



**CARLA CAROLINE SALES SANTOS**

**FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA: COMPARAÇÃO ENTRE A  
PROPOSIÇÃO DA ABNT 6118 (2014) E MÉTODO NUMÉRICO**

**LAVRAS-MG**

**2023**

**CARLA CAROLINE SALES SANTOS**

**FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA: COMPARAÇÃO ENTRE A PROPOSIÇÃO DA  
ABNT NBR 6118 (2014) E MÉTODO NUMÉRICO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes

Orientador

**LAVRAS-MG**

**2023**

**CARLA CAROLINE SALES SANTOS**

**FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA: COMPARAÇÃO ENTRE A PROPOSIÇÃO DA  
ABNT NBR 6118 (2014) E MÉTODO NUMÉRICO**

**BI-AXIAL BENDING MOMENT: COMPARISON BETWEEN ABNT NBR 6118 (2014)  
PROPOSITION AND NUMERICAL METHOD**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel

APROVADA em 20 de julho de 2023.

D.Sc. Ígor José Mendes Lemes UFPA

D.Sc. Rafael Cesário Barros - Concremat Engenharia e Serviços S/A

D.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias - UNILAVRAS

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes

Orientador

**LAVRAS-MG**

**2023**

*Dedico esse trabalho aos meus pais  
pelo apoio e carinho em todas as  
etapas e por serem meu maior exemplo  
de vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Mario Ramos e Sirlene Sales, pelo tempo investido em mim e pela educação que me proporcionaram.

Ao meu irmão Mario Junior e minha cunhada Vannila Gama, pelo apoio e pela confiança depositada em mim.

Ao meu noivo, David Rodrigues, pelo tamanho carinho, paciência e companhia durante a graduação.

Ao professor Ígor J. M. Lemes, pela orientação, disposição e dedicação no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos que fiz durante a universidade pela amizade e por serem minha família em Lavras.

Aos professores do curso de Engenharia Civil, pelos tantos ensinamentos passados e tamanha dedicação ao curso.

À UFLA, pela qualidade no ensino e estrutura proporcionada a nós estudantes.

## RESUMO

Uma tarefa fundamental no projeto de estruturas de concreto armado é o dimensionamento de seções transversais sujeitas à flexão composta oblíqua. Esse tipo de esforço ocorre quando um elemento é submetido simultaneamente a momentos fletores, nos dois eixos principais de inércia, e um esforço axial. Para realizar o dimensionamento adequado da seção transversal, é necessário conhecer as propriedades do material e a geometria da seção. O objetivo deste trabalho é desenvolver equações analíticas para a interação de esforços em seções transversais retangulares de concreto armado sob flexão composta reta, analisando separadamente os dois eixos. Para tal, são usados os domínios de deformação do concreto armado, onde é possível analisar diversas posições de linha neutra para a determinação do par de esforços que levam à falha um ou os dois materiais presentes na seção. Na sequência, a interação entre as curvas é feita utilizando a equação aproximada para a envoltória de esforços, proposta pelo código normativo brasileiro ABNT NBR 6118 (2014). Os resultados aqui obtidos são confrontados com os extraídos de análises numéricas via método dos elementos finitos (MEF). Percebe-se que a metodologia proposta superestima a capacidade resistente da seção, sendo que o resultado está contra a segurança.

**Palavras-chave:** Domínios de deformação. Flexão composta reta. Flexão composta oblíqua. Curva de interação de esforços. Envoltória resistente.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.1 Considerações gerais</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.2 Motivação</b>   | <b>2</b>  |
| 1.3 Objetivos  | 2         |
| <b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2.1 Considerações iniciais</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2.2 Revisão bibliográfica</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2.3 Domínios de deformação</b>  | <b>5</b>  |
| 2.3.1 Considerações iniciais   | 6         |
| 2.3.2 Domínio 1  | 6         |
| 2.3.3 Domínio 2  | 7         |
| 2.3.4 Domínio 3  | 7         |
| 2.3.5 Domínio 4  | 8         |
| 2.3.6 Domínio 4a   | 9         |
| 2.3.7 Domínio 5  | 10        |
| <b>2.4 Relação constitutiva do concreto</b>  | <b>10</b> |
| <b>2.5 Relação constitutiva do aço</b>   | <b>11</b> |
| <b>2.6 Curvas de interação para flexão composta reta</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>2.7 Envoltória Resistente</b>   | <b>15</b> |
| <b>3 METODOLOGIA</b>   | <b>15</b> |
| <b>3.1 Análise de equações para a flexão composta reta</b>                               | <b>15</b> |
| <b>3.2 Interpolações nas curvas para valores de forças normais intermediárias</b>        | <b>17</b> |
| <b>3.3 Interação entre os momentos fletores em torno dos eixos principais de inércia</b> | <b>17</b> |
| <b>3.4 Validação da formulação utilizada</b>   | <b>17</b> |
| <b>4 ANÁLISE DE RESULTADOS</b>   | <b>18</b> |
| <b>4.1 Seção retangular com 4 barras</b>   | <b>18</b> |
| <b>4.2 Seção retangular com 16 barras</b>  | <b>23</b> |
| <b>5 CONCLUSÃO</b>   | <b>26</b> |
| <b>REFERÊNCIAS</b>   | <b>28</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações gerais

O concreto armado é uma tipologia estrutural composta por concreto simples e barras de aço, amplamente utilizado na construção civil. Esta solução estrutural visa o aproveitamento do concreto como elemento responsável por resistir às tensões de compressão, e o aço como elemento resistente à tração. Em algumas situações, como por exemplo no caso de pilares e vigas com armaduras duplas, o aço também pode auxiliar o concreto na resistência às tensões de compressão.

Conforme Rocha e Silva (2015), o uso do concreto armado teve início no final do século XIX nos Estados Unidos, como uma forma de proteger o aço contra fogo e corrosão. No entanto, com o tempo, a utilização do aço no interior do concreto se mostrou benéfica para a resistência e durabilidade das estruturas.

Uma das principais vantagens da combinação do concreto com o aço é a sua capacidade de resistir a grandes cargas. Além de sua resistência, o material é durável, o que significa que pode durar por muitos anos sem precisar de manutenção significativa. O concreto armado também é resistente ao fogo, o que o torna uma escolha popular para a construção de edifícios comerciais e residenciais.

A sua utilização se estende a uma ampla variedade de aplicações, desde a construção de pontes e viadutos, passando pela edificação de arranha-céus, até a produção de peças pré-fabricadas para a construção civil.

No entanto, o concreto armado não é isento de limitações. A sua resistência e durabilidade podem ser afetadas por condições ambientais adversas, como exposição prolongada a ambientes úmidos e salinos. Além disso, a falta de manutenção regular pode acelerar o processo de corrosão das barras de aço presentes no material.

Em suma, o concreto armado é uma das principais escolhas para a construção de estruturas resistentes e duráveis, sendo uma opção popular devido à sua eficácia e baixo custo. No entanto, é preciso ter em mente que a durabilidade do material depende da qualidade da sua construção e manutenção ao longo do tempo.

Embora ele seja uma solução estrutural abundante, o comportamento anisotrópico não-linear do concreto introduz maior rigor nos processos de análise. Assim, conhecer a limitação de processos normativos simplificados é essencial para a correta avaliação estrutural.

## **1.2 Motivação**

O dimensionamento de seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua é uma tarefa essencial no projeto de estruturas de concreto. Esse tipo de esforço ocorre quando um elemento é solicitado, simultaneamente, por momentos fletores, nos dois eixos principais de inércia, e por um esforço axial, que pode ser de tração ou compressão. Para realizar o dimensionamento, é necessário conhecer as propriedades do material e a geometria da seção. As normas técnicas apresentam critérios e procedimentos para o cálculo da capacidade resistente das seções, mas é comum utilizar programas computacionais ou ábacos de dimensionamento encontrados na literatura. Vale ressaltar que o uso de ábacos pode tornar a avaliação analítica mais complexa, o que pode limitar o profissional e resultar na adoção de seções convencionais ou métodos aproximados para garantir a segurança da estrutura. Por isso, é importante que o projetista esteja familiarizado com as normas de projeto e ferramentas disponíveis e saiba utilizar seu conhecimento e experiência para tomar as melhores decisões no dimensionamento das seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua.

## **1.3 Objetivos**

O presente trabalho visa desenvolver equações analíticas para a interação de esforços em seções transversais retangulares de concreto armado para a flexão composta reta. Essas seções são comumente utilizadas em pilares e consistem em armaduras distribuídas ao longo do contorno da seção transversal. Para realizar essa avaliação, são utilizados os domínios de deformação do concreto armado, juntamente com as relações de tensão-deformação prescritas no código normativo brasileiro ABNT NBR 6118 (2014). Com isso, avalia-se a seção submetida separadamente à força normal e momentos fletores em cada eixo. Posteriormente, é feita a união das curvas de interação bidimensionais usando a envoltória de esforços resistentes prescrita na ABNT NBR 6118 (2014). Desta forma é possível avaliar a precisão da proposição normativa com o método numérico de alta precisão, como o método dos elementos finitos.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **2.1 Considerações iniciais**

Esse capítulo tem como objetivo realizar uma revisão bibliográfica acerca do tema e abordar assuntos e determinações normativas que fundamentam a metodologia adotada.

### **2.2 Revisão bibliográfica**

A curva de interação de esforços é utilizada para representar a relação entre os esforços de flexão e compressão atuantes no elemento estrutural, determinando os limites máximos da capacidade resistente. Na literatura têm-se vários estudos com o objetivo de desenvolver metodologias e modelos de análise que tendem a fornecer resultados com maior precisão.

Na análise estrutural, a teoria de Euler Bernoulli é amplamente reconhecida. Devido a sua contribuição para a compreensão do comportamento estrutural e a avaliação de esforços em seções de concreto armado. Rocha e Silva (2015) utilizaram esta teoria para elaborar curvas de interação para pilares mistos de aço e concreto. Além disso, estes autores também consideraram as configurações de ruptura baseadas nos domínios de deformação definidos na ABNT NBR 6118 (2014). Para obter as forças internas da seção transversal, foram desenvolvidas equações de equilíbrio que fazem uso explícito das relações tensão-deformação. Em uma abordagem semelhante, Lima (2020) desenvolveu uma aplicação computacional com base nessa teoria, capaz de gerar curvas de interação de esforços para seções transversais retangulares e circulares de concreto armado, considerando a forma deformada da seção como linear e contínua. Essa abordagem generalizada é compatível com os modelos constitutivos propostos por normas de projeto. Assim, os domínios de deformação abordados na ABNT NBR 6118 (2014) foram utilizados, e a posição da linha neutra foi alterada para a consideração de todas as possibilidades. Embora os trabalhos descritos tenham aplicabilidade prática considerável, eles abordam curvas de interação exclusivamente para a flexão composta reta.

