



ROBSON GUILHERME TEIXEIRA

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O MÉTODO DE BARES E
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA
DETERMINAÇÃO DE ESFORÇOS EM TABULEIROS DE
CONCRETO ARMADO.**

**LAVRAS - MG
2023**

ROBSON GUILHERME TEIXEIRA

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O MÉTODODE BARES E O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS NA DETERMINAÇÃO DE ESFORÇOS EM TABULEIROS
DE CONCRETO ARMADO.**

Concepção básica apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Fábio Lúcio Santos
Orientador

**LAVRAS – MG
2023**

ROBSON GUILHERME TEIXEIRA

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O MÉTODO DE BARES E O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS NA DETERMINAÇÃO DE ESFORÇOS EM TABULEIROS
DE CONCRETO ARMADO**

**COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN THE BARES METHOD AND THE FINITE
ELEMENT MEETHOD IN DETERMINING EFFORTS IN REINFORCED
CONCRETE DECKS**

Concepção básica apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

APROVADO em 25 de Julho de 2023.
Prof. Dr. Fábio Lúcio Santos – UFLA
Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Góis Freire – UFLA
Prof. Dr. Igor José Mendes Lemes – UFLA



Prof. Dr. Fábio Lúcio Santos

Orientador

**LAVRAS - MG
2023**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais, Carmen Zilda Agnelli e Aparecido Donizete Teixeira (in memoriam) pelo apoio e dedicação integral em minha formação pessoal e profissional.

A minha noiva, Alice de Andrade Moreira pela parceria e acolhimento durante toda trajetória acadêmica.

Agradeço ao professor Fábio Lúcio Santos pela disposição e comprometimento em minha orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a toda comunidade acadêmica da Universidade Federal de Lavras e em especial aos professores Evelise Roman Corbalan Góis Freire e Igor José Mendes Lemes pelas contribuições realizadas.

Agradeço também aos meus colegas de trabalho da Pöyry Tecnologia LTDA, em especial aos meus supervisores Diogo Nicolau Menin, Felipe Vieira Moroz e Ronie Linhares Damasceno pela convivência diária e aprendizado nas áreas de estruturas industriais de concreto armado e gestão de projetos.

RESUMO

Os desafios que um engenheiro enfrenta no seu dia-a-dia são diversos, sendo necessário um determinado tempo de trabalho para que o mesmo adquira confiança e adequado nível de maturidade em seus processos de cálculo. Nesse sentido, as recomendações normativas são de grande auxílio para que profissionais recém chegados ao mercado deem seus primeiros passos na área de estruturas. Esse é um processo natural em que a grande parte dos profissionais enfrenta durante sua jornada profissional, porém, a medida em que se adquire experiência prática em processos de dimensionamento, o indivíduo é capaz de realizar seus próprios questionamentos e começa a validar alguns conceitos teóricos aplicados a projetos reais. Os aspectos normativos para o dimensionamento estruturas de concreto armado são amplamente difundidos no meio acadêmico e profissional, porém, no caso de estruturas industriais, cuja o ambiente, geometria e distribuição de cargas tendem a ser mais complexas, surge a necessidade de se utilizar de ferramentas complementares, mais potentes e assertivas no cotidiano de seu dimensionamento. Devido a tal grau de complexidade, o presente trabalho trouxe um estudo comparativo entre o método de Bares (1970) (por meio de tabelas) e o método dos elementos finitos (MEF) no dimensionamento dos esforços atuantes em tabuleiros de concreto armado constituídos por vigas e lajes. Este estudo estático-linear pretende demonstrar o comportamento dos elementos onde será considerada a flexibilidade dos elementos de apoio, uma vez que, no método por meio de tabelas, as vigas de bordo são consideradas integralmente rígidas. Para a consideração de flexibilidade, serão atribuídos diferentes valores de seção transversal aos elementos do tabuleiro. A análise e apresentação dos resultados possibilitou compreender o comportamento dos elementos constituintes do tabuleiro, não sendo indicada a utilização do método de Bares (1970) para o dimensionamento de lajes sob apoios flexíveis, podendo ser empregado apenas quando for possível realizar tal simplificação (apoios indeformáveis). Em relação ao comportamento dos elementos devido à alteração de sua rigidez, foi possível determinar as relações de causa e efeito para que se tome os devidos cuidados no processo de modelagem e interpretação dos resultados apresentados pelo software.

Palavras-chave: Análise Comparativa. Modelagem Numérica. Cálculo Estrutural. Concreto Armado.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Formas variadas dos elementos geométricos.....	2
Figura 2 – Fluxograma do processo de discretização	4
Figura 3 – Geometria discretizada em nós e malha.....	5
Figura 4 – Mola sujeita à uma força externa.....	6
Figura 5 – Comportamento de um elemento de barra.....	8
Figura 6 – Momento fletor e seu efeito em uma viga.....	8
Figura 7 – Seção transversal submetida à esforços.....	9
Figura 8 – Elemento discretizados em malhas.....	11
Figura 9 – Esquema de deformações em uma placa.....	12
Figura 10 – Deformação ocasionada pelo carregamento da laje.....	12
Figura 11 – Seção de um tabuleiro.....	15
Figura 12 – Cobrimento das armaduras das lajes.....	16
Figura 13 – Altura útil da laje para armadura positiva.....	18
Figura 14 – Esquema de uma viga com três apoios.....	18
Figura 15 – Momentos fletores em laje armada em uma direção.....	19
Figura 16 – Laje sob apoios simples e carregamento uniforme.....	19
Figura 17 – Laje com apoio simples e engastado com carga uniforme.....	20
Figura 18 – Laje com apoios perfeitamente engastados e carga uniforme.....	20
Figura 19 – Linhas de ruptura das lajes maciças.....	21
Figura 20 – Tipologia das vinculações de lajes em vigas de apoio.....	22
Figura 21 – Tabuleiro a ser estudado.....	29
Figura 22 – Software numérico STRAP.....	30
Figura 23 – Validação do modelo através da convergência de malhas.....	31
Figura 24 – Elementos estruturais do tabuleiro.....	32
Figura 25 – Tabuleiro com geometrias definidas.....	33
Figura 26 – Tipologia da laje de estudo conforme Bares (1970).....	34
Figura 27 – Charneiras plásticas do tabuleiro.....	35
Figura 28 – Áreas de influência para vigas de bordo.....	35
Figura 29 – Áreas de influência para vigas internas.....	36
Figura 30 – Carregamento da viga de bordo.....	36
Figura 31- Carregamento da viga interna.....	36

Figura 32 – Representação numérica do tabuleiro.....	37
Figura 33– Momentos atuantes na laje (f=100).....	41
Figura 34 – Mapa de contorno para momentos fletores (f=100).....	41
Figura 35 – Momentos fletores e deslocamentos nas vigas (f=100).....	42
Figura 36 – Momentos fletores (f=1000).....	42
Figura 37 – Momentos fletores e deslocamento das lajes (f=1,0).....	43
Figura 38 – Mapa de contorno para os momentos fletores (f=1,0).....	43
Figura 39 – Momentos fletores e deslocamento nas vigas (f=1,0).....	44
Figura 40 – Diagrama das vigas submetidas ao peso próprio.....	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classes de agressividade ambiental	16
Tabela 2 – Correspondência entre classe ambiental e cobertura nominal	17
Tabela 3 – Limites para deslocamento.....	23
Tabela 4 – Convergência da malha.....	31
Tabela 5 – Caso 0.....	34
Tabela 6 – Cálculo atuante na laje e seus coeficientes.....	34
Tabela 7 – Cargas de cálculo nas vigas de apoio.....	36
Tabela 8 – Caso 1.....	37
Tabela 9 – Caso 2.....	38
Tabela 10 – Fator multiplicador de rigidez - Caso 0.....	40
Tabela 11 – Resultados para lajes - Caso 0.....	44
Tabela 12 – Resultados para vigas de bordo - Caso 0.....	45
Tabela 13 – Resultados para vigas internas – Caso 0.....	45
Tabela 14 – Resultados para lajes - Caso 1.....	47
Tabela 15 – Resultados para vigas de bordo - Caso 1.....	47
Tabela 16 – Resultados para vigas internas - Caso 1.....	47
Tabela 17 – Resultados para lajes - Caso 2.....	48
Tabela 18 – Resultados para vigas de bordo - Caso 2.....	48
Tabela 19 – Resultados para vigas internas – Caso 2	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	OBJETIVO	2
2.1	Objetivo geral	2
2.2	Objetivo específico	2
3	REFERENCIAL TEÓRICO.....	2
3.1	Método dos elementos finitos.....	3
3.1.1	Sistemas contínuos	3
3.1.2	Sistemas discretos.....	4
3.1.3	Lei de Hooke generalizada	5
3.1.4	Matriz de rigidez.....	6
3.1.5	Elemento de barra.....	7
3.1.6	Elementos de malha.....	10
3.2	Métodos tradicionais	14
3.2.1	NBR6118.....	14
3.2.2	Espessuras de elementos laje maciça.....	14
3.2.3	Vão efetivo	15
3.2.4	Cobrimento mínimo.....	15
3.2.5	Parâmetros geométricos dos elementos de laje e viga.....	17
3.2.6	Lajes armadas em uma direção.....	18
3.2.7	Lajes armadas em duas direções.....	21
3.2.7.1	Determinação das flechas	22
3.2.8	Considerações para o cálculo dos esforços.....	27
4	METODOLOGIA	27
4.1	Análise do tabuleiro	27
4.2	Tabuleiro a ser estudado	29
4.3	Análise por meio do método simplificado pelas tabelas de Bares	29

4.4	Análise numérica por meio do método dos elementos finitos.....	30
4.5	Validação do modelo numérico	30
4.6	Definição dos elementos estruturais	32
4.7	Análise para o caso 0.....	33
4.8	Análise para os casos 1 e 2.....	37
4.9	Análise dos resultados.....	38
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	38
5.1	Resultados obtidos para o caso 0.....	39
5.2	Influência da rigidez na resposta estática	46
5.3	Síntese dos resultados.....	50
6	CONCLUSÕES.....	50
7	REFERÊNCIAS	51
	ANEXOS.....	53

1 INTRODUÇÃO

O conjunto denominado tabuleiro é constituído por lajes e vigas adjacentes, e esse tipo de estrutura é amplamente utilizada em projetos residenciais e industriais. Para projetos industriais, as considerações de ambiente e cargas são complexas quando comparamos com estruturas residenciais. Pode-se pontuar que para o ambiente industrial, a consideração de agressividade do ambiente deve ser a mais desfavorável possível, já que é muito comum que as estruturas estejam em contato com agentes agressivos. Com relação às cargas consideradas, as estruturas industriais estão sujeitas não só a ação de cargas estáticas, mas também as cargas dinâmicas também estão presentes, como é o caso dos efeitos de vibração dos equipamentos.

Em muitas ocasiões, é necessário que a geometria dos tabuleiros destas edificações sejam geometricamente diferentes quando comparadas com estruturas convencionais, seja por imposição de algum *layout* mecânico ou por limitações devido à concentração de cargas nestes elementos estruturais. Na realidade, existe uma certa complexidade sob o qual os tabuleiros de um edifício de processos são submetidos na fase de operação da estrutura, contendo cargas distribuídas, concentradas, estáticas e dinâmicas.

Contudo, o método de dimensionamento convencional de lajes e vigas, por meio de tabelas, não leva em consideração a flexibilidade dos bordos, fazendo com que a sensível resposta dos esforços seja desprezada.

Estudos anteriores (Araújo, 2008; Mazzilli, 1995; Stramandinoli, 2003) constataram que o procedimento simplificado de cálculo de lajes por meio de tabelas não funciona da mesma forma para lajes com vigas de bordos flexíveis. Em lajes e vigas de concreto armado, o alinhamento entre a laje e as vigas de mesa e a excentricidade entre os eixos das peças estruturais influenciam significativamente a resposta estática. Portanto, é necessário estudar o comportamento de lajes com apoios elásticos para investigar a influência da elasticidade dos apoios na resposta estática (deslocamento, cisalhamento, momentos fletores positivos e negativos).

É neste sentido que o presente trabalho busca relacionar consideração de flexibilidade dos elementos com a variação dos esforços internos por meio de uma análise computacional iterativa pelo método numérico dos elementos finitos, buscando uma relação de causa e efeito que a deformabilidade das vigas de apoio podem gerar na estrutura em sua totalidade.

Dessa forma, a metodologia de trabalho será direcionada à uma aplicação prática, onde os resultados manuais e computacionais obtidos serão discutidos de forma a encontrar limites, recomendações e cuidados sobre este assunto.

2 OBJETIVO

2.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral o estudo e determinação de esforços de um tabuleiro de concreto armado através da aplicação de procedimentos tradicionais e recursos computacionais. Os resultados obtidos foram analisados e expostos de maneira a considerar as aplicações destas ferramentas.

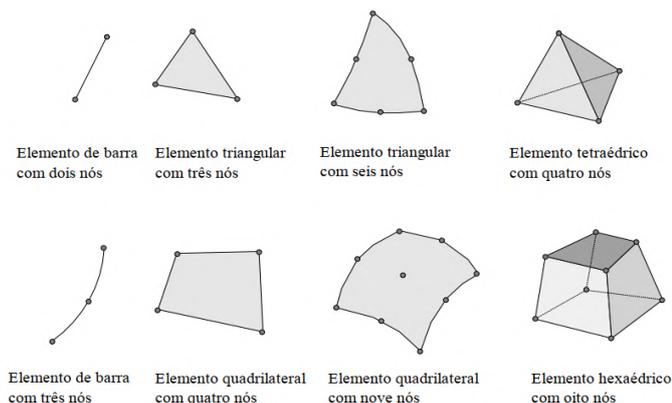
2.2 Objetivo específico

Com a aplicação de uma ferramenta computacional para o estudo das condições de contorno para o objetivo geral, será apresentado uma análise complementar com o objetivo de ilustrar a influência a rigidez dos elementos na obtenção de esforços e deslocamentos para auxiliar na compreensão e dimensionamento de tabuleiros de concreto.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com Alves Filho (2019), o método dos elementos finitos (MEF) pode ser empregado na análise estrutural sendo um poderoso método numérico que permite simular o comportamento estrutural complexo de elementos individuais ou de todo o sistema. O método consiste em dividir a estrutura em elementos menores separados que representam as propriedades do material (Figura 1), a geometria e as condições de contorno. Esses elementos são conectados em nós e equações de equilíbrio são aplicadas a cada elemento levando à solução total do sistema.

Figura 1: Formas variadas dos elementos geométricos.



Fonte: Souza (2003).

3.1 Método dos elementos finitos

As aplicações do método dos elementos finitos na análise estrutural de edifícios de concreto armado são bastante abrangentes, oferecendo uma série de vantagens, possibilitando a análise detalhada de tensões, deformações, estabilidade e comportamento dinâmico das estruturas.

No trabalho publicado por Campilho (2012), são expostas as principais utilidades desse método na análise de tensões e deformações em elementos isolados ou aplicados no sistema estrutural como um todo. Isso é crucial para avaliar a capacidade de carga, prever o desempenho estrutural e otimizar o projeto. Além disso, o método dos elementos finitos é uma ferramenta poderosa para dimensionar corretamente as seções transversais de elementos de concreto armado, levando em consideração combinações de cargas, propriedades do material e critérios de segurança.

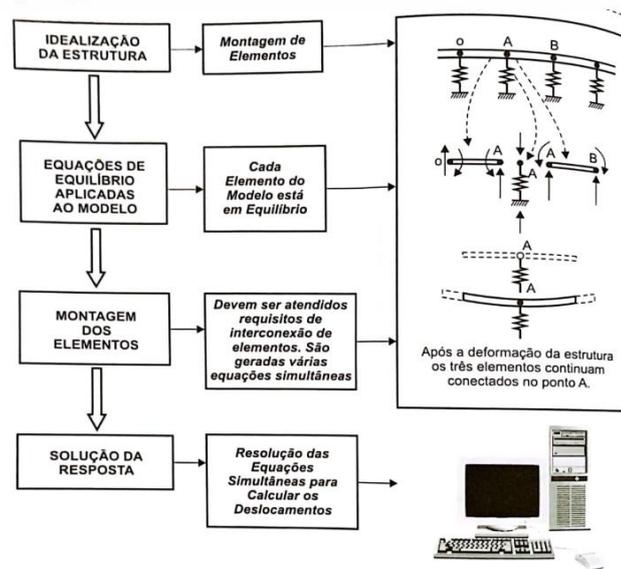
No contexto da estabilidade, o método dos elementos finitos permite a análise da estabilidade global de uma estrutura, considerando os efeitos de flexão e deslocamentos laterais, sendo recurso fundamental para garantir a integridade e segurança da construção.

3.1.1 Sistemas contínuos

Para Moaveni (2014), o objetivo principal da teoria dos elementos finitos é aproximar o comportamento contínuo de um sistema criando um modelo discreto que pode ser resolvido numericamente. Para fazer isso, uma técnica numérica chamada interpolação é usada, na qual a variável desconhecida em cada elemento dado é representada como um conjunto linear de funções de forma, também chamadas de funções de interpolação. Essas funções de interpolação são escolhidas de forma a garantir a continuidade entre os elementos adjacentes, a fim de representar com precisão o comportamento geral do sistema. Por meio desta interpolação, as equações diferenciais parciais que regem o comportamento físico de um sistema são transformadas em um sistema de equações algébricas, que podem ser resolvidas numericamente por meio de métodos computacionais. Essa abordagem permite obter soluções aproximadas do regime contínuo original, fornecendo informações valiosas sobre propriedades físicas, como distribuições de tensões, fluxos de calor, velocidades de fluidos, etc.

Alves Filho (2019) explicou que os sistemas contínuos são divididos em elementos finitos, que são pequenas regiões geométricas que representam uma aproximação do comportamento do sistema. Essa aproximação é ilustrada pela Figura 2.

Figura 2: Fluxograma do processo de discretização.



Fonte: Alves Filho (2019).

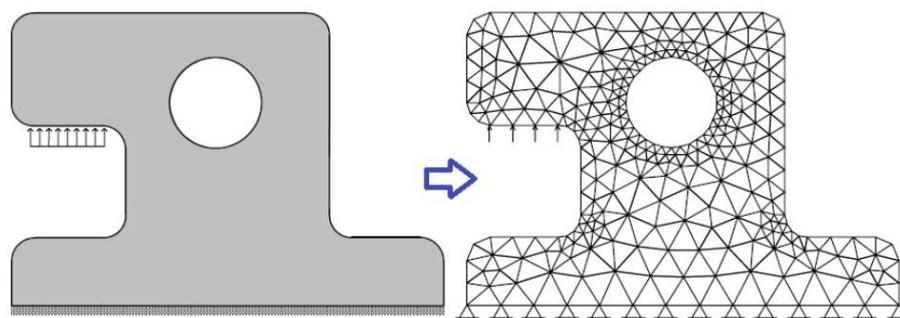
3.1.2 Sistemas discretos

Discretizar um sistema contínuo é uma etapa crucial na aplicação da teoria dos elementos finitos. Essa discretização, segundo Alves Filho (2019) envolve a subdivisão do domínio contínuo em uma malha de elementos finitos. Cada elemento finito representa uma porção do sistema físico e é definido por um conjunto de características, como geometria, material, propriedades mecânicas e térmicas.

Os elementos da estrutura são conectados uns aos outros através de interfaces, que podem ser representadas por nós ou pontos de conexão. Martha (2007) relatou como essas interfaces permitem a transmissão de informações e a transferência de forças, calor ou outras quantidades físicas relevantes entre os elementos vizinhos. Dentro de cada nó são definidos graus de liberdade associados. Esses graus de liberdade representam as incógnitas do sistema e podem incluir deslocamentos, rotações, temperaturas, pressões, entre outras variáveis dependentes do problema em questão.

O número de graus de liberdade em um sistema depende do número e tipo de elementos finitos utilizados e das características físicas a serem consideradas. Uma ilustração de sistema discreto pode ser observado na Figura 3.

Figura 3: Geometria discretizada em nós e malha.



Fonte: Martha (2007).

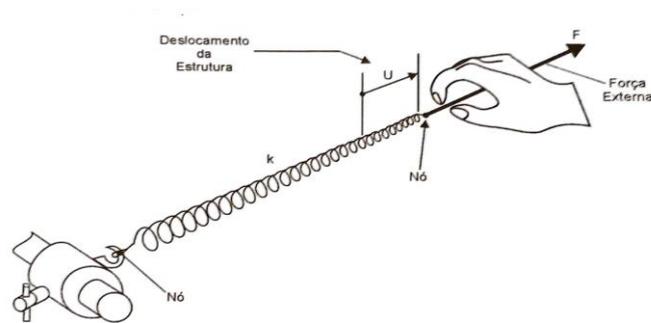
Alves Filho (2019) reforçou que análise de um sistema discreto envolve a formulação das equações de equilíbrio e compatibilidade, que descrevem as relações entre os graus de liberdade dos elementos finitos vizinhos. Essas equações são baseadas nas leis da física que governam o comportamento do sistema em estudo, neste caso, a mecânica dos sólidos. A combinação das equações de equilíbrio e compatibilidade de elementos adjacentes resulta em um sistema algébrico de equações que deve ser resolvido para determinar as incógnitas do sistema. A solução desse sistema de equações fornece informações pertinentes sobre o comportamento geral do sistema discreto, como tensão, pressão, fluxo e outras quantidades físicas de interesse.

3.1.3 Lei de Hooke generalizada

Uma das etapas cruciais do processo de modelagem e análise através do método dos elementos finitos é a formulação da lei de Hooke generalizada. No entanto, é importante ressaltar que para garantir a obtenção de resultados precisos e confiáveis, outros fatores devem ser levados em consideração. Por exemplo, é necessária uma estimativa adequada da estrutura dos elementos finitos a serem utilizados na análise. Todavia, a fórmula da lei de Hooke generalizada apresenta um papel fundamental na modelagem dos elementos, permitindo o estabelecimento de uma relação linear entre tensão e deformação. Isso possibilita, inclusive, a modelagem precisa e eficiente de materiais elásticos. Portanto, a compreensão e aplicação dessa fórmula pode trazer benefícios significativos para a análise e modelagem de estruturas, garantindo maior segurança e confiabilidade nos resultados obtidos.

A lei de Hooke original, formulada por Robert Hooke no século XVII, descrevia a relação linear entre tensão (força por unidade de área) e deformação para materiais homogêneos (Figura 4).

Figura 4: Mola sujeita à uma força externa.



Fonte: Alves Filho (2019).

No entanto, muitos materiais reais, como metais, concreto e polímeros, exibem comportamentos mais complexos que não podem ser adequadamente descritos por relações lineares simples. Essas complexidades incluem a anisotropia, que tem diferentes propriedades em diferentes direções, e não linearidade, que descreve a relação não linear entre tensão e deformação. A lei de Hooke generalizada foi desenvolvida para resolver esses casos de maior complexidade e permitir que os diferentes comportamentos dos materiais em diferentes pontos sejam considerados em elementos finitos. A fórmula é implementada usando a matriz de rigidez (também conhecida como matriz de elasticidade), que relaciona as tensões e deformações em cada ponto do elemento.

Lei de Hooke:

$$F = k \cdot U \quad (1)$$

Onde,

F, é a força aplicada ao elemento;

k, é a constante elástica do elemento;

U, é o deslocamento do elemento da direção de aplicação da força.

Essa matriz de rigidez é derivada das propriedades geométricas e mecânicas do material e sua formulação depende de seu comportamento específico. Para materiais homogêneos e lineares, a matriz de rigidez é constante e independe da deformação. No entanto, para materiais anisotrópicos ou com comportamentos não lineares, a matriz de rigidez pode variar com a tensão e/ou orientação, tornando a fórmula mais complexa.

