



**LUIZ RENATO FELIPPE  
RAFAELA VIOL VIDAL**

**MODELAGEM DINÂMICA DE UMA ESTRUTURA  
MULTI-PAVIMENTOS FLEXÍVEL PARA INVESTIGAÇÃO  
TEÓRICO-EXPERIMENTAL E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE  
PARAMÉTRICA**

**LAVRAS-MG  
2023**

**LUIZ RENATO FELIPPE  
RAFAELA VIOL VIDAL**

**MODELAGEM DINÂMICA DE UMA ESTRUTURA MULTI-PAVIMENTOS  
FLEXÍVEL PARA INVESTIGAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL E ANÁLISE DE  
SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA**

Artigo apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Mecânica, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira  
Orientador  
Prof. Dr. Belisário Nina Huallpa  
Coorientador

**LAVRAS-MG  
2023**

**LUIZ RENATO FELIPPE  
RAFAELA VIOL VIDAL**

**MODELAGEM DINÂMICA DE UMA ESTRUTURA MULTI-PAVIMENTOS  
FLEXÍVEL PARA INVESTIGAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL E ANÁLISE DE  
SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA**

**DYNAMIC MODELING OF A FLEXIBLE MULTI-STOREY STRUCTURE FOR  
THEORETICAL-EXPERIMENTAL RESEARCH AND PARAMETRIC SENSITIVITY  
ANALYSIS**

Artigo apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Mecânica, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADO em 03 de Julho de 2023.  
Prof. Dr. Maurício Calíri Júnior UFLA  
Prof. Dr. Wander Gustavo Rocha Vieira UFLA

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira  
Orientador  
Prof. Dr. Belisário Nina Huallpa  
Coorientador

**LAVRAS-MG  
2023**

## AGRADECIMENTOS

Aos nossos pais, Vera e Camilo, Rosângela e Renato e aos nossos padrinhos, avós e familiares pelo amor incondicional, apoio durante a jornada e sabedoria compartilhada que vai além da sala de aula.

Ao Professor Henrique, pela paciência ao ensinar, por ser exemplo de dedicação, pela oportunidade de aprender e desejo de ensinar, pela proatividade, por pavimentar o caminho do nosso aprendizado sabendo as respostas e fazendo as perguntas e pelas sessões de terapia em grupo.

Ao Professor Belisário, por todos os conselhos, pela paciência, incentivo e ensinamentos de vida, por ensinar com humildade que a busca por conhecimento não é uma fase e sim um estilo de vida.

Ao Professor Wander, pela sinceridade, por todos os questionamentos e desafios propostos e alcançados, pela confiança em nosso potencial e por nos impulsionar diariamente a quebrar barreiras e superar limitações.

Ao Professor Maurício, pela disponibilidade, determinação e foco em seus objetivos, tenacidade, companheirismo, lealdade e por ensinar que o sucesso de um projeto é possível enquanto ainda houver alguém se dedicando a ele.

Ao Professor Márcio, pela benevolência e empatia, carisma, pela flexibilidade e por ensinar que a grandeza não se encontra na perfeição e sim sobre como lidamos com nossos erros.

Ao Professor Francisco, pelos conselhos de profissão e de vida, por incentivar a busca constante pela superação dos limites e barreiras, pela confiança e incentivo à ambição pelo conhecimento.

Ao Professor Dimas, pelas boas histórias e risadas, pelo bom humor, por toda disponibilidade e por ensinar a ver com bons olhos os espinhos do caminho.

Ao Professor Carlos, pela dedicação, solicitude, iniciativa, altruísmo, assertividade, proatividade e companheirismo dentro e fora da sala de aula.

À Professora Bruna, por ensinar a importância do autoquestionamento e da confiança em nossas competências.

Aos mestres Fábio, Adriano, Filipe, Joelma, Sandro, Luana, Bruna, Carlos, Dimas, Francisco, Henrique, Márcio, Maurício, Wander e Belisário por todos os cafés filosóficos, boas conversas e memórias, por lecionar com altruísmo e empenho mais que engenharia, pela amizade construída no caminho e pelo conhecimento compartilhado.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa de iniciação científica.

À UFLA, pela concessão da bolsa de monitoria.

Aos colegas do Laboratório de Mecânica Aplicada, pelos cafés, discussões, boas conversas e pelo companheirismo.

Aos amigos, em especial ao Marcos e ao Gabriel, pois o fardo é mais leve quando compartilhado.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo de modelagem de uma estrutura multi-pavimentos esbelta, composta por pavimentos rígidos conectados por colunas flexíveis, que são barras roscadas de aço zincado. A identificação do módulo de elasticidade do material das colunas foi feita a partir de uma norma ASTM E1876-09 e o diâmetro útil das colunas foi ajustado via análise modal experimental, pela comparação das frequências naturais teóricas com as experimentais. Um modelo analítico considerando a massa das colunas foi proposto e validado através da comparação do modelo de resposta analítico e experimental. Os resultados encontrados apontam que quando a massa das colunas não é desprezível em relação a massa dos pavimentos, estas devem ser consideradas na modelagem. Inserindo as massas das colunas no modelo, o erro encontrado em comparação analítica-experimental foi reduzido quando comparado aos resultados encontrados no modelo de parâmetro concentrados usualmente encontrado na literatura, que desconsidera a massa das colunas. Tendo em vista a necessidade de compreender o impacto qualitativo e quantitativo da variação das características geométricas e de material no comportamento dinâmico da estrutura, é apresentado o estudo da sensibilidade paramétrica do modelo proposto. São analisadas variações nas frequências naturais de translação e torção e a sensibilidade destas devido à variação do comprimento entre pavimentos, diâmetro das colunas, massa dos pavimentos, massa das colunas e posicionamento das colunas em relação ao centro dos pavimentos, variando cada parâmetro individualmente de forma percentual em relação ao modelo original e mantendo os demais parâmetros constantes. Os resultados da análise de sensibilidade apontam ser possível alterar a ordem em que as frequências de torção ocorrem em relação às de translação, mantendo estas inalteradas, apenas variando a configuração geométrica do posicionamento das colunas nos pavimentos.

**Palavras-chave:** Identificação paramétrica. Modelo de parâmetros concentrados. Sensibilidade de autovalor. Função de resposta em frequência. Método de elementos finitos.

## ABSTRACT

This work presents the modeling study of a slender multi-story structure, composed of rigid floors connected by flexible columns, which are threaded bars of galvanized steel. The identification of the Young's modulus of the columns was made from an ASTM E1876-09 standard and the equivalent diameter of the columns was adjusted by experimental modal analysis, by comparing the theoretical natural frequencies with the experimental ones. An analytical model considering the mass of the columns was proposed and validated by comparing the analytical and experimental frequency response models. The results found indicate that when the mass of the columns is not negligible compared to the mass of the floors, these must be considered in the modeling. By inserting the masses of the columns in the model, the error found in the analytical-experimental comparison was reduced when compared to the results found in the lumped parameter model usually found in the literature, which disregards the mass of the columns. Bearing in mind the need to understand the qualitative and quantitative impact of the variation of geometric and material characteristics on the dynamic behavior of the structure, a parametric sensitivity study of the proposed model is presented. Variations in the natural frequencies of translation and torsion and their sensitivity due to the variation in length between floors, diameter of the columns, mass of the floors, mass of the columns and positioning of the columns in relation to the center of the floors are analyzed, varying each parameter individually in a way percentage in relation to the original model and keeping the other parameters constant. The results of the sensitivity analysis indicate that it is possible to change the order in which the torsion frequencies occur in relation to the translational ones, keeping these unchanged, just by varying the geometric configuration of the positioning of the columns on the floors.

**Keyword:** Parametric identification. Lumped parameters modeling. Eigenvalue sensitivity. Frequency response function. Finite element method.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Bancada multipavimentos. . . . .	5
Figura 2.2 - Fixação e montagem dos pavimentos. . . . .	5
Figura 2.3 - Inertância obtida pelo teste ASTM. . . . .	7
Figura 2.4 - Comparação das FRF's obtidas pelo modelo FEM e experimental. . . . .	11
Figura 2.5 - Comparação analítica-experimental para o modelo simplificado. . . . .	13
Figura 2.6 - Modelo proposto para um GDL. . . . .	15
Figura 2.7 - Modelo de parâmetros concentrados. . . . .	18
Figura 2.8 - Configuração deformada de um pavimento no plano. . . . .	20
Figura 2.9 - Instrumentação e montagem para coleta de dados. . . . .	23
Figura 2.10 - Montagem para teste modal. . . . .	24
Figura 2.11 - Bancada física. . . . .	25
Figura 3.1 - Comparação analítica-experimental para o modelo proposto na configuração 1. . . . .	27
Figura 3.2 - Aplicação do modelo proposto para quatro graus de liberdade (configuração 2). . . . .	28
Figura 3.3 - Aplicação do modelo simplificado para quatro graus de liberdade. . . . .	29
Figura 3.4 - Comparação teórica-experimental do modelo simplificado com diâmetro útil atualizado. . . . .	30
Figura 3.5 - Sensibilidade das frequências naturais à massa $m_b$ . . . . .	32
Figura 3.6 - Sensibilidade das frequências naturais à massa $m_4$ . . . . .	33
Figura 3.7 - Sensibilidade das frequências naturais à massa $m_5$ . . . . .	33
Figura 3.8 - Sensibilidade das frequências naturais à massa $m_6$ . . . . .	34
Figura 3.9 - Sensibilidade das frequências naturais ao diâmetro $d$ . . . . .	34
Figura 3.10 - Sensibilidade das frequências naturais ao posicionamento das colunas $R$ . . . . .	35
Figura 3.11 - Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento $l_{04}$ . . . . .	36
Figura 3.12 - Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento $l_{45}$ . . . . .	36
Figura 3.13 - Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento $l_{56}$ . . . . .	36

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Características geométricas e de massa da estrutura física. . . . .	6
Tabela 2.2 - Configurações da bancada utilizadas para a verificação. . . . .	22
Tabela 2.3 - Limites de variação dos parâmetros para análise de sensibilidade. . . . .	27
Tabela 3.1 - Frequências de translação do modelo proposto para a configuração 2. . . . .	28
Tabela 3.2 - Diâmetros utilizados nos modelos para o comparativo. . . . .	30
Tabela 3.3 - Comparativo de erros relativos encontrados. . . . .	31
Tabela 3.4 - Frequências naturais experimentais e teóricas para a configuração 3. . . . .	31



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>4</b>
2.1	Identificação do módulo de elasticidade	6
2.2	Modelo simplificado de um grau de liberdade	11
2.3	Modelo proposto: refinamento do modelo simplificado de 1 GDL	14
2.4	Modelo proposto multi-GDL	16
2.5	Procedimento de verificação	22
2.6	Sensibilidade paramétrica	24
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>39</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da modelagem de um sistema estrutural de multi-pavimentos em termos teóricos e experimentais, considerando a identificação dos parâmetros de uma bancada de ensaios que foi projetada e construída e também a análise de sensibilidade dos diversos parâmetros que a constituem. Estes estudos fornecem os subsídios necessários para se fazer diversos estudos mais avançados, tais como *model updating* e modificação/otimização estrutural.

Estruturas flexíveis de múltiplos pavimentos, que podem ser simplificadas a elementos discretos de massa, rigidez e amortecimento, são encontradas nas mais diversas aplicações de engenharia, desde a indústria automobilística até a aeronáutica. Técnicas de *model updating* podem ser empregadas para auxiliar a identificar parâmetros desconhecidos, porém, a aplicação desta técnica só é possível com um modelo analítico representativo e bem definido para a estrutura, em termos de massa, rigidez e amortecimento (Tang *et al.*, 2008). Tabeshpour e Norifard (2020) realizaram um estudo paramétrico da dinâmica torcional de um modelo analítico representativo de diversas estruturas, dentre elas, estruturas flutuantes, automóveis e estruturas de múltiplos pavimentos, que podem ser representadas por elementos de massa e rigidez, investigando condições físicas que façam com que a primeira ou segunda frequência natural seja torcional. Zalka (2013) estudou o comportamento torcional de um modelo de um prédio de múltiplos pavimentos sob carga horizontal, considerando o estudo uma ferramenta que auxilia o projetista a compreender estruturas complexas, e o habilita a tomar decisões e redimensionar os parâmetros do sistema para encontrar a melhor configuração.

Compreender o impacto da variação dos parâmetros de um sistema dinâmico nas propriedades modais é fundamental quando se deseja atualizar o modelo que descreve seu comportamento dinâmico (*model updating*), em função das incertezas relacionadas aos valores dos parâmetros, para obter uma melhor correlação do modelo ao comportamento real. É possível que exista mais de uma solução satisfatória para a combinação dos parâmetros atualizados, nestes casos é necessário recorrer à experiência e conhecimento do analista para que a configuração que melhor representa o comportamento real do sistema seja adotada (Zárate e Caicedo, 2008). As análises de sensibilidade paramétrica são de importância fundamental quando se deseja compreender o comportamento dinâmico de estruturas, e o impacto da alteração de parâmetros na fase de projeto, ou devido à variação do sistema em um longo período de tempo pelo desgaste. O estudo da influência dos parâmetros do sistema é de extrema importância quando se deseja conhecer a configuração ótima por exemplo a configuração de maior rigidez (Younggang *et al.*, 2013), para o controle ativo de edifícios, torres e outras estruturas de engenharia para mitigação de vibrações, sendo necessário identificar os parâmetros e comportamento dinâmico das mesmas com modelos analíticos adequados (Gang *et al.*, 2005).

Wang *et al.* (2021) fizeram um controle de vibração induzida por vento e otimiz-

ção paramétrica de edifícios arranha-céus conectados por um TLCDI (*tuned liquid-column-damper-inerter*). A modelagem foi feita através do método de espaço de estado aliado à análise modal para obtenção do modelo de resposta, metodologia esta que é vantajosa em problemas em que não há ortogonalidade dos modos de vibrar. Gangm *et al.* (2005) realizaram a modelagem de uma estrutura de engenharia civil ativamente controlada através do modelo de espaço de estado, com utilização em sistemas de entrada e saída, capaz de encontrar os zeros fixos e interação da estrutura de controle pela derivação do modelo. Com o modelo definido, uma aplicação de algoritmo de otimização foi utilizada para definir os valores de parâmetros desconhecidos.