Em uma extensão do assunto, Carvalho e Pinheiro (2013) definiram que um elemento está submetido a flexão oblíqua quando o momento fletor em uma seção transversal não tem a direção de um dos eixos principais de inércia. Os autores ressaltaram a dificuldade da solução analítica devido ao não conhecimento da posição linha neutra, a princípio. Para Cunha (2009), a solução é trabalhosa, visto que é um processo iterativo por tentativas a determinação da

posição da linha neutra e o ângulo por ela formado com os eixos, até encontrar a posição que os esforços resistentes equilibrem os esforços solicitantes.

Pinheiro (1994) e Venturini (1996) desenvolveram ábacos de dimensionamento para resolver as equações de equilíbrio entre os esforços resistentes e atuantes (apud. Carvalho e Pinheiro, 2015), levando em consideração as hipóteses relacionadas às deformações e as relações de tensão e deformação do concreto e do aço. Tais ábacos foram construídos tanto para a flexão composta reta quanto para a flexão composta oblíqua. No entanto, é importante destacar algumas limitações destes processos propostos por Pinheiro (1994) e Venturini (1996). Apesar de possuírem um número considerável de geometrias, os projetistas estão restritos às disposições de armaduras estabelecidas pelas referências utilizadas na construção dos ábacos. Isso pode limitar a flexibilidade e adaptabilidade do dimensionamento às necessidades específicas de cada projeto. Além disso, os ábacos podem apresentar uma defasagem em relação às normas atuais. Uma vez que foram construídos de acordo com as prescrições das normas da época, que desde então foram reformuladas e atualizadas.

Dentre as possibilidades para dimensionar a flexão composta oblíqua, a de maior destaque é o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (AISC LRFD, 2016), que sugere a adoção do método na determinação da capacidade resistente nominal de seções irregulares e constituídas por materiais diversos. Para Lemes *et al.* (2015), esta metodologia descreve de forma mais realista o comportamento de seções transversais.

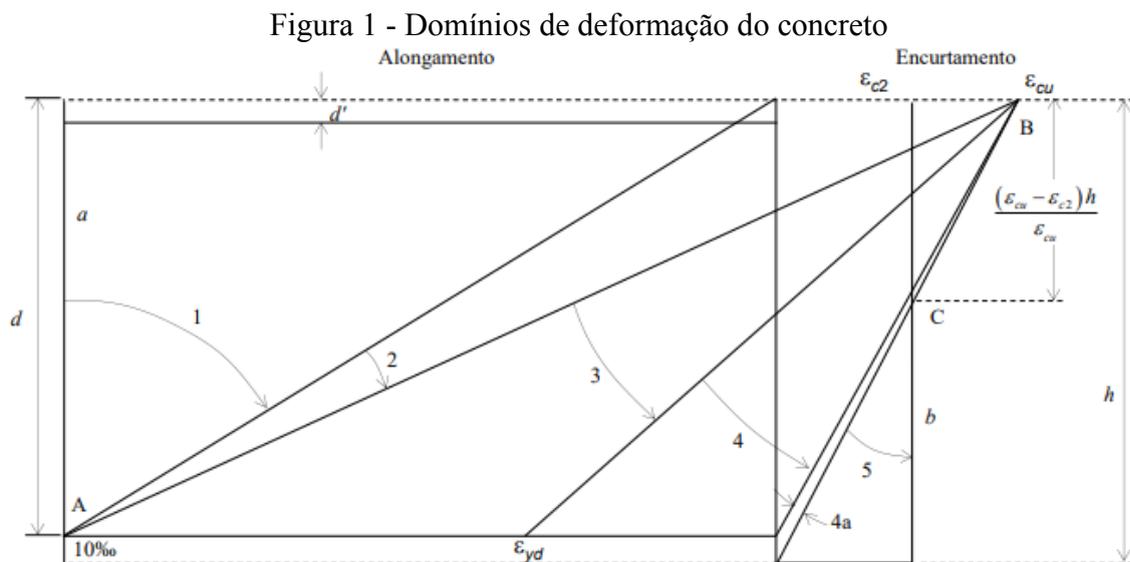
As metodologias numéricas ganham importância uma vez que abordam, de forma precisa, problemas complexos. Um dos primeiros estudos nesse campo foi realizado por El-Tawil *et al.* (1995), que desenvolveu o programa gráfico COSBIAN, capaz de modelar seções transversais compostas por aço e concreto e obter as tensões por meio de modelo de fibras. Modelos como este são utilizados e estão em evolução até os dias atuais (Chen *et al.*, 2001; Liu *et al.*, 2012; Fong, 2012; Lemes *et al.*, 2015). Nestas condições, o método dos elementos finitos se destaca como uma das soluções mais difundidas (Smolcic e Grandic, 2012). Desta forma, novos desenvolvimentos analíticos podem ser confrontados com dados numéricos e experimentais para a calibração dos modelos propostos.

Por fim, no contexto da flexão composta oblíqua, a ABNT NBR 6118 (2014) apresenta um método aproximado para o dimensionamento da flexão composta oblíqua através de dados obtidos da flexão composta reta. Cruz e Couto (2020) fizeram uma análise computacional da influência do coeficiente de segurança adotado na formulação normativa

que confirma ser seguro. No contexto da proposição normativa brasileira, verificou-se que a literatura carece de trabalhos. Percebe-se, então, que o estudo da equação proposta pela ABNT NBR 6118 (2014) para a avaliação da envoltória resistente de esforços ainda é pouco abordado.

### 2.3 Domínios de deformação

Neste trabalho, o estado limite último é considerado para o cálculo da força normal resistente e do momento fletor. Para avaliar as seções transversais nesse estado limite e construir curvas de interação de esforços, adota-se o comportamento do concreto armado prescrito pela ABNT NBR 6118 (2014). Com isso, a norma estabelece algumas premissas básicas de cálculo. A primeira premissa decorre da teoria de Euler-Bernoulli, que assume que as seções transversais permanecem planas após a deformação. Conseqüentemente, a taxa de variação da deformação na seção transversal é constante, o que permite descrever as deformações por meio de retas. A segunda premissa é que a deformação das barras passivas aderentes é igual à do concreto ao seu redor, ou seja, há uma completa aderência entre o aço e o concreto. A terceira premissa é que, na avaliação do estado limite último, o concreto não suporta tensão de tração aplicada, ou seja, qualquer contribuição de resistência do concreto tracionado deve ser desprezada. Por fim, o estado limite último é caracterizado quando a distribuição de deformações na seção transversal pertence a um dos domínios de deformação estabelecidos pela norma, os quais serão discutidos separadamente na próxima seção. Aos domínios de deformação, conforme a ABNT NBR 6118 (2014), são ilustrados na Figura 1.

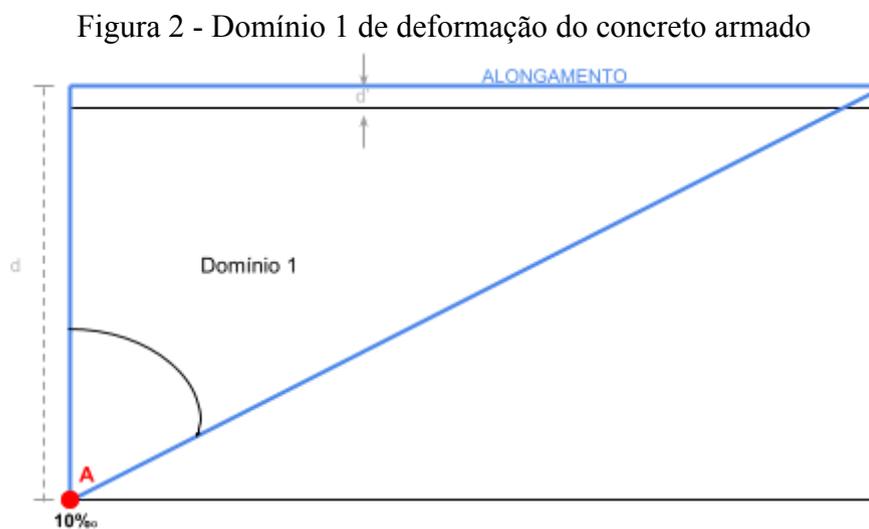


### 2.3.1 Considerações iniciais

O objetivo desta seção é descrever detalhadamente os domínios de deformação do concreto armado, conforme estabelecido pela ABNT NBR 6118 (2014), incluindo os limites de cada domínio e suas características.

### 2.3.2 Domínio 1

No domínio 1 em que toda a seção transversal é submetida à tração, a resistência da peça é exclusivamente proporcionada pelo aço, já que o concreto se encontra fissurado. Esse domínio tem a linha neutra variando entre  $-\infty$  e zero. Inicia-se com a tração simples, onde as tensões resultantes atuam no centro de gravidade da armadura, o que leva todas as fibras a apresentarem a mesma deformação de tração. A linha que representa a deformação gira em torno do ponto A, como pode ser visto na Figura 2, com deformação de  $10\text{‰}$ , até alcançar o limite do domínio, caracterizado pela compressão nula, e resultando na tração excêntrica. Vale ressaltar que a falha ocorre por deformação excessiva da armadura tracionada.