3.1.4 Matriz de rigidez

Segundo Alves Filho (2019), a matriz de rigidez é uma matriz que descreve as relações de rigidez entre os graus de liberdade de um elemento finito ou sistema discreto na teoria dos

elementos finitos. É uma representação matemática das propriedades físicas e de engenharia do sistema em estudo. Conforme Equação 2, a matriz de rigidez é derivada das propriedades mecânicas e geométricas dos elementos finitos e das condições de contorno do sistema, fazendo uso de equações balanceadas e compatíveis a partir de uma formulação matemática específica.

$$\{f\} = [k] \cdot \{d\} \quad (2)$$

Onde,

$\{f\}$ é a matriz coluna em que são representadas as forças que atuam nos nós do elemento;

$[k]$ é matriz quadrada contendo os coeficientes de rigidez;

$\{d\}$ é a matriz coluna em que são representados os deslocamentos associados aos nós do elemento.

Ainda de acordo com ALVES FILHO (2019), cada elemento de uma submatriz contribui para a matriz de rigidez geral do sistema. A matriz de rigidez global é formada pela soma dessas submatrizes de todos os elementos finitos presentes no sistema. Dessa forma, a relação força versus deslocamento que age no elemento é expressa pela matriz de rigidez do elemento ($[k]^e$) e a matriz global da estrutura, pode ser escrita como $[K]$.

Além disso, a matriz de rigidez é a base para análise e otimização estrutural. Ao modificar as propriedades do material, as dimensões dos elementos finitos ou as condições de contorno, a matriz de rigidez é atualizada, permitindo avaliar o comportamento estrutural em diferentes cenários. Isso possibilita a otimização do projeto, análises de sensibilidade e estudos de diferentes configurações estruturais.

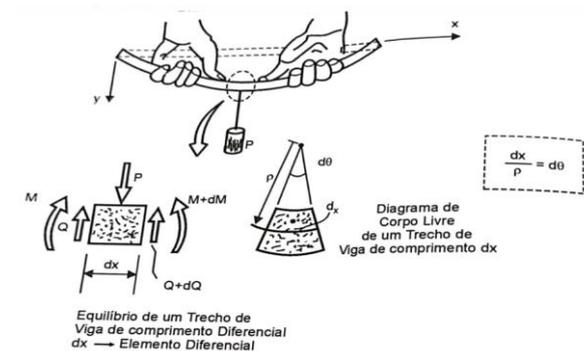
3.1.5 Elemento de barra

Elementos de barra, também conhecidos como elementos unidimensionais, são elementos que representam estruturas lineares como vigas, barras, cabos, vergalhões, etc. Esses elementos são modelados como seções retas ou curvas com comportamento unidimensional e são usados para analisar e prever o comportamento estrutural dessas estruturas.

Os elementos de barra possuem algumas propriedades básicas como comprimento, seção transversal, módulo de elasticidade, momento de inércia, etc. Essas propriedades são essenciais para descrever o comportamento estrutural, como deformação, tensão, rigidez de uma estrutura (Figura 5). Graças ao elemento linear é possível realizar análises estáticas que auxiliam na determinação de esforços internos e deslocamentos, fornecendo informações valiosas para o projeto, otimizando a verificação da integridade e desempenho de uma estrutura. De acordo com Campilho (2012), a formulação matemática de elementos lineares na teoria de elementos finitos

envolve a aplicação de equações de equilíbrio e compatibilidade para determinar a relação entre forças e deslocamentos ao longo de um elemento. Essas equações são combinadas com as propriedades do material e as condições de contorno para formar um sistema de equações que representa toda a estrutura.

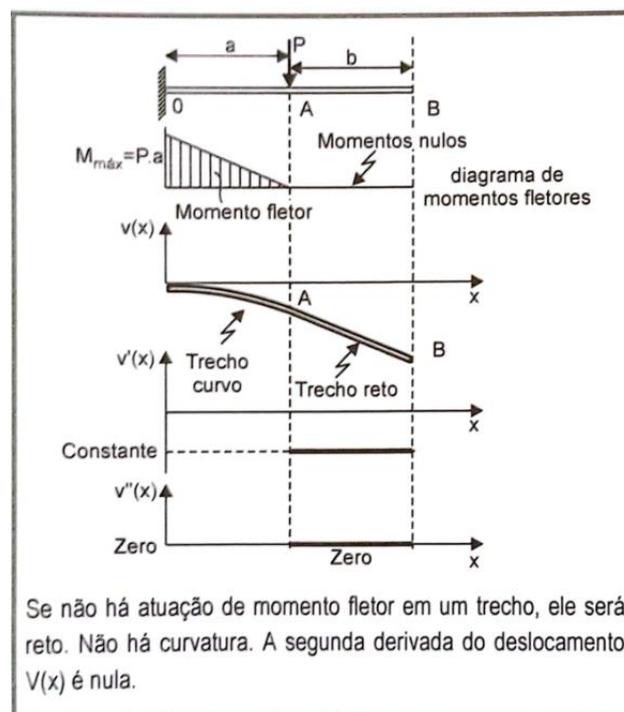
Figura 5: Comportamento de um elemento de barra.



Fonte: Alves Filho (2019).

Alves Filho (2019) apresentou que a curvatura de um elemento de barra deriva da compressão da ação de um carregamento P qualquer em uma barra de dimensões conhecidas. Para a condição deslocada da viga, haverá deformações se sua segunda derivada do deslocamento for diferente de zero, conforme descrito na Figura 6.

Figura 6: Momento fletor e seu efeito em uma viga.



Fonte: Alves Filho (2019).

Como podemos concluir da imagem anterior, a intensidade da curvatura depende diretamente do momento fletor atuante na seção, logo, é possível escrever:

$$M(x) = k \cdot v''(x) \quad (3)$$

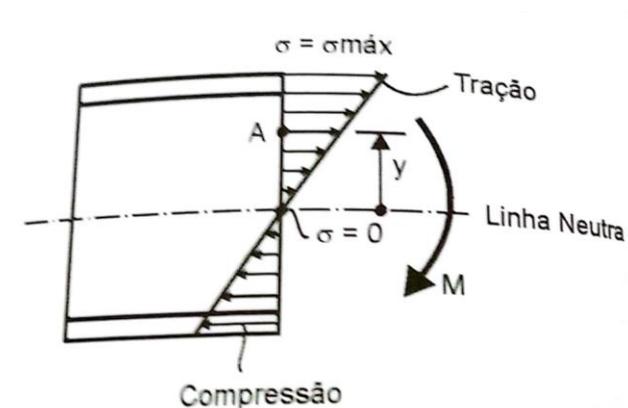
Sendo k a constante de rigidez da viga, que depende do material e geometria da seção, definida pelo módulo de elasticidade e o momento de inércia em relação à sua linha neutra.

$$k = E \cdot I \quad (4)$$

Assim, podemos escrever a proporcionalidade entre a curvatura do elemento, e sua rigidez como:

$$v''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E} \cdot I \quad (5)$$

Figura 7: Seção transversal submetida a esforços.



Fonte: Alves Filho (2019).

Adotando o plano da seção transversal como referência, para uma distância y da linha neutra da viga (Figura 7), podemos definir como sendo a deformação axial ε :

$$\varepsilon = y \cdot v''(x) \quad (6)$$

Nesse sentido, a deformação axial em função do material é:

$$\varepsilon = y \cdot \frac{M}{E} \cdot I \quad (7)$$

Da teorias de resistência dos materiais, temos que a tensão normal é dada por:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (8)$$

Onde,

ε = deformação axial do elemento;

E = módulo de elasticidade do material.

Logo, podemos escrever a tensão normal como sendo proporcional ao momento atuante e suas propriedades geométricas:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \quad (9)$$

Ao classificar a estrutura linear, uma matriz de rigidez é gerada para cada elemento e agregada para formar a matriz de rigidez geral do conjunto. Por serem unidimensionais, esses elementos requerem menos recursos computacionais do que elementos bidimensionais e tridimensionais mais complexos. Isso torna o elemento de barra a primeira escolha para uma análise estrutural rápida e eficiente, sendo aplicáveis apenas a estruturas lineares e que o principal comportamento estrutural ocorre ao longo do seu eixo geométrico. Para problemas mais complexos, como a análise de estruturas não lineares ou tridimensionais, outros tipos de elementos finitos podem ser mais apropriados.

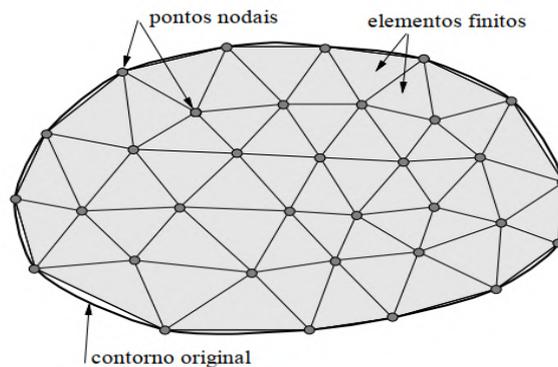
3.1.6 Elementos de malha

Kimura (2007) apresenta que elementos bidimensionais ou malhas são regiões geométricas usadas para definir domínios contínuos em problemas de análise estrutural, transformando problemas contínuos em problemas discretos que podem ser resolvidos numericamente. Os também chamados *grids* são criados conectando elementos adjacentes que formam uma representação aproximada do domínio físico a ser analisado.

Cada elemento da malha é definido por um conjunto de nós, que são pontos discretos no domínio, usados para identificar as variáveis de interesse do problema, como deslocamento,

temperatura, pressão, etc. Os elementos da malha podem ser de diferentes formas e tipos, de acordo com a geometria e comportamento físico do problema estudado (Figura 8). Exemplos comuns incluem sistemas que podem ser representados por quadrados e triângulos (2D) e tetraedros e hexágonos (3D). Cada tipo de configuração apresenta características específicas que afetam a precisão e a eficiência da digitalização.

Figura 8 - Elemento discretizados em malhas.



Fonte: Souza (2003).

Uma vez construída a malha e formuladas as equações, pode-se compilar um sistema de equações que representam o problema físico em estudo. Este sistema de equações é geralmente expresso na forma de equações diferenciais parciais, que são definidas e resolvidas numericamente. Isso torna possível analisar e prever o comportamento estrutural sob diferentes condições de carregamento e geometrias complexas. Uma malha bem discretizada pode reduzir o número de elementos necessários para representar um domínio, reduzindo assim a demanda computacional.

Como descrito anteriormente, cada elemento da malha contribui para a matriz de rigidez global, descrevendo as relações de rigidez entre os graus de liberdade de um sistema como um todo.

Para o estudo proposto neste trabalho, será considerada a teoria de vigas de Euler-Bernoulli estendida para placas, conhecida como teoria de Kirchhoff ou teoria clássica de placas e a complementação do estudo da deformação por cisalhamento ao longo da espessura da placa, teoria proposta por Reissner-Mindlin.

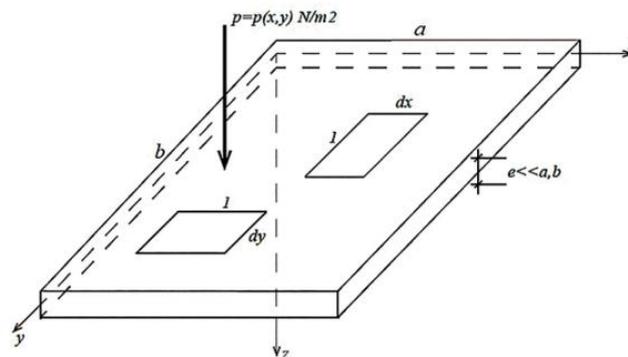
De acordo com Carvalho (2016) apud Reddy (2006), a teoria clássica das placas é baseada no trabalho de Kirchhoff, sendo necessário o atendimento às seguintes hipóteses:

- a) O material é homogêneo, isotrópico e elástico linear;
- b) Os deslocamentos são pequenos, comparados com a espessura h ;
- c) A placa é fina, $\left(\frac{\text{Menor Vão}}{h}\right) > 20$;

- d) As tensões normais atuantes (perpendicularmente) na superfície são nulas ($\sigma_z = 0$);
- e) Um segmento de reta perpendicular à superfície média indeformada não se altera após a deformação, permanecendo reto e com o mesmo comprimento;
- f) Rigidez à flexão da placa, dada por: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

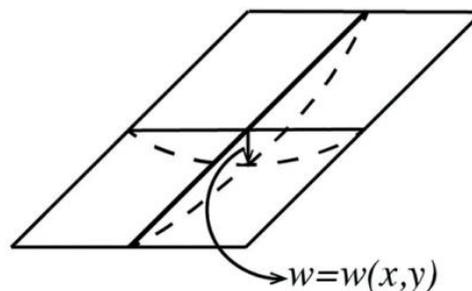
A partir de uma carga p aplicada na placa, Brasil (2020), resumiu o processo de deformação de uma placa segundo a hipótese de Kirchhoff (Figura 9), deduzida a partir do deslocamento w de um ponto da placa em suas três dimensões (Figura 10). É apresentada a expressão referente ao desenvolvimento do cálculo dos esforços utilizando a convenção da mão esquerda.

Figura 9 - Esquema de deformações em uma placa.



Fonte: Brasil (2020).

Figura 10 - Deformação ocasionada pelo carregamento da laje.



Fonte: Brasil (2020).

Por fim, a equação geral da teoria das placas, obtida a partir da teoria de Kirchhoff, ou teoria da elasticidade, desenvolvidas por Marie-Sophie Germain e publicada por Lagrange em 1811, relaciona a deformação elástica w , a carga uniforme p aplicada na placa, conforme descrita na Equação 10:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{p}{D} \quad (10)$$

Onde,

w = deslocamento vertical da placa em função de x e y ;

p = carregamento uniforme na placa;

D = rigidez da placa à flexão.

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (11)$$

Onde,

∇^4 = operador biarmônico da equação de 4ª ordem.

De acordo com Brasil (2020), para se obter a solução da equação para um deslocamento $w(x,y)$, é necessário definir as condições de contorno do problema a ser estudado:

- Placa simplesmente apoiada a aresta paralela à x :

$$w = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d^2 w}{d_y^2} = 0 \quad (13)$$

- Placa simplesmente apoiada a aresta paralela à y :

$$w = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 w}{d_x^2} = 0 \quad (15)$$

- Placa simplesmente engastada a aresta paralela à x :

$$w = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dw}{d_y} = 0 \quad (17)$$

- Placa simplesmente engastada a aresta paralela à y :

$$w = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dw}{d_x} = 0 \quad (19)$$

O desenvolvimento da equação geral das placas é complexa e não está no escopo deste trabalho, portanto, existem vários trabalhos e documentos contendo a dedução das equações matemáticas até a obtenção da equação no seu desenvolvimento pleno, dentre esses estudos, pode-se consultar o trabalho desenvolvido por Hennrichs (2003).

3.2 Métodos tradicionais

A NBR 6118 (ABNT, 2014) tem como objetivo estabelecer critérios e requisitos gerais para o projeto de estruturas de concreto armado, abrangendo desde a concepção até a execução das estruturas. Ela busca garantir a segurança, durabilidade e adequação das estruturas de concreto armado. A norma define os requisitos para os materiais utilizados na construção em concreto armado. Isso inclui especificações para o concreto, tais como resistência mínima, consistência e agregados adequados.

3.2.1 NBR6118

A NBR 6118 (ABNT, 2014) especifica as ações que devem ser consideradas no projeto estrutural, como cargas permanentes (peso próprio da estrutura, alvenarias, instalações), cargas acidentais (sobrecargas, impactos), cargas de vento, entre outras. A norma também fornece diretrizes para a combinação dessas ações, levando em conta a segurança e a utilização pretendida da estrutura.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece também os critérios para o dimensionamento das estruturas de concreto armado. Isso envolve a verificação da resistência dos materiais utilizados, considerando suas propriedades de resistência à tração e à compressão. Além disso, a norma define os estados limites últimos (ELU) e estados limites de serviço (ELS) que devem ser considerados durante o dimensionamento.

3.2.2 Espessuras de elementos laje maciça

O item 13.2.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014) prevê os limites a serem respeitados com relação à espessura mínima de lajes maciças de concreto. Segundo o trecho em questão, é recomendado que as lajes tenham as seguintes espessuras mínimas:

- a) 7 cm para lajes de piso ou de cobertura em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;

- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- f) 15 cm para lajes com protensão apoiadas em vigas, $\frac{l}{42}$ para lajes de piso biapoiadas e $\frac{l}{50}$ para lajes de piso contínuas;
- g) 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes-cogumelo.

3.2.3 Vão efetivo

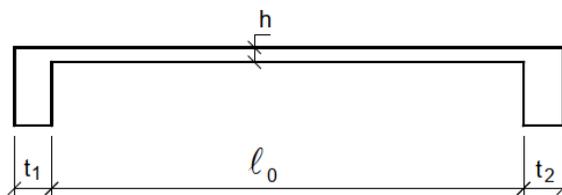
O vão efetivo (Figura 11) para lajes é descrito no item 14.6.2.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014), que considera que os apoios são suficientemente rígidos e devem ser calculados pela expressão:

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (20)$$

$$a_1 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_1}{2} \\ 0,3h \end{array} \right\}$$

$$a_2 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_2}{2} \\ 0,3h \end{array} \right\}$$

Figura 11 – Seção de um tabuleiro.

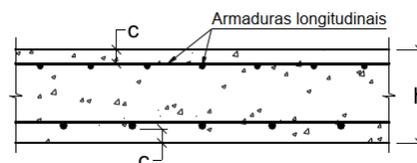


Fonte: Bastos (2015).

3.2.4 Cobrimento mínimo

A NBR 6118 (ABNT, 2014) traz a Tabela 1 onde é possível fazer a classificação ambiental de forma a garantir que durante a execução do projeto o cobrimento nominal c_{nom} será atingido. O item 7.4.7.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece os valores para o cobrimento nominal das barras em projetos de lajes maciças, conforme Tabela 1. Para garantir o cobrimento mínimo da estrutura é necessário conhecer qual a classe do ambiente em que elas será construída, conforme pode ser observado na Figura 12.

Figura 12 – Cobrimento das armaduras das lajes.



Fonte: Bastos (2015).

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta_c \quad (21)$$

Segundo Bastos (2015), nas obras em geral o valor de Δ_c deve ser maior ou igual a 10 mm, podendo ser reduzido para 5 mm quando houver um adequado controle de qualidade e rígidos limites de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução das estruturas de concreto.

Tabela 1 – Classes de agressividade ambiental - CAA (Tabela 6.1- NBR 6118)

Classe de agressividade Ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de Projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural Submersa	Insignificante
II	Moderada	Urbana ^{1,2} Marinha ¹	Pequeno
III	Forte	Industrial ^{1,2} Industrial ^{1,3}	Grande
IV	Muito forte	Respingos de maré	Elevado

Notas: 1) Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

2) Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.

3) Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Para definir o valor do cobrimento, é necessário conhecer as características ambientais na qual a estrutura será concebida. Nos projetos de estruturas, a agressividade ambiental deve ser classificada de acordo com as diretrizes apresentadas na Tabela 1 levando em conta as condições de exposição da estrutura (NBR 6118 (ABNT, 2014), item 6.4.2).

Na Tabela 2, a NBR 6118 (ABNT, 2014) traz as recomendações referentes ao cobrimento adotado para diferentes tipos de estrutura, considerando um $\Delta_c=10\text{mm}$:

Tabela 2 – Correspondência entre classe ambiental e cobrimento nominal (Tabela 7.2 da NBR 6118 (2014))

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV ²
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado ⁴	Laje ¹	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ³	30	40	50	

Notas: 1) “Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal $\geq 15\text{ mm}$ ”.

(continua)

2) “Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV”.

3) “No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal $\geq 45\text{ mm}$ ”.

4) Para parâmetros relativos ao Concreto Protendido consultar a Tabela 7.2 da NBR 6118. “No caso de elementos estruturais pré-fabricados, os valores relativos ao cobrimento de armaduras (Tabela 7.2) devem seguir o disposto na ABNT NRB 9062”¹ (item 7.4.7.7).

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

3.2.5 Parâmetros geométricos dos elementos de laje e viga

Existem várias maneiras para determinar as dimensões dos elementos estruturais, Bastos (2015) recomendou a que para a determinação da altura das lajes através da altura útil d da seção utilizado a expressão:

$$d = (2,5 - 0,1n)l^* \quad (22)$$

Onde,

d = altura útil da laje;

n = número de bordas engastadas

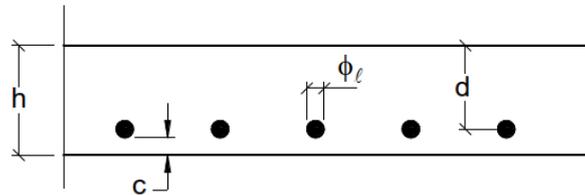
l^* = dimensão da laje, sendo:

$$l^* \leq \left\{ \begin{array}{l} l_x \\ 0,7l_y \end{array} \right\}$$

Portanto, a estimativa da altura final da laje (Figura 13) pode ser calculada como:

$$h_l = d + \frac{\phi_l}{2} + c \quad (23)$$

Figura 13 – Altura útil da laje para armadura positiva.



Fonte: Bastos (2015).

Araújo (2010) apresentou que a altura das vigas é dependente do vão, carregamentos e resistência do concreto. A altura deve ser suficiente para proporcionar resistência mecânica e baixo deslocamento (flecha). Para construções de pequeno porte, há uma indicação prática para a estimativa da altura das vigas de concreto armado: dividir o vão efetivo por doze, assim, a altura inicial da viga será função destes fatores geométricos (Figura 14), sendo escrita como:

$$h_v = \frac{l_{ef}}{12} \quad (24)$$

Figura 14 – Esquema de uma viga com três apoios.



Fonte: Bastos (2015).

Já a largura da viga (b_v) pode ser determinada pelas limitações arquitetônicas do projeto, normalmente é compatível com a espessura das alvenarias e acabam sendo embutidas no elemento de vedação, para o estudo proposto, o valor adotado será de $b_v = 30 \text{ cm}$.

3.2.6 Lajes armadas em uma direção

De acordo com Bastos (2015) apud NBR 6118 (ABNT, 2014), uma classificação muito importante das lajes maciças é aquela referente à direção ou da armadura principal. Existem dois casos: laje armada em uma direção ou laje armada em duas direções.

As lajes armadas em uma direção apresentam uma relação geométrica entre o lado menor (l_x) e o lado maior (l_y), expressado pela letra λ , conforme Equação 25.

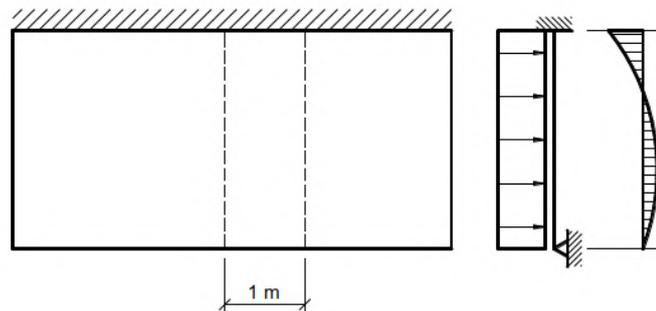
$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (25)$$

Para o valor de $\lambda > 2$, a laje é armada em uma direção;

Para valores de $\lambda \leq 2$, a laje é armada nas duas direções.

No caso das lajes armadas em uma direção considera-se que a flexão na direção do menor vão (l_x), de modo que a laje será considerada como uma viga com largura unitária igual à 1 metro (100 cm), segundo a direção principal da laje, como mostrado na Figura 15. Na direção oposta desprezam-se os momentos fletores existentes.

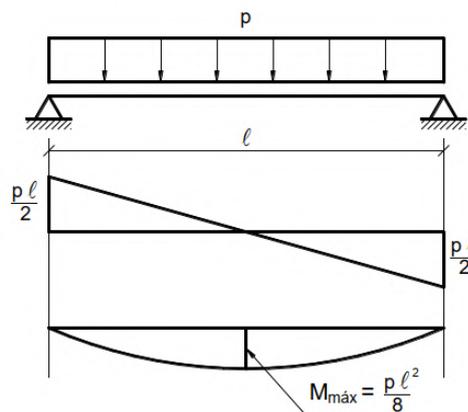
Figura 15 – Momentos fletores em laje armada em uma direção



Fonte: Bastos (2015).