Análises de sensibilidade das frequências naturais e modos de vibrar aos parâmetros do sistema carregam informações importantes para garantir que as frequências de ressonância estejam fora das velocidades de operação, contribuindo para otimização do *design* de estruturas (Lin e Parker, 1999), além de diversas outras aplicações de engenharia. Zhu *et al.* (2018) aplicaram a análise de sensibilidade modal para modificar as frequências naturais de um sistema automotivo de acionamento por correia, para adaptá-las à sua condição de funcionamento. O problema de autovalor inverso foi utilizado para determinar as mudanças nos parâmetros do sistema para atingir a variação necessária na frequência natural em relação à configuração de projeto original. Tatar *et al.* (2023) estudaram a sensibilidade das frequências naturais e modos de vibrar em um sistema de engrenagem planetária devido à variação de parâmetros de *design* que afetam a massa e a rigidez, analisando a sensibilidade de modos torcionais e laterais e identificando de forma numérica a quais parâmetros estes e aqueles são mais sensíveis à variações. Utilizar a sensibilidade das frequências naturais para obter a melhor configuração de projeto se torna vantajoso por, muitas vezes, prover uma diretriz de projeto para projetistas em relação aos métodos convencionais, que são por vezes demorados e de custo elevado, por requererem experiência e diversas iterações (Zhu *et al.*, 2018). Yin *et al.* (2021) calcularam as expressões das sensibilidades das frequências naturais de forma analítica utilizando equações diferenciais parciais em relação a cada parâmetro de interesse, como comprimento do cabo de aço, massa do contrapeso e a distância excêntrica do contrapeso de um amortecedor de vibração tipo Stockbridge. Zhang *et al.* (2021) analisaram a sensibilidade da frequência natural de uma plataforma Stewart Eletrohidráulica em função da variação de parâmetros de massa e rigidez, a partir da equação característica. Gola *et al.* (2000) aplicaram uma abordagem baseada em sensibilidade para a atualização de um modelo dinâmico, ressaltando a demanda emergente desde a época de criar modelos numéricos discretos representativos, que podem ser obtidos incluindo análises de sensibilidade modal.

Tendo em vista a necessidade de uma modelagem representativa do sistema físico para o controle de estruturas, o presente trabalho tem como objetivo construir e validar o modelo analítico de uma estrutura multi-pavimentos flexível utilizando uma bancada experimental. Para a construção do modelo analítico da estrutura proposta neste trabalho, foi necessário identificar

os parâmetros desconhecidos do sistema, bem como módulo de elasticidade e diâmetro útil das colunas que contribuem para a dinâmica da estrutura. O sistema contínuo foi discretizado pelo método de parâmetros concentrados em termos de elementos de massa e rigidez. A validação do modelo analítico foi realizada por meio da comparação das FRF's analíticas e experimentais em termos dos erros relativos entre as frequências naturais, avaliando o impacto da inclusão da massa das colunas na formulação. Tendo em vista a importância da compreensão do comportamento dinâmico de estruturas de múltiplos pavimentos e a necessidade de construir e consolidar o conhecimento do comportamento dinâmico destas, as variações quantitativas nas frequências naturais dos modelos teóricos foram analisadas em termos de variação dos parâmetros geométricos e de material das colunas e dos pavimentos, incluindo variações na massa, configuração geométrica e dimensões das colunas que conectam os pavimentos em uma análise de sensibilidade paramétrica modal das frequências naturais. Apesar dos resultados apresentados serem quantitativos é possível aplicar os resultados qualitativos à estruturas multipavimentos similares (Tatar *et al.*, 2023).

A execução deste trabalho se iniciou com o objetivo de aplicar o modelo simplificado encontrado na literatura que será apresentado para a descrição do comportamento dinâmico da estrutura apresentada no capítulo Materiais e Métodos. Para tal foi necessário identificar e verificar o valor do módulo de elasticidade do material que constitui as colunas e a investigação do diâmetro a ser utilizado nas etapas de desenvolvimento do projeto. Após a determinação do módulo de elasticidade e do diâmetro, o modelo simplificado foi utilizado e apresentou divergências significativas em relação às frequências naturais identificadas experimentalmente. Como tentativa de ajustar o modelo, foi feita a identificação analítica do diâmetro das colunas que faria com que a resposta analítica fosse condizente com a real, este diâmetro foi realimentado no modelo simplificado para um único grau de liberdade, apresentando bons resultados, porém, quando o mesmo valor numérico de identificado de diâmetro identificou para o diâmetro é inserido no modelo simplificado com múltiplos graus de liberdade as divergências foram novamente evidentes. Assim sendo, concluiu-se que, como não foi possível encontrar uma combinação de módulo de elasticidade e diâmetro que conseguisse satisfazer a dinâmica da bancada testada e o teste ASTM utilizado para identificar o módulo de elasticidade, o modelo analítico simplificado não era capaz de descrever efetivamente a estrutura multipavimentos de interesse. Como proposta para solucionar a divergência observada foi proposto um novo modelo analítico que considera a massa das colunas em sua formulação, modelo que foi testado experimentalmente em termos da resposta translacional e torcional para um e múltiplos graus de liberdade, comprovando que com o modelo proposto é possível descrever a dinâmica da bancada com um conjunto de dados de módulo de elasticidade e diâmetro das colunas, modelo este que é confiável e retorna resultados coerentes independente do número de graus de liberdade, com os mesmos dados numéricos.

Como tentativa de ajustar o modelo, foi feita a identificação analítica do diâmetro das colunas que faria com que a resposta analítica fosse condizente com a real, este diâmetro foi realimentado no modelo simplificado para um único grau de liberdade, apresentado bons resultados, porém, quando o mesmo valor numérico de diâmetro identificado analiticamente para um grau de liberdade é inserido no modelo simplificado com múltiplos graus de liberdade, as divergências foram novamente evidentes. Assim sendo, concluiu-se que, como não foi possível encontrar uma combinação de módulo de elasticidade e diâmetro que conseguisse satisfazer a dinâmica da bancada testada e o teste ASTM utilizado para identificar o módulo de elasticidade, o modelo analítico simplificado não era capaz de descrever efetivamente a estrutura multipavimentos de interesse. Como proposta para solucionar a divergência observada, foi proposto um novo modelo analítico que considera a massa das colunas em sua formulação, modelo que foi testado experimentalmente em termos da resposta translacional e torcional para um e múltiplos graus de liberdade, comprovando que com o modelo proposto é possível descrever a dinâmica da bancada com um conjunto de dados de módulo de elasticidade e diâmetro das colunas, modelo este que é confiável e retorna resultados coerentes independente do número de graus de liberdade, com os mesmos dados numéricos.

Este trabalho contempla as etapas de identificação da ineficácia do modelo simplificado, tentativa de ajuste dos parâmetros do sistema para satisfazer a dinâmica identificada experimentalmente com o modelo simplificado, proposta de um novo modelo que considera a massa das colunas, validação experimental do novo modelo e análise de sensibilidade paramétrica deste de forma em que as etapas necessárias para atingir os resultados finais são apresentadas linearmente dentro de Materiais e Métodos. De forma similar, os resultados encontrados em cada etapa desde a identificação das divergências do modelo até os resultados da análise de sensibilidade paramétrica são apresentadas de forma linear dentro de Resultados e Discussões, fazendo com que a linearidade da execução do trabalho pode ser identificada dentro de cada capítulo, mas não como uma leitura linear do trabalho como um todo.

## **2 MATERIAIS E MÉTODOS**

A estrutura apresentada neste trabalho pode ser ajustada de acordo com os sete pavimentos retangulares rígidos de madeira MDF disponíveis, possibilitando diversas configurações da bancada analisada, uma delas representada na Figura 2.1. Em todas as configurações abordadas, os pavimentos foram posicionados em ordem crescente, quanto ao índice numérico, da base até o topo da estrutura. A base é composta do mesmo material dos pavimentos com dimensões maiores, com finalidade de simular um corpo fixo (condição de contorno de engaste), e é sustentada por quatro suportes de borracha (*vibrastop*), visando isolar a bancada do ambiente de teste.

Figura 2.1 – Bancada multipavimentos.



Fonte: Dos autores (2023).

A conexão dos pavimentos é feita através de quatro colunas de aço zincado do tipo barra roscada M5 de passo 0,80 mm, com rosca externa ao longo do seu comprimento. Os pavimentos são fixados às colunas por um conjunto de duas porcas e duas arruelas M5 em cada furo como mostrados na Figura 2.2, permitindo ajustar milimetricamente a distância entre os pavimentos e fixá-los nas colunas, restringindo a movimentação vertical e angular dos mesmos.

Figura 2.2 – Fixação e montagem dos pavimentos.



(a) Fixação.



(b) Vista superior de um pavimento.

Fonte: Dos autores (2023).

As propriedades físicas dos componentes da bancada foram medidas com auxílio de uma balança de precisão para componente de massa inferior a 220 g, uma balança comercial, um paquímetro para dimensões inferiores a 150 mm e uma trena de três metros. Os valores de desvio indicados na Tabela 2.1 foram calculados como sendo a menor medida para instrumentos digitais (medições de massa) e metade da menor medida para instrumentos analógicos (comprimentos). As propriedades destes componentes são apresentadas em termos de massa e características geométricas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Características geométricas e de massa da estrutura física.

Parâmetro	Variável	Valor numérico
Massa do pavimento 1 (g)	$m_1$	$652 \pm 1$
Massa do pavimento 2 (g)	$m_2$	$663 \pm 1$
Massa do pavimento 3 (g)	$m_3$	$666 \pm 1$
Massa do pavimento 4 (g)	$m_4$	$665 \pm 1$
Massa do pavimento 5 (g)	$m_5$	$657 \pm 1$
Massa do pavimento 6 (g)	$m_6$	$657 \pm 1$
Massa do pavimento 7 (g)	$m_7$	$653 \pm 1$
Massa de um conjunto de porca e arruela (g)	$m_f$	$2,4807 \pm 0,0001$
Massa do acelerômetro (g)	$m_a$	$5,6090 \pm 0,0001$
Massa total da barra roscada longa (g)	$m_{bl}$	$117,96 \pm 0,01$
Massa total da barra roscada curta (g)	$m_{bc}$	$77,10 \pm 0,01$
Comprimento do pavimento (m)	$l$	$0,2500 \pm 0,0005$
Largura do pavimento (m)	$b$	$0,2000 \pm 0,0005$
Espessura do pavimento (m)	$t$	$0,018700 \pm 0,000025$
Comprimento da barra roscada longa (m)	$L$	$0,9950 \pm 0,0005$

Fonte: Dos autores (2023).

## 2.1 Identificação do módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade de um material pode ser obtido através de um método de teste padrão, seguindo a metodologia abordada pela *American Society for Testing and Materials* (ASTM). O teste utilizado neste trabalho é o E1876-09, que aborda a determinação do módulo de elasticidade do material a partir de excitação de impulsos de vibração, sendo necessário conhecer a geometria do componente analisado e realizar um teste modal seguindo as normas impostas pelo documento guia ASTM (2011).

O teste em questão não contempla geometrias complexas como a de uma barra roscada, em contrapartida, há a especificação do procedimento para barras cilíndricas. Tendo em vista a indisponibilidade de normalização específica para o caso abordado, a norma para o caso de geometria invariante foi utilizada considerando as seguintes hipóteses:

1. A barra roscada será considerada uma barra lisa (de área da seção transversal constante);
2. A barra utilizada para o teste é a barra roscada longa;
3. O diâmetro utilizado para os cálculos será o diâmetro nominal da barra com rosca externa padrão M5 - 0,8;
4. Um aumento máximo de 5% no diâmetro utilizado para os cálculos da norma será permitido, devido a imprecisão obtida por consequência da hipótese 1.

O teste é composto por duas etapas que descrevem o fator de correção e o módulo de elasticidade. As equações a serem utilizadas no teste dependem do tipo de componente, sendo que, para ser utilizada a formulação para uma barra lisa, o mesmo deve atender à relação entre comprimento apresentada na Equação 2.1.

$$\frac{L}{d} \geq 20 \quad (2.1)$$

Considerando o caso de maior diâmetro possível com o fator de correção de 5%, a condição da Equação 2.1 é satisfeita, portanto o fator de correção para o modo de flexão fundamental ( $T'_1$ ) é calculado em razão do diâmetro e comprimento do componente.

$$T'_1 = 1,000 + 4,939 \left( \frac{d}{L} \right)^2 \quad (2.2)$$

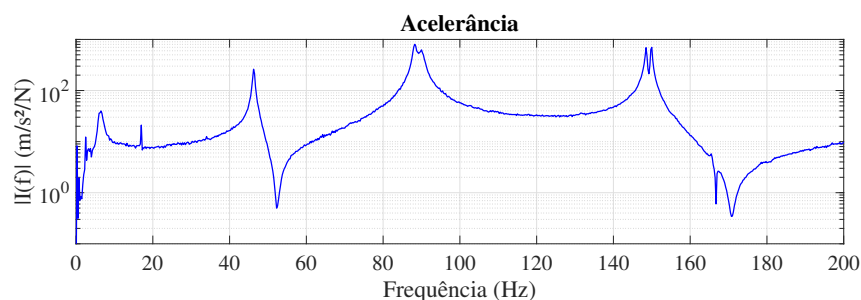
Para determinação do módulo de elasticidade (E) é utilizada a Equação 2.3.

$$E = 1,6067 \left( \frac{L^3}{d^4} \right) (m_{bl} f_f^2) T'_1 \quad (2.3)$$

onde  $f_f$  é a frequência fundamental de flexão da barra em Hz.

A frequência fundamental de flexão obtida seguindo a metodologia do teste ASTM foi de 17 Hz, e a função de resposta em frequência (FRF) experimental da qual foi identificada a frequência experimental é apresentada na Figura 2.3. A barra de aço zincado é obtida a partir do processo de galvanização por zinco do aço carbono, resultando em um módulo de elasticidade variando entre 200 a 210 GPa, sendo necessário um ajuste gradativo de 1% do diâmetro interno máximo até que o módulo de elasticidade esteja no intervalo estabelecido. Após um aumento de 2%, o módulo de elasticidade resultante foi de, aproximadamente, 205 GPa, como resultado da utilização de diâmetro equivalente à 4,0749 mm.

Figura 2.3 – Inertância obtida pelo teste ASTM.



Fonte: Dos autores (2023).