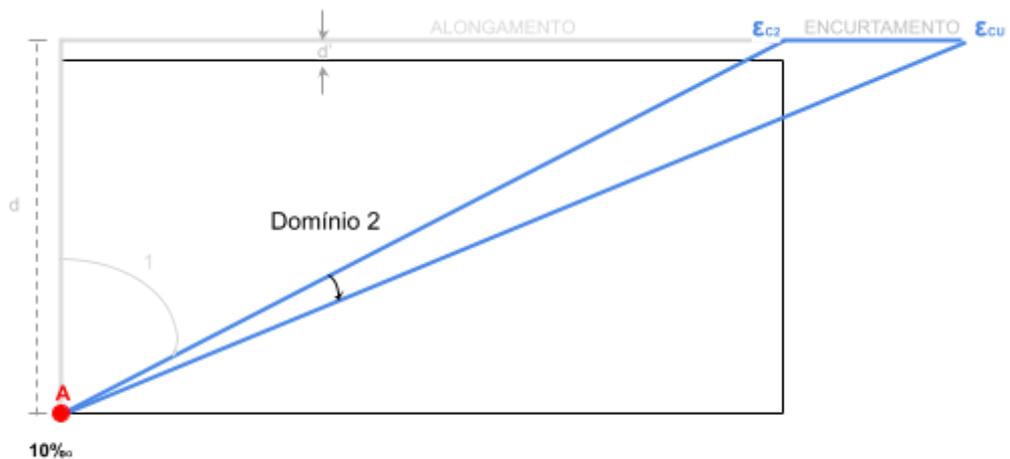
Fonte: Da autora (2023)

### 2.3.3 Domínio 2

O domínio em questão abrange uma ampla faixa de deformações, iniciando no limite superior do domínio 1 e estendendo-se até o limite de deformação do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ), enquanto

a deformação de tração na armadura inferior se mantém no ponto A, fixa em 10‰ (Figura 3). É caracterizado por uma seção transversal que apresenta uma parte tracionada e uma outra parte comprimida, resultando em flexão simples ou composta com a linha neutra dentro da seção. Este é o último caso que ocorre deformação plástica excessiva da armadura tracionada. A resistência da seção é composta pela contribuição do elemento de aço tracionado, das armaduras comprimidas e do concreto comprimido.

Figura 3 - Domínio 2 de deformação do concreto armado

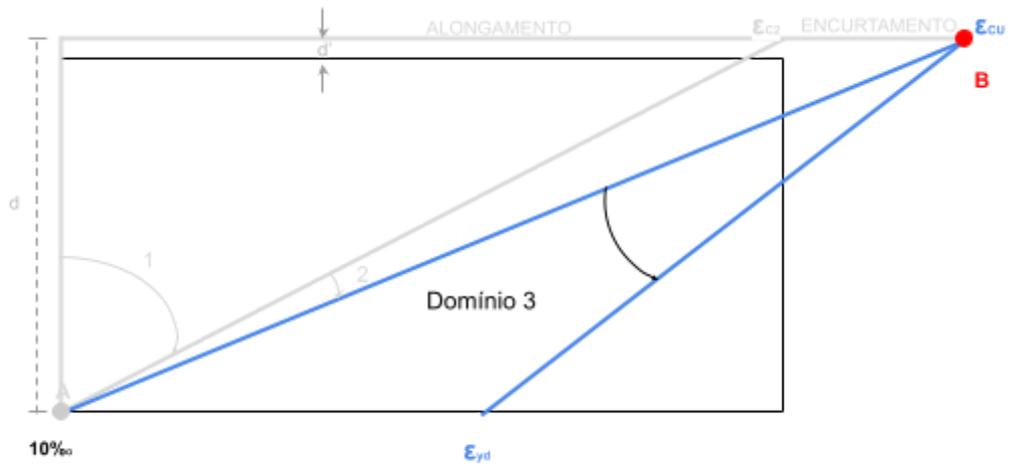


Fonte: Da autora (2023)

### 2.3.4 Domínio 3

No domínio 3, ilustrado na Figura 4, a seção transversal apresenta partes tracionadas e comprimidas, assim como no domínio 2. Neste domínio, ocorre o início da deformação plástica do concreto, e a ruptura é causada pelo esmagamento do concreto quando a fibra mais comprimida atinge a sua deformação limite. O ponto fixo é representado pela deformação limite do concreto (B), e a deformação nas armaduras tracionadas varia de 10‰ até o valor da deformação específica de escoamento do aço ( $\epsilon_{yd}$ ). Essa situação é considerada ideal, pois a ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento da armadura, levando ambos os materiais à capacidade resistente máxima.

Figura 4 - Domínio 3 de deformação do concreto armado

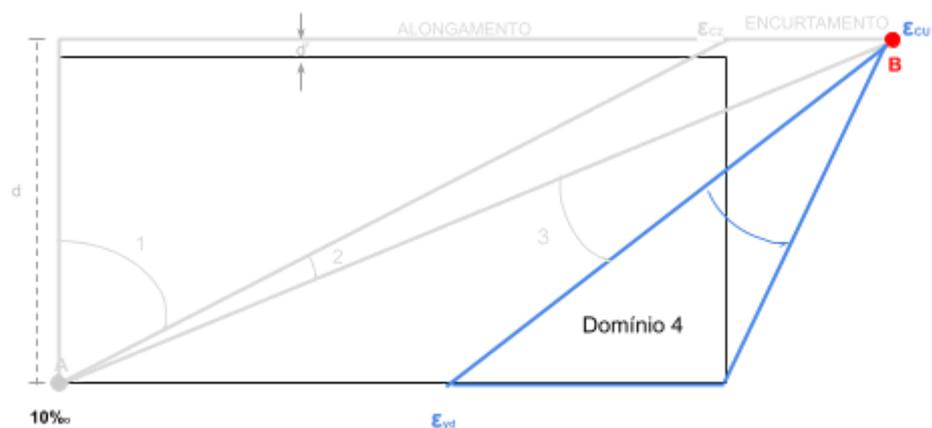


Fonte: Da autora (2023)

### 2.3.5 Domínio 4

No domínio 4, ilustrado na Figura 5, uma porção considerável da seção encontra-se sob compressão, resultando em um aproveitamento inadequado do aço, que não atinge seu limite de escoamento. A falha ocorre devido à deformação de ruptura do concreto, que se dá de forma súbita, sem sinais prévios, uma vez que os deslocamentos do aço são pequenos e a fissuração no concreto é mínima, o que caracteriza uma ruptura frágil. O ponto B permanece fixo, indicando a deformação limite do concreto.

Figura 5 - Domínio 4 de deformação do concreto armado

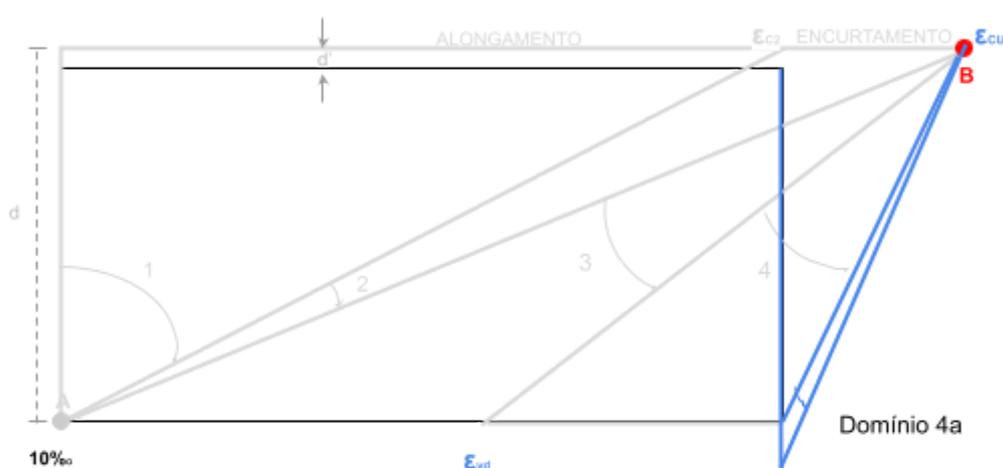


Fonte: Da autora (2023)

### 2.3.6 Domínio 4a

No domínio 4a, as armaduras são submetidas à compressão e apenas uma pequena porção da seção transversal apresenta tração no concreto. A ruptura, da mesma forma que na situação anterior, é considerada frágil e se dá devido à deformação limite do concreto. A linha neutra sofre rotação em torno do ponto B, o que pode levar a uma configuração de flexo-compressão, com possibilidade de variação entre a altura útil e a altura da seção, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 - Domínio 4a de deformação do concreto armado

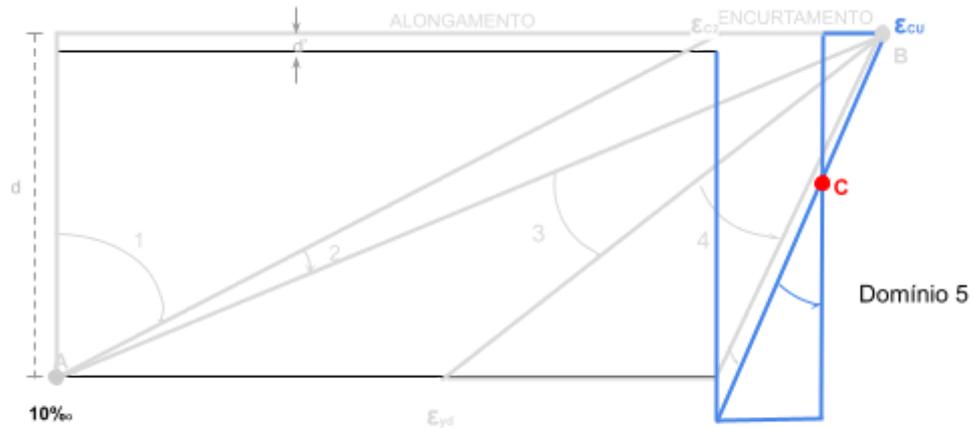


Fonte: Da autora (2023)

### 2.3.7 Domínio 5

Já o domínio 5, apresentado na Figura 7, é caracterizado pela compressão de toda a seção transversal e ocorre apenas na compressão excêntrica. Na região, a seção se encontra inteiramente comprimida, com uma constante  $\epsilon_c$  de 0,2% na linha localizada a  $3/7 h$  da borda mais comprimida. Nesta borda,  $\epsilon_{cu}$  varia entre 0,35% e 0,2%. A compressão pode ser simples, quando a compressão é uniforme em toda a seção, representada pela reta b, ou composta, quando há variação da deformação ao longo da seção. A reta que descreve a deformada da seção sofre rotação em torno do ponto C, localizado a  $3/7h$  da borda mais comprimida. Carvalho e Figueiredo Filho (2017) ressaltam que embora tenha sido considerada a seção transversal de geometria retangular os domínios se aplicam a quaisquer seções e disposições da armadura.