É ilustrado nas Figuras 16, 17 e 18 os deslocamentos imediatos e os momentos fletores que atuam nas lajes para os principais casos de vinculação quando se consideram apenas apoios simples ou perfeitamente engastados.

Figura 16 – Laje sob apoios simples e carregamento uniforme.

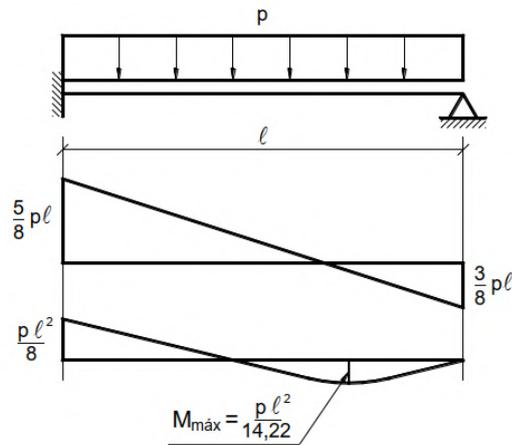


Fonte: Bastos (2015).

A Equação 26 refere-se ao deslocamento imediato para a condição de apoio ilustrada na Figura 16, sendo:

$$\delta_i = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} \quad (26)$$

Figura 17 – Laje com apoio simples e engastado com carga uniforme.

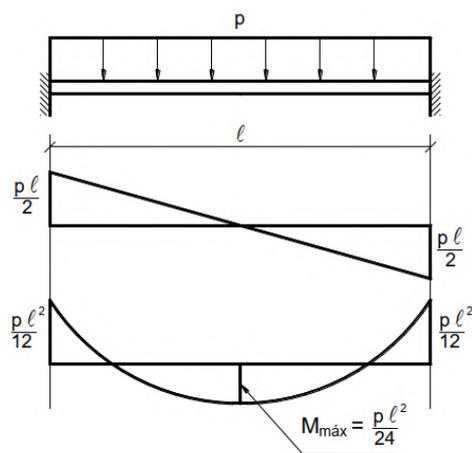


Fonte: Bastos (2015).

A Equação 27 refere-se ao deslocamento imediato para a condição de apoio ilustrada na Figura 17, sendo:

$$\delta_i = \frac{3}{554} \frac{pl^4}{EI} \quad (27)$$

Figura 18 – Laje com apoios perfeitamente engastados e carga uniforme.



Fonte: Bastos (2015).

A Equação 28 refere-se ao deslocamento imediato para a condição de apoio ilustrada na Figura 18, sendo:

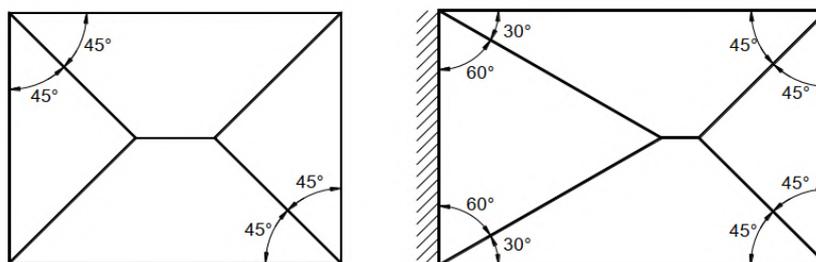
$$\delta_i = \frac{1}{384} \frac{pl^4}{EI} \quad (28)$$

3.2.7 Lajes armadas em duas direções

As lajes armadas em duas direções possuem comportamento complexo quando comparado com o caso anterior, sendo necessária a utilização de ferramentas complementares para sua correta dedução.

Com relação às reações de apoio das lajes em vigas, o item 14.7.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014) permite que seja utilizado o método das charneiras plásticas. Este método consiste em aproximar as charneiras das lajes por retas inclinadas de modo que cada viga de bordo receba uma contribuição do seu carregamento. Esse carregamento pode ser simplificado para uma carga uniformemente distribuída ao longo do elemento de apoio, sendo a distribuição de áreas colaborativas para cada viga apresentadas na Figura 19:

Figura 19 – Linhas de ruptura das lajes maciças.



Fonte: Bastos (2015).

As reações de apoio são obtidas através da contabilização da área de influência para cada viga de apoio adjacente à laje analisada. Os momentos fletores foram obtidos com a utilização das tabelas de Bares (1970), adaptadas por Pinheiro (1994). A determinação do coeficiente das reações de apoio, momentos positivos e negativos estão dispostos nas tabelas (Anexo 1) de forma que as reações e os momentos nas lajes podem ser calculados conforme as Equações 29 e 30, respectivamente.

$$V = v \frac{pl_x}{10} \quad (29)$$

Onde,

V = reação de apoio na viga (kN/m);

v = coeficiente tabelado;

p = carga da distribuída devido a laje (kN/m²).

$$M = \mu \frac{pl_x^2}{100} \quad (30)$$

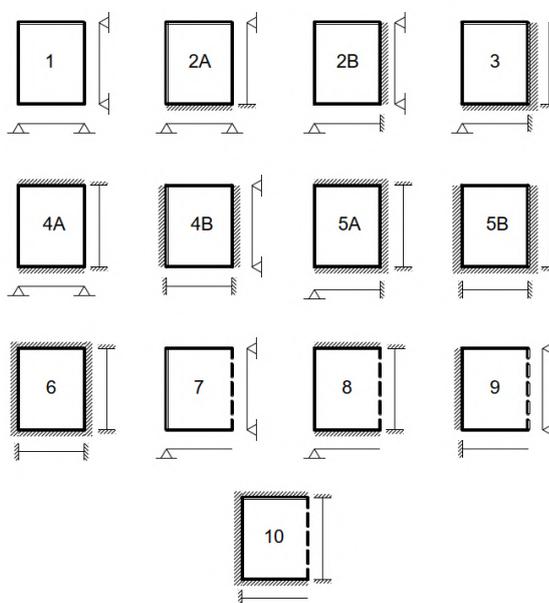
Onde,

M = momento atuante na laje (kN.m);

μ = coeficiente tabelado.

No método de Bares (1970), as tabelas classificam as lajes de acordo com o seu apoio, podendo apresentar bordos apoiados ou engastados. Na Figura 20 são apresentadas as tipologias para as lajes existentes:

Figura 20 -Tipologia das vinculações de lajes em vigas de apoio.



Fonte: Bastos (2015).

3.2.7.1 Determinação das flechas

A NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece que para os elementos de lajes e vigas as deformações sejam verificadas no seu estado de limite de serviço, ou seja, o estado em que os deslocamentos atinjam os limites estabelecidos para sua utilização sem gerar desconforto ou insegurança aos usuários (ELS-DEF).

Segundo a NBR 6118 (ABNT,2014), os deslocamentos limites, apresentados na Tabela 3 são valores práticos utilizados para a verificação da estrutura e podem ser classificados em quatro grupos:

- Aceitabilidade sensorial: o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;
- Efeitos específicos: os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção;
- Efeitos em elementos não estruturais: deslocamentos estruturais podem ocasionar o mau funcionamento de elementos que estão a ela ligados;
- Efeitos em elementos estruturais: os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas.

A Tabela 3 define os valores limite para os deslocamentos verticais permitidos pela NBR 6118 (2014).

Tabela 3 - Tabela 13.3 da NBR 6118 – Limites para deslocamento

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$l/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$l/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$l/250^{1)}$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total Ocorrido após a construção do piso	$l/350+$ contraflecha ²⁾ $l/600$
	Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após nivelamento do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento
		Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$l/500^{3)}$ ou 10 mm ou $\Theta = 0,0017$ $\text{rad}^{4)}$
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^{3)}$ ou 25 mm
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ($\psi_1=0,30$)	$H/1\ 700$ ou $H_i/850^{5)}$ entre pavimentos ⁶⁾
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$l/400^{7)}$ ou 15 mm

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Tabela 3 - Tabela 13.3 da NBR 6118 – Limites para deslocamento (continuação)

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Efeitos em elementos não estruturais	Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H_i/500$
		Revestimentos colados	Ocorrido após construção do forro	$l/350$
		Revestimentos pendurados ou com juntas	Deslocamento ocorrido após construção do forro	$l/175$
		Desalinhamento de trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H/400$
Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado.		

¹⁾ As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.

²⁾ Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $l/350$.

³⁾ O vão l deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.

⁴⁾ Rotação nos elementos que suportam paredes.

⁵⁾ H é a altura total do edifício e H_i o desnível entre dois pavimentos vizinhos.

⁶⁾ Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos devido à atuação de ações horizontais. Não devem ser incluídos os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica para o deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando H_i representa o comprimento do lintel.

⁷⁾ O valor l refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.

NOTAS

1 Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão l suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

2 Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor l é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.

3 O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na seção 11.

4 Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

Para a avaliação do deslocamento da estrutura é preciso determinar o estado de cálculo crítico da seção do elemento considerado. Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) no item 17.3.1

está descrito que em estado de carregamento, as estruturas trabalham parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II. O comportamento estrutural entre esses dois casos se dá pelo cálculo do momento de fissuração.

Esse momento pode ser calculado pela seguinte expressão aproximada:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (31)$$

Sendo:

M_r = momento de fissuração;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares;

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3};$$

I_c = momento de inércia da seção íntegra;

$$y_t = h/x_1.$$

O que caracteriza o estágio I é o fato da carga aplicada ser de pequena intensidade e fazendo com que o elemento apresente pequena deformação, de modo que o concreto na seção não se encontra ainda fissurado, significando que as tensões de tração no concreto são inferiores à sua resistência. Nessa situação, supõe-se que haja linearidade entre tensão e deformação, levando as deformações específicas tanto do aço, quanto do concreto, sejam iguais devido a aderência.

A verificação dos deslocamentos se dá a partir do cálculo das flechas nas estruturas de concreto. A flecha total é composta por duas parcelas: a flecha imediata e a flecha diferida.

Como as estruturas de concreto armado são compostas por materiais diferentes, há a necessidade de homogeneizar a seção, transformando a área de aço em uma área equivalente de concreto. A avaliação da flecha imediata deve ser realizada utilizando a seção homogeneizada equivalente, sua inércia é dada por (Equação 32):

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + (a_e - 1)A_s(d - x_1)^2 \quad (32)$$

Onde,

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}};$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci};$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80};$$

$$E_s = 210 \text{ GPa};$$

$$a_e = E_s/E_{ci};$$

A_s = área de aço da seção.

Para cálculo do momento fletor M_{raro} deve ser considerada a combinação rara, calculado a partir do momento de inércia no estágio I, sendo necessário conhecer a posição da linha neutra neste estágio. Como a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção homogeneizada, sua posição x_I pode ser calculada como:

$$x_1 = \frac{\frac{bh^2}{2} + (a_e - 1)A_s d}{bh + (a_e - 1)A_s} \quad (33)$$

O estágio II se dá pelo aumento da intensidade do carregamento, fazendo com que a fibra mais tracionada de concreto se rompa, surgindo assim a primeira fissura e a armadura passará a trabalhar de maneira mais efetiva na peça de concreto. A distribuição de tensões na região comprimida ainda permanece linear. Com a progressão a intensidade dos carregamentos, as fissuras irão aumentando, caminhando em direção à linha neutra da peça fazendo com que as tensões de compressão no concreto deixem de apresentar uma distribuição linear. Ocorre uma significativa influência da fissuração sobre a rigidez do elemento (diminuição da rigidez), sendo de difícil análise, pois a rigidez depende do grau de fissuração, que é um fenômeno progressivo e dependente dos momentos fletores, que também sofrem uma redistribuição na medida em que as fissuras se desenvolvem.

Se o momento solicitante for maior que o momento de fissuração, a estrutura está fissurada, logo, é necessário que se considere o seu momento de inércia para esse caso. As Equações 34 e 35 refere-se ao cálculo de momento de inércia no estágio II e o momento de inércia equivalente para a seção fissurada, respectivamente.

$$I_{II} = \frac{bx_{II}^3}{12} + bx_{II}\left(\frac{x_{II}}{2}\right)^2 + (a_e - 1)A_s(d - x_{II})^2 \quad (34)$$

Sendo,

x_{II} = posição da linha neutra no estágio II.

$$I_{eq} = E_{cs} \left(\frac{M_{raro}}{M_r}\right)^3 I_c + \left(1 - \left(\frac{M_{raro}}{M_r}\right)^3\right) I_{II} \quad (35)$$

Logo, a expressão para a flecha imediata para lajes armadas em duas direções é dada pela Equação 34.

$$\delta_i = \frac{\alpha p_{serv} l_x^4}{12 E_{cs} I} \quad (36)$$

Onde,

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci}$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80}$$

A flecha total diferida, ocorre pela exposição à carregamentos de longa duração, em função da fluência do concreto e pode ser calculada aproximadamente pela expressão:

$$\delta_d = \alpha_f \delta_i \quad (37)$$

Finalmente, a expressão para a flecha total no elemento de concreto pode ser escrita como:

$$\delta_t = \delta_i + \delta_d \quad (38)$$

$$\delta_t = (1 + \alpha_f) \delta_i \quad (39)$$

Sendo α_f o coeficiente de fluência, dado por:

$$\alpha_f = \Delta\xi \quad (40)$$

Onde,

$$\Delta\xi = 2 - 0,68 = 1,32$$

3.2.8 Considerações para o cálculo dos esforços

Para este trabalho, foi considerado os estados de limite de serviço para a deformação excessiva (ELS-DEF) para a verificação das flechas, e o estado limite último (ELU) para a verificação dos momentos fletores, onde:

$$\text{ELU: } q_d = g_d * (q_{gk} + q_{qk}) \quad (41)$$

$$\text{ELS-DEF: } q_{serv} = (\psi_1 * q_{gk} + \psi_2 * q_{qk}) \quad (42)$$

Para a determinação da carga de serviço, serão adotados os fatores $\psi_1 = 1,0$ e $\psi_2 = 0,4$ (locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas, como edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos) conforme tabela 11.2 da NBR 6120 (ABNT, 2014).

4 METODOLOGIA

4.1 Análise do tabuleiro

A metodologia para a obtenção dos resultados será dividida em duas etapas distintas, a primeira (caso 0) será a comparação do dimensionamento dos esforços por meio dos procedimentos tradicionais (tabelas) e o método numérico (MEF) para a determinação dos esforços internos da estrutura do tabuleiro seguida de uma posterior comparação entre resultados.

Na segunda etapa (casos 1 e 2) será realizada a investigação da influência das rigidezes dos elementos que constituem o tabuleiro de concreto armado. Para tal investigação, foi considerado neste trabalho o comportamento elástico-linear do tabuleiro formado por lajes maciças e vigas de concreto armado. Será realizado um estudo da resposta estática através da determinação esforços (reações de apoio e momentos fletores) e deslocamentos (flechas).

Para esse estudo foi elaborado um exemplo prático onde por meio da iteração de valores geométricos (h_v e h_l) será analisada a sua influência no comportamento dos esforços no tabuleiro de estudo. Segue abaixo os tópicos de estudo:

- a) Analisar os resultados obtidos aplicando os métodos simplificados (tabelas) e o MEF para a mesma geometria do tabuleiro de estudo;
- b) Efeito da flexibilidade dos elementos de laje e viga na resposta estática do conjunto. O efeito da flexibilidade (que é o inverso da rigidez) será estudando por meio da variação dos valores de h_l (espessura da laje) e h_v (altura das vigas de bordo) da seguinte forma:
 - Os elementos de viga, para a mesma espessura de laje, a sua altura h_v irá variar de 50, 60, 70 e 80 90 e 100 cm;
 - Panos de laje, para uma mesma altura de viga, terão sua espessura h_l variando de 15, 23, 30 e 40 e 50 cm;
- c) Os resultados obtidos foram analisados e a partir desta etapa será possível discutir sobre as premissas iniciais de pré-dimensionamento e a partir de uma relação $R = h_l/h_v$, realizar a interpretação do seu efeito no comportamento da estrutura;
- d) Alguns efeitos não serão considerados neste trabalho, para efeito de simplificação, são eles:
 - Influência dos pilares para a obtenção dos esforços;
 - Esforços de torção nas vigas dos bordos, uma vez que esses esforços podem ser desconsiderados (torção de compatibilidade);
 - Esforços de cisalhamento e efeito de fissuração dos elementos (para análise numérica).

A obtenção da resposta estática dos elementos de laje e viga, esforços internos e deslocamento são obtidos por meio das análises dos resultados através do método simplificado e o método numérico (MEF).

Para avançar nesta análise, foram adotadas algumas premissas com relação aos carregamentos considerados:

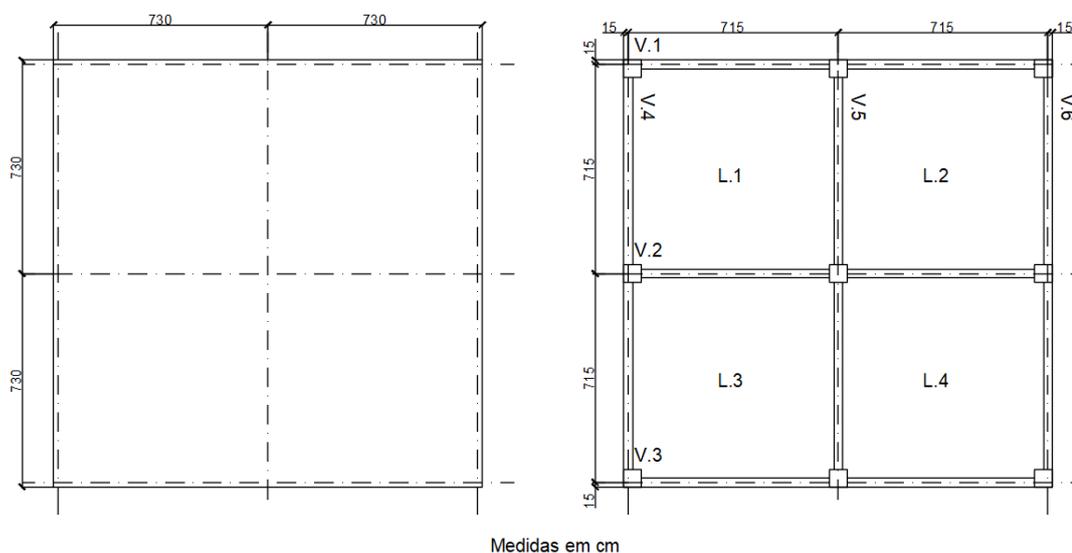
- a) Para todas as geometrias, a sobrecarga de cálculo será igual à 10 kN/m² em todas as lajes;

- b) Concreto classe C30, com peso específico $g_c = 25 \text{ kN/m}^3$;
- c) Coeficiente de majoração dos esforços $g_d = 1,4$;
- d) Módulo de elasticidade $E_{ci} = 5600\sqrt{30} = 30.672,46 \text{ kN/cm}^2$
- e) Coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$;
- f) Cobrimento : 5,0 cm para vigas e 4,5 cm para lajes;

4.2 Tabuleiro a ser estudado

O tabuleiro de estudo é composto por 4 lajes quadradas adjacentes entre si, medindo 730 cm para cada lado, conforme Figura 21. As vigas serão divididas em duas regiões: as de bordo e as internas, que servirão de apoio para as lajes. Como neste trabalho não será considerada a modelagem dos pilares, os mesmos serão inseridos como apoios simples com seus movimentos restringidos quanto à rotação e o deslocamento nos três eixos.

Figura 21 -Tabuleiro a ser estudado.



Fonte: Do autor (2023).

4.3 Análise por meio do método simplificado pelas tabelas de Bares

A análise com utilização de métodos tradicionais de cálculo de foi realizada com o auxílio de tabelas, para cálculo dos momentos fletores e flechas das lajes (no centro da placa). Foram utilizadas as tabelas apresentadas por Bares (1970) e adaptadas por Pinheiro (1994).

4.4 Análise numérica por meio do método dos elementos finitos

A análise pelo método numérico (MEF) utilizada para a comparação com os resultados dos demais métodos, foi realizada através do software *STRAP*, versão 2021. O programa está licenciado à empresa Pöyry Tecnologia LTDA, que incentivou e cedeu os meios para o desenvolvimento deste trabalho.

Figura 22 - Software numérico STRAP.



Fonte: ATIRSOFT (2023).

O STRAP é capaz de realizar análises estáticas lineares, estas análises envolvem uma solução de um modelo com equações lineares de seus elementos.

As vigas são modeladas por elementos de barra (elementos de linha) definidos entre dois nós e podem ser orientados em qualquer lugar no espaço podendo ter até seis graus de liberdade, o que permite sua translação e rotação.

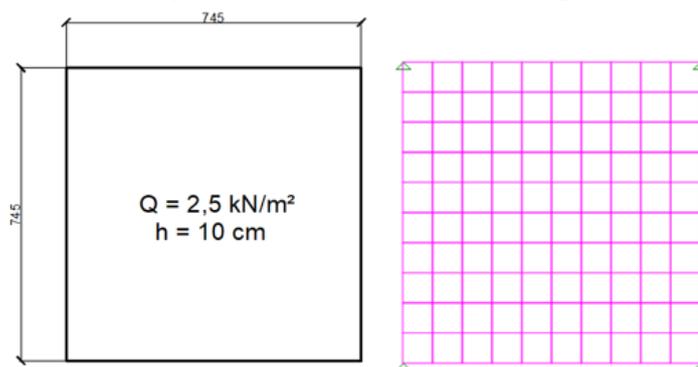
O usuário pode escolher como resultados gráficos serão exibidos, incluindo forças internas (momentos, deslocamentos, tensões e reações). Para elementos de placa, os resultados podem ser exibidos como um mapa de contorno, nos centros dos elementos ou ao longo de uma linha.

4.5 Validação do modelo numérico

Antes de iniciar o processo de modelagem propriamente dito, é necessário que se faça o processo de convergência da malha. Uma vez que o domínio físico do problema é dividido em pequenas regiões, com formas geométricas simples, como retângulos. A importância desse processo de convergência de malha está relacionada à obtenção de resultados confiáveis. Quando a malha é muito grosseira, com poucos elementos, a solução numérica pode ser imprecisa e não representar adequadamente o comportamento real do sistema físico em estudo.

No entanto, é importante encontrar um equilíbrio adequado na convergência de malha, podendo levar a um aumento significativo do tempo de processamento computacional, já que mais elementos precisam ser calculados. Além disso, pode tornar a interpretação dos resultados mais difícil, especialmente em problemas tridimensionais. Para o caso deste trabalho, será utilizada uma malha parcial do tabuleiro, cuja as dimensões são mostradas na Figura 23, seguido dos seus carregamentos e condições de contorno.

Figura 23 - Validação do modelo através da convergência de malhas.



Fonte: Do autor (2023).

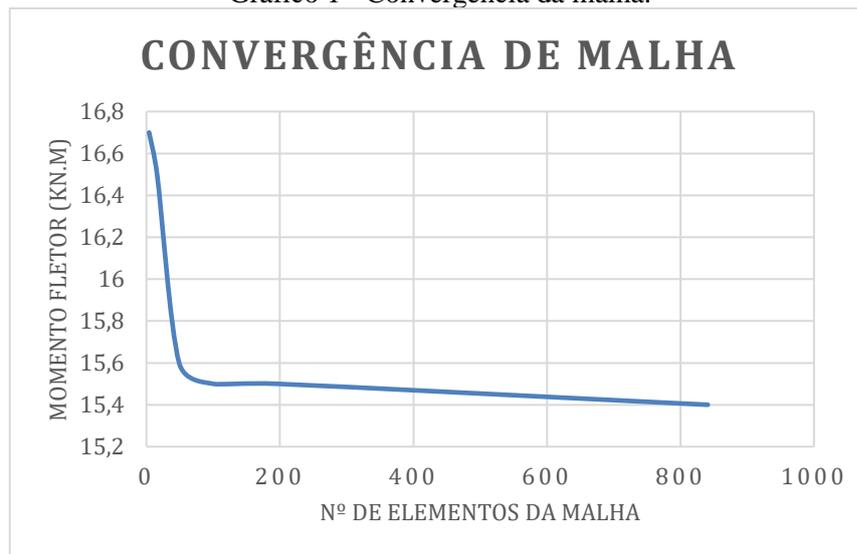
Para a geometria ilustrada na Figura 23, foi realizado o procedimento iterativo para avaliar a resposta gerada para as diferentes composições de malha. Como mostra a Tabela 4, a medida que a malha vai sendo discretizada, a variável de resposta tende ao valor de $M^+ = 15,5$ kN.m, sofrendo leve alteração com o seu refinamento.