Com a obtenção do módulo de elasticidade, foi construído um modelo analítico que descreve a barra roscada através do método de elementos finitos (FEM), a fim de validar o valor obtido a partir do teste ASTM com um diâmetro que descreva o comportamento dinâmico real das colunas, em termos de suas frequências naturais. Para isso as hipóteses para a discretização da barra roscada pelo método de elementos finitos são:

1. O módulo de elasticidade obtido pelo teste ASTM será mantido;
2. O diâmetro será recalculado, respeitando as condições das hipóteses 2 e 3, levantadas para o teste ASTM;
3. O componente tem amortecimento histerético, pois deve-se majoritariamente aos efeitos de histereses no material que constitui os elementos do sistema;
4. A densidade ( $\rho$ ) do componente não precisa ser igual ao encontrado na literatura, devido a desconsideração da variação na área da seção transversal, descrita na hipótese 1 do teste ASTM.

O componente foi discretizado em elementos de viga de mesma dimensão ao longo do seu comprimento, onde é possível determinar o número de nós resultantes dessa discretização pela Equação 2.4, determinando o número de elementos desejados e, posteriormente, o número de graus de liberdade (GDL) pela Equação 2.5.

$$N_{\text{nós}} = N_{\text{elementos}} + 1 \quad (2.4)$$

$$N_{\text{GDL}} = 2 \cdot N_{\text{nós}} \quad (2.5)$$

A discretização da barra roscada foi feita assumindo vinte elementos igualmente espaçados ao longo do seu comprimento, resultando em 21 nós e 42 graus de liberdade. Para que a FRF do modelo analítico fosse comparada com a do experimental, foi assumido o mesmo ponto de *input* e *output* (excitação e medição de resposta), onde  $k = j = 21$ , localizado no centro da barra roscada.

As matrizes de massa elementar e rigidez elementar para elementos de viga uniformes foram utilizadas para construir as matrizes de massa e rigidez global do sistema, de dimensão  $\text{GDL} \times \text{GDL}$  (Rao, 2010). A matriz de massa elementar é descrita na Equação 2.6:

$$[m^e] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento de viga e  $A$  é a área transversal do elemento de viga. Com a razão entre área transversal e densidade mostradas na Equação 2.7, visto que a densidade não

é conhecida, devido as incertezas e geometria variável, a mesma foi calculada a partir da massa equivalente do conjunto e do volume:

$$A \cdot \rho = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{4m_{eq}}{L_{bt}\pi d^2} \quad (2.7)$$

onde  $m_{eq}$  é a massa do conjunto apresentada na Equação 2.8,  $m_{bl}$  a massa da barra longa e  $m_a$  a massa do acelerômetro.

$$m_{eq} = m_{bl} + m_a \quad (2.8)$$

Em relação a matriz de rigidez elementar, ela é função das propriedades do material e características geométricas do componente, e é apresentada na Equação 2.9:

$$[K^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $I$  é a inércia da área de cada elemento, descrita pela Equação 2.10

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (2.10)$$

A equação de movimento pode ser descrita utilizando a formulação da Equação 2.11, em que  $[M]$ ,  $[K]$  e  $\{X\}$  são a matriz de massa, rigidez e vetor de coordenadas generalizadas das massas discretas, respectivamente (Ewins, 2000).

$$[M]_{(N,N)}\{\ddot{X}\} + [K]_{(N,N)}\{X\} = \{F\} \quad (2.11)$$

Avaliando apenas a solução particular e desprezando a transiente da Equação 2.11, assumindo que ocorre apenas vibração livre, a solução geral é dada pela resolução da Equação 2.12, em que  $\omega$  é a frequência natural.

$$(-\omega^2[M]_{(N,N)} + [K]_{(N,N)})\{\bar{X}\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.12)$$

Para que a solução trivial da Equação 2.12 tenha termo de  $\bar{X}$  não nulo, chega-se à equação característica do sistema apresentada na Equação 2.13 (Maia e Silva, 1997).

$$\det [-\omega^2[M]_{(N,N)} + [K]_{(N,N)}] = 0 \quad (2.13)$$

A solução do sistema de amortecimento histerético resulta em uma solução de  $N$  autova-

lores complexos  $\lambda_r^2$  e  $N$  autovetores iguais aos encontrados em casos sem amortecimento (Maia e Silva, 1997). Tendo em vista esse comportamento, o amortecimento será desconsiderado para comparar um caso analítico sem amortecimento com o experimental, em termos apenas das frequências naturais.

A Equação 2.13 gera  $N$  possíveis soluções reais  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ , conhecidas como autovalores, que são o quadrado das frequências naturais do sistema sem amortecimento, que se substituídas na Equação 2.12, resultam nos autovetores do sistema  $\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \dots, \{\Psi_N\}$  (Maia e Silva, 1997). Os autovetores e autovalores são utilizados para construir o modelo de resposta, ou função de resposta em frequência (FRF) de receptância, que descreve a relação entre a resposta de deslocamento na coordenada  $j$  devido a uma força de excitação aplicada a um sistema na coordenada  $k$ , que pode ser calculada pelo método de expansão modal descrito na Equação 2.14 a seguir:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (2.14)$$

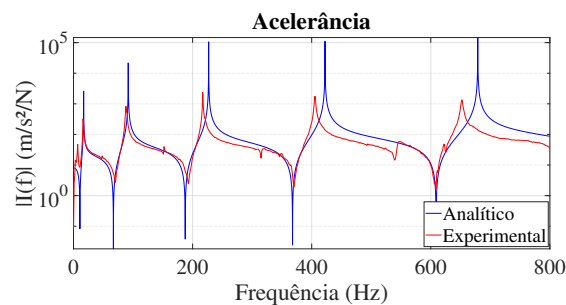
onde  $\phi_{jr}$  e  $\phi_{kr}$  correspondem aos autovalores, normalizados pela matriz de massa, do ponto  $j_{th}$  de respostas e do ponto  $k_{th}$  de excitação do modo  $r$  do sistema.

A FRF obtida experimentalmente neste trabalho é a de aceleração, ou inertância, que relaciona resposta de aceleração em função da força excitadora. Como a receptância relaciona o deslocamento e a aceleração a aceleração, a inertância do modelo analítico pode ser obtida pela segunda derivada da Equação 2.14 (Ewins, 2000).

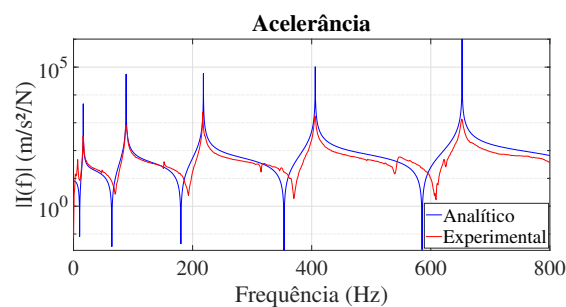
$$I_{jk}(\omega) = -\omega^2 \alpha_{jk}(\omega) \quad (2.15)$$

A partir da comparação numérico-experimental em termos das frequências naturais, foi feito o reajuste do diâmetro útil real, resultando em um valor de 3,995 mm. Este diâmetro representa o valor numérico necessário para que o modelo FEM retorne uma resposta modal equivalente a encontrada experimentalmente da barra isoladamente. Este valor comprova que há uma configuração de diâmetro que satisfaz as limitações geométricas da barra roscada (entre diâmetro interno e externo, indicados por fabricante), sem alteração do módulo de elasticidade que satisfaz a norma ASTM utilizada anteriormente. Para comprovar a necessidade do ajuste do diâmetro, a FRF resultante quando o diâmetro utilizado para encontrar o módulo de elasticidade é adotado é mostrado na Figura 2.4a e a depois do ajuste do diâmetro via elementos finitos pode ser vista na Figura 2.4b.

Figura 2.4 – Comparação das FRF's obtidas pelo modelo FEM e experimental.



(a) Modelo com diâmetro sem alteração.



(b) Modelo com diâmetro atualizado.

Fonte: Dos autores (2023).

## 2.2 Modelo simplificado de um grau de liberdade

O modelo de parâmetros concentrados concentra a massa distribuída de um sistema contínuo em um número finito de massas concentradas, conecta os elementos inerciais com elementos de rigidez e amortecimento desprovidos de massa (Rao, 2008). A aplicação mais simples deste tipo de modelo, que descreve uma estrutura de um pavimento e, de forma análoga de múltiplos pavimentos, é descrita em termos da massa do pavimento e da rigidez das colunas, desprezando a massa destas. A partir deste método de parâmetros concentrados foi construído o modelo analítico simplificado para o caso estudado, com o objetivo de analisar a correlação teórico-experimental das frequências naturais considerando um modelo simplificado de 1 grau de liberdade. Para a aplicação do método, foram levantadas hipóteses iniciais para o modelo analítico de parâmetros concentrados para um grau de liberdade:

1. O módulo de elasticidade e inércia da coluna são constantes ao longo do seu comprimento;
2. O comprimento utilizado para cálculo de rigidez das colunas é dado pela distância entre as faces dos pavimentos;
3. A massa da coluna é desprezível;
4. A mola equivalente possui comportamento linear;

5. A massa equivalente do pavimento 7 é composta pela massa do pavimento, massa dos elementos de fixação (porcas e arruelas) e massa do acelerômetro que está fixado ao mesmo;
6. O pavimento tem movimentação translacional horizontal paralela ao suporte.
7. Não há variações na energia potencial gravitacional;

As equações de movimento foram obtidas através da aplicação da formulação de Lagrange, que tem como base a energia do sistema, em termos de energia cinética e potencial (Rao, 2008). A energia cinética do sistema para um grau de liberdade é representada na Equação 2.16:

$$T = \frac{1}{2}m_{7'}\dot{x}_7^2 \quad (2.16)$$

onde  $x_7$  é o deslocamento translacional medido em relação à configuração de equilíbrio estático e  $\dot{x}_7$  a velocidade do pavimento de número 7 e  $m_{7'}$  pode ser calculado pela Equação 2.17, considerando que há oito conjuntos de arruela e porca e o acelerômetro conectado ao pavimento 7.

$$m_{7'} = m_7 + 8m_f + m_a \quad (2.17)$$

A energia potencial do sistema pode ser vista na Equação 2.18:

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}x_7^2 \quad (2.18)$$

onde a rigidez de  $k_{eq}$  foi determinada seguindo a hipótese 5 desta seção, representada pela Equação 2.19, considerando que as colunas tem o mesmo comprimento, são espaçadas uma em relação a outra e as extremidades das colunas estão conectadas a dois planos que são sempre paralelos (Blevins, 2001). Considerando que elementos de rigidez em paralelo possuem uma rigidez equivalente do somatório da rigidez de cada elemento, no caso de um sistema com quatro elementos, a rigidez será quatro vezes a de um elemento, sendo  $l_{07}$  o comprimento entre o pavimento 7 e a base e a barra utilizada neste modelo é a barra longa.

$$k_{eq} = \frac{4 \cdot 12EI}{l_{07}} \quad (2.19)$$

A equação de movimento obtida via abordagem Lagrangiana é descrita pela Equação 2.20, onde é necessário aplicar as Equação 2.16 e 2.18 para a sua solução (Rao, 2008).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.20)$$

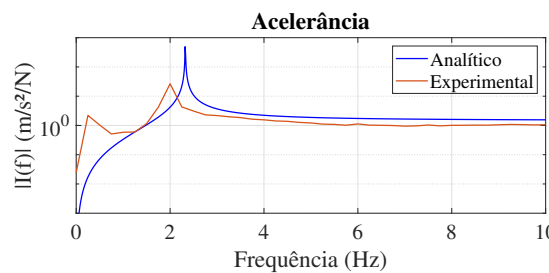
Aplicando as Equações 2.18 e 2.16 na Equação 2.20 é encontrada a equação de movi-

mento para este modelo considerando que não há forças externas aplicadas:

$$m_7 \ddot{x}_7 + k_{eq} x_7 = 0 \quad (2.21)$$

O modelo analítico simplificado da bancada com um grau de liberdade foi construído a partir das hipóteses levantadas nesta seção, com o módulo de elasticidade e diâmetro útil adquiridos através do teste ASTM e reajuste pelo FEM da barra roscada, respectivamente. As FRF's de aceleração, obtidas de forma analítica e experimental, podem ser vistas na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Comparação analítica-experimental para o modelo simplificado.



Fonte: Dos autores (2023).

Este modelo apresentou um erro na frequência natural de 16% entre a frequência natural de translação analítica e experimental, sendo que a obtida de forma analítica foi de 2,32 Hz e a experimental 2,00 Hz. Como o intervalo de aquisição de dados na frequência foi 0,25 Hz, o erro obtido durante aquisição foi de no máximo 0,125 Hz, assim sendo, a frequência analítica ainda estaria fora do intervalo aceitável para o valor exato da frequência natural experimental. Como o erro da frequência modal foi maior que 10%, após pesquisa na bibliografia disponível, encontrou-se o valor esperado da frequência natural teórica que, de acordo Blevins (2001), deveria ser de 2,3235 Hz:

$$f_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3EI}{m_7 l_{07}^3} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

,confirmando que não houve erro de modelagem analítica. Com a concordância do método teórico e analítico, a autenticidade dos resultados experimentais foi questionada, o que se fez necessário refazer o teste modal com um maior tempo para aquisição de dados, com desígnio de uma maior precisão da frequência natural experimental, resultando no valor de 1.984 Hz e confirmando que a modelagem analítica simplificada e o resultado teórico esperado não se aplicam à configuração estudada. Em uma tentativa de ajustar os parâmetros para satisfazer o comportamento experimental, foi recalculado analiticamente o diâmetro necessário para atingir a frequência natural experimental identificada. Realimentando o modelo simplificado de um grau de liberdade com este valor, como esperado, a correspondência foi atingida, porém quando os mesmos valores de entrada numérica, utilizados para o modelo simplificado de um grau de

liberdade, foram utilizados no modelo simplificado para quatro graus de liberdade, novas divergências foram encontradas, resultando em um erro relativo significativo. Como o diâmetro que contribui para a dinâmica da bancada é invariante em relação ao número de graus de liberdade, um modelo representativo deve ser capaz de retornar resultados coerentes com as mesmas entradas de valores numéricos dos parâmetros, independente da quantidade de graus de liberdade, comportamento não observado no modelo simplificado. Assim sendo, foi necessário investigar os motivos pelos quais este não representa a dinâmica da bancada, e um novo modelo é proposto a seguir, que contempla a energia cinética devido à translação das colunas. Os resultados encontrados do ajuste do diâmetro e aplicação no modelo simplificado de um e múltiplos graus de liberdade serão apresentados nos Resultados e discussões de forma detalhada, e serão utilizados como referência para comparação com os resultados encontrados com o modelo que será proposto a seguir.