Figura 7 - Domínio 5 de deformação do concreto armado

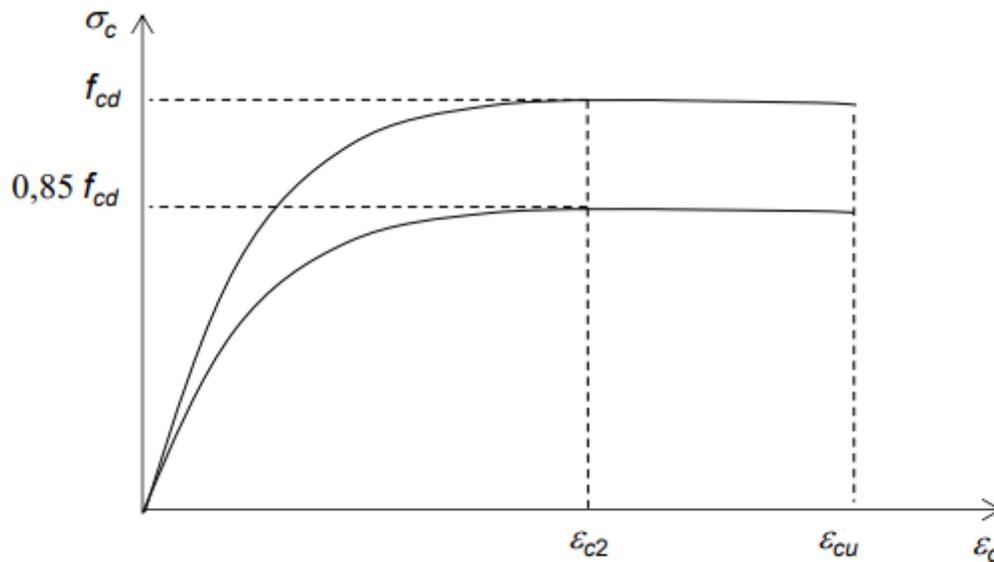


Fonte: Da autora (2023)

#### 2.4 Relação constitutiva do concreto

A ABNT NBR 6118 (2014), norma brasileira para projetos de estruturas de concreto, indica o uso do diagrama tensão-deformação idealizado (Figura 8) na análise de estado limite último, sendo descartada a resistência à tração do material nesta condição. Para tal, são recomendados valores variáveis de deformação última ( $\epsilon_{cu}$ ) do limite do trecho parabólico ( $\epsilon_{c2}$ ), para diversas classes de resistência do concreto. Para determinar a tensão do concreto, a Equação 1 é aplicada, utilizando a resistência do concreto ( $f_c$ ) e as deformações específicas de encurtamento no início do patamar plástico ( $\epsilon_{c2}$ ) e de ruptura ( $\epsilon_{cu}$ ), as quais são, respectivamente, iguais a 2,0‰ e 3,5‰ (para concretos até C50). Além disso, ainda para concretos até C50, a norma recomenda que o parâmetro  $n$  seja igual a 2.

Figura 8 – Relação tensão e deformação do concreto.



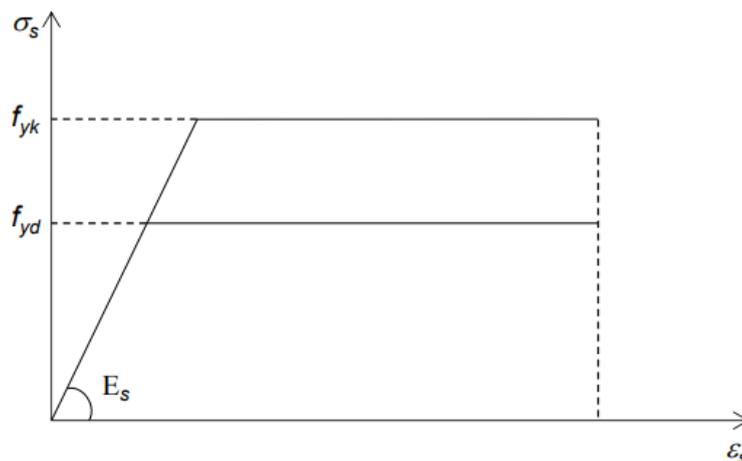
Fonte: Adaptado da ABNT NBR (2014)

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} [1 - (1 - \epsilon_c / \epsilon_{c2})^n] \quad (1)$$

## 2.5 Relação constitutiva do aço

A ABNT NBR 6118 (2014) recomenda uma aproximação do comportamento do aço por meio do diagrama tensão-deformação, apresentado na Figura 9, que se refere ao modelo elástico-perfeitamente plástico, com deformação última,  $\epsilon_u$ . Assim, o aço segue a lei de Hooke em regime elástico, e após o início de escoamento, há um patamar de amplificação da deformação para a atuação de uma tensão constante (CUNHA, 2009).

Figura 9 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas



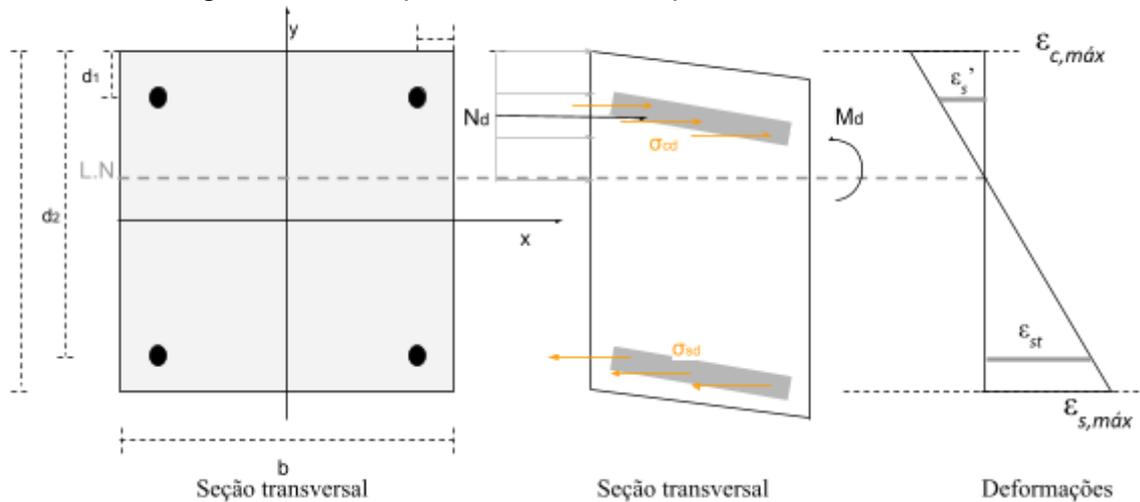
Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118 (2014)

Na ausência de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, o módulo de elasticidade do aço pode ser adotado como 210 GPa conforme prescrito pela ABNT NBR 6118 (2014).

## 2.6 Curvas de interação para flexão composta reta

A flexão composta reta é definida quando os esforços solicitantes, força normal ( $N_d$ ) e um momento fletor ( $M_d$ ) atuante em torno de um dos eixos principais de inércia da seção, como mostrado na Figura 10. Assim, a seção pode ser submetida a tensões de compressão e a tensões de tração, capazes de levar o elemento analisado ao seu estado de limite último.

Figura 10 – Esforços solicitantes na seção transversal



Fonte: Da autora (2023)

Pelo equilíbrio das forças normais em uma seção, demonstrado na Figura 10, pode-se escrever o esforço normal solicitante ( $N_d$ ) e o momento fletor solicitante ( $M_d$ ) conforme as Equações 2 e 3.

$$N_d = P_{cc} + P_{ct} - P_{st} \quad (2)$$

$$M_d = P_{cc} \left( d_2 - \frac{\lambda x}{2} \right) + P_{ct} (d_2 - d_1) - N_d \left( d_2 - \frac{h}{2} \right) \quad (3)$$

em que:

$d_1$  : distância da fibra mais comprimida da seção;

$d_2$  é altura útil da seção;

$h$  é a altura da da seção;

$\lambda x$  : posição da linha neutra.

Conhecendo a geometria da seção pode-se escrever as forças no concreto comprimido ( $P_{cc}$ ), no aço comprimido ( $P_{sc}$ ) e tracionado ( $P_{st}$ ) conforme as Equações 4, 5, 6 e 7.

$$P_{cc} = \alpha_c \sigma_{cd} \lambda x b \quad (4)$$

Substituindo  $x = d\beta_x$  :

$$P_{cc} = \lambda \sigma_{cd} \beta_x d_2 b \quad (5)$$

$$P_{ct} = \sigma_{s1} A_{s1} \quad (6)$$

$$P_{st} = \sigma_{s2} A_{s2} \quad (7)$$

Sendo:

$A_{s1}$  : Área da armadura superior da seção

$A_{s2}$  : Área da armadura inferior da seção

$b$ : base da seção

Escrevendo as resultantes das solicitações demonstradas, tem-se a equação final do esforço normal e do momento fletor definida pelas Equações (8) e (9), respectivamente.

$$N_d = 0,68 \sigma_{cd} \beta_x d_2 b + \sigma_{s1} A_{s1} - \sigma_{s2} A_{s2} \quad (8)$$

$$M_d = 0,68 \sigma_{cd} \beta_x d_2^2 b (1 - 0,4 \beta_x) + \sigma_{s1} A_{s1} (d_2 - d_1) - N_d (d_2 - \frac{h}{2}) \quad (9)$$

em que:

$\sigma_{cd}$ : Tensão no concreto

$\beta_x$ : distância da linha neutra

$\sigma_{s1}$ : Tensão na armadura superior

## 2.7 Envoltória Resistente

A ABNT NBR 6118 (2014) recomenda que, em situações de flexão oblíqua em elementos estruturais simples ou compostos, deve-se utilizar a Equação 10 para o

dimensionamento. Essa expressão considera os componentes dos momentos resistentes de cálculo em flexão oblíqua nos dois eixos principais de inércia, bem como os momentos resistentes de cálculo em flexão composta normal em cada eixo. Todos estes momentos são avaliados considerando a existência conjunta de uma força normal  $N_d$ . Além disso, é adotado um expoente de segurança em seções retangulares de 1,2.

$$\left[ \frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^\alpha + \left[ \frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^\alpha = 1 \quad (10)$$

em que:

$M_{Rd,x}$  e  $M_{Rd,y}$  são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão oblíqua composta.