Tabela 4 - Convergência da malha.

Nº Elementos de malha	Área do elemento (m ²)	M ⁺ (kN . m)
16	2,0	16,5
49	1,0	15,5
100	0,75	15,5
196	0,50	15,5
841	0,25	15,4

Fonte: Do autor (2023).

Gráfico 1 - Convergência da malha.



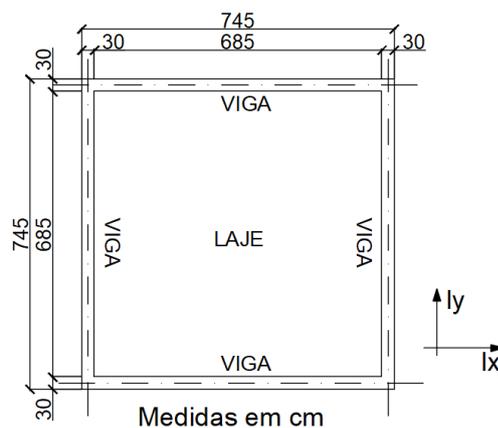
Fonte: Do autor (2023).

Buscado otimizar o processamento e evitar um alto custo computacional, a malha adequada para a modelagem do tabuleiro será de $0,75 \text{ m}^2$ (100 elementos) uma vez que não houve ganhos significativos para malhas de menor dimensão.

4.6 Definição dos elementos estruturais

Com a determinação da geometria geral da estrutura, e a adoção da premissa inicial de que a estrutura está inserida em um ambiente industrial, podemos calcular por meio das expressões anteriormente apresentadas a geometria dos elementos que formam o tabuleiro de estudo (Figura 24). As equações abaixo fornecem os valores de altura geométrica das vigas e lajes, respectivamente.

Figura 24 - Elementos estruturais do tabuleiro.



Fonte: Do autor (2023).

$$l_{ef} = 685 + 15 + 15 = 715 \text{ cm} \quad (43)$$

$$\lambda = \frac{715}{715} = 1,0 \quad (44)$$

$$d = (2,5 - 0,1 \times 2) 7,5 = 17,25 \text{ cm} \quad (45)$$

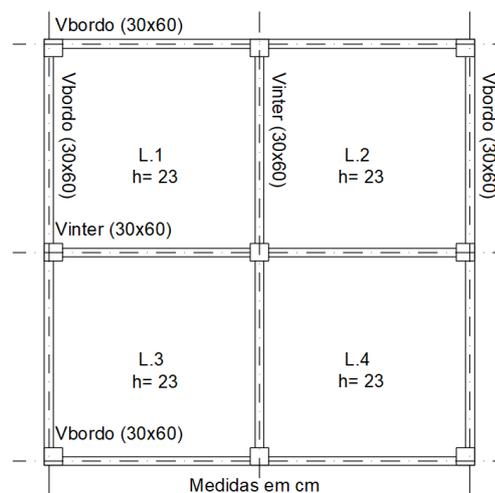
$$h_l = 17,25 + \frac{0,8}{2} + 4,5 = 22,15 = 23,0 \text{ cm} \quad (46)$$

Conhecida a altura a laje, a dimensão da viga (h_v) é dada a partir da divisão do vão efetivo por doze (Equação 47).

$$h_v = \frac{715}{12} = 59,6 = 60 \text{ cm} \quad (47)$$

A partir deste ponto, é possível prosseguir com os cálculos necessários para a comparação entre o método tradicional por meio de tabelas e a análise numérica uma vez que todas as variáveis geométricas podem ser apresentadas, conforme Figura 25:

Figura 25: Tabuleiro com geometrias definidas.



Fonte: Do autor (2023).

4.7 Análise para o caso 0

O caso 0 será analisado através da comparação entre o procedimento tradicional (tabelas) e o procedimento numérico (MEF), conforme Tabela 5.

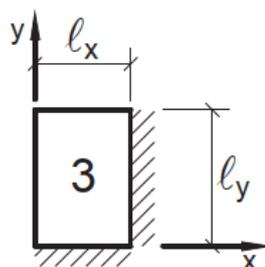
Tabela 5 – Caso 0.

CASO 0			
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R
Convencional	60	23	0,38
Numérica (MEF)	60	23	0,38

Fonte: Do autor (2023).

Para a realização do procedimento tradicional, primeiro é necessário definir qual o tipo de laje se trata o caso de estudo. Analisando a Figura 25, é possível determinar que as lajes que compõem o tabuleiro que de acordo com as tabelas de Bares (1970) são do tipo 3, conforme Figura 26.

Figura 26 – Tipologia da laje de estudo conforme Bares (1970).



Fonte: Bares (1970).

Definida a tipologia dos apoios do pano de laje, e conhecido o λ , pode-se determinar a carga de cálculo atuante na laje (q_d) e seus coeficientes tabelados para a determinação dos momentos positivos e negativos atuante na estrutura como descrito na Tabela 6.

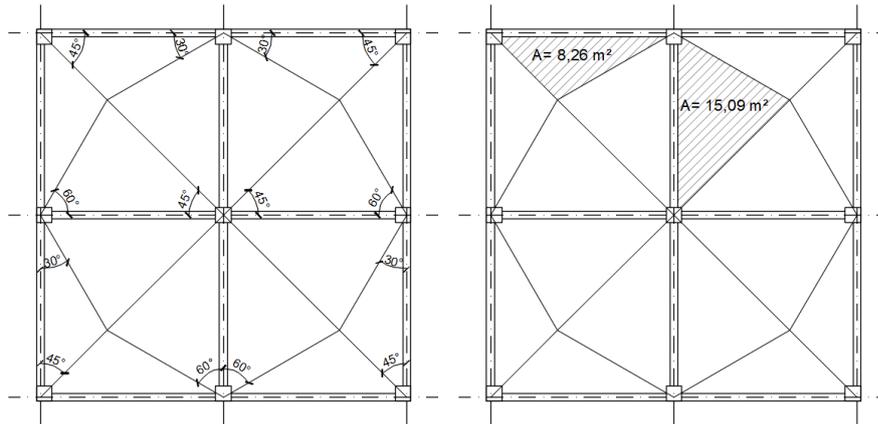
Tabela 6 – Cálculo da carga atuante na laje

Elemento	h_l (cm)	q_{gk} (kN/m ²)	q_{qk} (kN/m ²)	q_k (kN/m ²)	q_d (kN/m ²)
L	23	5,75	10	15,75	22,05

Fonte: Do autor (2023).

Para as vigas, são consideradas de dois tipos distintos: vigas de bordo e vigas internas. A determinação do carregamento das vigas, utilizou-se o método das charneiras plásticas, fazendo a indicação de qual a área de influência a ser considerada na distribuição dos esforços para o elemento de apoio. É ilustrado na Figura 27 as regiões delimitadas pelas charneiras.

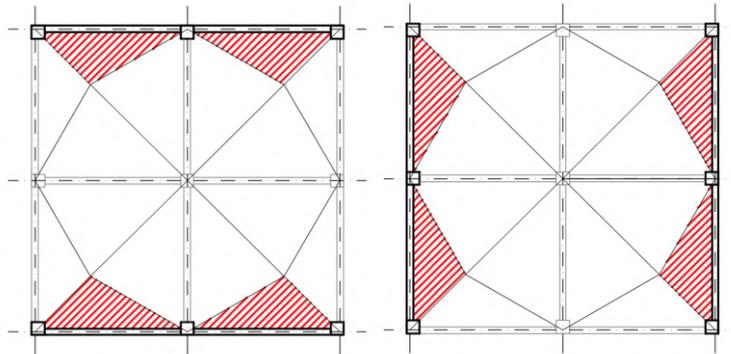
Figura 27 – Charneiras plásticas do tabuleiro.



Fonte: Do autor (2023).

É ilustrado na Figura 28 a contribuição para o carregamento das vigas de bordo, levando em consideração a distribuição de esforços das charneiras são apresentados abaixo.

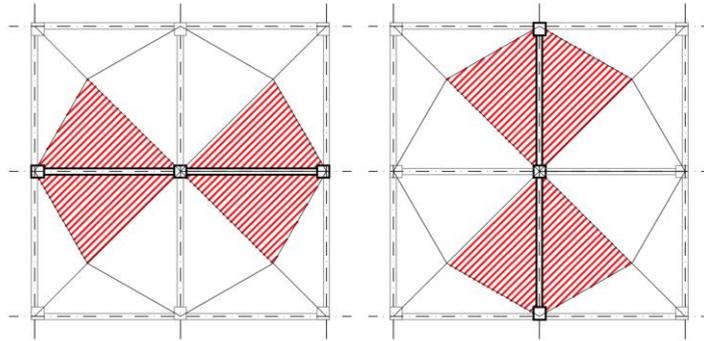
Figura 28 – Áreas de influência para vigas de bordo.



Fonte: Do autor (2023).

É ilustrado na Figura 29 a contribuição para o carregamento das vigas de bordo, levando em consideração a distribuição de esforços das charneiras são apresentados abaixo.

Figura 29 – Áreas de influência para vigas internas.



Fonte: Do autor (2023).

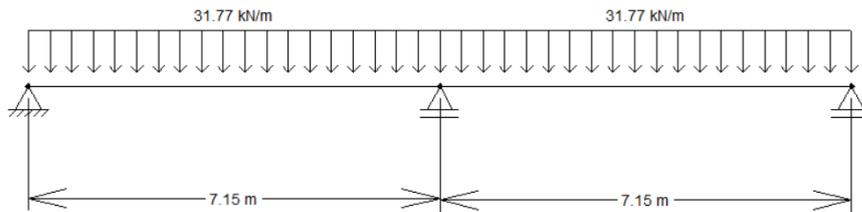
A Tabela 7 resume a contribuição das lajes para o carregamento das vigas internas e de bordo, levando em consideração a distribuição de esforços, como ilustrado nas Figuras 30 e 31.

Tabela 7 – Cargas de cálculo nas vigas de apoio

VIGA	b (cm)	h_v (cm)	Comprimento (m)	Área de Influência (m ²)	Peso Próprio (kN/m)	Carga das Lajes (kN/m)	q_d (kN/m)
V_{bordo}	30	60	14,30	16,52	4,5	18,19	31,77
$V_{inter.}$	30	60	14,30	60,36	4,5	66,48	99,37

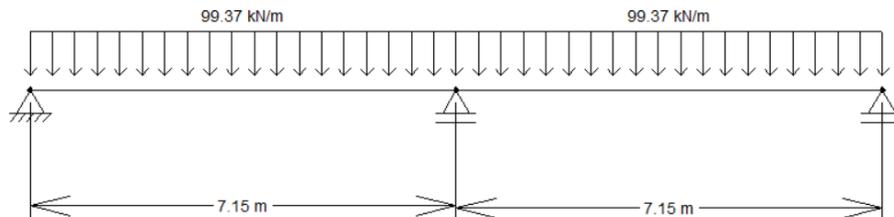
Fonte: Do autor (2023).

Figura 30 – Carregamento das vigas de bordo.



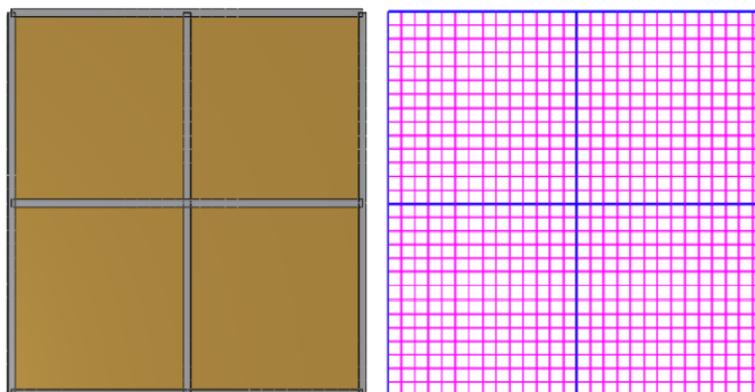
Fonte: Do autor (2023).

Figura 31 – Carregamento das vigas internas.



Fonte: Do autor (2023).

Figura 32 – Representação computacional do tabuleiro.



Fonte: Do autor (2023).

O tabuleiro foi modelado seguindo as diretrizes e premissas adotadas inicialmente onde foram extraídas as informações de esforços internos e deslocamentos verticais, sua geometria é apresentada na Figura 32.

4.8 Análise para os casos 1 e 2

Para os casos 1 e 2, os valores de momentos e de deslocamentos serão interpretados de maneira a expor o comportamento real da estrutura e após a verificação da convergência dos resultados para o caso 0, parte-se para o estudo da influência da rigidez dos apoios na resposta estática. As tabelas 8 e 9 contém os parâmetros de interesse para cada caso.

Tabela 8 – Caso 1

CASO 1			
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R
1.1	50	23	0,46
1.2	60	23	0,38
1.3	70	23	0,33
1.4	80	23	0,29
1.5	90	23	0,26
1.6	100	23	0,23

Fonte: Do autor (2023).

A Tabela 8 apresenta os valores de h_v variando dentro de um limite onde a relação R se aproxima de 0. O objetivo desta variação é entender o comportamento do elemento de laje para o caso do aumento da rigidez dos apoios.

Tabela 9 – Caso 2

CASO 2			
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R
2.1	60	15	0,25
2.2	60	23	0,38
2.3	60	30	0,50
2.4	60	40	0,67
2.5	60	50	0,83

Fonte: Do autor (2023).

A Tabela 9 apresenta os valores de h_l variando dentro de um limite onde a relação R se aproxima de 1,0. O objetivo desta variação é entender o comportamento da estrutura para o caso do aumento da seção da laje e seu efeito sobre as vigas de apoio.

4.9 Análise dos resultados

A apresentação dos resultados pode ser dividida em duas etapas, para o “caso 0” serão apresentadas as respostas para os esforços internos e eventuais desvios para os momentos fletores negativos, positivos e deslocamentos em razão da diferença entre as duas metodologias (simplificada e numérica). Essa análise será realizada a partir da comparação direta dos valores, apresentando o percentual desta diferença e a interpretação e eventuais ressalvas sobre a utilização destas metodologias e seus resultados. A segunda etapa, para o caso 1 e caso 2 será apresentada a resposta numérica para a estrutura a partir das mudanças de geometria e alteração de sua rigidez e sua resposta para cada caso, serão discutidos com o objetivo de realizar a interpretação sobre o comportamento do tabuleiros quando submetidos às mesmas condições descritas neste trabalho, conforme descrito no item 4.1.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O caso 0 é a etapa de determinação dos esforços nos elementos estruturais realizando a determinação analítica dos esforços internos no tabuleiro. Seu desenvolvimento pode ser verificado no procedimento de cálculo detalhado para este caso (Anexo 3) seguindo as premissas conforme descrito no item 4.1 deste trabalho.

O estudo de influência da rigidez dos apoios foi feita a partir do estudo dos casos 1 e 2, onde as seções das vigas e das lajes sofreram alterações em sua geometria para auxiliar na compreensão das respostas estáticas obtidas, analisando o comportamento da estrutura em relação às variações mencionadas para o caso 1, onde, para a seção de h_l constante, variou-se o parâmetro h_v . Para o caso 2, são apresentados os resultados para a variação da a seção de h_l para um valor de h_v constante.

5.1 Resultados obtidos para o caso 0

Os valores para os momentos positivos e negativos para a laje de estudo, são :

$$M^+ = 30,32 \text{ kN.m} \quad (48)$$

$$M^- = 78,79 \text{ kN.m} \quad (49)$$

De acordo com o procedimento tabelado, podemos calcular a área de aço necessária realizando uma simples manipulação matemática.

Sendo:

$$k_c = \frac{bd^2}{M_d} = \frac{100(17,25^2)}{77,96*100} = 9,81 \text{ cm}^2/\text{kN} \quad (50)$$

$$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \quad (51)$$

$$A_s = \frac{M_d k_s}{d} = \frac{7796*(0,025)}{17,25} = 11,30 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (52)$$

Após a determinação do momento fletor devido ao carregamento de cálculo (Equações 46 e 47), pode-se prosseguir para o cálculo do valor do momento raro, necessário para a verificação do estado limite de deformação excessiva (ELS-DEF).

$$M_{raro} = 21,66 \text{ kN.m} \quad (53)$$

Para a verificação do deslocamento vertical, foi realizado o procedimento de verificação da seção para o efeito de fissuração do elemento, obtido através do momento de fissuração, dado pela Equação 54:

$$M_r = 386,16 \text{ kN.m} \quad (54)$$

Para este caso, não será necessário o cálculo da rigidez equivalente para o elemento fissurado, uma vez que o momento solicitante considerado é menor que o momento de fissuração ($M_{raro} < M_r$) portanto, o elemento se encontra do estágio I e o seu deslocamento pode ser calculado como:

$$\delta_t = (2,32)\delta_i \quad (55)$$

$$\delta_t = 0,053 \text{ cm} \quad (56)$$

Partindo para a análise das vigas, o procedimento de cálculo é análogo ao realizado anteriormente para as lajes, exceto para o cálculo dos momentos fletores (Anexo 3). Obtem-se os momentos fletores para as vigas internas e de bordo:

$$M^+_{v_{bordo}} = 114,22 \text{ kN.m} \quad (57)$$

$$M^-_{v_{bordo}} = 203,03 \text{ kN.m} \quad (58)$$

$$\delta_t = 0,049 \text{ cm} \quad (59)$$

$$M^+_{v_{inter}} = 357,25 \text{ kN.m} \quad (60)$$

$$M^-_{v_{inter}} = 635,0 \text{ kN.m} \quad (61)$$

$$\delta_t = 0,15 \text{ cm} \quad (62)$$

A partir dos valores obtidos através dos cálculos analíticos é necessário verificar a convergência do modelo numérico para o caso estudado. Dessa forma, o tabuleiro foi calculado de acordo com as premissas e simplificações necessárias para a validação da resposta estática.

Em um primeiro momento, a rigidez do elemento de apoio foi considerada como sendo elevada (deformação nula), adotando-se um valor do qual não fosse permitido que o elemento de barra se deformasse. Também foi desprezada a rigidez torcional do elemento (J), anulando os momentos negativos nas vigas de bordo em relação aos esforços na laje utilizando o fator “f” para majorar o coeficiente de inércia da seção e minorar o efeito da torção. Os valores dos fatores de inércia e torção estão descritos na Tabela 10:

Tabela 10 – Fator multiplicador de rigidez - Caso 0

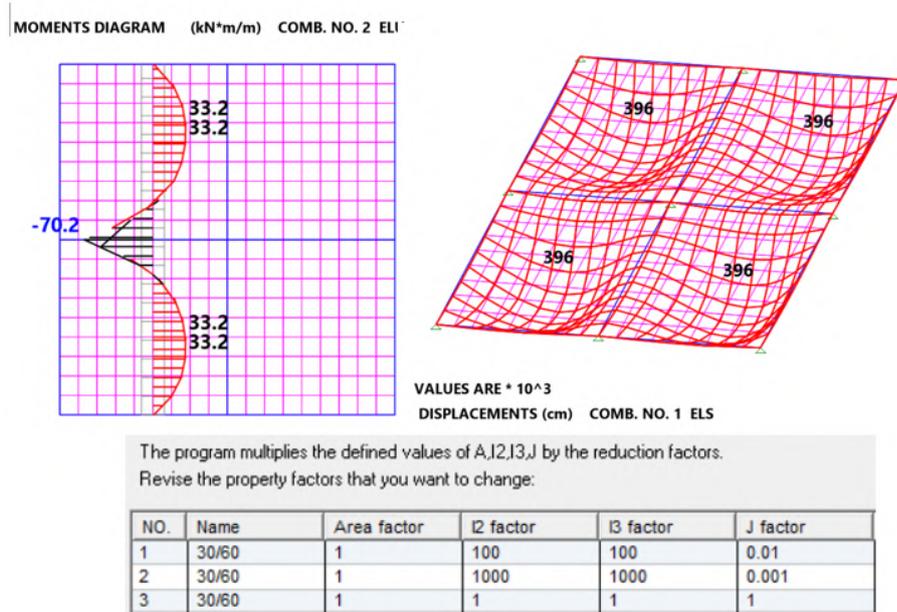
FATOR MULTIPLICADOR			
Hipótese	I_x	I_y	J
Numérica (MEF) *	100	100	1/100
Numérica (MEF) **	1000	1000	1/1000
Numérica (MEF) ***	1,0	1,0	1,0

*Modelo numérico simplificado f = 100;
 **Método numérico simplificado f = 1000
 *** Método numérico f = 1,0

Fonte: Do autor (2023).

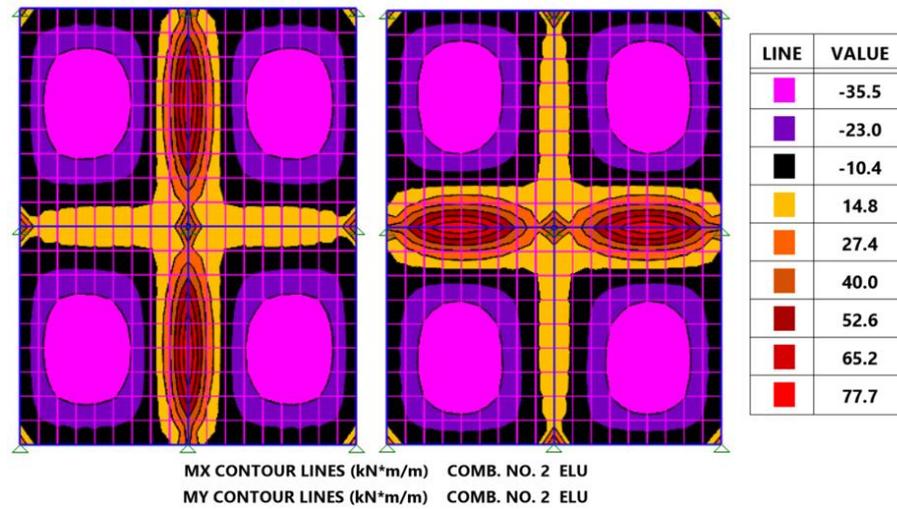
O objetivo destes fatores é analisar a resposta estática dos esforços para condições extremas de rigidez a fim de verificar a convergência do modelo numérico. A rigidez de uma viga está relacionada à sua capacidade de resistir à deformação quando submetida a cargas. Quanto menor sua rigidez, maior será a sua deformação, influenciando a distribuição dos momentos ao longo do seu comprimento. Se uma viga é muito flexível em relação às cargas aplicadas, ela pode apresentar um comportamento chamado de efeito catenária, em que a viga se curva excessivamente, surgindo momentos negativos.

Figura 33: Momentos atuantes na laje (f=100)



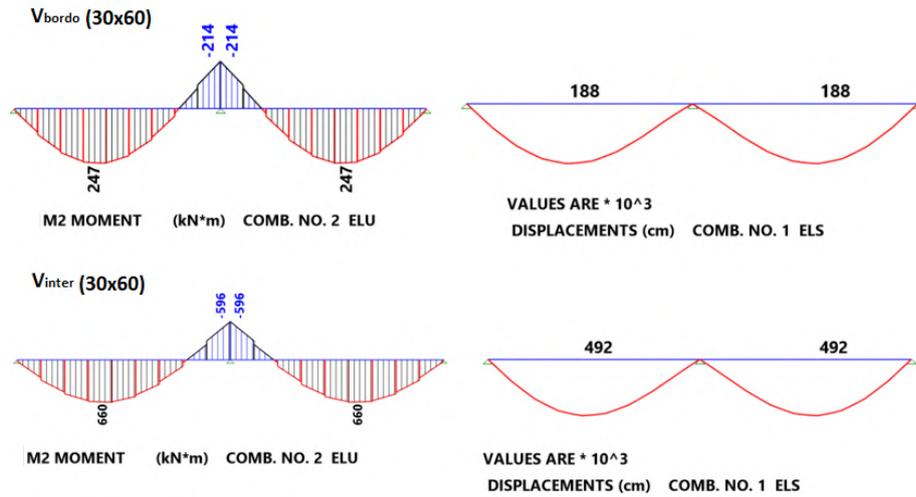
Fonte: Do autor (2023).