### 2.3 Modelo proposto: refinamento do modelo simplificado de 1 GDL

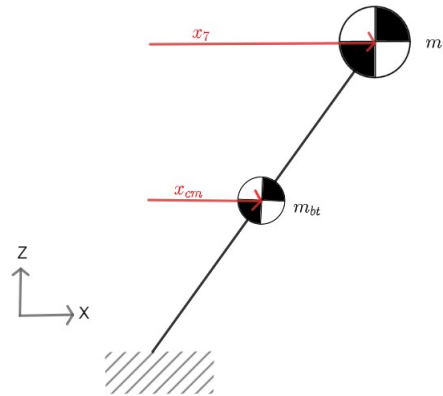
Como o modelo simplificado obteve um erro significativo nas frequências naturais analíticas em comparação às experimentais que não pode ser desconsiderado, foi proposto um modelo de parâmetros concentrados que computa o acoplamento da massa das colunas nos parâmetros de massa concentrada. Para isso, novas hipóteses foram levantadas para o modelo analítico de parâmetros concentrados:

1. O diâmetro interno das colunas está entre 3,842 mm e 3,995 mm, correspondentes aos limites inferior e superior do diâmetro interno indicado pelo fabricante, respectivamente;
2. O módulo de elasticidade e inércia da coluna são constantes ao longo do seu comprimento;
3. O comprimento utilizado para cálculo de rigidez das colunas é dado pela distância entre as faces dos pavimentos;
4. A massa da coluna não é desprezível, porém, é desacoplada do elemento de rigidez, e esta situada como um parâmetro de massa concentrada no centro geométrico de cada coluna entre as faces dos pavimentos;
5. A massa equivalente do pavimento 7 é composta pela massa do pavimento, massa de fixação e massa do acelerômetro que está fixado no pavimento.

O esquema apresentado na Figura 2.6 é a representação do sistema mecânico em que se baseia o desenvolvimento da energia cinética da formulação lagrangiana apresentado na Equação 2.23, considerando a barra longa:

$$T = \frac{1}{2}m_7\dot{x}_7^2 + \frac{1}{2} \cdot 4m_{b07}\dot{x}_{cm}^2 \quad (2.23)$$

Figura 2.6 – Modelo proposto para um GDL.



Fonte: Dos autores (2023).

onde  $x_{cm}$  é o deslocamento translacional da massa equivalente das colunas entre pavimentos, que pode ser descrita em função de  $x_7$ , como apresentado na Equação 2.24. Assume-se que a massa das colunas está concentrada no centro geométrico das mesmas, e que este está localizado na metade do comprimento das colunas.

$$x_{cm} = \frac{x_7}{2} \quad (2.24)$$

Com a substituição da Equação 2.24 na Equação 2.23, tem-se a Equação 2.25.

$$T = \frac{1}{2}m_7\dot{x}_7^2 + \frac{1}{2}m_{b_{07}}\dot{x}_7^2 \quad (2.25)$$

Para o ajuste do valor do diâmetro, foi encontrada uma expressão analítica que o relaciona aos demais parâmetros do sistema, afim de encontrar qual o verdadeiro diâmetro útil das colunas, através do método de análise modal experimental, com frequência natural conhecida (obtida experimentalmente), e os parâmetros de massa e elasticidade obtidos de forma analítica. Esta expressão analítica foi derivada da rigidez translacional real da estrutura, a partir das massas calculadas de forma analítica (parâmetros de massa da Equação 2.25) e frequência natural obtida experimentalmente (Rao, 2008), isolando o termo de interesse:

$$k_{eq} = \omega_n^2(m_7 + m_{b_{07}}) \quad (2.26)$$

O cálculo do diâmetro útil real da coluna respeitou os limites inferior e superior impostos pela hipótese 1 desta seção. A determinação do diâmetro foi feita de forma matemática, rearranjando as Equações 2.10, 2.19 e 2.26 na Equação 2.27.

$$d = \left( \frac{4\omega_n^2(m_7 + m_{b_{07}})l_{07}^3}{3\pi E} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.27)$$



Considerando que sistemas reais possuem múltiplos graus de liberdade, o modelo proposto acima pode ser generalizado para N GDL.

## 2.4 Modelo proposto multi-GDL

Nesta seção será apresentado o equacionamento analítico para a obtenção das frequências naturais por meio das equações de movimento para um sistema de três graus de liberdade, e que pode ser generalizado para N GDL. O comportamento dinâmico de translação horizontal, e rotação em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro geométrico da estrutura é descrito por meio das propriedades de inércia, geométricas e de material em um modelo de parâmetros concentrados, considerando agora a massa e a inércia da coluna, seguindo o raciocínio apresentado acima e generalizando-o para N GDL. O modelo translacional foi descrito em termos da massa dos pavimentos e das colunas e da rigidez translacional devido à flexão destas. O modelo torcional por sua vez foi descrito em termos de inércia e rigidez torcional, devido à flexão e torção das colunas.

Hipóteses gerais:

1. O diâmetro interno da barra roscada ( $d_i$ ) suporta os esforços atuantes nas colunas. Variações das propriedades geométricas e de material das colunas ao longo de seu comprimento são desconsideradas, bem como àquelas devido à deformação durante a ocorrência da vibração;
2. Considerando o amortecimento majoritariamente histerético, os efeitos de dissipação de energia não são considerados para análise da variação das frequências naturais;
3. Colunas localizadas entre os mesmos pavimentos possuem mesmo comprimento, e suas extremidades definem dois planos que são sempre paralelos. As colunas são feitas do mesmo material e possuem sempre o mesmo diâmetro;
4. A base e os pavimentos estão engastados nas colunas e a base está engastada ao referencial inercial. Na condição real entre a base e o referencial inercial se encontram os suportes de borracha utilizados para sustentar e isolar a estrutura flexível. Para a construção do modelo não foram considerados os efeitos de rigidez e amortecimento dos elementos de fixação e da montagem experimental, considerando que a rigidez do sistema base-suportes de borracha é elevada em relação à do sistema de interesse. A representação conservadora da bancada experimental deve investigar os efeitos da montagem na dinâmica dos pavimentos, porém para a aplicação que está sendo estudada neste trabalho os efeitos de rigidez e amortecimento da base não serão considerados e não possuem grande impacto na análise de sensibilidade.

5. A inércia dos pavimentos é aproximada à de um paralelepípedo perfeito;
6. Variações de energia potencial gravitacional são desprezíveis, e a energia de deformação elástica é associada a rigidez translacional devido exclusivamente à resistência à flexão das colunas. A rigidez torcional é uma composição do momento restaurador causado pela rigidez à flexão e da rigidez à torção das colunas;
7. A massa dos elementos de fixação é concentrada junto à massa dos pavimentos e não contribui para a inércia do sistema;
8. A inércia das colunas é a de um cilindro perfeito, rotacionando em torno do seu eixo longitudinal e corrigido pelo teorema dos eixos paralelos em relação ao centro geométrico dos pavimentos;
9. A massa das colunas não é desprezível e está concentrada no centro geométrico entre os pavimentos em que estas se localizam, e o mesmo ocorre para a inércia das colunas no modelo torcional;
10. As coordenadas generalizadas translacionais ( $X_n$ ) são referenciadas em relação à configuração de equilíbrio e as coordenadas generalizadas rotacionais ( $\theta_n$ ) são referenciadas em relação ao referencial estático original e com rotação em relação ao plano superior do sistema;
11. O deslocamento linear da massa equivalente concentrada da coluna entre pavimentos em seu centro geométrico é dado pelo deslocamento médio entre os pavimentos inferior e superior somado ao deslocamento do pavimento imediatamente abaixo  $X_i$  (Equação 2.28a) e o deslocamento angular da inércia polar equivalente concentrada da coluna entre pavimentos em seu centro geométrico, é dado pelo deslocamento angular médio entre os pavimentos inferior e superior somado ao deslocamento angular do pavimento abaixo  $\theta_i$  (Equação 2.28b).

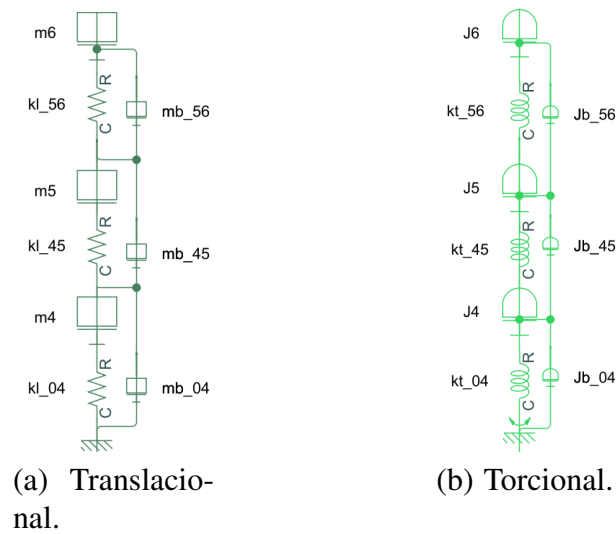
$$X_b = \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \quad (2.28a)$$

$$\theta_b = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \quad (2.28b)$$

O modelo de parâmetros concentrados resultante das hipóteses acima pode ser visto na Figura 2.7, exemplificando a configuração de três graus de liberdade que será apresentada posteriormente para a análise de sensibilidade paramétrica. Como as variáveis generalizadas escolhidas para descrever o sistema (translação do centro de massa e rotação do centro de massa de cada pavimento) são independentes quando se trata dos graus de liberdade de translação em relação aos de rotação, é possível descrever o modelo em termos de dois diagramas isolados como mostrado na Figura 2.7. A particularidade do modelo proposto em relação ao simplificado é a

presença de elementos de massa em paralelo aos de rigidez, relativos ao mesmo elemento físico (colunas que conectam os pavimentos), mas apesar de serem representados de forma paralela os mesmos são independentes, ou seja, os elementos de rigidez não possuem massa, mas o mesmo elemento físico contribui para a energia cinética e energia potencial elástica, caracterizando o modelo como de parâmetro concentrados, mesmo com a consideração da massa das colunas.

Figura 2.7 – Modelo de parâmetros concentrados.



Fonte: Dos autores (2023).

As equações de movimento foram obtidas pela formulação Lagrangiana, em termos de energia cinética e potencial, desprezando os efeitos de amortecimento e considerando os modelos translacional e torcional completamente desacoplados, sendo suas variáveis generalizadas independentes. Pelo princípio de conservação de energia, para um sistema de  $n$  graus de liberdade as equações de movimento são encontradas pela Equação 2.29 (Rao, 2008).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = Q_j^{NC}, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

onde  $q_j$  é variável generalizada,  $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t}$  é a velocidade generalizada,  $Q_j^{NC}$  são as forças generalizadas não-conservativas,  $T$  a energia cinética e  $V$  a energia potencial. As energias cinética e potencial elástica são descritas em termos de massa ou inércia e velocidade,

$$T = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 \equiv \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2.30)$$

e em termos de rigidez e deformação dos elementos de rigidez (Rao, 2008).

$$V = \frac{1}{2} K (X_{i+1} - X_i)^2 \equiv \frac{1}{2} K_t (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \quad (2.31)$$

sendo  $M$  a massa do componente de velocidade  $\dot{X}$ ,  $J$  momento polar de inércia do componente de velocidade angular  $\dot{\theta}$ ,  $K$  rigidez translacional,  $K_t$  rigidez torcional,  $\dot{X}$  velocidade da coordenada generalizada  $X$ ,  $\dot{\theta}$  a velocidade angular da coordenada generalizada  $\theta$ ,  $X_i$  e  $X_{i+1}$  as posições lineares das extremidades do elemento de rigidez e  $\theta_i$  e  $\theta_{i+1}$  as posições angulares das extremidades do elemento de rigidez torcional.

Considerando um regime de vibração livre, a solução não trivial das equações de movimento quando a resposta de deslocamento possui caráter oscilatório de frequência  $\omega$  é (Ewins, 2000):

$$\det [[K] - \omega^2[M]] = [0] \quad (2.32)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez e  $[M]$  a matriz de massa e inércia. A solução da Equação 2.32 leva a um vetor de ordem 6 contendo os autovalores  $\lambda$ , que são o quadrado das frequências naturais.

Para o modelo translacional, a energia cinética do sistema segundo a equação Equação 2.30 resulta na Equação 2.33, onde  $m_n$  representa a massa do pavimento  $n$ ,  $m_{b_{ij}}$  a massa de cada coluna entre os pavimentos  $i$  e  $j$  e  $\dot{X}_n$  a velocidade da variável generalizada  $X$  relativa ao pavimento  $n$ , considerando o deslocamento linear das colunas apresentado nas hipóteses e substituindo a velocidade das colunas pela primeira derivada do deslocamento linear destas.

$$T_l = \frac{1}{2}m_i (\dot{X}_i)^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n (\dot{X}_n)^2 + 4\frac{1}{2}m_{b_i} \left(\frac{\dot{X}_i}{2}\right)^2 + \dots + 4\frac{1}{2}m_{b_{n-1;n}} \left(\frac{\dot{X}_n + \dot{X}_{n-1}}{2}\right)^2 \quad (2.33)$$

A energia potencial é uma função unicamente da energia potencial de deformação elástica das colunas, considerando-as como elementos de rigidez em paralelo, a energia potencial da parcela translacional do sistema é descrita pela Equação 2.34.

$$V_l = 4\frac{1}{2}k_{l_i} (X_i - 0)^2 + \dots + 4\frac{1}{2}k_{l_n} (X_n - X_{n-1})^2 \quad (2.34)$$

sendo  $k_{l_{ij}}$  a rigidez à flexão de uma coluna de comprimento equivalente à distância entre os pavimentos  $i$  e  $j$  (Blevins, 2001):

$$k_l = \frac{12EI}{l_{ij}^3} = \frac{12E \left(\frac{\pi d_i^4}{64}\right)}{l_{ij}^3} \quad (2.35)$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade do material que constitui as colunas,  $l_{ij}$  o comprimento entre os pavimentos  $i$  e  $j$  e  $I$  é o momento de inércia das colunas, considerando-as cilíndricas de diâmetro  $d_i$  relativo ao diâmetro interno útil e feitas do mesmo material.