$M_{Rd,xx}$  e  $M_{Rd,yy}$  são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão composta reta.

$\alpha$  é o expoente de segurança.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo descrever o desenvolvimento analítico das curvas de interação entre força normal e momento(s) fletor(es) para seções transversais de pilares de concreto armado.

#### 3.1 Análise de equações para a flexão composta reta

As equações foram desenvolvidas tomando os seguintes embasamentos teórico como as hipóteses básicas prescritas na ABNT NBR 6118 (2014), sendo elas: A seção permanece plana após a deformação, existe aderência entre o aço e o concreto e a resistência do concreto à tração é desprezada. Na seção 2.3 foram descritos todos os domínios de deformação da ABNT NBR 6118 (2014), com isso, é notório que a posição da linha neutra influencia nos esforços atuantes e nas deformações. Com essas premissas, esta seção tem o objetivo de descrever as equações desenvolvidas para cada domínio. As análises seguem o raciocínio do equilíbrio de forças como foi utilizado na seção 2.6 para desenvolver as Equações 8 e 9. Para a determinação dos valores das tensões e da posição da linha neutra, tem-se as condições prescritas no Quadro 1.

Quadro 1 - Condições para a análise das Equações 8 e 9 nos domínios de deformação

| Domínio | Condições  | Análise da LN               |
|---------|--|-----------------------------|
| 1       | Todos os elementos estão tracionados, o concreto é desprezado e a tensão na armadura superior deve ser avaliada conforme a geometria da seção. A armadura inferior está na sua máxima deformação por tração, ou seja, atinge sua máxima tensão.  | $-\infty < \beta_x < 0$     |
| 2       | A parte superior da seção está comprimida, no entanto a tensão de compressão no concreto deve ser avaliada conforme a deformação. Novamente, o escoamento da armadura superior deve ser avaliado conforme a geometria da seção e a posição da linha neutra. A armadura inferior está na sua máxima deformação por tração, ou seja, atinge sua máxima tensão. | $0 < \beta_x < 0,2593$      |
| 3       | O concreto comprimido está na sua máxima deformação de compressão, atingindo consequentemente sua tensão máxima. A armadura comprimida deve ser avaliada conforme a geometria da seção e a posição da linha neutra. A armadura inferior escoou.  | $0,2593 < \beta_x < 0,6284$ |
| 4       | O concreto comprimido está na sua máxima deformação de compressão, atingindo consequentemente sua tensão máxima. Agora as armaduras superior e inferior devem ser avaliadas conforme a geometria da seção e a posição da linha neutra.   | $0,6284 < \beta_x < 1$      |
| 4a      | O concreto comprimido está na sua máxima deformação de compressão, atingindo consequentemente sua tensão máxima. Agora a armadura inferior também está sob compressão, e tanto a sua tensão quanto a tensão da armadura superior devem ser avaliadas conforme a geometria da seção e a posição da linha neutra.  | $1 < \beta_x < h/d2$        |
| 5       | Todos os elementos estão comprimidos. A deformação limite do concreto varia do seu ponto de máxima compressão até o valor de deformação $\epsilon_{ci}$ . A linha neutra está fixa em $3h/7$ . As tensões nas armaduras devem ser avaliadas.   | $h/d2 < \beta_x < +\infty$  |

Fonte: Da autora (2023)

### 3.2 Interpolações nas curvas para valores de forças normais intermediárias

O *software* de elementos finitos utilizado, gera curvas de interação para esforços normais calculados internamente. Para a padronização dos resultados, os esforços normais utilizados para consulta nas curvas aqui obtidas foram os mesmos do programa. Assim, em alguns casos foram necessárias interpolações lineares entre os momentos fletores e forças normais obtidas. A interpolação seguiu o processo descrito pela Equação (11):

$$M_d = \left( \frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N_{MEF} - N_j) + M_j \quad (11)$$

Nesta equação,  $j$  e  $j+1$  são os pontos que apresentam esforço normal  $N_j$  e  $N_{j+1}$  obtidos através da norma brasileira, imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor do esforço normal ( $N_{MEF}$ ) obtido através dos métodos dos elementos finitos. E os  $M_j$  e  $M_{j+1}$  os momentos fletores relativos a cada esforço normal.

### 3.3 Interação entre os momentos fletores em torno dos eixos principais de inércia

Foram utilizados os momentos obtidos nas interpolações como momentos atuantes diretamente nos eixos principais, e foi utilizada a Equação 10 descrita na Seção 2.8 deste texto.

### 3.4 Validação da formulação utilizada

Inicialmente, foram feitas comparações das curvas obtidas pela flexão composta reta com resultados presentes na literatura. Posteriormente, as curvas para a flexão composta oblíqua foram construídas em função da proposição da ABNT NBR 6118 (2014) e comparadas com as obtidas via *software* baseado no método dos elementos finitos. Em ambos os casos, foram utilizadas duas seções transversais retangulares, sendo a primeira com quatro barras longitudinais, e a segunda com 16 barras. Nos dois casos, a armação é disposta de forma duplamente simétrica na seção.

## 4 ANÁLISE DE RESULTADOS

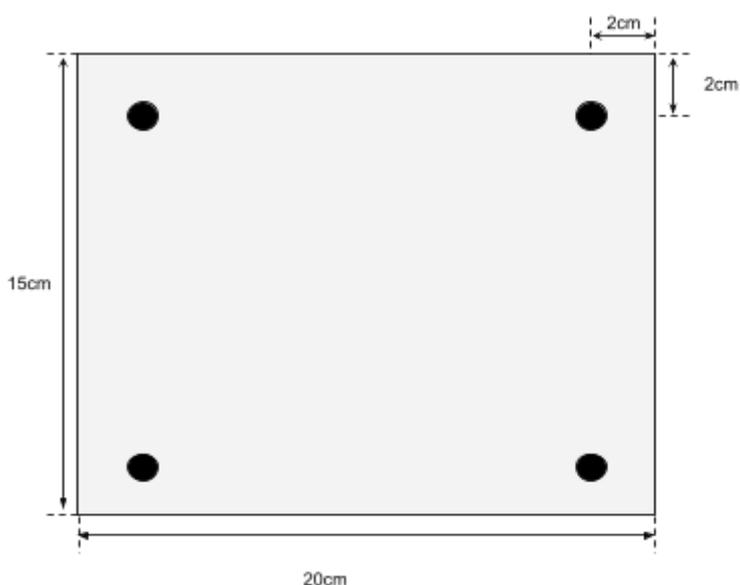
Neste capítulo são apresentados os resultados finais da avaliação e construção analítica das curvas de interação de força normal com momento fletor para seções retangulares de

pilares de concreto. Ressalta-se que os resultados encontrados são comparados com aqueles obtidos via método dos elementos finitos (MEF).

#### 4.1 Seção retangular com 4 barras

Aqui, a seção proposta por Espion (1993) é testada. Esta é uma seção retangular de concreto armado com base de 20,00 cm e altura de 15,00 cm. Suas armaduras têm uma área total de aço de 4,52 cm<sup>2</sup>, e a distância do centro geométrico de cada linha de armadura até a face externa é de 2,00 cm. A seção é composta por concreto com resistência à compressão ( $f_{cd}$ ) de 3,830 kN/cm<sup>2</sup> e aço com resistência de escoamento ( $f_{yd}$ ) de 46,500 kN/cm<sup>2</sup>. A representação gráfica da seção transversal pode ser observada na Figura 11, enquanto as informações detalhadas das propriedades estão descritas na Tabela 1.

Figura 11 – Pilar de Foure



Fonte: Da autora (2023)

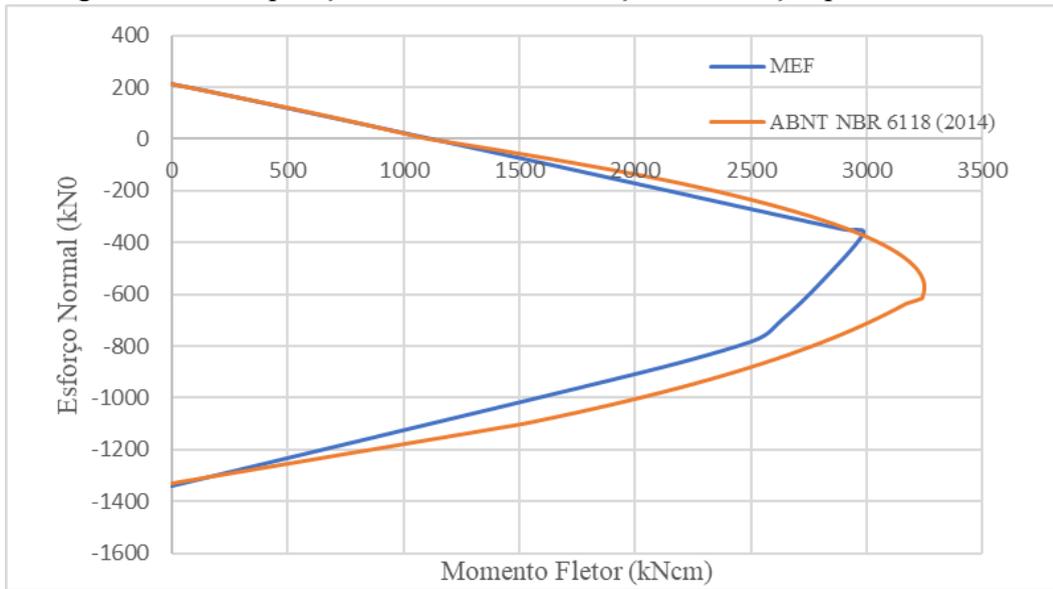
Tabela 1 – Propriedades da seção transversal retangular

| CONCRETO                       |                 |                 | AÇO                            |             |              |
|--------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------------------|-------------|--------------|
| $f_{cd}$ (kN/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon_{c2}$ | $\epsilon_{cu}$ | $f_{yd}$ (kN/cm <sup>2</sup> ) | $E_s$ (MPa) | $\epsilon_u$ |
| 3,830                          | 0,0020          | 0,0035          | 46,500                         | 20000       | 0,01         |

Fonte: Da autora (2023)