Figura 34: Mapa de contorno para momentos fletores (f=100)



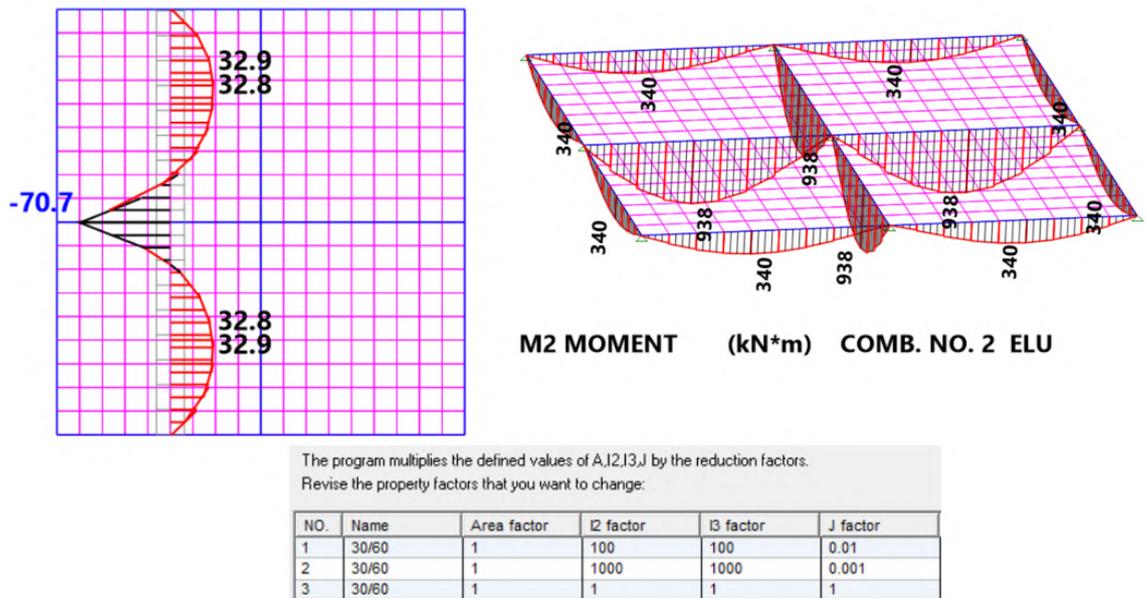
Fonte: Do autor (2023).

Figura 35: Momentos fletores e deslocamentos nas vigas (f=100)



Fonte: Do autor (2023).

Figura 36: Momentos fletores (f=1000)

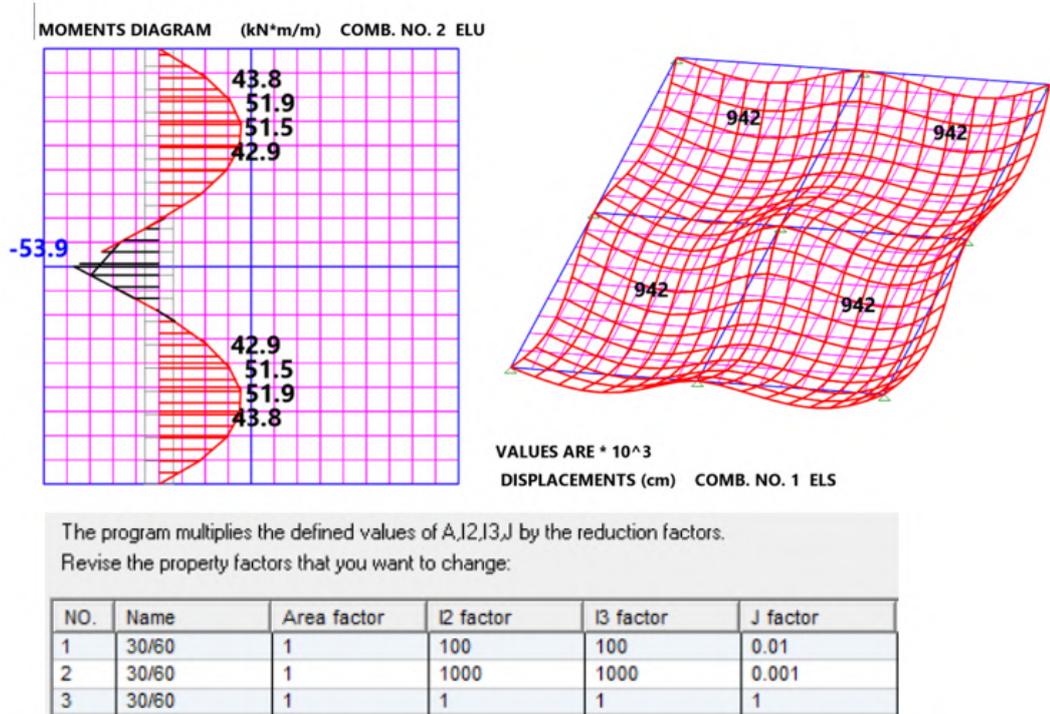


Fonte: Do autor (2023).

Após obtenção dos resultados do modelo numéricos simplificado, verificou-se o resultado para os valores tabelados, exceto pela grande diferença nos deslocamentos do elemento de malha em relação ao valor obtido pela cálculo da flexa total (Anexo 3).

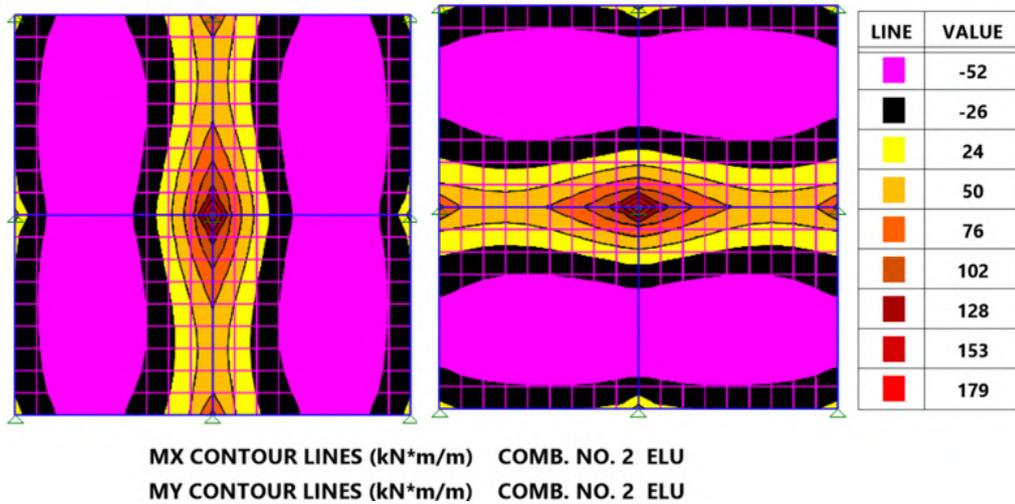
Na etapa seguinte, procedeu-se a modelagem do tabuleiro com as propriedades reais do material (concreto). Nas Figuras 37 e 38 são apresentadas os valores para os esforços e deslocamentos.

Figura 37: Momentos fletores e deslocamento das lajes ($f=1,0$)



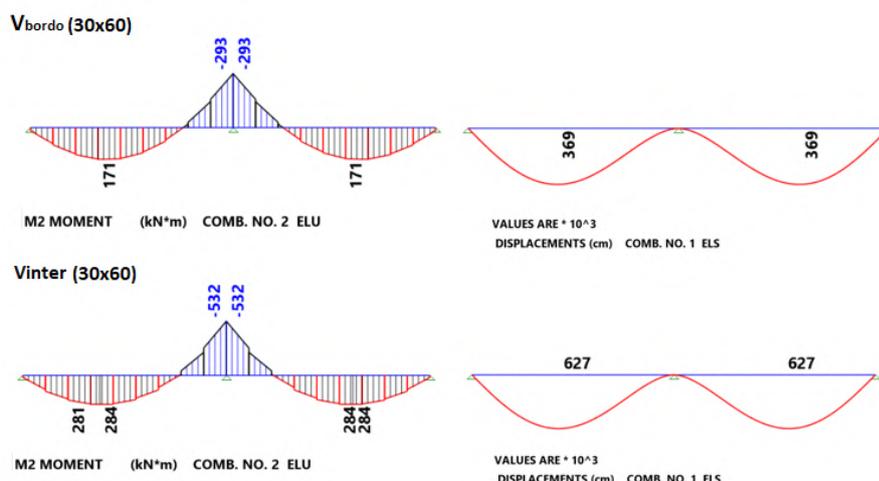
Fonte: Do autor (2023).

Figura 38: Mapa de contorno para os momentos fletores ($f=1,0$)



Fonte: Do autor (2023).

Figura 39: Momentos fletores e deslocamento nas vigas ($f=1,0$)



Fonte: Do autor (2023).

Em resumo, apresenta-se nas Tabelas 11, 12 e 13 a comparação direta entre os resultados obtidos a partir do processamento da estrutura.

Tabela 11 – Resultados para lajes - Caso 0

CASO 0 - LAJES							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
Convencional	60	23	0,38	30,32	78,79	0,053	2,86
Numérica (MEF)*	60	23	0,38	33,20	70,20	0,39	2,86
Numérica (MEF)**	60	23	0,38	32,90	70,70	0,38	2,86
Numérica (MEF)***	60	23	0,38	51,90	53,90	0,94	2,86

*Modelo numérico simplificado $f = 100$;
 **Método numérico simplificado $f = 1000$
 *** Método numérico $f = 1,0$

Fonte: Do autor (2023).

Analisando a Tabela 11, é possível observar que ao se considerar o efeito da rigidez dos elementos de apoio, a resposta para o momento positivo na laje sofreu um aumento de 71,10% e o momento negativo diminuiu cerca de 31,60% quando se compara a hipótese convencional e a hipótese numérica para o caso 0. Esse desvio pode ser interpretado como o consequência da deformação inicialmente desprezada pelo modelo convencional se tratando de uma metodologia simplificada, assim como Melo (2016) e Carvalho (2016) observaram que quando a estrutura se deforma, a sua capacidade de resistência aos esforços é comprometida, aumentando o seu deslocamento e ocasionando uma redistribuição dos momentos, fazendo com que os diagramas apresentem variações.

Pode ser observada também a convergência do modelo para o resultado convencional a medida que a rigidez do apoio é multiplicada pelo fator f , o que reforça a consideração inicial de apoios indeformáveis para o método de dimensionamento por meio de tabelas como mostrado no trabalho de Araújo (2008).

Tabela 12 – Resultados para vigas de bordo - Caso 0

CASO 0 – V_{bordo}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
Convencional	60	23	0,38	114,22	203,03	0,05	2,86
Numérica (MEF)*	60	23	0,38	247,00	214,00	0,21	2,86
Numérica (MEF)**	60	23	0,38	340,0	0,0	0,01	2,86
Numérica (MEF)***	60	23	0,38	171,00	293,00	0,37	2,86

*Modelo numérico simplificado $f = 100$;
 **Método numérico simplificado $f = 1000$
 *** Método numérico $f = 1,0$

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 13 – Resultados para vigas internas - Caso 0

CASO 0 – V_{inter}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
Convencional	60	23	0,38	357,25	635,00	0,15	2,86
Numérica (MEF)*	60	23	0,38	660,00	596,00	0,42	2,86
Numérica (MEF)**	60	23	0,38	938,0	0,0	0,03	2,86
Numérica (MEF)***	60	23	0,38	284,00	532,00	0,63	2,86

*Modelo numérico simplificado $f = 100$;
 **Método numérico simplificado $f = 1000$
 *** Método numérico $f = 1,0$

Fonte: Do autor (2023).

Para a análise das vigas, pode-se observar em um primeiro momento que para o caso 0 houve uma distribuição dos esforços entre as vigas de bordo e vigas internas com certo desvio quando comparado com o método das charneiras plásticas. Para as vigas de bordo (Tabela 12), o momento positivo apresentou um aumento de 49,70%, enquanto o momento negativo aumentou em 44,3%. Em contrapartida, os momentos para as vigas internas (Tabela 13) sofreram redução, 25,79% para o momento positivo e 19,4% para o momento negativo. Esse desvio entre os resultados corrobora com as conclusões de Gonzalez (1997) sugerindo que o método das charneiras plásticas, por possuir simplificações presente resultados divergentes quando comparado com o método numérico que realiza a distribuição dos esforços analisando a deformação da estrutura.

Ainda sobre as vigas, é possível observar que para o caso 0 onde $f=100$, houve um desvio considerável em relação os valores obtidos para os momentos positivos, o que pode ser justificado pelo aumento considerável da rigidez através do fator de multiplicação, o que implica em uma menor tendência de flexão na barra, com a região superior comprimida e a região inferior tracionada, a rigidez da barra afeta a forma como ela resiste a esse momento de flexão. Como a barra é mais rígida, ela possui uma alta resistência à deformação, o que significa que ela passa a suportar momentos positivos maiores.

Para o caso 0, pode-se observar o anulamento do momento positivo em consequência do aumento expressivo da rigidez do elemento de apoio pelo fator multiplicador, fazendo com que ela se comporte como uma estrutura articulada, gerando um aumento na distribuição dos momentos positivos. De acordo com estudos anteriores (Araújo, 2008), os método por meio de tabelas funciona de maneira adequada para lajes apoiadas sob vigas indeformáveis, porém, a modelagem de uma estrutura excessivamente rígida trouxe distorções incompatíveis com o esperado para uma viga contínua idealmente rígida, fazendo com que momentos negativos no apoio intermediário se anulem, tanto para o fator multiplicador $f=100$, quanto $f=1000$ faz-se necessário a avaliação criteriosa do usuário para que as condições de contorno adotadas não ocasionem mudanças no comportamento previsto para a estrutura.

Analisando de maneira geral, o caso em que $f = 1,0$, o método tabelado se mostrou incompatível com o MEF, cuja a principal divergência está em se admitir as lajes perfeitamente engastadas, desconsiderando a deformação real que ocorre no momento de aplicação da carga. Essa deformação faz com que a seção se comporte de maneira não linear, afetando sua capacidade de resistência. Esse fenômeno faz com que o elemento de placa distribua os esforços de modo que os momentos negativos e positivos apresentem um valor divergente ao que prevê as tabelas do método de Bares (1970), adaptadas por Pinheiro (1994).

5.2 Influência da rigidez na resposta estática

Ao se analisar os resultados obtidos pela Tabela 14, onde foi realizado a iteração dos valores de altura das vigas internas e de bordo para o estudo da resposta estática dos esforços internos, pode-se perceber uma tendência nas lajes em absorver uma menor parcela dos esforços de momento positivo. Em seu trabalho, Stramandinoli (2003) apresenta que à medida que a rigidez das vigas de apoio aumentam gradativamente, essas ligações se tornam mais restritivas ao movimento e deformações da laje. Consequentemente, a laje apresentará menor deslocamento e deformação. Isso ocorre porque os apoios mais rígidos são menos flexíveis e têm maior

capacidade de resistir às forças e momentos transmitidos pela laje, alterando o comportamento da laje, fazendo com que ela tenha um comportamento mais rígido e estável, com menor flexibilidade e deslocamentos reduzidos.

Tabela 14 – Resultados para lajes - Caso 1

CASO 1 - LAJES							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
1.1	50	23	0,46	58,50	51,40	1,20	2,86
1.2	60	23	0,38	51,90	53,90	0,94	2,86
1.3	70	23	0,33	46,40	56,30	0,79	2,86
1.4	80	23	0,29	42,30	58,20	0,69	2,86
1.5	90	23	0,26	39,10	59,60	0,58	2,86
1.6	100	23	0,23	36,70	60,50	0,52	2,86

Fonte: Do autor (2023).

As Tabelas 15 e 16 apresentam os resultados convergentes aos propostos por Mazzilli (1995), onde os esforços internos para as vigas tem seu comportamento influenciado diretamente pelo aumento da rigidez, fazendo com que sua capacidade de absorver os esforços também aumente, atenuando os deslocamentos e contribuindo para o aumento dos momentos positivos e negativos devido sua maior capacidade de carga.

Tabela 15 – Resultados para vigas de bordo - Caso 1

CASO 1 – V_{bordo}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
1.1	50	23	0,46	138,00	253,00	0,52	2,86
1.2	60	23	0,38	171,00	293,00	0,37	2,86
1.3	70	23	0,33	196,00	322,00	0,27	2,86
1.4	80	23	0,29	216,00	348,00	0,20	2,86
1.5	90	23	0,26	231,00	359,00	0,15	2,86
1.6	100	23	0,23	244,00	372,00	0,12	2,86

Fonte: Do autor (2023).

Tabela 16 – Resultados para vigas internas - Caso 1

CASO 1 – V_{inter}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
1.1	50	23	0,46	211,00	428,00	0,81	2,86
1.2	60	23	0,38	284,00	532,00	0,63	2,86
1.3	70	23	0,33	348,00	615,00	0,48	2,86
1.4	80	23	0,29	400,00	678,00	0,37	2,86
1.5	90	23	0,26	442,00	725,00	0,29	2,86
1.6	100	23	0,23	475,00	762,00	0,23	2,86

Fonte: Do autor (2023).

Para o caso 2, as tabelas abaixo representam a variação de para a seção de h_l para um valor de h_v constante:

Tabela 17 – Resultados para lajes - Caso 2

CASO 2 - LAJES							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
2.1	60	15	0,25	32,50	51,30	1,69	2,86
2.2	60	23	0,38	51,90	53,90	0,94	2,86
2.3	60	30	0,50	68,20	56,00	0,63	2,86
2.4	60	40	0,67	87,40	62,30	0,38	2,86
2.5	60	50	0,83	103,00	70,90	0,24	2,86

Fonte: Do autor (2023).

É apresentado na Tabela 17 os resultados para as variações na altura da laje de acordo com a metodologia proposta. Pode-se justificar o aumentos dos momentos positivos e negativos de maneira análoga ao que foi exposto para o caso 1 com relação às vigas, pois o aumento da altura da laje, implica em uma maior rigidez, diminuindo a deformação e fazendo com que a laje seja capaz de resistir à maiores solicitações (momentos positivos e negativos), conforme trabalhos anteriores de Bueno, (2013).

Tabela 18 – Resultados para vigas de bordo - Caso 2

CASO 2 – V_{bordo}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
2.1	60	15	0,25	206,00	323,00	0,44	2,86
2.2	60	23	0,38	171,00	293,00	0,37	2,86
2.3	60	30	0,50	138,00	255,00	0,30	2,86
2.4	60	40	0,67	96,10	192,00	0,21	2,86
2.5	60	50	0,83	65,80	140,00	0,15	2,86

Fonte: Do autor (2023).

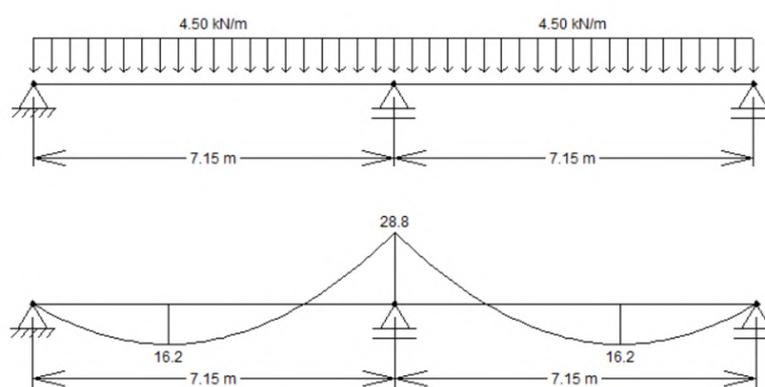
Tabela 19 – Resultados para vigas internas - Caso 2

CASO 2 – V_{inter}							
Hipótese	h_v (cm)	h_l (cm)	R	M^+ (kN.m)	M^- (kN.m)	δ_t (cm)	δ_{lim} (cm)
2.1	60	15	0,25	381,00	640,00	0,82	2,86
2.2	60	23	0,38	284,00	532,00	0,63	2,86
2.3	60	30	0,50	201,00	411,00	0,45	2,86
2.4	60	40	0,67	122,00	270,00	0,28	2,86
2.5	60	50	0,83	78,10	180,00	0,18	2,86

Fonte: Do autor (2023).

As Tabelas 18 e 19 apresentam os resultados para as vigas de bordo e as vigas internas, sendo que ao se aumentar a rigidez da laje, a mesma tende a se comportar de maneira isolada, como previsto por Mazzilli (1995), ou seja, a rigidez da laje adquire tal grandeza que a partir de um momento, começa a trabalhar isoladamente na distribuição dos esforços, fazendo com que os elementos de viga trabalhem essencialmente com as suas cargas de peso próprio. Para efeito de comparação, se adotarmos os valores de carga contidos na Tabela 7 somente para o peso próprio das vigas igual à 4,5 kN/m teremos os resultados conforme a Figura 40:

Figura 40: Diagrama das vigas submetidas ao peso próprio



Fonte : Do autor (2023).

Podemos justificar então que para o caso 2, as vigas tendem a serem aliviadas conforme a rigidez da laje aumenta, fazendo com que o próprio elemento de placa faça a distribuição dos esforços.

Para os casos 1 e 2, pode-se concluir que a diferença encontrada entre o cálculo com uso de tabelas e o cálculo utilizando o MEF, será menor quanto maior for a rigidez da viga em relação à laje. Para modelagens numéricas, conclui-se que, quando R (índice laje/viga muito menor que um), se aproxima de 0 (zero), a relação entre os resultados obtidos por MEF e tabelas para a resposta estática (referente a momentos fletores e deslocamentos) tende à diminuir.

A partir dos resultados, é possível determinar que a rigidez dos elementos tem influência direta no resultado estático da estrutura. Estudos anteriores (Bueno, (2013); Araújo, (2008)) contribuem para o entendimento de que os cálculos tabelados para lajes engastadas não é indicado quando apoiadas sob vigas flexíveis, uma vez que a resposta estática é comprometida devido as simplificações adotadas. O método tabelado consiste em calcular todas as lajes como sendo perfeitamente engastadas para a determinação dos momentos fletores positivos, flechas e reações de apoio.

5.3 Síntese dos resultados

Após a análise referentes a cada caso, é possível sintetizar os resultados obtidos da seguinte forma:

Para o caso 0, o métodos de Bares (1970) se mostrou adequado para a determinação de esforços em lajes sob apoios indeformáveis conforme observado pela modelagem numérica para $f=100$ e $f=1000$, porém, ao se analisar os esforços em vigas, o método numérico demonstrou distorções incompatíveis com os cálculos realizados.

Os casos 1 e 2 demonstraram o comportamento dos elementos que constituem o tabuleiro a medida que sua rigidez é alterada a partir da variação da seção geométrica. Os resultados obtidos permitem que o usuário seja capaz de interpretar e prever o comportamento da estrutura para os diferentes casos apresentados.

6 CONCLUSÕES

Quando se utiliza as tabelas de Bares (1970) para o cálculo de lajes, está se considerando que as lajes tenham os bordos indeformáveis e/ou indeslocáveis. Como foi verificado, para o tabuleiro, essa condição de indeformabilidade, dos bordos de lajes, só é atingida com a adoção de seções transversais que garantam uma grande rigidez à flexão para as vigas de apoio, o que acontece a medida que R se aproxima de zero. A partir desta análise, é possível concluir que o método de Bares (1970) não é indicado para o dimensionamento de lajes apoiadas sob vigas flexíveis, sendo necessária a consideração da deformação ocasionada pelo carregamento da estrutura como demonstrou o modelo numérico (caso 0, $f= 1,0$).

Para o modelo estudado a determinação dos parâmetros geométricos iniciais (h_v e h_l) mostrou-se aceitável, pois, a análise resultante atende aos estados limites (ELS-DEF e ELU) o que possibilita um dimensionamento econômico.