Para a parcela torcional do modelo, o mesmo procedimento empregado na determinação da energia cinética da parcela translacional foi adotado, em termos dos momentos polares de inércia e das velocidades angulares dos pavimentos, resultando na Equação 2.36.

$$T_t = \frac{1}{2}J_i (\dot{\theta}_i)^2 + \dots + \frac{1}{2}J_n (\dot{\theta}_n)^2 + 4\frac{1}{2}J_{b_{i:i-1}} \left( \frac{\dot{\theta}_i + 0}{2} \right)^2 + \dots + 4\frac{1}{2}J_{b_{n:n-1}} \left( \frac{\dot{\theta}_n + \dot{\theta}_{n-1}}{2} \right)^2 \quad (2.36)$$

$$J_n = \frac{m_i(l^2 + b^2)}{12} \quad (2.37a)$$

$$J_{b_{ij}} = J_b + m_b(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \frac{m_b \left( \frac{d_i}{2} \right)^2}{2} + m_b R^2 \quad (2.37b)$$

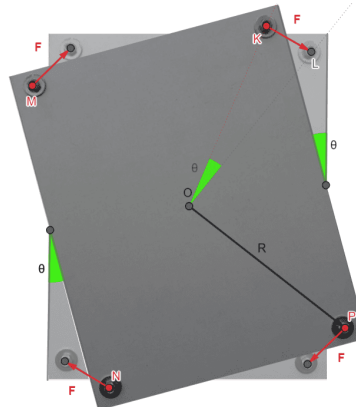
onde  $\dot{\theta}_n$  a velocidade da variável generalizada  $\theta$  relativo ao pavimento  $n$ ,  $J_n$  representa o momento polar de inércia do pavimento  $n$  (Equação 2.37a),  $J_{b_{ij}}$  o momento polar de inércia de uma barra entre os pavimentos  $i$  e  $j$ , corrigida para rotação em torno do centro geométrico do pavimento (Equação 2.37b) (Blevins, 2001), sendo  $l$  o comprimento e  $b$  a largura do pavimento,  $m_i$  a massa do pavimento e  $m_b$  a massa da barra,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  as componentes em  $x$  e  $y$  da distância do centro de massa da coluna até o eixo de rotação e  $R$  a distância total dada por  $R^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ .

A rigidez torcional equivalente é uma composição do momento restaurador gerado pela rigidez à flexão e pela rigidez à torção das colunas e a rigidez total entre pavimentos é uma associação em paralelo da rigidez de cada coluna.

$$k_t = k_{flex} + k_{torc} \quad (2.38)$$

sendo  $k_{flex}$  a parcela da rigidez torcional relativa à flexão e  $k_{torc}$  a parcela relativa à torção. Considerando a configuração deformada mostrada na Figura 2.8, onde  $R$  é a distância da fixação das colunas ao centro de rotação e  $\theta$  a coordenada generalizada do pavimento analisado.

Figura 2.8 – Configuração deformada de um pavimento no plano.



Fonte: Dos autores (2023).

Durante o movimento de rotação, as colunas sofrem deslocamento lateral, percorrendo um arco de circunferência que pode ser aproximado por uma distancia linear  $S$ , referente à distância LK mostrada na Figura 2.8. Devido à rigidez das colunas surge a força  $F$  de restauração, contrária ao movimento que restaura a configuração de equilíbrio. Considerando o pavimento rígido, todas as colunas percorrem o mesmo comprimento linear e a equação de movimento em termos da variável generalizada  $\theta$ , considerando o momento gerado pelas forças de rigidez a flexão é:

$$J\ddot{\theta} + 4M = J\ddot{\theta} + 4(FR) = J\ddot{\theta} + 4R(k_l(S - 0)) = 0 \quad (2.39)$$

sendo  $FR$  o momento  $M$  causado pela força  $F$ , que é dada pela multiplicação da rigidez  $k_l$  apresentada na seção anterior à distância linear percorrida. É possível relacionar o comprimento  $S$  ao ângulo de rotação, aproximando a trajetória linear ao comprimento de arco percorrido por

$$S = \theta R \quad (2.40)$$

Substituindo a Equação 2.40 na Equação 2.39 e simplificando, a equação de movimento é reduzida a

$$J\ddot{\theta} + 4(k_l R^2)\theta = J\ddot{\theta} + 4k_{flex}\theta \quad (2.41)$$

Substituindo a rigidez torcional devido a flexão ( $k_{flex}$ ) explicitada na Equação 2.41, a rigidez do movimento torcional total para uma coluna é

$$k_t = k_{flex} + k_{torc} = k_l R^2 + \frac{GC}{l_{ij}} = \frac{I}{l_{ij}} \left( 2G + \frac{12ER^2}{l_{ij}^2} \right) \quad (2.42)$$

sendo  $G$  o módulo de cisalhamento e  $C$  uma constante dependente do diâmetro das colunas. Assim sendo, a energia potencial do modelo torcional é:

$$V_t = 4\frac{1}{2}k_{t_i} (\theta_i - 0)^2 + \dots + 4\frac{1}{2}k_{t_n} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 \quad (2.43)$$

Aplicando as equações de energia cinética e energia potencial, e representando as equações de movimento em forma matricial, é obtido o modelo composto pelo comportamento linear e torcional, que é apresentado na Equação 2.44 em função das variáveis generalizadas, exemplificando o sistema apresentado para o modelo presente na Figura 2.7.

$$\begin{bmatrix}
m_4+m_{b_{04}}+m_{b_{45}} & m_{b_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{b_{45}} & m_5+m_{b_{45}}+m_{b_{56}} & m_{b_{56}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_{b_{56}} & m_6+m_{b_{56}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & J_4+J_{b_{04}}+J_{b_{45}} & J_{b_{45}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & J_{b_{45}} & J_5+J_{b_{45}}+J_{b_{56}} & J_{b_{56}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & J_{b_{56}} & J_6+J_{b_{56}}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{X}_4 \\
\ddot{X}_5 \\
\ddot{X}_6 \\
\ddot{\theta}_4 \\
\ddot{\theta}_5 \\
\ddot{\theta}_6
\end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
k_{l_{04}}+k_{l_{45}} & -k_{l_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_{l_{45}} & k_{l_{45}}+k_{l_{56}} & -k_{l_{56}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_{l_{56}} & k_{l_{56}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k_{t_{04}}+k_{t_{45}} & -k_{t_{45}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -k_{t_{45}} & k_{t_{45}}+k_{t_{56}} & -k_{t_{56}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_{t_{56}} & k_{t_{56}}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
X_4 \\
X_5 \\
X_6 \\
\theta_4 \\
\theta_5 \\
\theta_6
\end{Bmatrix}
= \{0\}
\tag{2.44}$$

## 2.5 Procedimento de verificação

Para a comprovação da representatividade do modelo proposto e de suas vantagens em relação ao modelo simplificado, usualmente adotado na literatura, as frequências naturais encontradas pelas formulações analíticas apresentadas foram comparadas àquelas identificadas experimentalmente via análise modal experimental, por meio do erro relativo, para diferentes configurações e graus de liberdade. Os modelos analíticos foram construídos considerando o modelo proposto e com o valor de módulo de elasticidade encontrado experimentalmente (205 GPa) e o diâmetro de 3,8425 mm (coincidindo com o diâmetro interno da barra roscada), encontrado pela Equação 2.27 que melhor ajustou as curvas. Três configurações foram verificadas experimentalmente, estas são apresentadas na Tabela 2.2, onde a coluna de "pavimentos" indica os pavimentos utilizados na bancada naquela configuração, partindo da numeração do pavimento mais próximo a base para o pavimento da extremidade superior.

Tabela 2.2 – Configurações da bancada utilizadas para a verificação.

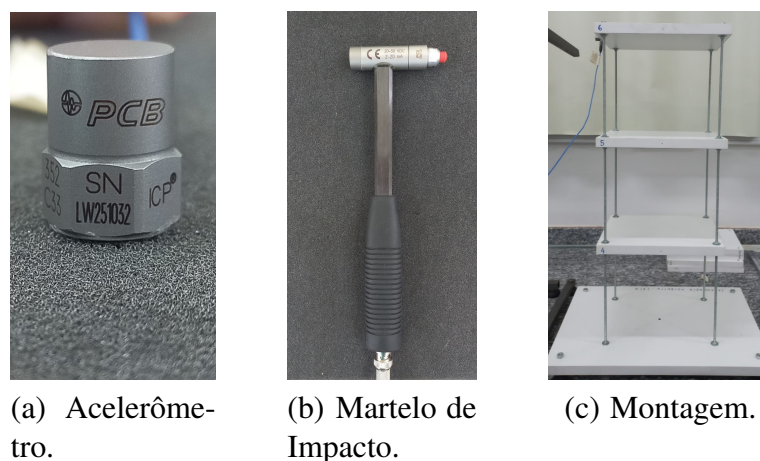
Configuração	Pavimentos	Barra	Distância entre pavimentos	Modelo(s) verificado(s)
1	7	Longa	947,6 mm	Translacional
2	1;2;3;7	Longa	223,0 mm	Translacional
3	4;5;6	Curta	189,0 mm	Translacional e torcional

Fonte: Dos autores (2023).

Com as configurações apresentadas acima, é possível avaliar o impacto da consideração da massa e inércia das colunas, para um único grau de liberdade ou para um modelo generalizado de múltiplos graus de liberdade. O modelo de resposta experimental foi obtido medindo

a resposta de aceleração com um acelerômetro piezoelétrico PCB modelo 352C33 de sensibilidade  $98,2\text{mV/g}$  ( $10,01\text{ mV/m/s}^2$ ) (Figura 2.9a) e mensurando a magnitude da excitação. A excitação feita com de forma impulsiva com um martelo de impacto (Figura 2.9b) de sensibilidade de  $2,302\text{ mV/N}$ , mantendo o acelerômetro em um pavimento e excitando os demais (Figura 2.9c). Alguns cuidados devem ser tomados durante a execução de um teste modal. Se um martelo de impacto for utilizado deve-se tomar cuidado com problemas de consistência com magnitudes e direção de impacto, pois, em caso da presença destas divergências, pode acarretar em excitação de características não lineares, resultando em dados de medição incongruentes (Mohammadali e Ahmadian, 2016). Para as medições a ponta utilizada foi a de borracha com rigidez intermediária entre as disponíveis para o martelo utilizado, esta ponta foi utilizada pois concentra mais energia na faixa de frequências de interesse onde as frequências naturais da bancada estão localizadas, quando comparada às demais pontas de martelo disponíveis. Os sinais temporais de aceleração e força foram enviados a um analisador de sinais dinâmicos, onde foi feito o pós-processamento para obtenção do modelo de resposta experimental com frequência entre 0 e 100 Hz para a identificação das frequências naturais torcionais e de 0 a 50 Hz para a identificação das frequências naturais de translação.

Figura 2.9 – Instrumentação e montagem para coleta de dados.



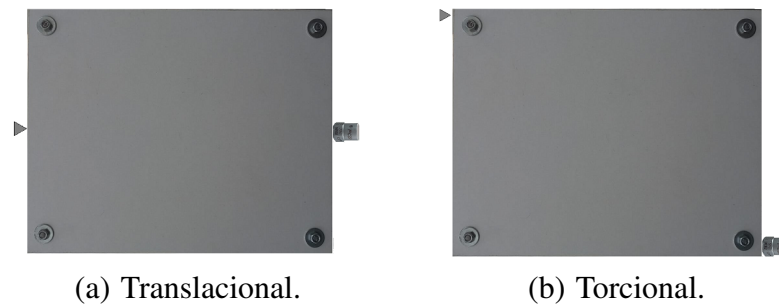
Fonte: Dos autores (2023).

Com o objetivo de identificar as frequências naturais dos modos de translação horizontal, o *setup* descrito na Figura 2.10a foi adotado. Para a minimização do impacto dos modos torcionais na resposta, é necessário garantir que os mesmos não sejam excitados e mensurados, e assim seja possível identificar quais frequências naturais são de translação. Para que a influência dos modos torcionais seja desprezível na medição translacional, o acelerômetro foi posicionado no centro da face de 200 mm e a excitação foi feita na mesma posição porém na face oposta, sendo o ponto de excitação representado pelo triângulo. A medição experimental contendo os modos translacionais e torcionais para identificação das frequências naturais dos modos de torção foi feita seguindo a configuração da Figura 2.10b, para o caso da configuração 3. Com a



excitação na extremidade da face há um braço de alavanca que gera momento e excita os modos torcionais, capturando ao total a parcela referente à translação do centro de massa e variação da posição linear causada pela rotação.

Figura 2.10 – Montagem para teste modal.



Fonte: Dos autores (2023).

A massa do acelerômetro foi somada ao elemento da matriz de massa do modelo translacional, na equação de movimento referente ao pavimento ao qual foi conectado em cada configuração.

## 2.6 Sensibilidade paramétrica

De um ponto de vista matemático a análise de sensibilidade implica em diferenciação (Maia e Silva, 1997), as sensibilidades mais comumente utilizadas são aquelas que descrevem as razões de variação em relação a elementos individuais de massa ou rigidez no modelo espacial. Essa sensibilidade pode ser feita em relação às frequências naturais  $\omega_r$  de um modo  $r$  (autovalores - Equação 2.45aa) ou aos modos de vibrar  $\{\phi\}_r$  (autovetores - Equação 2.45bb) em relação a um determinado parâmetro  $p$  (Ewins, 2000):

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial p} \quad (2.45a)$$

$$\frac{\partial \{\phi\}_r}{\partial p} \quad (2.45b)$$

Para sistemas de múltiplos graus de liberdade, a sensibilidade é derivada da equação característica do modelo não amortecido que representa o sistema dinâmico, em termos da matriz de rigidez  $[K]$  e matriz de massa  $[M]$ :

$$([K] - \omega_r^2[M]) \{\phi_r\} = 0 \quad (2.46)$$

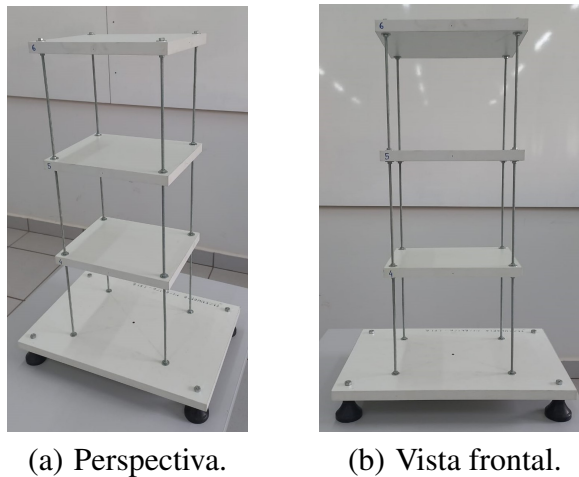
Derivando a Equação 2.46 em relação ao parâmetro de interesse  $p$  e rearranjando e iso-

lando os termos de interesse a sensibilidade das frequências naturais é:

$$\frac{\partial \omega_r^2}{\partial p} = \{\phi\}_r^T \left( \frac{\partial [K]}{\partial p} - \omega_r^2 \frac{\partial [M]}{\partial p} \right) \{\phi\}_r \quad (2.47)$$

Além da abordagem analítica apresentada acima, as variações nas frequências naturais causadas por alterações nas configurações do sistema podem ser aproximadas pelas derivadas de primeira ordem em relação aos parâmetros de configuração, podendo ser obtidos pelas inclinações das curvas de frequência natural em função dos parâmetros de interesse (Zhu *et al.*, 2018), abordagem que será utilizada neste artigo. A configuração 3 (Tabela 2.2) foi adotada para a análise de sensibilidade, com uma distância entre pavimentos de 189 mm. A estrutura utilizada é apresentada na Figura 2.11.