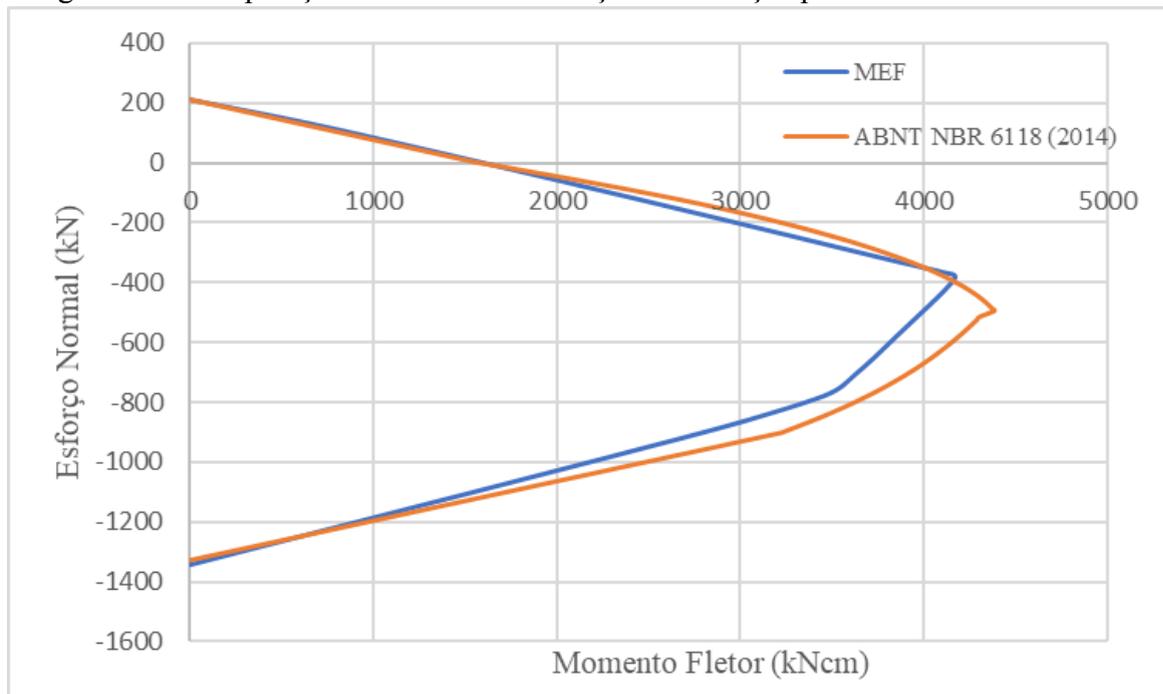
As Figuras 12 e 13 exibem as duas curvas de interação de esforços obtidas com 0° (com momento fletor em torno da menor inércia da seção transversal) e 90° (flexão na maior inércia da seção), respectivamente. As curvas são confrontadas com as obtidas via MEF.

Figura 12 – Comparação de curvas de interação de esforços para eixo de menor inércia



Fonte: Da autora (2023).

Figura 13 - Comparação de curvas de interação de esforços para eixo de maior inércia.

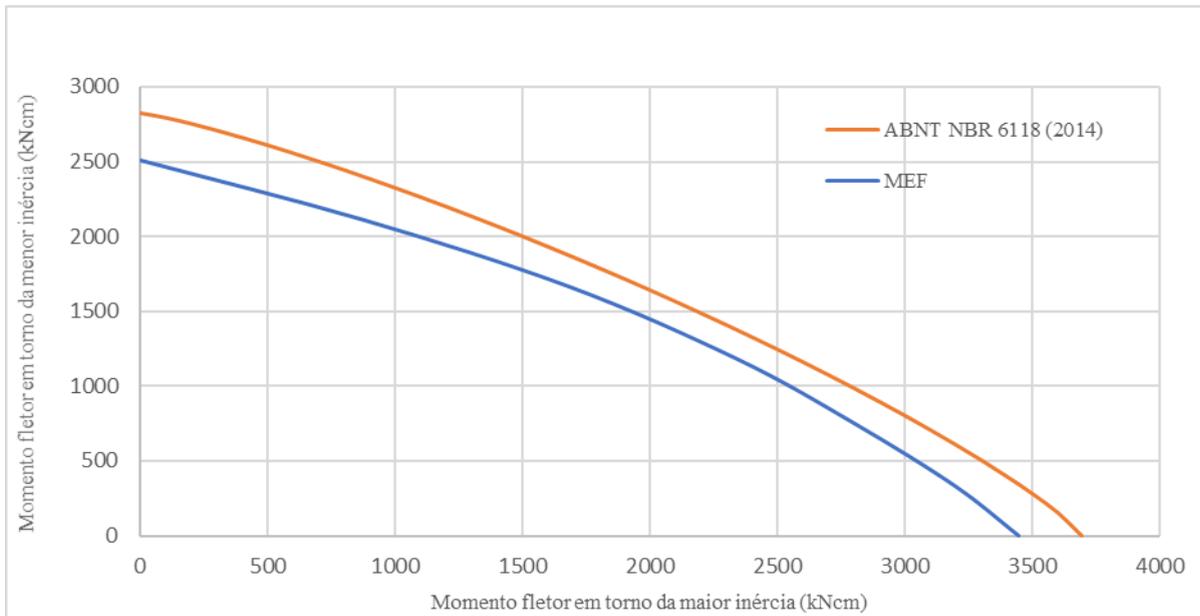


Fonte: Da autora (2023).

É possível notar que as curvas de interação de esforços são próximas, principalmente nas regiões onde os momentos fletores são pequenos, e há divergências à medida que o momento fletor aumenta. Estas divergências podem ser explicadas pela diferença de metodologia das abordagens. O uso dos domínios de deformação considera que o máximo momento fletor é obtido quando a fibra mais comprimida da seção transversal atinge a deformação limite do concreto sob compressão. No entanto, há na literatura (Lemes *et al.*,

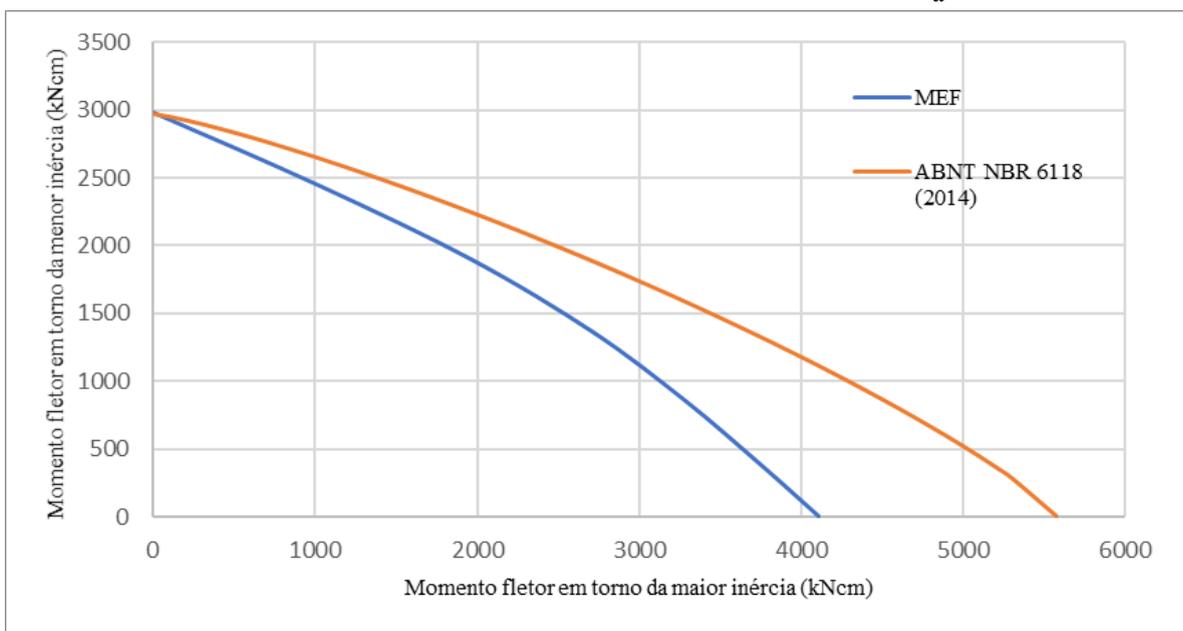
2022) apontamentos que definem que o máximo momento resistente de uma seção pode ser encontrado com deformações de compressão no concreto menores do que a deformação última. Tal consideração vai de encontro com os resultados aqui obtidos. Com esforços solicitantes da flexão composta reta, considerando as interpolações para esforço normal e a aplicação da Equação 10 e chega-se nas curvas de interação para a flexão composta oblíqua nos dois eixos da seção. Os resultados obtidos para forças normais constantes ( $N_d = -708,203$  kN;  $N_d = 366,987$  kN;  $N_d = -72,129$  kN) são apresentados nas Figuras 14,15 e 16.

Figura 14 - Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -708,203$  kN.



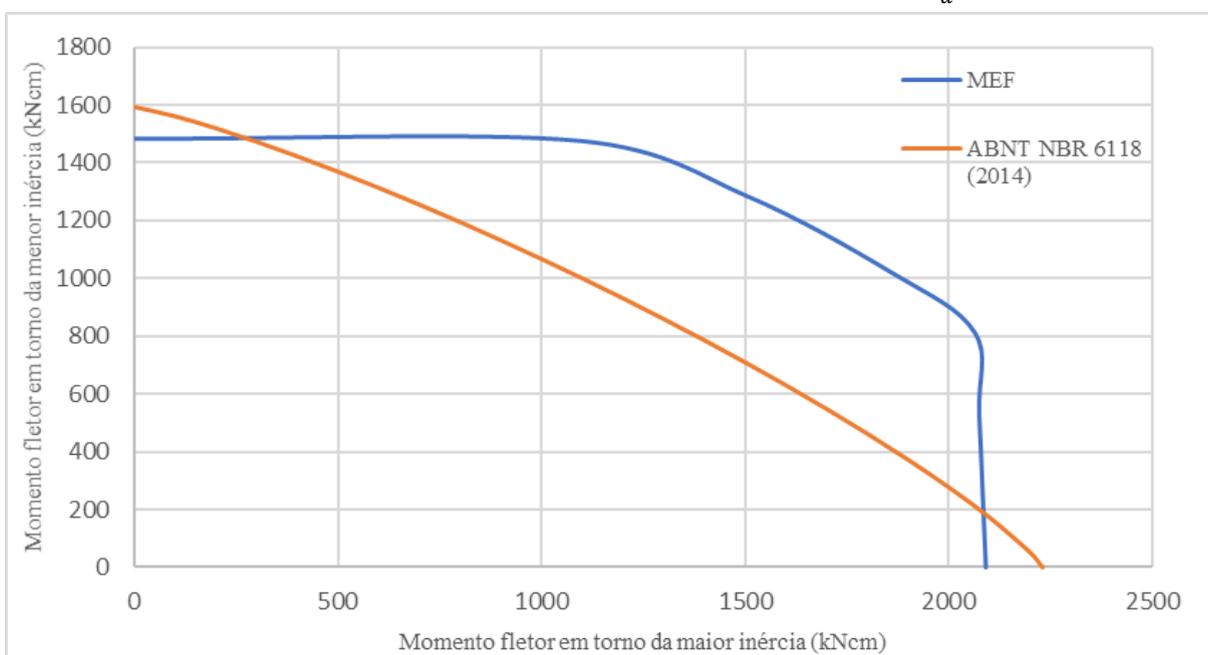
Fonte: Da autora (2023)

Figura 15- Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -366,987$  kN.