Contudo, conclui-se que o método tabelado e o método numérico possuem aplicações válidas para o estudos das estruturas de concreto armado, devendo-se manter integral atenção por parte do engenheiro na escolha dos critérios a serem adotados para o cálculo ou modelagem do ambiente a ser trabalhado.

7 REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO A. **Elementos finitos**: a base da tecnologia CAE. [S.l.]: Érica, 2009.
- ARAÚJO, J. M. de. **Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, v. 8, n. 12, p. 1–11, 2008.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. 2 v.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2019.
- BARES, R. **Tablas para el cálculo de placas y vigas pared**. Barcelona: Gustavo Gili, 1970.
- BASTOS, P. S. **Lajes de concreto armado**. Bauru: UNESP, 2021. 109 p.
- BRASIL, R. M. L. R. F. **Chapas, placas e cascas da engenharia aeroespacial**. São Paulo: Edgard Blucher, 2020.
- BUENO, J. R. **Influência da flexibilidade de vigas de apoio no projeto de lajes maciças de concreto armado**. 2013. 196 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
- CAMPILHO, Raul. **Método de Elementos Finitos**: Ferramentas para Análise Estrutural. [S.L.]: Publindústria, 2012.
- CARVALHO, P. G. S. **Análise estrutural de placas: modelagem computacional para as teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff**. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, Brasília, v. 2, n. 23, p. 257-276, nov., 2016.
- GONZALEZ, R. L. M. , **Análise de Lajes pela teoria das Charneiras Plásticas e Comparação de Custos entre Lajes Maciças e Lajes Treliçadas**. 142 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, 1997.
- HENNRICHS, C. A. **Estudos sobre a Modelagem de Lajes Planas**. 201 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado**: cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais. São Paulo: Pini, 2007.
- KWON, W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. New York: CRC Press, 1996.
- MARTHA, L. F. **Métodos básicos da análise de estruturas**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2007.

MAZZILLI, A. R. P. **Influência da flexibilidade das vigas e das lajes nos esforços das estruturas de concreto armado**. 1995. 211 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

MELO, C. E. L. **Análise estrutural com o SAP2000**. Brasília: Faculdade de Arquitetura e Urbanismo - Universidade de Brasília, 2016.

MOAVENI, S. **Finite element analysis: theory and application with ANSYS**. 4. ed. Londres: Pearson, 2014.

PINHEIRO, L. M. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios**. 1988. 314 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

PINHEIRO, L. M. **Concreto armado: tabelas e ábacos**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 1994.

REDDY, J. N. **Theory and analysis of elastic plates and shells**. Boca Raton: CRC Press, 2006.

SOUZA, R. M. **Método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor**. Belém: NICAÉ - Universidade Federal do Pará, 2003. 41 p.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. 2003. 199 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS. Biblioteca Universitária. **Manual normalização e estrutura de trabalhos acadêmicos: TCCs, monografias, dissertações e teses**. 3. ed. Lavras, 2020. Disponível em: <https://encurtador.com.br/ctEFL>. Acesso em: 09 jul. 2023.

ANEXOS

ANEXO 1 – TABELAS PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES SUBMETIDAS À CARREGAMENTO UNIFORME, PROPOSTA POR BARES (1970) E ADAPTADAS POR PINHEIRO (1994).

Tabela A-1									
FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME – VALORES DE α									
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo de Laje								
	1	2A	2B	3	4A	4B	5A	5B	6
1,00	4,76	3,26	3,26	2,46	2,25	2,25	1,84	1,84	1,49
1,05	5,26	3,68	3,48	2,72	2,60	2,35	2,08	1,96	1,63
1,10	5,74	4,11	3,70	2,96	2,97	2,45	2,31	2,08	1,77
1,15	6,20	4,55	3,89	3,18	3,35	2,53	2,54	2,18	1,90
1,20	6,64	5,00	4,09	3,40	3,74	2,61	2,77	2,28	2,02
1,25	7,08	5,44	4,26	3,61	4,14	2,68	3,00	2,37	2,14
1,30	7,49	5,88	4,43	3,80	4,56	2,74	3,22	2,46	2,24
1,35	7,90	6,32	4,58	3,99	5,01	2,77	3,42	2,53	2,34
1,40	8,29	6,74	4,73	4,15	5,41	2,80	3,62	2,61	2,41
1,45	8,67	7,15	4,87	4,31	5,83	2,85	3,80	2,67	2,49
1,50	9,03	7,55	5,01	4,46	6,25	2,89	3,98	2,73	2,56
1,55	9,39	7,95	5,09	4,61	6,66	2,91	4,14	2,78	2,62
1,60	9,71	8,32	5,18	4,73	7,06	2,92	4,30	2,82	2,68
1,65	10,04	8,68	5,22	4,86	7,46	2,92	4,45	2,83	2,73
1,70	10,34	9,03	5,26	4,97	7,84	2,93	4,59	2,84	2,77
1,75	10,62	9,36	5,36	5,06	8,21	2,93	4,71	2,86	2,81
1,80	10,91	9,69	5,46	5,16	8,58	2,94	4,84	2,88	2,85
1,85	11,16	10,00	5,53	5,25	8,93	2,94	4,96	2,90	2,88
1,90	11,41	10,29	5,60	5,33	9,25	2,95	5,07	2,92	2,90
1,95	11,65	10,58	5,68	5,41	9,58	2,95	5,17	2,94	2,93
2,00	11,89	10,87	5,76	5,49	9,90	2,96	5,28	2,96	2,96
∞	15,63	15,63	6,50	6,50	15,63	3,13	6,50	3,13	3,13

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994)

$$a_i = \frac{\alpha p \ell_x^4}{12 EI}$$

p = carga uniforme ℓ_x = menor vão ℓ_y = maior vão
E = módulo elasticidade h = altura da laje

Tabela A-5									
REAÇÕES DE APOIO EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo								$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$
	1		2A			2B			
	V_x	V_y	V_x	V_y	V'_y	V_x	V'_x	V_y	
1,00	2,50	2,50	1,83	2,75	4,02	2,75	4,02	1,83	1,00
1,05	2,62	2,50	1,92	2,80	4,10	2,82	4,13	1,83	1,05
1,10	2,73	2,50	2,01	2,85	4,17	2,89	4,23	1,83	1,10
1,15	2,83	2,50	2,10	2,88	4,22	2,95	4,32	1,83	1,15
1,20	2,92	2,50	2,20	2,91	4,27	3,01	4,41	1,83	1,20
1,25	3,00	2,50	2,29	2,94	4,30	3,06	4,48	1,83	1,25
1,30	3,08	2,50	2,38	2,95	4,32	3,11	4,55	1,83	1,30
1,35	3,15	2,50	2,47	2,96	4,33	3,16	4,62	1,83	1,35
1,40	3,21	2,50	2,56	2,96	4,33	3,20	4,68	1,83	1,40
1,45	3,28	2,50	2,64	2,96	4,33	3,24	4,74	1,83	1,45
1,50	3,33	2,50	2,72	2,96	4,33	3,27	4,79	1,83	1,50
1,55	3,39	2,50	2,80	2,96	4,33	3,31	4,84	1,83	1,55
1,60	3,44	2,50	2,87	2,96	4,33	3,34	4,89	1,83	1,60
1,65	3,48	2,50	2,93	2,96	4,33	3,37	4,93	1,83	1,65
1,70	3,53	2,50	2,99	2,96	4,33	3,40	4,97	1,83	1,70
1,75	3,57	2,50	3,05	2,96	4,33	3,42	5,01	1,83	1,75
1,80	3,61	2,50	3,10	2,96	4,33	3,45	5,05	1,83	1,80
1,85	3,65	2,50	3,15	2,96	4,33	3,47	5,09	1,83	1,85
1,90	3,68	2,50	3,20	2,96	4,33	3,50	5,12	1,83	1,90
1,95	3,72	2,50	3,25	2,96	4,33	3,52	5,15	1,83	1,95
2,00	3,75	2,50	3,29	2,96	4,33	3,54	5,18	1,83	2,00
> 2,00	5,00	2,50	5,00	2,96	4,33	4,38	6,25	1,83	> 2,00

Tabela elaborada por PINHEIRO (1994) conforme NBR 6118.

$V = v \frac{p \ell_x}{10}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

(*) os alívios foram considerados pela metade, prevendo a possibilidade de engastes parciais.

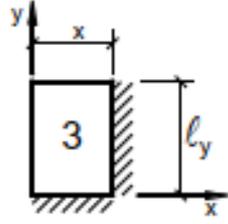
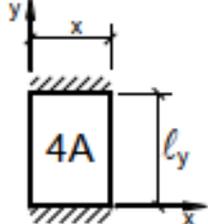
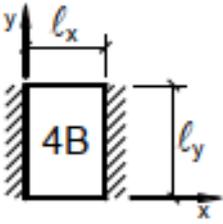
Tabela A-6										
REAÇÕES DE APOIO EM LAJES COM CARGA UNIFORME										
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo								$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	
										
	v_x	v'_x	v_y	v'_y	v_x	v'_y	v'_x	v_y		
1,00	2,17	3,17	2,17	3,17	1,44	3,56	3,56	1,44	1,00	
1,05	2,27	3,32	2,17	3,17	1,52	3,66	3,63	1,44	1,05	
1,10	2,36	3,46	2,17	3,17	1,59	3,75	3,69	1,44	1,10	
1,15	2,45	3,58	2,17	3,17	1,66	3,84	3,74	1,44	1,15	
1,20	2,53	3,70	2,17	3,17	1,73	3,92	3,80	1,44	1,20	
1,25	2,60	3,80	2,17	3,17	1,80	3,99	3,85	1,44	1,25	
1,30	2,63	3,90	2,17	3,17	1,88	4,06	3,89	1,44	1,30	
1,35	2,73	3,99	2,17	3,17	1,95	4,12	3,93	1,44	1,35	
1,40	2,78	4,08	2,17	3,17	2,02	4,17	3,97	1,44	1,40	
1,45	2,84	4,15	2,17	3,17	2,09	4,22	4,00	1,44	1,45	
1,50	2,89	4,23	2,17	3,17	2,17	4,25	4,04	1,44	1,50	
1,55	2,93	4,29	2,17	3,17	2,24	4,28	4,07	1,44	1,55	
1,60	2,98	4,36	2,17	3,17	2,31	4,30	4,10	1,44	1,60	
1,65	3,02	4,42	2,17	3,17	2,38	4,32	4,13	1,44	1,65	
1,70	3,06	4,48	2,17	3,17	2,45	4,33	4,15	1,44	1,70	
1,75	3,09	4,53	2,17	3,17	2,53	4,33	4,18	1,44	1,75	
1,80	3,13	4,58	2,17	3,17	2,59	4,33	4,20	1,44	1,80	
1,85	3,16	4,63	2,17	3,17	2,63	4,33	4,22	1,44	1,85	
1,90	3,19	4,67	2,17	3,17	2,72	4,33	4,24	1,44	1,90	
1,95	3,22	4,71	2,17	3,17	2,78	4,33	4,26	1,44	1,95	
2,00	3,25	4,75	2,17	3,17	2,83	4,33	4,28	1,44	2,00	
> 2,00	4,38	6,25	2,17	3,17	5,00	4,33	5,00	1,44	> 2,00	

Tabela elaborada por PINHEIRO (1994) conforme NBR 6118.

$V = v \frac{p \ell_x}{10}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

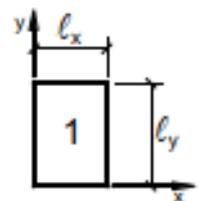
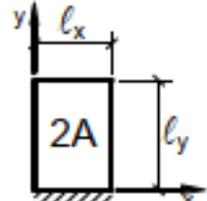
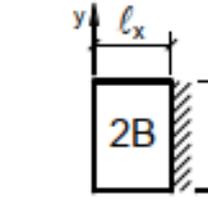
(*) os alívios foram considerados pela metade, prevendo a possibilidade de engastes parciais.

Tabela A-7									
REAÇÕES DE APOIO EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo								$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$
	5A			5B			6		
	v_x	v'_x	v'_y	v'_x	v_y	v'_y	v'_x	v'_y	
1,00	1,71	2,50	3,03	3,03	1,71	2,50	2,50	2,50	1,00
1,05	1,79	2,63	3,08	3,12	1,71	2,50	2,62	2,50	1,05
1,10	1,88	2,75	3,11	3,21	1,71	2,50	2,73	2,50	1,10
1,15	1,96	2,88	3,14	3,29	1,71	2,50	2,83	2,50	1,15
1,20	2,05	3,00	3,16	3,36	1,71	2,50	2,92	2,50	1,20
1,25	2,13	3,13	3,17	3,42	1,71	2,50	3,00	2,50	1,25
1,30	2,22	3,25	3,17	3,48	1,71	2,50	3,08	2,50	1,30
1,35	2,30	3,36	3,17	3,54	1,71	2,50	3,15	2,50	1,35
1,40	2,37	3,47	3,17	3,59	1,71	2,50	3,21	2,50	1,40
1,45	2,44	3,57	3,17	3,64	1,71	2,50	3,28	2,50	1,45
1,50	2,50	3,66	3,17	3,69	1,71	2,50	3,33	2,50	1,50
1,55	2,56	3,75	3,17	3,73	1,71	2,50	3,39	2,50	1,55
1,60	2,61	3,83	3,17	3,77	1,71	2,50	3,44	2,50	1,60
1,65	2,67	3,90	3,17	3,81	1,71	2,50	3,48	2,50	1,65
1,70	2,72	3,98	3,17	3,84	1,71	2,50	3,53	2,50	1,70
1,75	2,76	4,04	3,17	3,87	1,71	2,50	3,57	2,50	1,75
1,80	2,80	4,11	3,17	3,90	1,71	2,50	3,61	2,50	1,80
1,85	2,85	4,17	3,17	3,93	1,71	2,50	3,65	2,50	1,85
1,90	2,89	4,22	3,17	3,96	1,71	2,50	3,68	2,50	1,90
1,95	2,92	4,28	3,17	3,99	1,71	2,50	3,72	2,50	1,95
2,00	2,96	4,33	3,17	4,01	1,71	2,50	3,75	2,50	2,00
> 2,00	4,38	6,25	3,17	5,00	1,71	2,50	5,00	2,50	> 2,00

Tabela elaborada por PINHEIRO (1994) conforme NBR 6118.

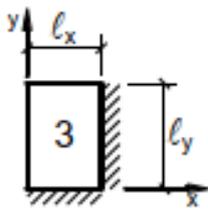
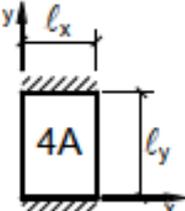
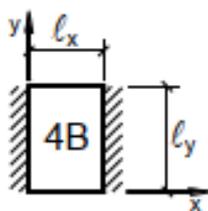
$V = v \frac{p \ell_x}{10}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

(*) os alívios foram considerados pela metade, prevendo a possibilidade de engastes parciais.

Tabela A-8									
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo									Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91	1,00
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84	1,05
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76	1,10
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68	1,15
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59	1,20
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51	1,25
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42	1,30
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34	1,35
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25	1,40
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19	1,45
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12	1,50
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04	1,55
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95	1,60
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87	1,65
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79	1,70
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74	1,75
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68	1,80
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67	1,85
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59	1,90
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54	1,95
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48	2,00
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48	> 2,00

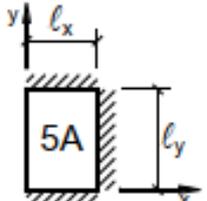
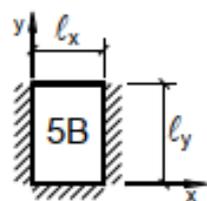
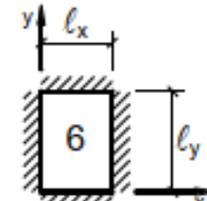
Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

$M = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

Tabela A-9											
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME											
Tipo											Tipo
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99	2,01	3,09	6,99	3,09	6,99	2,01	1,00
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18	2,32	3,23	7,43	3,22	7,20	1,92	1,05
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36	2,63	3,36	7,87	3,35	7,41	1,83	1,10
1,15	3,42	8,28	2,65	7,50	2,93	3,46	8,26	3,46	7,56	1,73	1,15
1,20	3,65	8,69	2,62	7,63	3,22	3,56	8,65	3,57	7,70	1,63	1,20
1,25	3,86	9,03	2,56	7,72	3,63	3,64	9,03	3,66	7,82	1,56	1,25
1,30	4,06	9,37	2,50	7,81	3,99	3,72	9,33	3,74	7,93	1,49	1,30
1,35	4,24	9,65	2,45	7,88	4,34	3,77	9,69	3,80	8,02	1,41	1,35
1,40	4,42	9,93	2,39	7,94	4,69	3,82	10,00	3,86	8,11	1,33	1,40
1,45	4,58	10,17	2,32	8,00	5,03	3,86	10,25	3,91	8,13	1,26	1,45
1,50	4,73	10,41	2,25	8,06	5,37	3,90	10,49	3,96	8,15	1,19	1,50
1,55	4,86	10,62	2,16	8,09	5,70	3,90	10,70	4,00	8,20	1,14	1,55
1,60	4,99	10,82	2,07	8,12	6,03	3,89	10,91	4,04	8,25	1,08	1,60
1,65	5,10	10,99	1,99	8,14	6,35	3,85	11,08	4,07	8,28	1,03	1,65
1,70	5,21	11,16	1,91	8,15	6,67	3,81	11,24	4,10	8,30	0,98	1,70
1,75	5,31	11,30	1,85	8,16	6,97	3,79	11,39	4,12	8,31	0,95	1,75
1,80	5,40	11,43	1,78	8,17	7,27	3,76	11,53	4,14	8,32	0,91	1,80
1,85	5,48	11,55	1,72	8,17	7,55	3,72	11,65	4,15	8,33	0,87	1,85
1,90	5,56	11,67	1,66	8,18	7,82	3,67	11,77	4,16	8,33	0,83	1,90
1,95	5,63	11,78	1,63	8,19	8,09	3,60	11,83	4,16	8,33	0,80	1,95
2,00	5,70	11,89	1,60	8,20	8,35	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,60	8,20	12,50	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

$M = \mu \frac{p \ell_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

Tabela A-10													
MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME													
Tipo													Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	2,02	5,46	2,52	6,17	2,52	6,17	2,02	5,46	2,02	5,15	2,02	5,15	1,00
1,05	2,27	5,98	2,56	6,46	2,70	6,47	1,97	5,56	2,22	5,50	2,00	5,29	1,05
1,10	2,52	6,50	2,60	6,75	2,87	6,76	1,91	5,65	2,42	5,85	1,98	5,43	1,10
1,15	2,76	7,11	2,63	6,97	3,02	6,99	1,84	5,70	2,65	6,14	1,94	5,51	1,15
1,20	3,00	7,72	2,65	7,19	3,16	7,22	1,77	5,75	2,87	6,43	1,89	5,59	1,20
1,25	3,23	8,31	2,64	7,36	3,28	7,40	1,70	5,75	2,97	6,67	1,83	5,64	1,25
1,30	3,45	8,89	2,61	7,51	3,40	7,57	1,62	5,76	3,06	6,90	1,77	5,68	1,30
1,35	3,66	9,47	2,57	7,63	3,50	7,70	1,55	5,75	3,19	7,09	1,71	5,69	1,35
1,40	3,86	10,05	2,53	7,74	3,59	7,82	1,47	5,74	3,32	7,28	1,65	5,70	1,40
1,45	4,05	10,63	2,48	7,83	3,67	7,91	1,41	5,73	3,43	7,43	1,57	5,71	1,45
1,50	4,23	11,21	2,43	7,91	3,74	8,00	1,35	5,72	3,53	7,57	1,49	5,72	1,50
1,55	4,39	11,79	2,39	7,98	3,80	8,07	1,29	5,69	3,61	7,68	1,43	5,72	1,55
1,60	4,55	12,37	2,34	8,02	3,86	8,14	1,23	5,66	3,69	7,79	1,36	5,72	1,60
1,65	4,70	12,95	2,28	8,03	3,91	8,20	1,18	5,62	3,76	7,88	1,29	5,72	1,65
1,70	4,84	13,53	2,22	8,10	3,95	8,25	1,13	5,58	3,83	7,97	1,21	5,72	1,70
1,75	4,97	14,11	2,15	8,13	3,99	8,30	1,07	5,56	3,88	8,05	1,17	5,72	1,75
1,80	5,10	14,69	2,08	8,17	4,02	8,34	1,00	5,54	3,92	8,12	1,13	5,72	1,80
1,85	5,20	15,27	2,02	8,16	4,05	8,38	0,97	5,55	3,96	8,18	1,07	5,72	1,85
1,90	5,30	15,85	1,96	8,14	4,08	8,42	0,94	5,56	3,99	8,24	1,01	5,72	1,90
1,95	5,40	16,43	1,88	8,13	4,10	8,45	0,91	5,60	4,02	8,29	0,99	5,72	1,95
2,00	5,50	17,01	1,80	8,12	4,12	8,47	0,88	5,64	4,05	8,33	0,96	5,72	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,80	8,12	4,17	8,33	0,88	5,64	4,17	8,33	0,96	5,72	> 2,00

Valores extraídos de BARES e adaptada por PINHEIRO (1994).

$M = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

ANEXO 2 – TABELAS PARA O DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS, PROPOSTA POR POR PINHEIRO (1994).

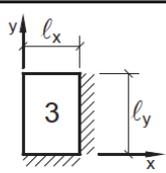
Tabela 1.1													
FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES													
$\beta_c = \frac{x}{d}$	$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$									$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$			D O M I N I O
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020	
0,06	35,2	23,4	17,6	14,1	11,7	10,1	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021	
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,20	11,2	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,22	10,3	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,24	9,5	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,26	8,8	5,9	4,4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,28	8,3	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,052	0,026	0,022	
0,30	7,8	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	2,0	1,7	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,32	7,4	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,34	7,0	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,36	6,7	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	6,4	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	
0,40	6,1	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023	
0,42	5,9	3,9	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023	
0,438	5,7	3,8	2,9	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,44	5,7	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028		
0,46	5,5	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028		
0,48	5,3	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,057	0,029		
0,50	5,2	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029		
0,52	5,0	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029		
0,54	4,9	3,2	2,4	2,0	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,029		
0,56	4,7	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,030		
0,58	4,6	3,1	2,3	1,9	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,060	0,030		
0,60	4,5	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,030		
0,628	4,4	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031		
0,64	4,3	2,9	2,2	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,062			
0,68	4,2	2,8	2,1	1,7	1,4	1,2	1,0	0,9	0,8	0,063			
0,72	4,0	2,7	2,0	1,6	1,3	1,2	1,0	0,9	0,8	0,065			
0,76	3,9	2,6	2,0	1,6	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,066			
0,772	3,9	2,6	1,9	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,067			

Elaborada por Alessandro L. Nascimento e Libânio M. Pinheiro.
De acordo com a NBR 6118:2003.
Diagrama retangular de tensões no concreto, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.
Para $\gamma_c \neq 1,4$, multiplicar b por $1,4/\gamma_c$ antes de usar a tabela.

ANEXO 3 – PROCEDIMENTO DE CÁLCULO PARA O CASO 0

O procedimento tradicional de dimensionamento de lajes e vigas é feito através das tabelas com coeficientes que auxiliam na determinação de esforços internos e taxa de armadura das estruturas. Neste tópico será abordado o procedimento realizado para a obtenção destes esforços para o “caso 0” proposto:

1. Cálculo dos momentos fletores, positivo e negativo para a laje analisada.

Tipo				
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36

$$\lambda = 1,0$$

$$\mu_{xy} = 2,69$$

$$\mu'_{xy} = 6,99$$

$$M^+ = \mu \frac{pl_x^2}{100} = 2,69 * \frac{22,05 * 7,15^2}{100} = 30,32 \text{ kN}$$

$$M^- = \mu \frac{pl_x^2}{100} = 6,99 * \frac{22,05 * 7,15^2}{100} = 78,79 \text{ kN.m}$$

2. Cálculo da flecha total da laje analisada.

2.1- Cálculo do momento raro (ELS-DEF)

$$q_{rara} = \frac{q_d}{g_c} = \frac{22,05}{1,4} = 15,75 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{raro} = \mu \frac{pl_x^2}{100} = 2,69 * \frac{15,75 * 7,15^2}{100} = 21,66 \text{ kN}$$

2.2- Cálculo do momento de início de fissuração.