Figura 2.11 – Bancada física.



(a) Perspectiva.

(b) Vista frontal.

Fonte: Dos autores (2023).

Os valores de massa dos pavimentos  $m_n$ , diâmetro interno das colunas  $d_i$ , distância entre pavimentos  $l_{ij}$  e posicionamento das colunas em relação ao centro geométrico dos pavimentos  $R$ , e massa das colunas  $m_{ij}$  são variados de forma percentual em relação a configuração original para que a sensibilidade das frequências translacionais e torcionais seja analisada. Durante a variação de um parâmetro os demais permanecem constantes, exceto na variação do comprimento entre pavimentos. Um aumento em  $P\%$  em relação ao comprimento original entre pavimentos requer uma diminuição de  $\frac{P}{2}\%$  nas outras duas distâncias para que os limites geométricos externos da estrutura original sejam respeitados (Ex: aumentar em 10%  $l_{04}$ , que equivale a  $0,189 \times 1,1 = 0,2079$ , demanda que haja uma redução de 5% em  $l_{45}$  e  $l_{56}$ , que é equivalente a  $0,189 \times 0,95 = 0,17955$ . A configuração deformada totaliza uma soma dos comprimentos de  $0,2079 + 2 (0,17955) = 0,567$ , enquanto a configuração original simétrica, que possui todos os comprimentos iguais tem a mesma soma final dos comprimentos  $3 \times 0,189 = 0,567$ ), resultando em uma estrutura espacialmente similar à original. Nos parâmetros que não alteram a

massa total ( $l_{ij}$ ) e/ou não alteram a distribuição de massa ( $R$ ), a variação percentual analisada foi maior. Nas alterações onde há a mudança na distribuição de massa devido a alterações geométricas, a massa a ser redistribuída foi recalculada de acordo com as mudanças percentuais realizadas. Considerando para o cálculo de densidade que as colunas são um cilindro perfeito, esta é dada por:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_{b_{ij}}}{\pi \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 l_{ij}} \quad (2.48)$$

,para que a mesma densidade seja respeitada nas configurações analisadas, uma variação percentual no diâmetro ( $d'_i = X d_i$ , onde  $X$  é o valor em fração, ex:  $X = 1,1$  equivale a um aumento de 10%) requer um aumento na massa da barra de  $X^2$  (massa da barra da nova configuração =  $X^2 m_{b_{ij}}$ ), esta relação pode ser vista na Equação 2.49.

$$\rho' = \frac{m_{b_{ij}}}{\pi \left(\frac{X d_i}{2}\right)^2 l_{ij}} = \frac{\rho}{X^2} \therefore \rho = X^2 \rho' = \frac{m'_{b_{ij}}}{V'} = \frac{X^2 m_{b_{ij}}}{V'} \quad (2.49)$$

A mesma atualização na distribuição de massa foi adotada para variações no comprimento entre pavimentos, onde uma variação percentual na distância entre pavimentos ( $l'_{ij} = X l_{ij}$ ) demanda um aumento em  $X$  na massa da barra alocada entre os pavimentos analisados para a garantir a invariância da densidade das colunas, esta relação pode ser vista na Equação 2.50.

$$\rho' = \frac{m_{b_{ij}}}{\pi \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 X l_{ij}} = \frac{\rho}{X} \therefore \rho = X \rho' = \frac{m'_{b_{ij}}}{V'} = \frac{X m_{b_{ij}}}{V'} \quad (2.50)$$

A análise da sensibilidade das frequências naturais translacionais e torcionais em relação à variação dos parâmetros analisados foi realizada de forma numérica, recalculando os valores de frequências naturais para cada configuração. Os limites superior e inferior foram escolhidos de acordo com o impacto na massa total do sistema, visando analisar variações menores nos parâmetros que afetam a distribuição de massa e sua magnitude, por exemplo no diâmetro das colunas e massa dos pavimentos. Cada variável foi analisada em 2000 pontos no intervalo entre o limite superior e inferior do parâmetro analisado, valores apresentados na Tabela 2.3. O subíndice  $n$  se refere ao pavimento analisado, para os casos de variação de massa dos pavimentos e comprimento entre pavimentos, que foram variados individualmente, e os subíndices  $ij$  se referem aos pavimentos  $i$  e  $j$ , resultando na distância entre pavimentos  $l_{ij}$ . O subíndice 0 representa a configuração original.

Tabela 2.3 – Limites de variação dos parâmetros para análise de sensibilidade.

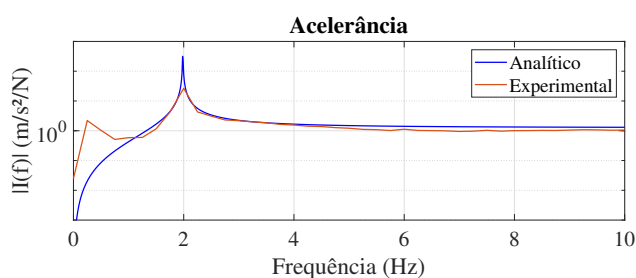
Variável	Limite inferior	Limite superior
$d_i$	0,98 $d_{i0}$	1,02 $d_{i0}$
$R$	0,50 $R_0$	1,00 $R_0$
$m_n$	0,95 $m_{n0}$	1,05 $m_{n0}$
$l_{ij}$	1,00 $l_{ij0}$	1,10 $l_{ij0}$
$m_{ij}$	0,00 $l_{ij0}$	1,00 $l_{ij0}$

Fonte: Dos autores (2023).

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção é apresentada a comparação do modelo simplificado ao proposto em relação à representatividade e correlação das frequências naturais teóricas e experimentais. Os resultados da análise de sensibilidade das frequências naturais do modelo proposto devido à variação dos parâmetros do sistema é apresentada de forma gráfica. As FRF's de aceleração teórica e experimental (excitando e computando apenas o comportamento translacional) para um único pavimento (configuração 1 da Tabela 2.2) do modelo proposto são apresentadas na Figura 3.1. O erro entre as frequências naturais foi de de 1%, entre a frequência natural analítica de 1,98 Hz e 2,00 Hz da frequência natural experimental. Quando o diâmetro do modelo FEM é utilizado no modelo simplificado o erro relativo é de 15%, assim sendo o modelo proposto foi capaz de reduzir o erro relativo em 14%.

Figura 3.1 – Comparação analítica-experimental para o modelo proposto na configuração 1.



Fonte: Dos autores (2023).

Para o modelo de múltiplos graus de liberdade, os resultados obtidos para o modelo proposto são apresentados na Figura 3.2 (configuração 2 da Tabela 2.2), em que o incremento de frequência utilizado para obtenção da curva analítica de 0,0625 Hz, mesmo valor observado na resolução do analisador de sinais dinâmicos para a faixa de frequências coletadas. Os valores das frequências naturais obtidas analiticamente e experimentalmente pelo modelo proposto podem ser visualizadas na Tabela 3.1. O maior erro das frequências naturais do modelo simplificado em relação às experimentais foi de 18,89% (utilizando o diâmetro obtido pelo modelo

FEM), enquanto para do modelo proposto foi de 3,77%, se comparados as mesmas frequências de translação. A FRF translacional para quatro graus de liberdade considerando o modelo simplificado pode ser vista na Figura 3.3. Assim sendo, a consideração da massa das barras causou uma diminuição considerável no erro quando comparada ao modelo simplificado. O maior erro encontrado utilizando o modelo proposto no sistema com quatro graus de liberdade, considerando a propagação de erros e incertezas associadas aos valores numéricos das características geométricas e de materiais das barras, é menor que aquele encontrado com o modelo simplificado para um único grau de liberdade.

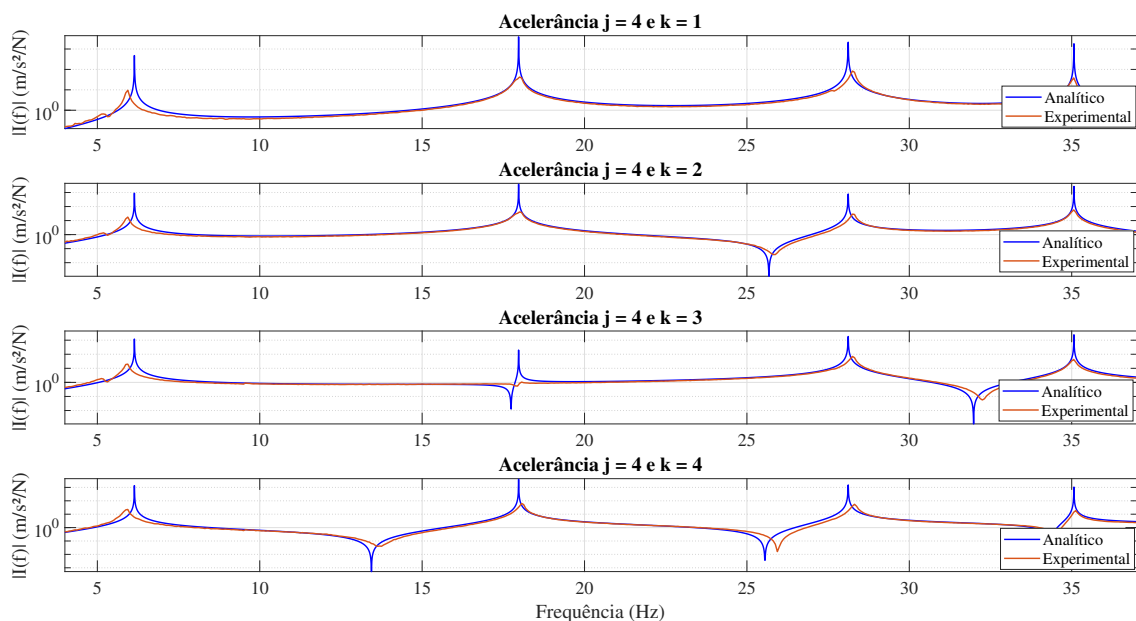
Tabela 3.1 – Frequências de translação do modelo proposto para a configuração 2.

Frequência natural	$f$ Analítica (Hz)	$f$ Experimental (Hz)	Erro Relativo (%)
1ª de translação	6,1413	5,9375	3,77
2ª de translação	17,9710	18,0000	0,16
3ª de translação	28,1173	28,2500	0,47
4ª de translação	35,0685	35,0625	0,02

Fonte: Dos autores (2023).

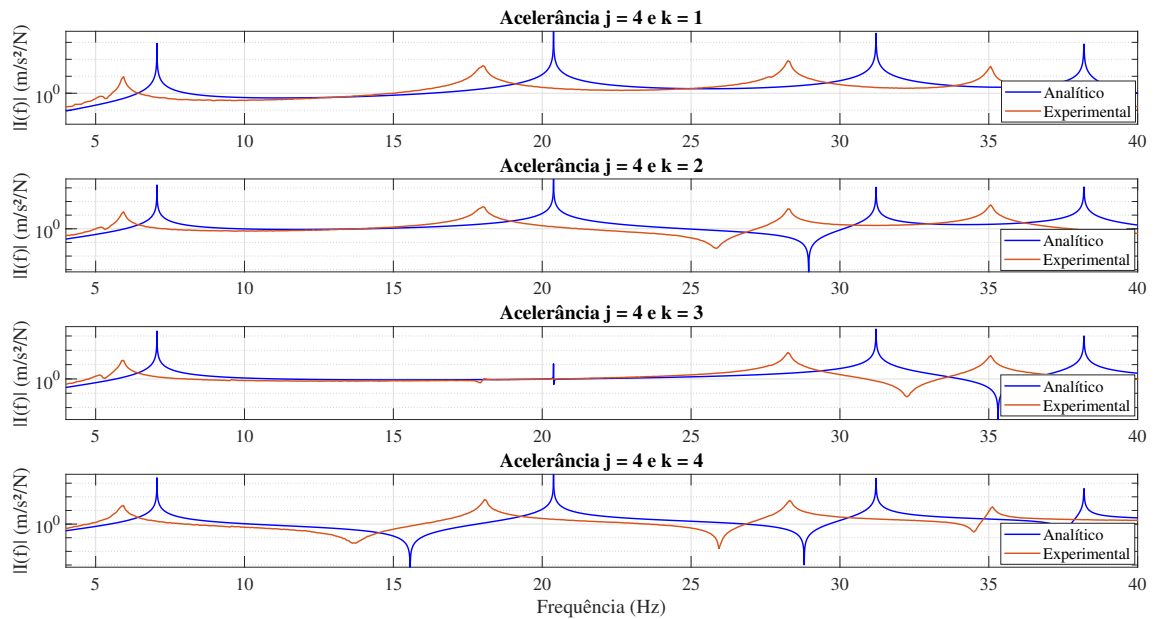
A Figura 3.2 e a Figura 3.3, apresentam os resultados da aplicação do modelo proposto e simplificado para quatro graus de liberdade, respectivamente, onde  $j$  indica o pavimento em que está o acelerômetro (*output* do sistema) e  $k$  onde é feito a excitação do sistema (*input*).

Figura 3.2 – Aplicação do modelo proposto para quatro graus de liberdade (configuração 2).



Fonte: Dos autores (2023).