Fonte: Da autora (2023)

Figura 16- Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -72,129$  kN.



Fonte: Da autora (2023)

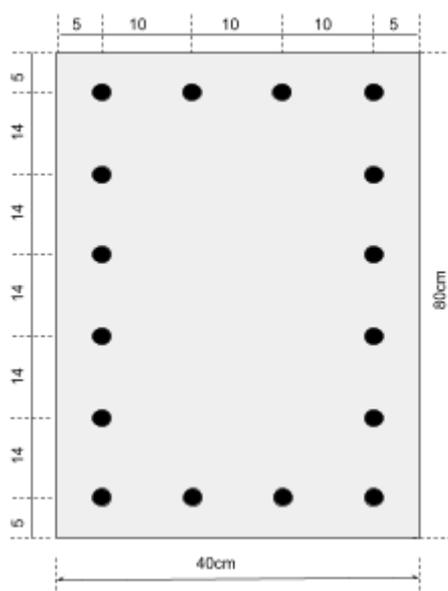
Nota-se que para esforços normais de compressão maiores, a curva proposta pela ABNT NBR 6118 (2014) superestima a capacidade resistente da seção transversal em relação aos resultados numéricos. Tal condição é proveniente dos resultados obtidos para a flexão

composta reta (Figuras 12 e 13), onde foi possível observar que em praticamente todos os pontos da curva, os resultados baseados na norma brasileira foram maiores do que via MEF.

#### 4.2 Seção retangular com 16 barras

Agora, a seção estudada por Liu *et al* (2012) é testada. Trata-se de uma seção transversal de concreto armado composta por uma base de 40,00 cm e altura de 80,00 cm. Suas armaduras têm uma área total de aço de 128,64 cm<sup>2</sup>, e a distância do centro geométrico de cada linha de armadura até a face externa é de 5,00 cm. A seção é composta por concreto com resistência à compressão ( $f_{cd}$ ) de 2,67 kN/cm<sup>2</sup> e aço com resistência de escoamento ( $f_{yd}$ ) de 30,87 kN/cm<sup>2</sup>. A representação gráfica da seção transversal pode ser observada na Figura 17, enquanto as informações detalhadas das propriedades estão descritas na Tabela 2.

Figura 17- Seção transversal com 16 barras



Fonte: Da autora (2023).

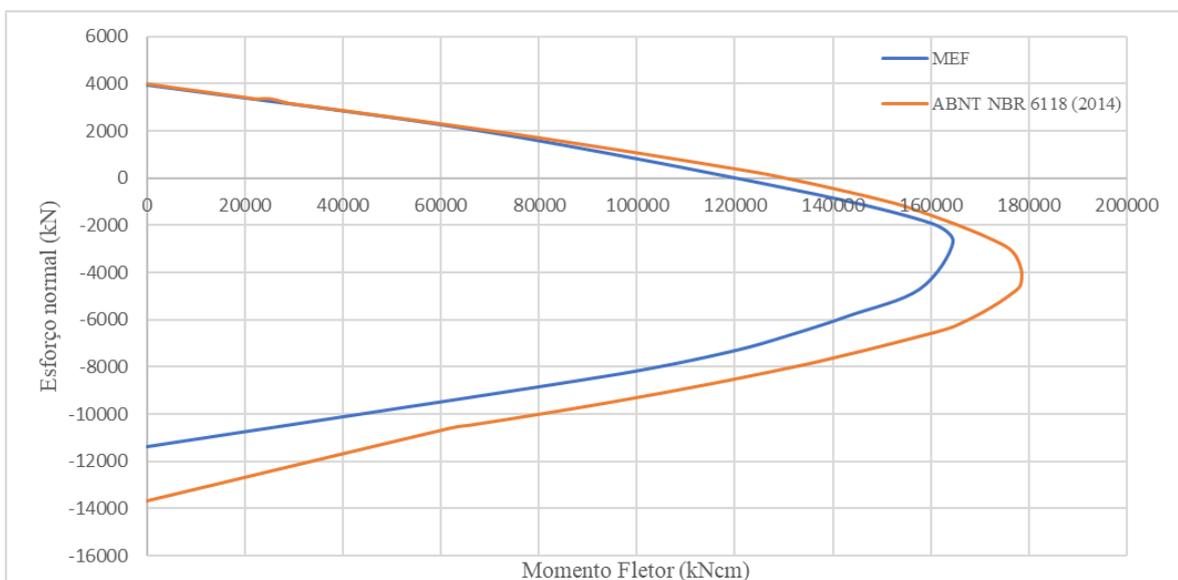
Tabela 2 – Propriedades da seção transversal retangular.

| CONCRETO                       |                 |                 | AÇO                            |             |              |
|--------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------------------|-------------|--------------|
| $f_{cd}$ (kN/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon_{c2}$ | $\epsilon_{cu}$ | $f_{Yd}$ (kN/cm <sup>2</sup> ) | $E_s$ (MPa) | $\epsilon_u$ |
| 2,667                          | 0,0020          | 0,0035          | 30,589                         | 20000       | 0,01         |

Fonte: Da autora (2023)

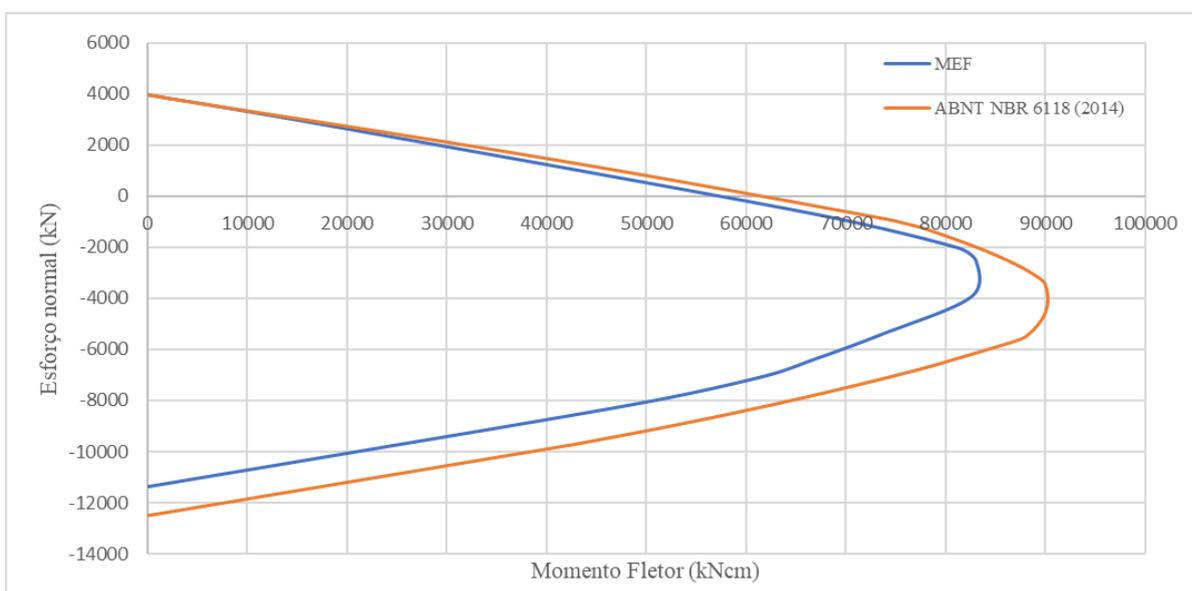
As duas curvas de interação de esforços obtidas com para a flexão em torno dos eixos de maior e de menor inércia são apresentadas nas Figuras 18 e 19 respectivamente.

Figura 18 - Comparação de curvas de interação de esforços para eixo de maior inércia.



Fonte: Da autora (2023).