Para o cálculo do momento de início de fissuração acontece no estágio 1, com a seção íntegra, sendo considerada a etapa de homogeneização da seção da laje.

$$E_s = 210 \text{ GPa} = 210.000,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{ci} = 5600\sqrt{30} = 30.672,46 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_i = 0,8 + 0,2 * \frac{30}{80} = 0,875$$

$$E_{cs} = a_i E_{ci}$$

$$E_{cs} = 0,875 * 30.672,46 = 26.838,40 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_e = \frac{E_s}{E_{ci}} = \frac{210.000,0}{30.672,46} = 6,85$$

A área de aço é retirada da tabela 1.1 conforme ANEXO 2, sendo definida a partir do valor do momento raro. Aço adotado: CA50.

$$k_c = \frac{bd^2}{M_d} = \frac{100(17,25^2)}{30,32*100} = 9,81 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$\beta_c = \frac{x}{d}$	$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$										$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$			DOMÍNIO
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60		
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2	
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020		
0,06	35,2	23,4	17,6	14,1	11,7	10,1	8,6	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020		
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020		
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020		
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020		
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020		
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021		
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021		
0,20	11,2	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021		
0,22	10,3	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021		
0,24	9,5	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021		
0,26	8,8	5,9	4,4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021		

$$k_s = \frac{A_s d}{M_{raro}} = 0,024 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$A_s = \frac{M_d k_s}{d} = \frac{2166 * (0,024)}{17,25} = 2,96 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$x_1 = \frac{\frac{bh^2}{2} + (a_e - 1)A_s d}{bh + (a_e - 1)A_s} = \frac{\frac{100 \cdot 23^2}{2} + (6,85 - 1)2,96 \cdot 17,25}{100 \cdot 23 + (6,85 - 1) \cdot 2,96} = 11,54 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + (a_e - 1)A_s(d - x_1)^2$$

$$I_1 = \frac{100 \cdot 23^3}{12} + 100 \cdot 23 \left(11,54 - \frac{23}{2}\right)^2 + (6,85 - 1) \cdot 2,96 \cdot (17,25 - 11,54)^2$$

$$I_1 = 101.391,67 + 3,68 + 478,74 = 101.874,09 \text{ cm}^4$$

$$a = 1,5 \text{ (seção retangular)}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (30)^{\frac{2}{3}} = 2,896$$

$$y_t = h - x_1 = 23 - 11,54 = 11,46 \text{ cm}$$

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_1}{y_t} = \frac{1,5 \cdot (2,896) \cdot 101.874,09}{11,46} = 386,16 \text{ kN.m}$$

2.3- Cálculo da flecha total da laje

Como $M_{raro} < M_r$, o elemento de laje encontra no estágio 1, portanto, pode-se prosseguir com a determinação da flecha inicial sendo α obtido através da tabela A-1 (Anexo 1):

Tabela A-1									
FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME - VALORES DE α									
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	Tipo de Laje								
	1	2A	2B	3	4A	4B	5A	5B	6
1,00	4,76	3,26	3,26	2,46	2,25	2,25	1,84	1,84	1,49
1,05	5,26	3,68	3,48	2,72	2,60	2,35	2,08	1,96	1,63
1,10	5,74	4,11	3,70	2,96	2,97	2,45	2,31	2,08	1,77
1,15	6,20	4,55	3,89	3,18	3,35	2,53	2,54	2,18	1,90

$$q_{serv} = (1,0 \cdot 5,75) + (0,4 \cdot 15,75) = 12,05 \text{ kN/m}$$

$$\delta_i = \frac{\alpha q_{serv} \ell_x^4}{12 E_{cs} I_1} = \frac{2,46 \cdot (1,205 \cdot 10^{-3}) \cdot (715^4)}{12 \cdot (26.838,40 \cdot 101.874,09)} = 0,024 \text{ cm}$$

$$\delta_f = (1 + \alpha_f)\delta_i$$

$$\delta_f = (1 + 1,32) * 0,024 = 0,053 \text{ cm}$$

$$\delta_{lim} = \frac{l_{ef}}{250} = \frac{715}{250} = 2,86 \text{ cm}$$

Para atender ao limite estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2014), a flecha total deve ser igual ou menor que a flecha limite, portanto, a laje está segura em relação à deslocamentos verticais.

3. Cálculo dos momentos fletores das vigas de bordo e vigas internas

3.1- Momentos nas vigas de bordo

$$q_d = 31,77 \text{ kN/m}$$

$$M^+ = \frac{pl^2}{14,22} = \frac{31,77 * 7,15^2}{14,22} = 114,22 \text{ kN}$$

$$M^- = \frac{pl^2}{8} = \frac{31,77 * 7,15^2}{8} = 203,03 \text{ kN}$$

3.2- Momentos nas vigas internas

$$q_d = 99,37 \text{ kN/m}$$

$$M^+ = \frac{pl^2}{14,22} = \frac{99,37 * 7,15^2}{14,22} = 357,25 \text{ kN}$$

$$M^- = \frac{pl^2}{8} = \frac{99,37 * 7,15^2}{8} = 635,0 \text{ kN}$$

4. Cálculo da flecha total das vigas

4.1- Flecha total das vigas de bordo

$$f_{cd} = \frac{30}{1,4} = 2,14 \text{ kN/cm}^2$$

$$d = h - c = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$$

$$d_{min} = \sqrt{\frac{M_d}{0,25 f_{cd} b}} = \sqrt{\frac{114,22}{0,25 * 2,14 * 30}} = 2,67 \text{ cm}$$

Como $d > d_{min}$, a viga analisada possui armadura simples, sem a necessidade de previsão para armadura superior. Assim, é possível utilizar a tabela de dimensionamento de armaduras através dos coeficientes k_c e k_s .

$$M_{raro} = \frac{M_d^+}{g_c} = \frac{114,22}{1,4} = 81,57 \text{ kN.m}$$

$$E_s = 210 \text{ GPa} = 210.000,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{ci} = 30.672,46 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_i = 0,875$$

$$E_{cs} = 26.838,40 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_e = \frac{E_s}{E_{ci}} = 6,85$$

A área de aço é retirada da tabela 1.1 conforme ANEXO 2, sendo definida a partir do valor do momento raro. Aço adotado: CA50.

$$k_c = \frac{bd^2}{M_d} = \frac{30(55^2)}{114,22*100} = 7,94 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES													
$\beta_c = \frac{x}{d}$	$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$									$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$			DOMÍNIO
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020	
0,06	35,2	23,4	17,7	14,1	11,7	10,1	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021	
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	

$$k_s = \frac{A_s d}{M_{raro}} = 0,024 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$A_s = \frac{M_d k_s}{d} = \frac{114,22*100*(0,024)}{55} = 4,98 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$x_1 = \frac{\frac{bh^2}{2} + (a_e - 1)A_s d}{bh + (a_e - 1)A_s} = \frac{\frac{30*60^2}{2} + (6,85 - 1)4,98*55}{30*60 + (6,85 - 1)*4,98} = 30,29 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + (a_e - 1)A_s(d - x_1)^2,$$

$$I_1 = \frac{30 * 60^3}{12} + 30 * 60 \left(30,29 - \frac{60}{2}\right)^2 + (6,85 - 1) * 4,98 * (55 - 30,29)^2$$

$$I_1 = 540.000,0 + 151,38 + 12.716,02 = 552.867,40 \text{ cm}^4$$

$$a = 1,5 \text{ (seção retangular)}$$

$$f_{ctm} = 0,3 * (30)^{\frac{2}{3}} = 2,896$$

$$y_t = h - x_1 = 60 - 30,29 = 29,71 \text{ cm}$$

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_1}{y_t} = \frac{1,5 * (2,896) * 552.867,40}{29,71} = 808,37 \text{ kN.m}$$

Como $M_{raro} < M_r$, o elemento de laje encontra no estágio 1, portanto, pode-se prosseguir com a determinação da flecha inicial sendo a obtido através da EQUAÇÃO 33:

$$q_{serv} = (1,0 * 4,5) + (0,4 * 18,19) = 11,78 \text{ kN/m}$$

$$\delta_i = \frac{1}{185} \frac{q_{serv} l^4}{E_{cs} I_1}$$

$$\delta_i = \frac{1}{185} \frac{1,18 * 10^{-3} * 715^4}{26.838,40 * 594.252,18} = 0,021 \text{ cm}$$

$$\delta_f = (1 + \alpha_f) \delta_i$$

$$\delta_f = (1 + 1,32) * 0,000104 = 0,049 \text{ cm}$$

$$\delta_{lim} = \frac{l_{ef}}{250} = \frac{715}{250} = 2,86 \text{ cm}$$

Para atender ao limite estabelecido pela NBR 6118 (2014), a flecha total deve ser igual ou menor que a flecha limite, portanto, as vigas de bordo estão seguras em relação à deslocamentos verticais.

4.2- Flecha total das vigas internas

$$f_{cd} = \frac{30}{1,4} = 2,14 \text{ kN/cm}^2$$

$$d = h - c = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$$

$$d_{min} = \sqrt{\frac{M_d}{0,25 f_{cd} b}} = \sqrt{\frac{357,25}{0,25 * 2,14 * 30}} = 4,71 \text{ cm}$$

Como $d > d_{min}$, a viga analisada possui armadura simples, sem a necessidade de previsão para armadura superior. Assim, é possível utilizar a tabela de dimensionamento de armaduras através dos coeficientes k_c e k_s .

$$M_{raro} = \frac{M_d^+}{g_c} = \frac{357,25}{1,4} = 255,18 \text{ kN.m}$$

$$E_s = 210 \text{ GPa} = 210.000,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{ci} = 30.672,46 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_i = 0,875$$

$$E_{cs} = 26.838,40 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_e = \frac{E_s}{E_{ci}} = 6,85$$

A área de aço é retirada da tabela 1.1 conforme ANEXO 2, sendo definida a partir do valor do momento raro. Aço adotado: CA50.

$$k_c = \frac{bd^2}{M_d} = \frac{30(55^2)}{357,25*100} = 2,54 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES													
$\beta_c = \frac{x}{d}$	$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$										$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \text{ (cm}^2/\text{kN)}$		D O M I N I O
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020	
0,06	35,2	23,4	17,6	14,1	11,7	10,1	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021	
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,20	11,2	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,22	10,3	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,24	9,5	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,26	8,8	5,9	4,4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,28	8,3	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,051	0,026	0,022	
0,30	7,8	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	2,0	1,7	1,6	0,051	0,026	0,022	
0,32	7,4	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,051	0,026	0,022	
0,34	7,0	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,051	0,027	0,022	
0,36	6,7	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	6,4	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	
0,40	6,1	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023	
0,42	5,9	3,9	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023	
0,438	5,7	3,8	2,9	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	0,023	

$$k_s = \frac{A_s d}{M_{raro}} = 0,026 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$A_s = \frac{M_d k_s}{d} = \frac{357,25*100*(0,024)}{55} = 15,59 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$x_1 = \frac{\frac{bh^2}{2} + (a_e - 1)A_s d}{bh + (a_e - 1)A_s} = \frac{\frac{30*60^2}{2} + (6,85 - 1)15,59*55}{30*60 + (6,85 - 1)*15,59} = 31,20 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + (a_e - 1)A_s(d - x_1)^2$$

$$I_1 = \frac{30 * 60^3}{12} + 30 * 60 \left(31,20 - \frac{60}{2}\right)^2 + (6,85 - 1) * 15,59 * (55 - 31,20)^2$$

$$I_1 = 540.000,0 + 2592 + 51660,18 = 594252,18 \text{ cm}^4$$

$$a = 1,5 \text{ (seção retangular)}$$

$$f_{ctm} = 0,3 * (30)^{\frac{2}{3}} = 2,896$$

$$y_t = h - x_1 = 60 - 31,2 = 28,80 \text{ cm}$$

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_1}{y_t} = \frac{1,5 * (2,896) * 594.252,18}{28,8} = 896,33 \text{ kN.m}$$

Como $M_{raro} < M_r$, o elemento de laje encontra no estágio 1, portanto, pode-se prosseguir com a determinação da flecha inicial sendo a obtido através da EQUAÇÃO 59:

$$q_{serv} = (1,0 * 4,5) + (0,4 * 66,48) = 31,10 \text{ kN/m}$$

$$\delta_i = \frac{1}{185} \frac{q_{serv} l^4}{E_{cs} I_1}$$

$$\delta_i = \frac{1}{185} \frac{3,10 * 10^{-3} * 715^4}{26.838,40 * 594.252,18} = 0,064 \text{ cm}$$

$$\delta_f = (1 + \alpha_f) \delta_i$$

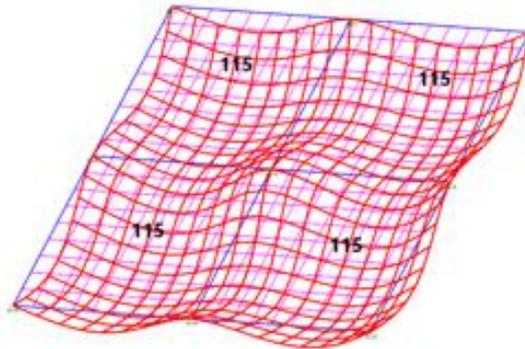
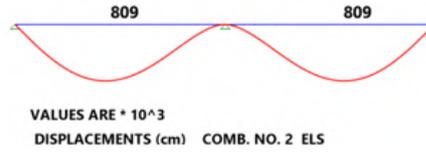
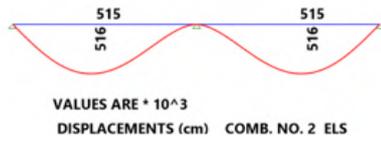
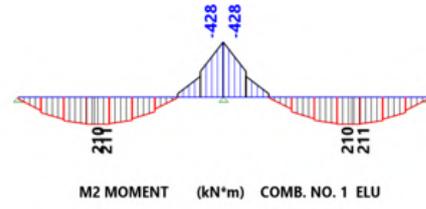
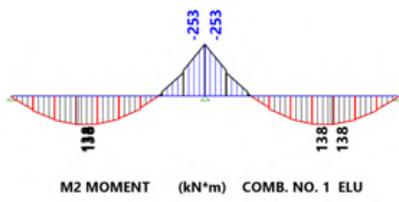
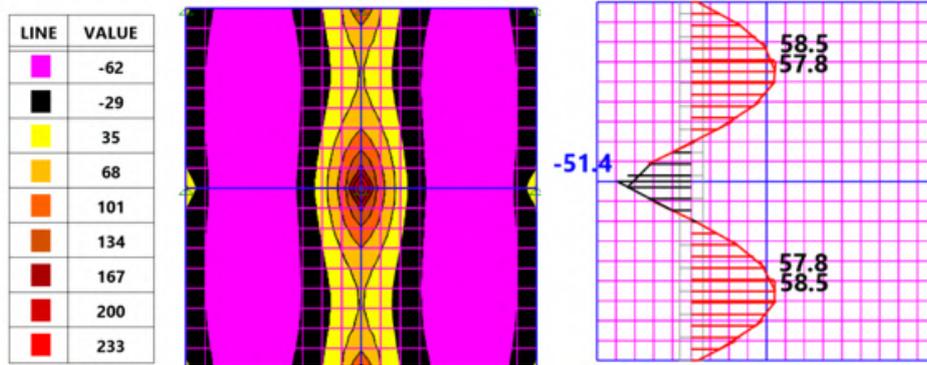
$$\delta_f = (1 + 1,32) * 0,000104 = 0,15 \text{ cm}$$

$$\delta_{lim} = \frac{l_{ef}}{250} = \frac{715}{250} = 2,86 \text{ cm}$$

Para atender ao limite estabelecido pela NBR 6118 (2014), a flecha total deve ser igual ou menor que a flecha limite, portanto, as vigas internas estão seguras em relação à deslocamentos verticais.

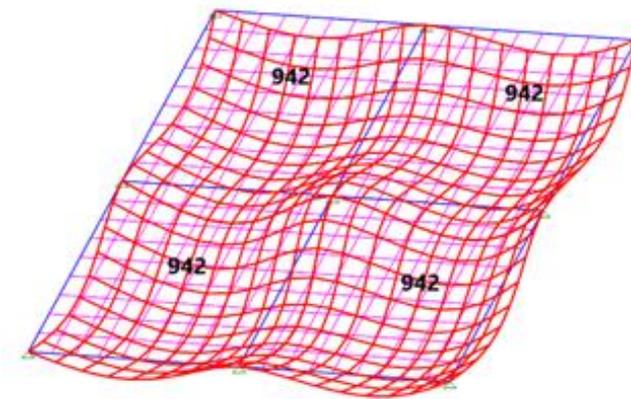
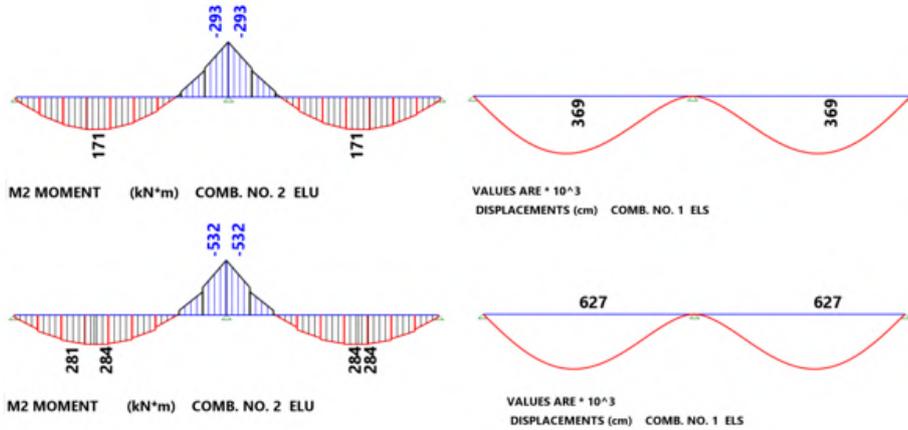
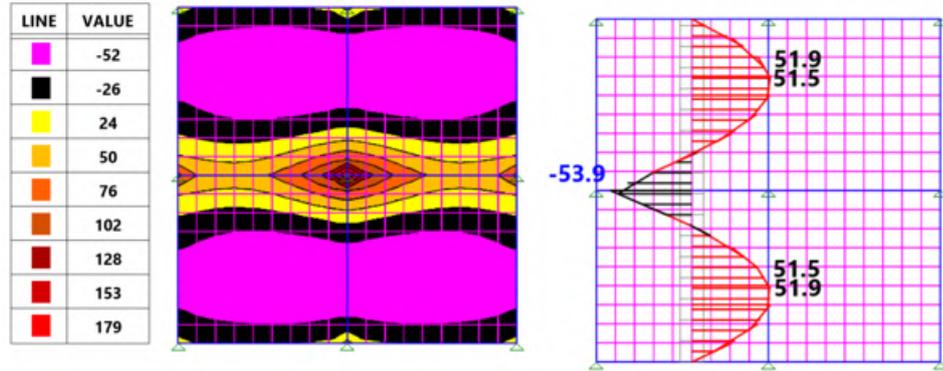
ANEXO 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O CASO 1

1.1- Hipótese 1.1 ($h_v = 50\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):



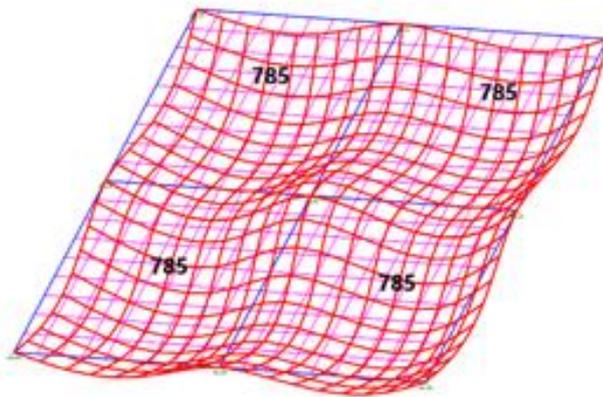
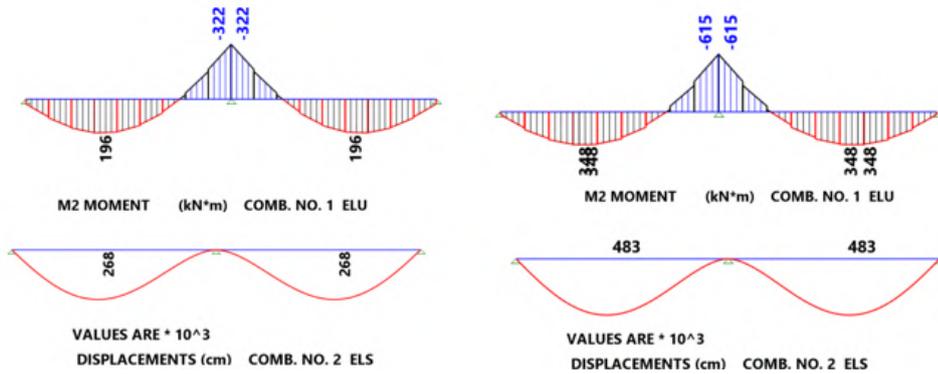
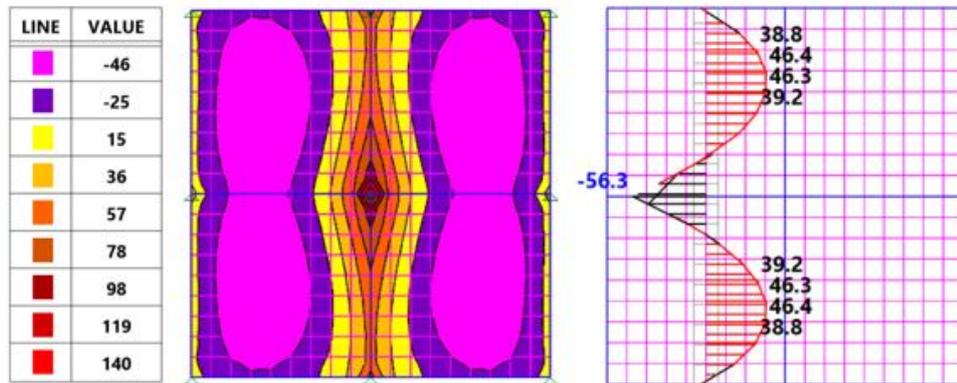
VALUES ARE * 10²
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 1 ELS

1.2- Hipótese 1.1 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):