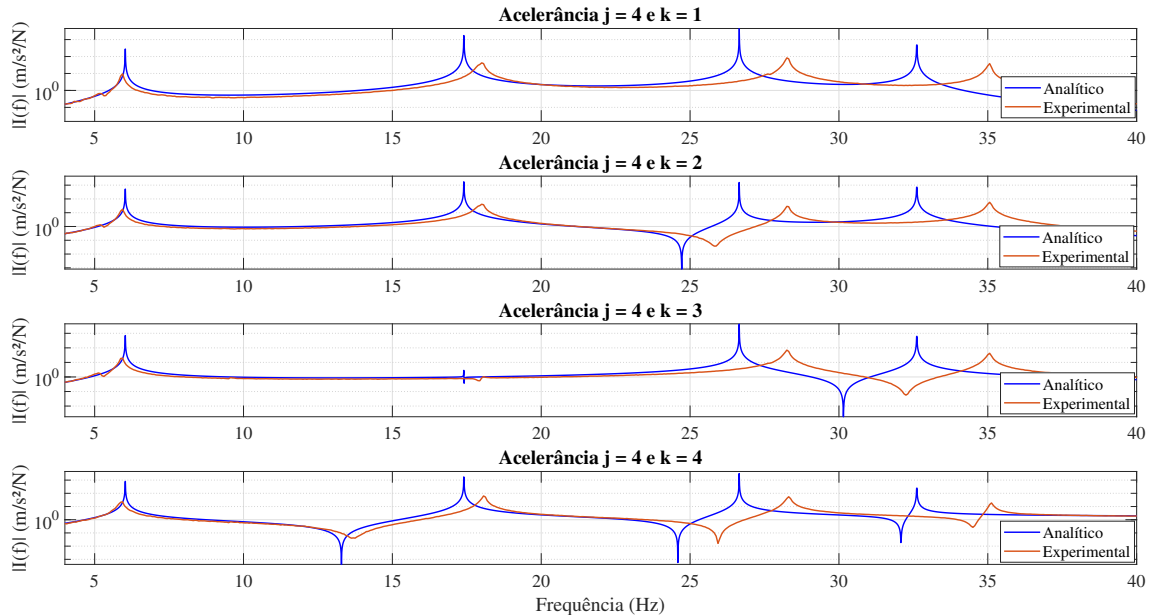
Figura 3.3 – Aplicação do modelo simplificado para quatro graus de liberdade.



Fonte: Dos autores (2023).

Com finalidade de justificar que a identificação do diâmetro útil utilizado para o levantamento das FRF's apresentadas, na Figura 3.2 e na Figura 3.1, não é capaz de ajustar o modelo simplificado isoladamente e que a melhora dos resultados se deve à consideração da massa das barras, foi aplicada a mesma metodologia e valores de diâmetro e módulo de elasticidade no modelo analítico simplificado para o caso de quatro GDL, representado na Figura 3.4. Verificou-se que o maior erro relativo é o da primeira frequência natural é de 6,98% quando a massa das colunas é desconsiderada, em vista de 3,77% no modelo proposto.

Figura 3.4 – Comparação teórica-experimental do modelo simplificado com diâmetro útil atualizado.



Fonte: Dos autores (2023).

Para facilitar a compreensão em uma visão geral dos resultados comparativos encontrados para os graus de liberdade translacionais, seguindo a nomenclatura e valores da Tabela 3.2, é apresentado uma comparação de testes feitas e a especificação de qual modelo foi utilizado e qual valor de diâmetro foi adotado na Tabela 3.3, que apresenta o maior erro relativo observado no modelo analítico utilizado ao(s) valor(es) de frequência(s) natural(is) experimental(is).

Tabela 3.2 – Diâmetros utilizados nos modelos para o comparativo.

Nomenclatura	Descrição	Valor numérico (mm)
$d_{FEM}$	Diâmetro obtido pelo modelo de elementos finitos que ajustou a FRF da barra isolada	3,995
$d_{simplificado}$	Diâmetro obtido isolando analiticamente a partir do modelo simplificado de um grau de liberdade a variável de diâmetro e calculando-o com a frequência natural de um grau de liberdade obtida experimentalmente	3,6916
$d_{proposto}$	Diâmetro obtido isolando analiticamente a partir do modelo proposto de um grau de liberdade a variável de diâmetro e calculando-o com a frequência natural de um grau de liberdade obtida experimentalmente	3,8425

Tabela 3.3 – Comparativo de erros relativos encontrados.

Modelo	Graus de liberdade	Diâmetro	Erro relativo (%)
Simplificado	1	$d_{FEM}$	15,00
Proposto	1	$d_{proposto}$	1,00
Simplificado	4	$d_{FEM}$	18,89
Simplificado	4	$d_{simplificado}$	6,98
Proposto	4	$d_{proposto}$	3,77

Com o objetivo de validar o modelo não somente para múltiplos graus de liberdade, mas também para os graus de liberdade torcionais o mesmo processo de verificação foi aplicado para a configuração 3 da Tabela 2.2, que contempla os graus de liberdade translacionais e torcionais. Os erros relativos encontrados podem ser vistos na Tabela 3.4, o maior erro relativo para o comportamento completo, torcional e translacional do modelo proposto, não superou o erro relativo observado apenas o modelo translacional simplificado de múltiplos quatro graus de liberdade citado no parágrafo anterior. Com o modelo completo validado a análise de sensibilidade paramétrica é apresentada a seguir, incluindo a sensibilidade do modelo proposto às massas e inércias das colunas.

Tabela 3.4 – Frequências naturais experimentais e teóricas para a configuração 3.

Frequência natural	$f$ Analítica (Hz)	$f$ Experimental (Hz)	Erro relativo (%)
1ª de translação	10,2091	9,7500	4,71
2ª de translação	29,0567	28,4375	2,18
3ª de translação	43,0039	42,7500	0,59
1ª de torção	15,5492	15,3750	1,13
2ª de torção	45,1596	43,7500	3,22
3ª de torção	68,5742	64,5000	6,32

Fonte: Dos autores (2023).

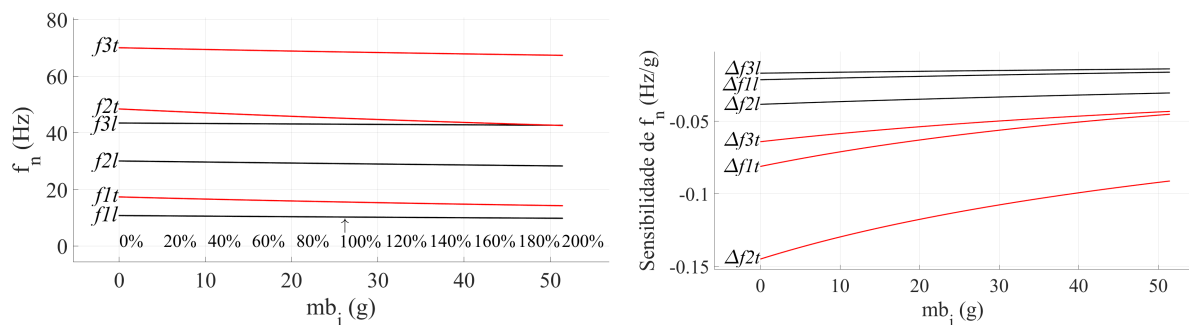
Na análise de sensibilidade, as frequências naturais são apresentadas em função dos parâmetros analisados nas Figuras a , os pontos que constituem a curva de cor preta se relacionam às frequências naturais de translação, enquanto os vermelhos representam as frequências naturais de torção. À esquerda de cada base de dados há a indicação de qual frequência a curva em questão de refere na forma  $f_{y;l;t}$ , onde  $l; t$  indica se frequência é do modelo translacional ( $l$ ) ou torcional ( $t$ ) e  $y$  indica qual frequência (Exemplo: a primeira (1) frequência natural ( $f$ ) do modelo translacional ( $l$ ) é denominada  $f_{1l}$  e a terceira frequência natural torcional é nomeada  $f_{3t}$ ). Junto ao eixo das abcissas são apresentados os valores percentuais daquela configuração em relação à original, que é indicada com o valor de 100%, além da indicação gráfica da configuração original, indicada com a seta vertical. A análise da sensibilidade é feita considerando



a magnitude da mesma, já que o sinal só indica se há aumento ou diminuição nas frequências naturais com o aumento do parâmetro analisado.

O impacto da consideração da massa das colunas  $m_b$  nas frequências naturais pode ser vista na Figura 3.5a. A configuração de 0% das massas representa o modelo simplificado, enquanto a configuração de 100% é referente à configuração utilizada para validação experimental. Os resultados apontam que a consideração da massa das colunas diminui as frequências naturais, este comportamento continua sendo observado com o aumento de  $m_b$ . Apesar de um aumento na massa das barras diminuir as frequências naturais, a maior sensibilidade das frequências naturais ocorre quando a massa das barras é menor (Figura 3.5b), e essa sensibilidade vai diminuindo conforme a massa das barras aumenta, gerando uma menor variação nas frequências naturais para uma mesma variação na massa das barras. Na Figura 3.5b é possível observar que a parcela torcional do modelo é mais afetada pela consideração da massa das barras do que a parcela translacional, e que, comparando dentro de um mesmo modelo a segunda frequência natural é sempre a mais sensível enquanto a terceira é a menos sensível a variações em  $m_b$ .

Figura 3.5 – Sensibilidade das frequências naturais à massa  $m_b$ .



(a) Variação das frequências devido a variação da massa das colunas  $m_b$ .

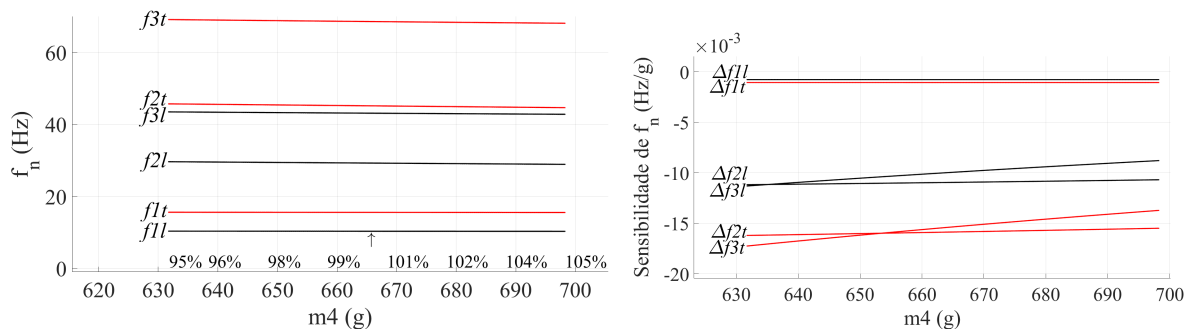
(b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.

Fonte: Dos autores (2023).

Um aumento na massa de qualquer pavimento gera uma diminuição das frequências naturais, já que a massa do sistema global é incrementada, como pode ser visto nas Figuras 3.6a, 3.7a e 3.8a. Alterações na massa intermediária ( $m_5$ ) afetam de forma mais significativa as frequências mais altas para ambos os modelos, em frequências mais baixas variações em  $m_6$  são mais influentes, enquanto  $m_4$  tem impacto intermediário (entre aquele observado com a variação de  $m_5$  e  $m_6$ ) em alta frequência, mantendo a primeira frequência de cada modelo próxima à original. Uma divergência no comportamento da  $f_{3l}$  em relação a  $f_{2t}$  é notável comparando o gráfico da Figura 3.6a aos gráficos das Figuras 3.7a e 3.8a, onde uma modificação nas massas das extremidades faz com que as frequências se distanciem com uma diminuição da massa enquanto o mesmo fenômeno é observado com o aumento da massa intermediária. Todas as frequências apresentaram sensibilidade aproximadamente constante independente da variação

de  $m_4$  (Figura 3.6b), com exceção das terceiras frequências naturais, que são mais sensíveis à diminuição de  $m_4$  do que ao aumento da mesma. O mesmo fenômeno de sensibilidade constante nas duas primeiras frequências (translacional e torcional) é observado para variações de  $m_5$  (Figura 3.7b). Dentre todas as massas, a massa  $m_6$  é a que apresenta maior variação na sensibilidade (Figura 3.8b), apresentando variações não somente para as terceiras frequências naturais bem como para as segundas frequências naturais, sendo a única que apresenta maior sensibilidade para  $f_{2t}$  em vista das sensibilidades de  $m_4$  e  $m_5$  que são maiores quando se trata de  $f_{3t}$ .

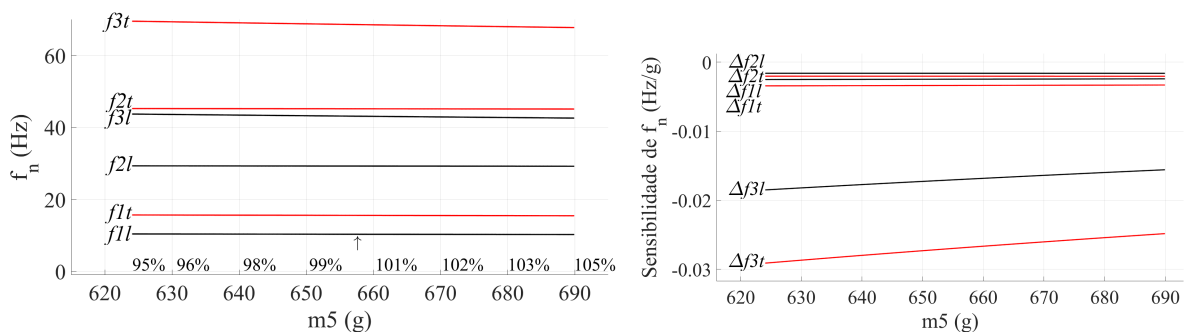
Figura 3.6 – Sensibilidade das frequências naturais à massa  $m_4$ .



(a) Variação das frequências devido a variação (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.  
massa  $m_4$ .

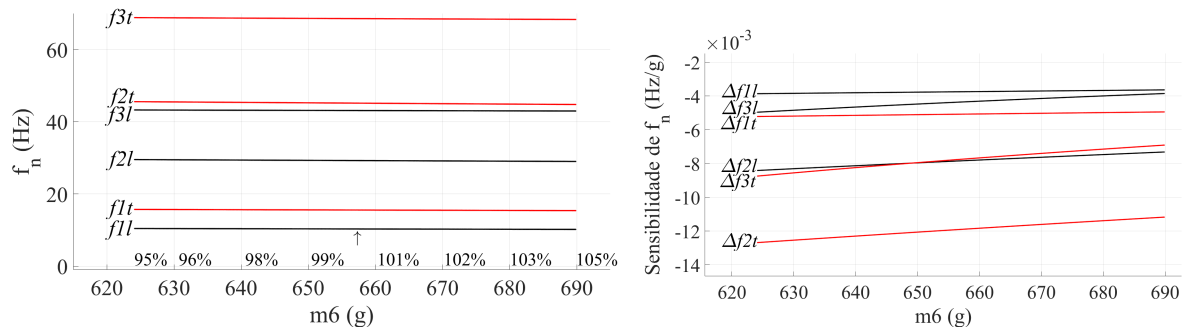
Fonte: Dos autores (2023).