Figura 19 - Comparação de curvas de interação de esforços para eixo de menor inércia

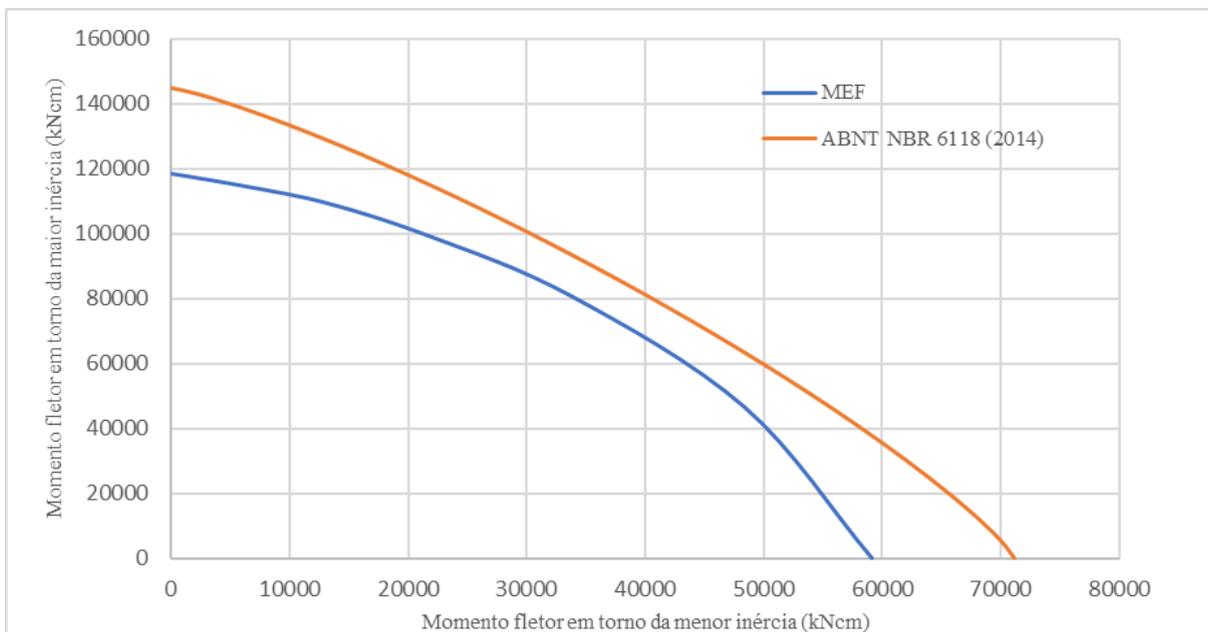


Fonte: Da autora (2023)

Nota-se a região de esforço normal de tração as curvas são próximas, consequência que nesta região o concreto não contribui tão ativamente quanto o aço na capacidade resistente. O avanço da curva após o momento máximo pode se justificar pelo mesmo motivo que o resultado da seção transversal anterior. Seguindo os mesmos passos do exemplo

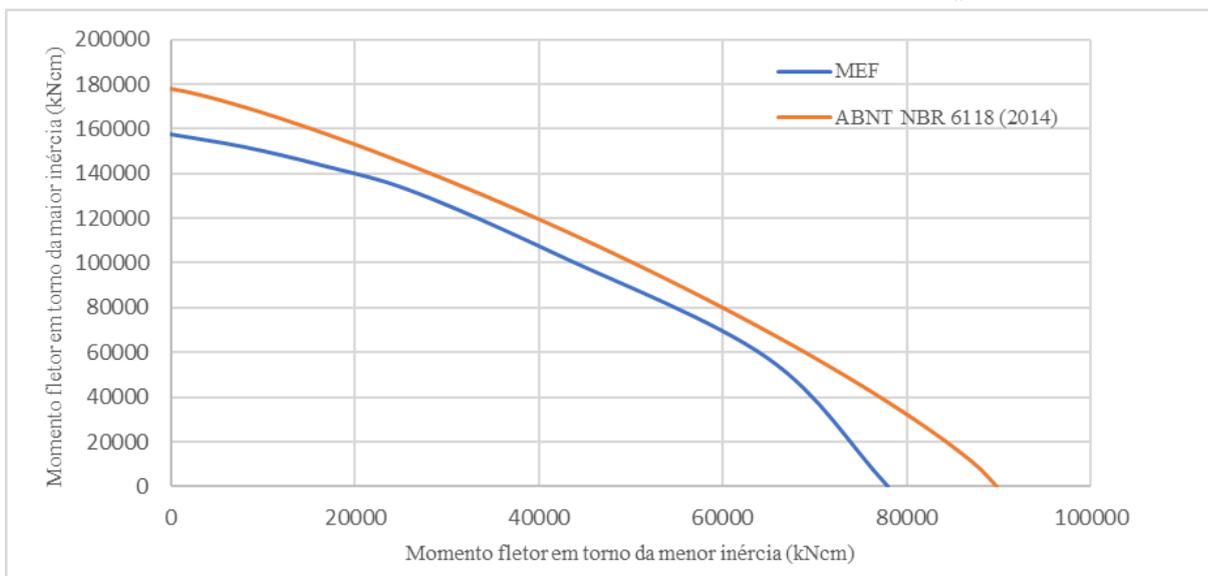
anterior, a curva para a flexão composta oblíqua, para valores fixos de  $N_d$ , são apresentadas nas Figuras 20,21 e 22.

Figura 20 - Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -7384\text{kN}$ .



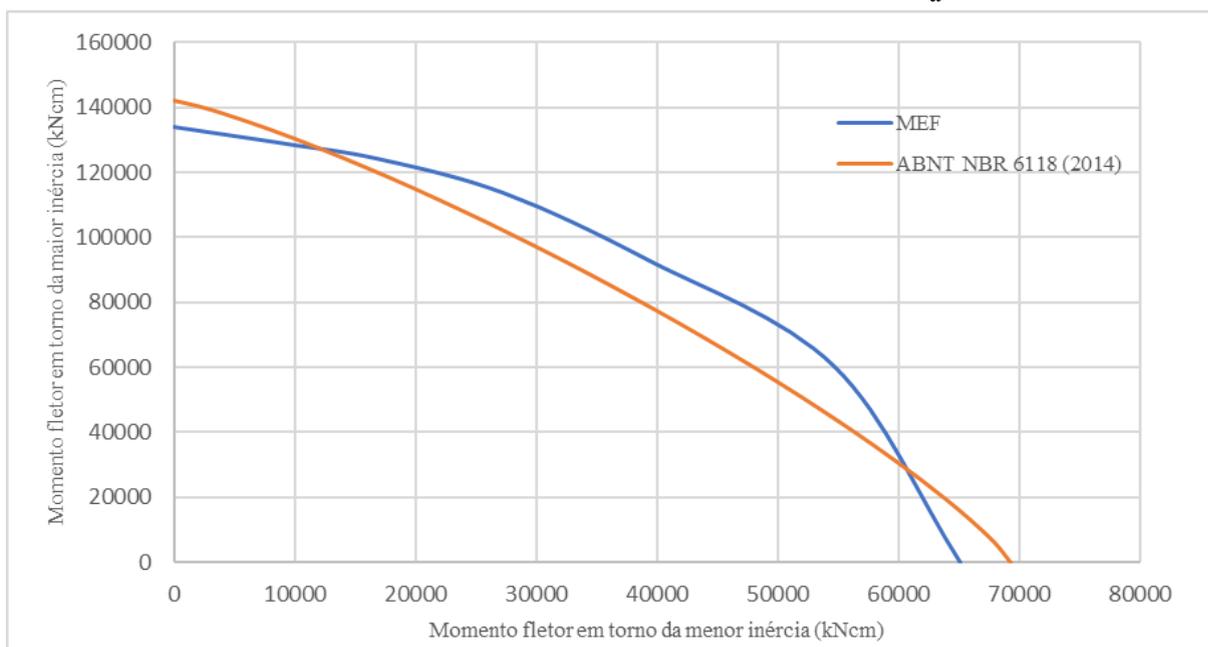
Fonte: Da autora (2023)

Figura 21- Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -4690\text{kN}$ .



Fonte: Da autora (2023)

Figura 22- Comparação de curvas de interação de esforços para  $N_d = -557,714$  kN.



Fonte: Da autora (2023)

Novamente, a proposição da ABNT NBR 6118 (2014) apresentou uma curva com valores de capacidade resistente maior do que a numericamente obtida. É possível perceber então que o comportamento dos dois exemplos aqui testados é o mesmo.

## 5 CONCLUSÃO

Em síntese ao trabalho, a fim de demonstrar a eficácia e precisão da proposição normativa, foram desenvolvidas as equações de esforços solicitantes para flexão composta reta e, posteriormente, foi adotado o processo aproximado para a interação de momentos fletores nos eixos principais de inércia (ABNT NBR 6118, 2014). Com isso, os resultados foram confrontados com análises numéricas via método do elemento finitos (MEF) através de curvas de interação para cada eixo geométrico da seção retangular de concreto armado.

Nos casos analisados, pode-se observar uma convergência nas curvas de flexão composta reta satisfatória entre os resultados obtidos com dados normativos e com os dados via método dos elementos finitos. Foi observado que nos dois exemplos testados, a curva obtida usando a metodologia descrita na ABNT NBR 6118 (2014) propiciou resultados de capacidade resistente maiores do que o MEF. Tal condição pode ser explicada pela diferença da deformação usada para o cálculo do momento fletor resistente. No presente trabalho, via domínios de deformação, usa-se a deformação última do concreto comprimido, via MEF, a deformação é calculada e pode ser menor do que a deformação última.

Ao comparar as curvas para a flexão composta oblíqua, os dois testes aqui realizados apresentaram o mesmo comportamento. As curvas da ABNT NBR 6118 (2014) novamente superestimaram a capacidade resistente da peça em comparação com os dados via MEF.

Assim, recomenda-se que este estudo seja continuado para avaliação de resultados experimentais; a calibração do parâmetro a proposto na norma brasileira e expandido para seções com formas diferentes da retangular.

## REFERÊNCIAS

AISC LRFD. **Specification for structural steel buildings**. *American Institute of Steel Construction*, Chicago, IL, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BASTOS, P.S. **Flexão Composta e Pilares de Concreto Armado**. Material Bibliográfico, Universidade Estadual de São Paulo-UNESP, Bauru, 2021.

CARVALHO, R. C, PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**: Segundo a NBR 6118:2014. 2ªEd., São Paulo, 2013.

CRUZ, L.F.; COUTO E.C. **Avaliação do Parâmetro  $\infty$  do Processo Aproximado para o Dimensionamento à Flexão Composta Oblíqua**. *VI Congresso de Ensino de Graduação*. Universidade Federal de Pelotas-UFPEL, Rio Grande do Sul, 2020.

CUNHA, Y.M. **Automatização da Verificação de Seções de Concreto Armado Submetidas à Flexão Composta Oblíqua**. Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro- UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

LEMES, Í. J. M. **Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas**. Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP, Minas Gerais, 2018.

Lemes Í. J. M., et al. **Influence of residual stress models prescribed in design codes for steel I-section behavior**. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 38, n. 4, p. 37, 2022.

LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. **Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 1: Cross-section analysis technique and second-order analysis**. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 70, p. 326-336, 2012.

ROCHA, P. A. S.; SILVA, K. I. DA. **Construction of the interaction curve of concrete-encased composite columns based on the deformation domains of reinforced concrete sections**. Rev. IBRACON Estrut. Mater., São Paulo, v. 8, n. 4, p. 447-466, Aug. 2015.

VENTURINI, W. S.; RODRIGUES, R. O. **Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta**. Material Bibliográfico, Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Paulo, 1987.