cujo quadrado é igual ao quarto do retângulo da figura, e que se trace CB, então, para qualquer reta que se trace, como DE, paralela à reta AB, cortando a seção em E, e as retas AC, CB, nos pontos D, F, se a seção AGE for uma elipse ou um círculo, a soma dos quadrados das retas DE, DF, será igual ao quadrado da reta AB; e na hipérbole, a diferença dos mesmos quadrados das retas DE, DF, será igual ao quadrado da reta AB.

Deduzimos assim alguns problemas, por exemplo: De um ponto dado, traçar uma reta tangente a uma seção de cone dada. Encontrar dois diâmetros conjugados em ângulo dado. Encontrar dois diâmetros em ângulo dado e em razão dada. Temos vários outros problemas e teoremas, e várias consequências dos precedentes; mas a desconfiança que tenho de minha pouca experiência e capacidade não me permite apresentar mais deles antes de ter passado pelo exame das hábeis pessoas que poderão nos tornar agradecidos a tomar a pena; após o que, se se julgar que a coisa merece ser continuada, tentaremos levá-la até onde Deus nos dará a força de conduzi-la.

PARIS, M. DC. XL.

ANEXO 2 - ESSAY POUR LES CONIQUES, PASCAL (1640)

ESSAY POUR LES CONIQUES

Par B. P.

DÉFINITION PREMIÈRE

Quand plusieurs lignes droites concourent à même point, ou sont toutes parallèles entre elles, toutes ces lignes sont dites de même ordre ou de même ordonnance, et la multitude de ces lignes est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DÉFINITION II

Par le mot de section de cône, nous entendons la circonférence du cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'angle rectiligne, d'autant qu'un cône coupé parallèlement à sa base, ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, engendre dans la superficie conique, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipse, ou l'hyperbole, ou la parabole.

DÉFINITION III

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMME I

Si dans le plan MSQ du point M partent les deux droites MK, MV, et du point S partent les deux droites SK, SV, et que K soit le concours des droites MK, SK, et V le concours des droites MV, SV, et A le concours des droites MK, SV, et μ le concours des droites MV, SK, et que par deux des quatre points A, K, μ, V, qui ne soient point en même droite avec les points M, S, comme par les points K, V, passe la circonférence d'un cercle, coupante les droites MV, MK, SV, SK, ès points O, P, Q, N, je dis que les droites MS, NO, PQ, sont de même ordre.

LEMME II

Si par la même droite passent plusieurs plans, qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans. Ces deux lemmes posés, et quelques faciles conséquences d'iceux, nous démontrerons que, les mêmes choses étant posées qu'au premier lemme, si par les points K, V, passe une quelconque section de cône qui coupe les droites MK, MV, SK, SV ès points O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de même ordre. Cela sera un troisième lemme. En suite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des Éléments coniques complets, à savoir toutes les propriétés des diamètres et côtés droits, des tangentes, etc., la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections de cône par points, etc. Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire. Par exemple, celle-ci: si dans le plan MSQ, dans la section de cône PKV, sont menées les droites AK, AV, atteignantes la section aux points PK, QV ; et que de deux de ces quatre points qui ne sont point en même droite avec le point A, comme par les points K, V, et par deux points N, O, pris dans le bord de la section, soient menées quatre droites KN, KO, VN, VO, coupantes les droites AV, AP aux points L, M, T, S : je dis que la raison composée des raisons de la droite PM à la droite MA, et de la droite AS à la droite SQ, est la même que la composée des raisons de la droite PL à la droite LA, et de la droite AT à la droite TQ.
Nous démontrerons aussi que s'il y a trois droites DE, DG, DH, que les droites AP, Ar, coupent aux points F, G, H, C, γ, B, et que dans la droite DC soit déterminé le point E, la raison composée des raisons du rectangle EF en FG au rectangle de EC en Cγ, et de la droite Aγ à la droite AG, est la même que la composée des raisons du rectangle EF en FH au rectangle EC en CB, et de la droite AB à la droite AH. Et est aussi la même que la raison du rectangle des droites FE, FD, au rectangle des droites CE, CD. Partant, si par les points E, D, passe une section de cône qui coupe les droites AH, AB, ès points P, K, r, ψ, la raison composée des raisons du rectangle des droites EF, FG, au rectangle des droites EC, Cγ, et de la droite γA à la droite AG, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites FK, FP, au rectangle des droites Cr, Cψ, et du rectangle des droites Ar, Aψ, au rectangle des droites AK, AP.

Nous démontrerons aussi que si quatre droites AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent ès points N, P, M, O, et qu'une section de cône coupe lesdites droites ès points C, B, F52, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC en MB, au rectangle des droites

PF, PD, et du rectangle des droites AD, AF, au rectangle des droites AB, AC, est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites ML, MK, au rectangle des droites PH, PG, et du rectangle des droites EH, EG, au rectangle des droites EK, EL.

Nous démontrerons aussi cette propriété, dont le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux mathématiques, et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoique en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui en auront voulu recevoir l'intelligence ; et veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter, autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet, qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe. Et, traitant généralement de toutes les sections de cône, la propriété merveilleuse dont est question est telle. Si dans le plan MSQ y a une section de cône PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre points K, N, O, V, sont menées les droites KN, KO, VN, VO, de sorte que par un même des quatre points ne passent que deux droites, et qu'une autre droite coupe tant le bord de la section aux points r, ψ, que les droites KN, KO, VN, VO, ès points x, y, z54, δ : je dis que, comme le rectangle des droites zr, zψ est au rectangle des droites yr, γψ, ainsi le rectangle des droites δr, δψ est au rectangle des droites xr, xψ.

Nous démontrerons aussi que, si dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mène la droite AB, touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre CA, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au quart du rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors, quelque droite qu'on mène, comme DE, parallèle à la droite AB, coupante la section en E, et les droites AC, CB, ès points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB ; et dans l'hyperbole, la différence des mêmes carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB.

Nous déduirons aussi quelques problèmes, par exemple : D'un point donné mener une droite touchante une section de cône donnée. Trouver deux diamètres conjugués en angle donné. Trouver deux diamètres en angle donné et en raison donnée.

Nous avons plusieurs autres problèmes et théorèmes, et plusieurs conséquences des précédents ; mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience et de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens qui voudront nous obliger d'en prendre la peine : après quoi, si l'on juge que la chose mérite d'être continuée, nous essaierons de la pousser jusques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

À PARIS, M. DC. XL.