VALUES ARE * 10⁻³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 1 ELS

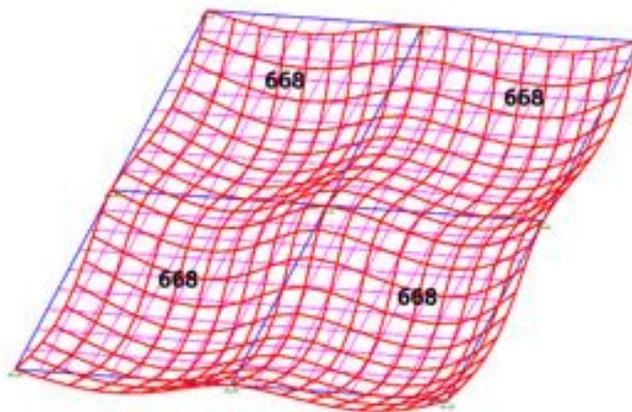
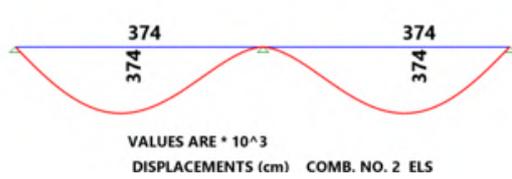
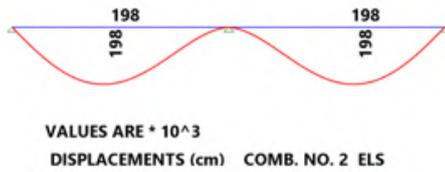
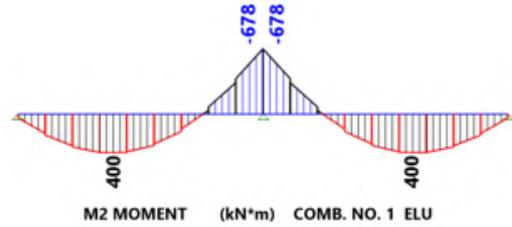
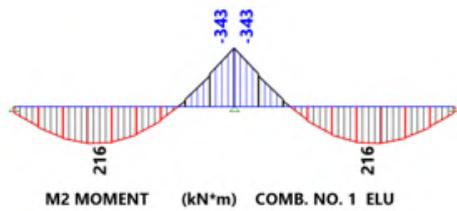
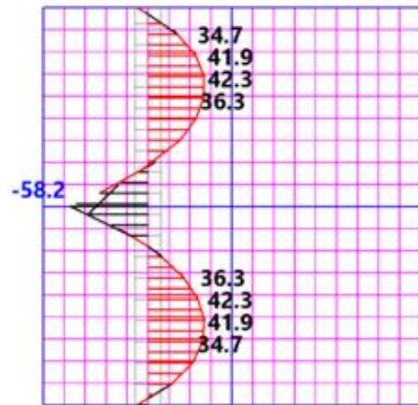
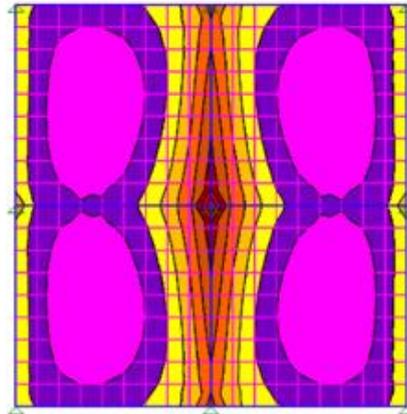
1.3- Hipótese 1.1 ($h_v = 70 \text{ cm}$; $h_l = 23 \text{ cm}$):



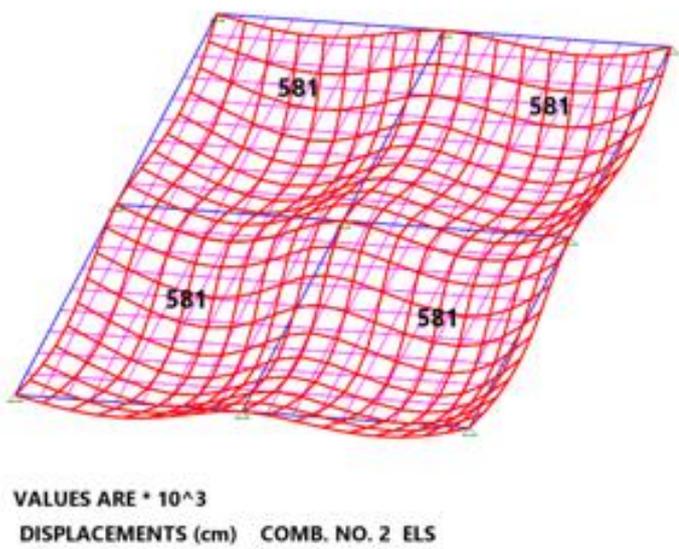
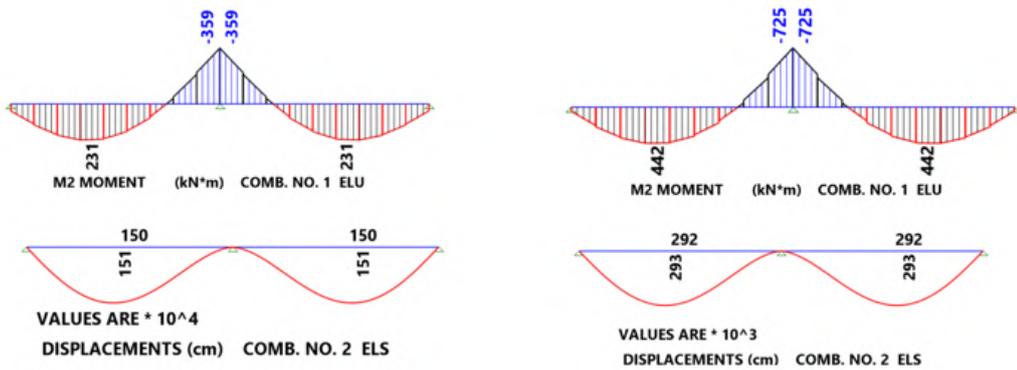
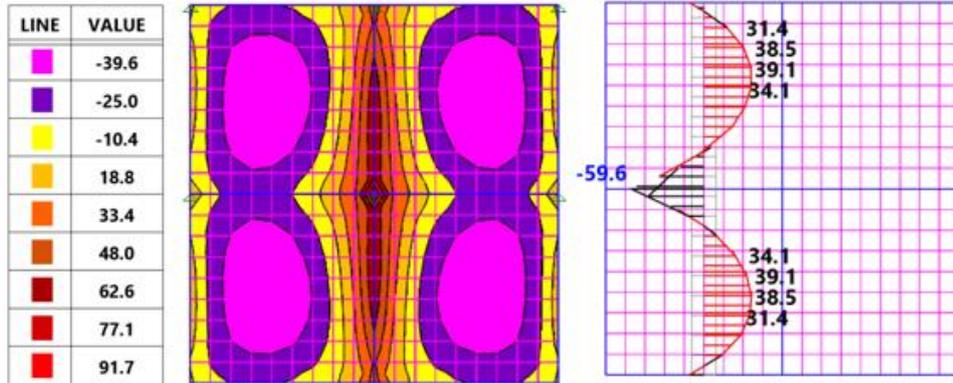
VALUES ARE * 10³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 2 ELS

1.4- Hipótese 1.1 ($h_v = 80\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):

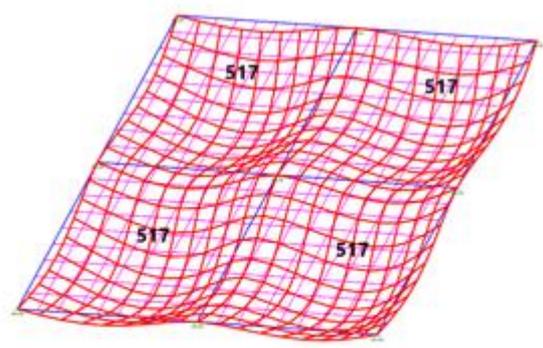
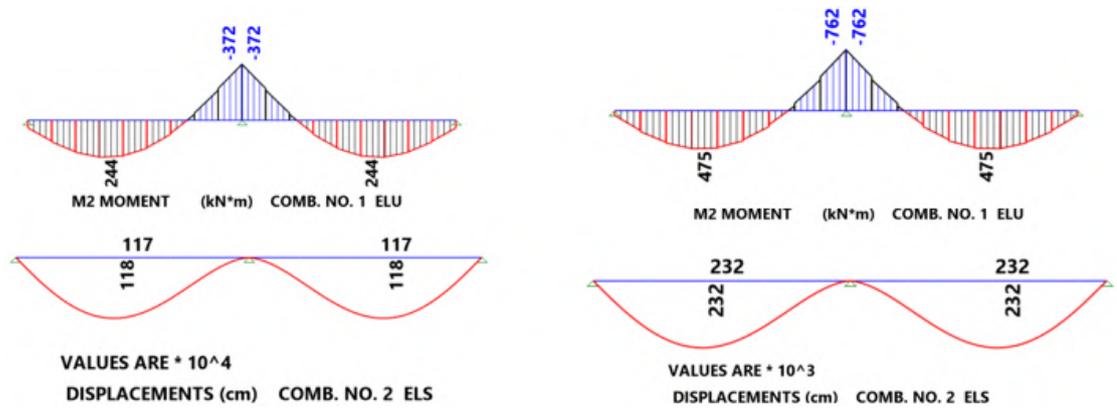
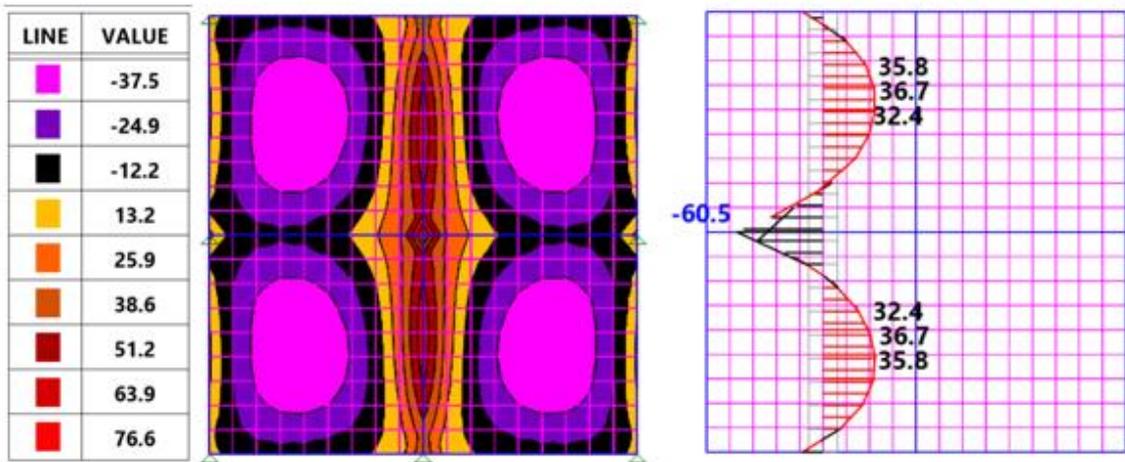
LINE	VALUE
	-42
	-25
	8
	26
	43
	60
	77
	95
	112



1.5- Hipótese 1.1 ($h_v = 90\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):



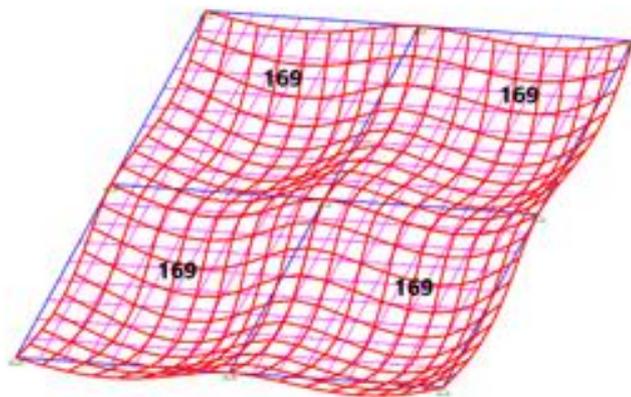
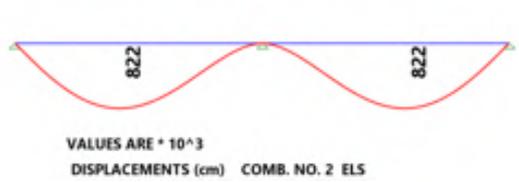
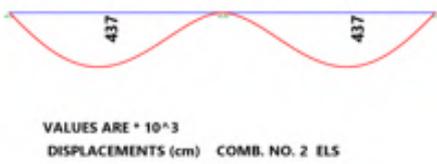
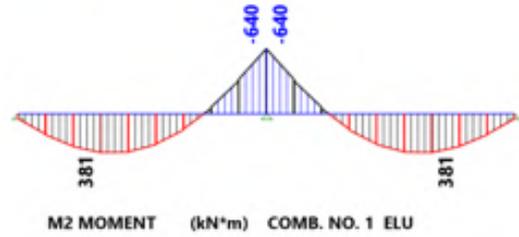
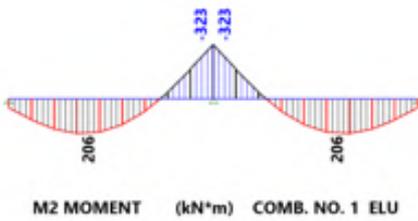
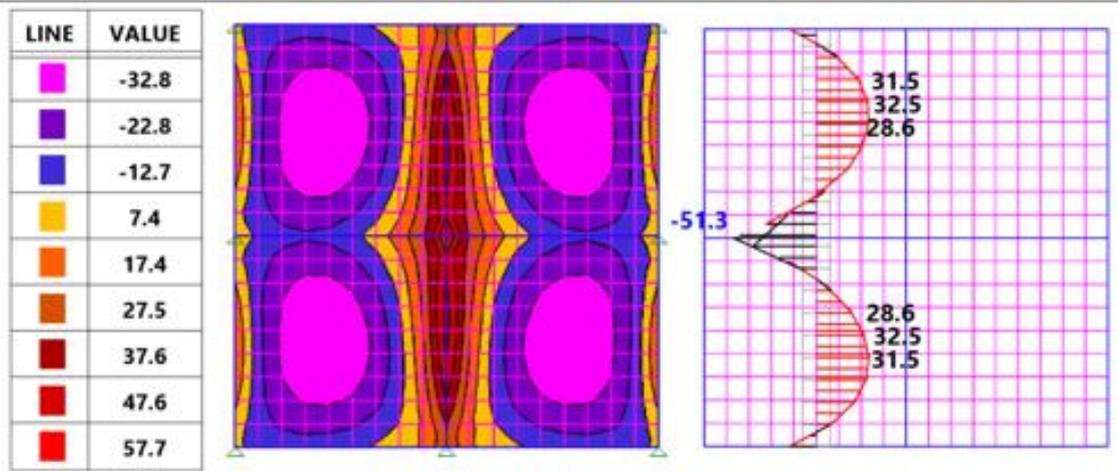
1.6- Hipótese 1.1 ($h_v = 100\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):



VALUES ARE * 10³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 2 ELS

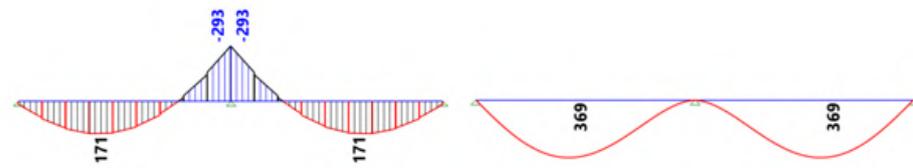
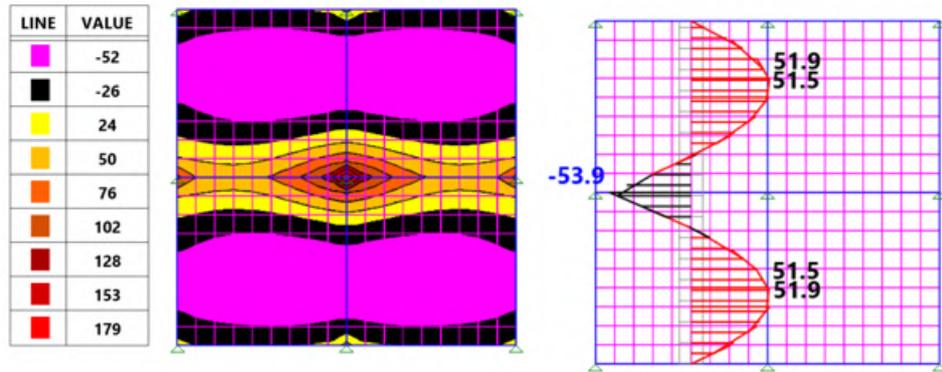
ANEXO 5 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O CASO 2

1.1- Hipótese 2.1 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 15\text{ cm}$):



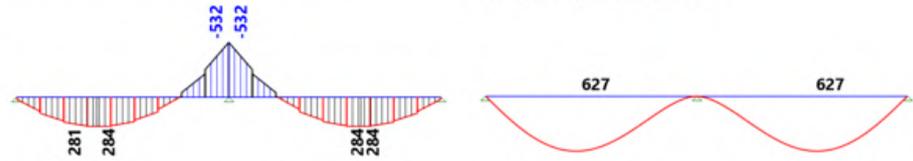
VALUES ARE * 10⁻²
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 2 ELS

1.2- Hipótese 2.2 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 23\text{ cm}$):



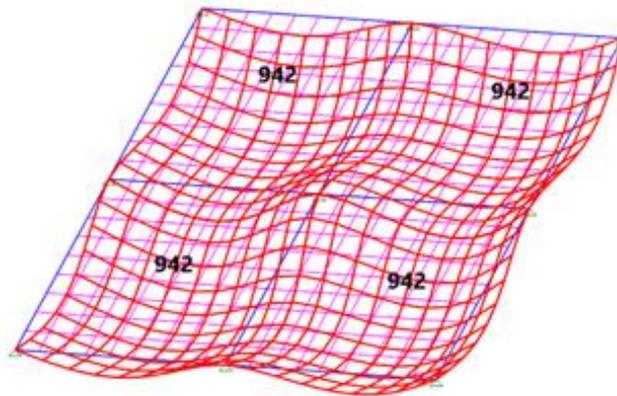
M2 MOMENT (kN*m) COMB. NO. 2 ELU

VALUES ARE * 10⁻³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 1 ELS



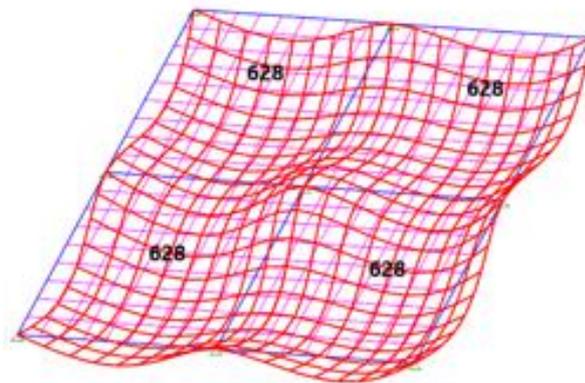
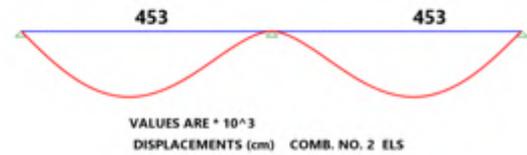
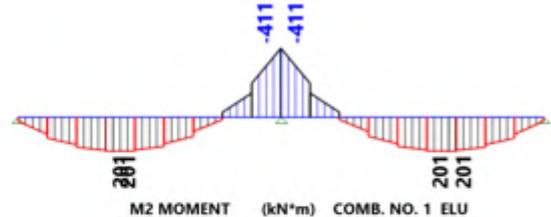
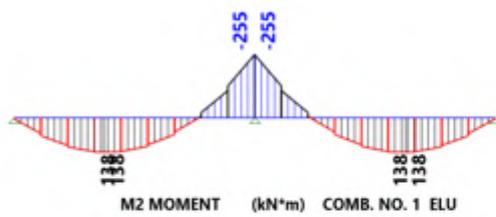
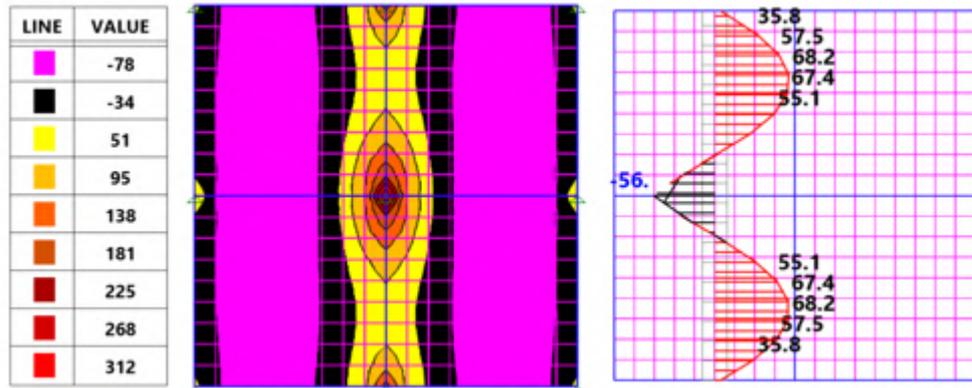
M2 MOMENT (kN*m) COMB. NO. 2 ELU

VALUES ARE * 10⁻³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 1 ELS

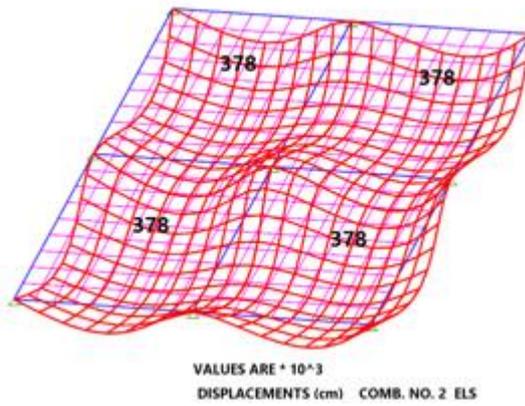
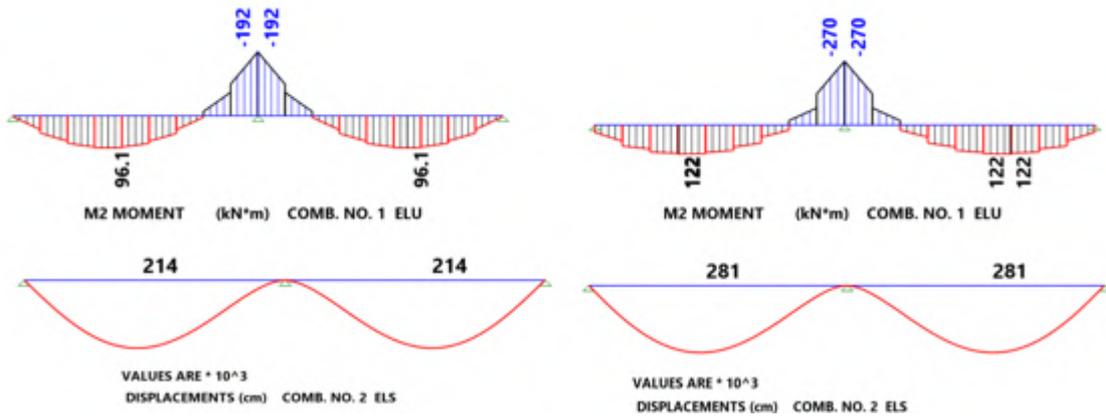
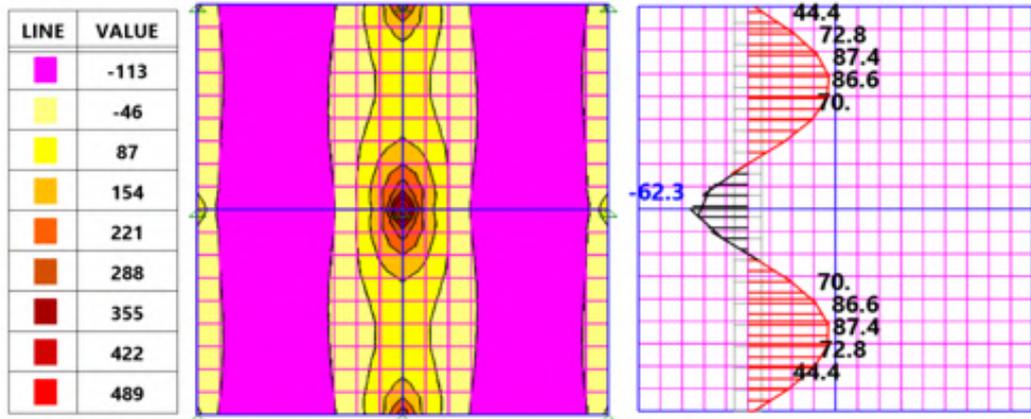


VALUES ARE * 10⁻³
DISPLACEMENTS (cm) COMB. NO. 1 ELS

1.3- Hipótese 2.3 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 30\text{ cm}$):



1.4- Hipótese 2.4 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 40\text{ cm}$):



1.5- Hipótese 2.5 ($h_v = 60\text{ cm}$; $h_l = 50\text{ cm}$):