Figura 3.7 – Sensibilidade das frequências naturais à massa  $m_5$ .



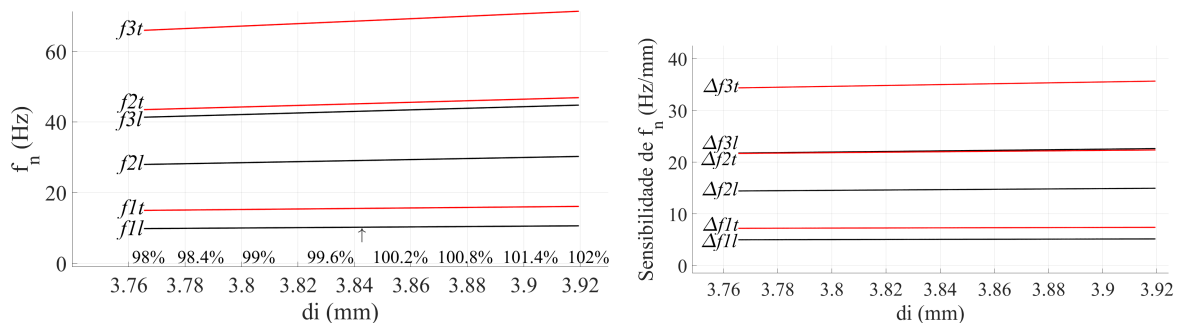
(a) Variação das frequências devido a variação (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.  
massa  $m_5$ .

Fonte: Dos autores (2023).

Figura 3.8 – Sensibilidade das frequências naturais à massa  $m_6$ .(a) Variação das frequências devido a variação (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.  
massa  $m_6$ .

Fonte: Dos autores (2023).

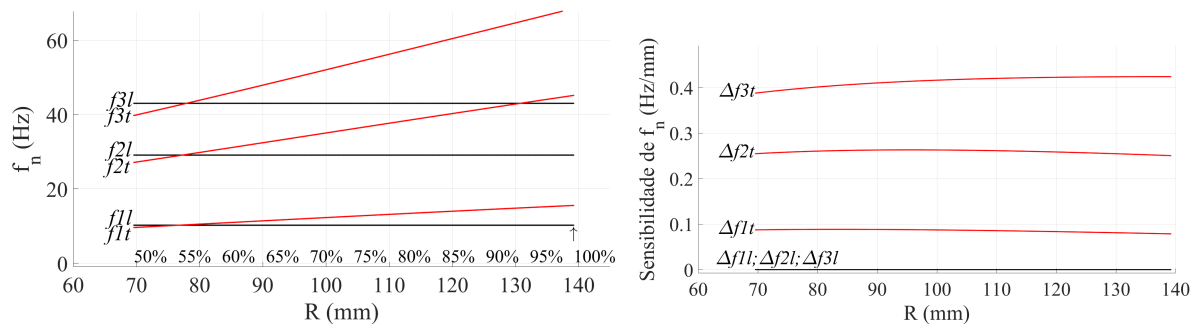
Um aumento no diâmetro das colunas aumenta o valor do momento de inércia  $I$  e da constante  $C$ , fazendo com que haja um aumento na rigidez global do sistema e aumentando as frequências naturais como mostrado na Figura 3.9a. Em contrapartida um aumento no diâmetro das colunas causa um aumento em  $x^2$  na massa, sendo  $x$  o fator multiplicador do diâmetro original, aumentando a magnitude e a distribuição de massa global. As frequências  $f_{3l}$  e  $f_{2t}$  permanecem paralelas, com uma variação de 0.0159 Hz para uma variação total de 4% do valor original de  $d_i$ . A frequência mais sensível às alterações no diâmetro é a terceira frequência natural torcional (Figura 3.9b). Em toda a faixa de diâmetros analisada não houveram grandes mudanças na sensibilidade com o aumento ou diminuição de  $d$ , apesar da sensibilidade não ser constante. A sensibilidade de  $f_{2t}$  e  $f_{3l}$  é aproximadamente igual, com uma leve defasagem entre eles pelo aumento da sensibilidade mais acentuado em  $f_{3l}$  do que em  $f_{2t}$ , demonstrando que não é viável alterar o diâmetro das colunas para afastar ou aproximar as frequências citadas dentro da faixa de diâmetros analisada e, possivelmente, nos diâmetros subsequentes.

Figura 3.9 – Sensibilidade das frequências naturais ao diâmetro  $d$ .(a) Variação das frequências devido a variação (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.  
do diâmetro das colunas.

Fonte: Dos autores (2023).

Quanto ao posicionamento das colunas em relação ao centro geométrico do pavimento (Figura 3.10a), apenas a dinâmica torcional é afetada, devido a dependência do momento restaurador causado pela resistência à flexão das colunas. Pequenas variações em  $R$  causam um grande impacto na resposta torcional, podendo alterar não somente a magnitude das frequências torcionais, bem como a ordem de em que estas ocorrem em relação às frequências de translação dependendo da configuração adotada. A sensibilidade de  $f_{1t}$  aumenta com a diminuição de  $R$  (Figura 3.10b), o fato oposto pode ser observado para  $f_{3t}$ , enquanto  $f_{2t}$  atinge o máximo de sensibilidade aproximadamente em 65% da configuração original e começa a diminuir com a diminuição de  $R$ .

Figura 3.10 – Sensibilidade das frequências naturais ao posicionamento das colunas  $R$ .

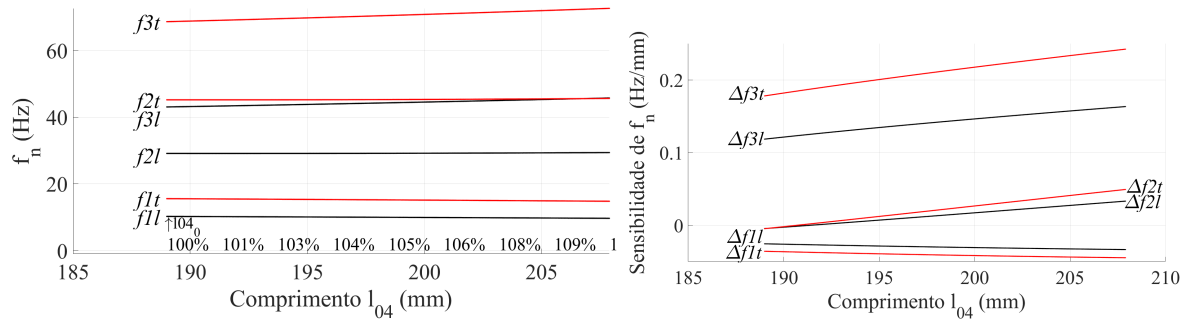


(a) Variação das frequências devido a variação do (b) Sensibilidade das frequências naturais posicionamento das colunas. correspondente.

Fonte: Dos autores (2023).

Para as variações no comprimento entre pavimentos  $l_{04}$  (Figura 3.11a) e  $l_{56}$  (Figura 3.13a), duas frequências de ambos os modelos sofreram aumento, enquanto uma sofreu diminuição, para o comprimento  $l_{45}$  (Figura 3.12a) o comportamento observado é oposto, onde duas frequências diminuíram em vista do aumento apenas da terceira frequência de cada modo, sendo esta a mais sensível para o parâmetro analisado, com a maior variação entre  $f_{3l}$  e  $f_{2t}$  dentre todos os comprimentos variados. Outra divergência observável na Figura 3.12 em relação às demais da mesma figura é a diminuição da terceira frequência natural em ambos os modelos quando o comprimento  $l_{45}$  é aumentado, fenômeno que não ocorre com o aumento de  $l_{04}$  e  $l_{56}$ . O aumento em  $l_{04}$  aumenta a sensibilidade de todas as frequências naturais (Figura 3.11b), há uma taxa de variação maior quando se trata do aumento das frequências naturais torcionais do que nas translacionais, em especial para  $f_{2t}$ . Para  $l_{45}$  a maior sensibilidade acontece em  $f_{3l}$  e  $f_{3t}$  para os comprimentos mais próximos à configuração original e diminui quando se aproxima do limite superior (Figura 3.12b). O comprimento  $l_{56}$  é o que apresenta sensibilidades menos lineares com exceção das primeiras frequências naturais que possuem baixa sensibilidade à alterações neste comprimento (Figura 3.13b).

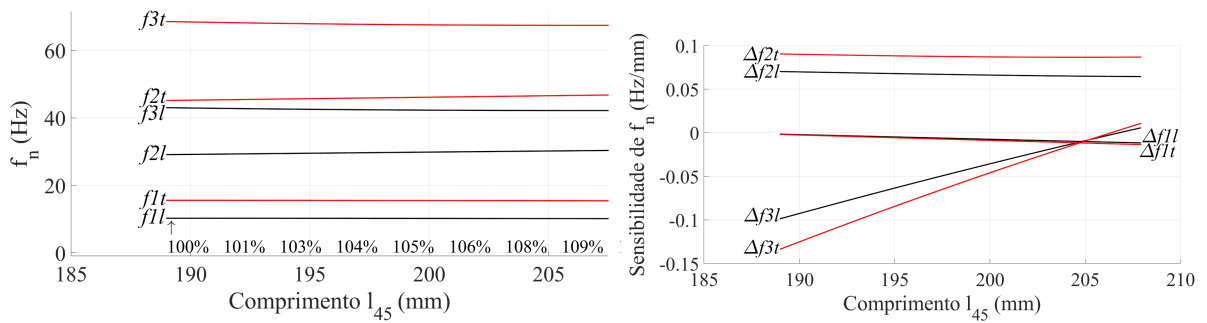
Figura 3.11 – Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento  $l_{04}$ .



(a) Variação das frequências devido a variação do comprimento  $l_{04}$ . (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.

Fonte: Dos autores (2023).

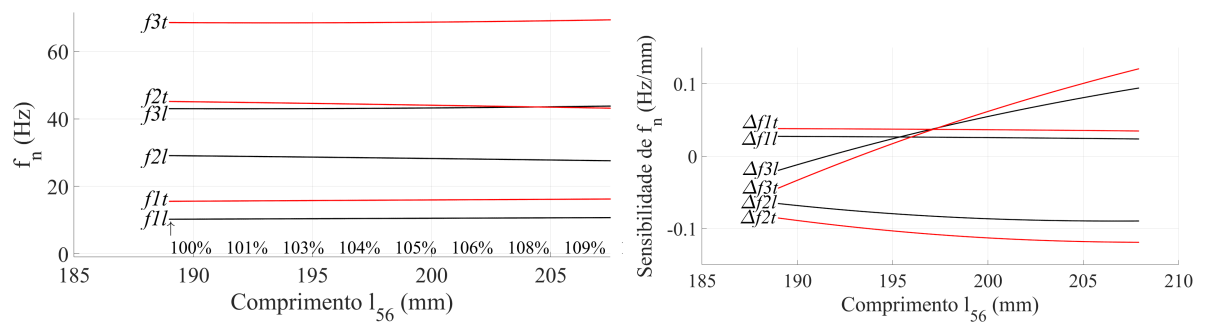
Figura 3.12 – Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento  $l_{45}$ .



(a) Variação das frequências devido a variação do comprimento  $l_{45}$ . (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.

Fonte: Dos autores (2023).

Figura 3.13 – Sensibilidade das frequências naturais ao comprimento  $l_{56}$ .



(a) Variação das frequências devido a variação do comprimento  $l_{56}$ . (b) Sensibilidade das frequências naturais correspondente.

Fonte: Dos autores (2023).

Para todos os parâmetros analisados, o modelo torcional é mais sensível em termos de variação das frequências naturais, já que as frequências torcionais foram mais afetadas quando comparadas com a frequência de translação do modo equivalente. Variações no comprimento entre pavimentos alteram a rigidez global, bem como a distribuição de massa sem alterar a massa total do sistema. Alterações em  $l_{ij}$  podem ser empregadas quando se deseja afastar ou aproximar determinadas frequências, onde cada comprimento possui variações em termos de aumento ou diminuição das frequências naturais únicas que não são observadas na variação de outros parâmetros. A diminuição da massa de qualquer pavimento diminui a magnitude e a distribuição de massa global, mantendo a rigidez constante. Mudanças no diâmetro impactam significativamente nas frequências naturais, porém alteram a rigidez e a massa global, causando grandes mudanças nos demais parâmetros de projeto. A mudança do posicionamento das colunas é de grande impacto nas frequências torcionais devido a modificação da distribuição de rigidez, mantendo constantes as frequências translacionais e a massa global, e é o parâmetro mais flexível para a manipulação da ordem em que as frequências acontecem. Nas variações de massa e comprimento são observados comportamentos semelhantes pela simetria de resultados nas variações dos parâmetros nas extremidades da estrutura quando comparados às variações dos mesmos parâmetros centrais geometricamente, em termos da aproximação da segunda frequência natural torcional à terceira translacional.

## 4 CONCLUSÕES

A modelagem simplificada por parâmetros concentrados não foi capaz de descrever o comportamento dinâmico real da estrutura, quando são comparadas as frequências naturais encontradas por tal modelo àquelas encontradas de forma experimental, divergência dada pela desconsideração da massa das colunas que conectam os pavimentos. Em prol do aumento da representatividade da dinâmica da estrutura estudada, o modelo proposto considera a massa das colunas. Os resultados analíticos obtidos com a proposta se aproximaram mais ao comportamento dinâmico experimental observado, considerando as simplificações dos elementos de massa e rigidez e as incertezas associadas aos parâmetros geométricos e à contribuição da fixação e montagem da bancada experimental. Um acoplamento nas matrizes de massa e de inércia foi encontrado, estendendo a correlação entre as coordenadas generalizadas usualmente encontrada na matriz de rigidez. Sobre os resultados apresentados na seção anterior é possível afirmar:

1. A divergência nos resultados das frequências naturais do modelo simplificado aumenta quando há um incremento no número de graus de liberdade do sistema, bem como com o aumento da relação de massa das colunas e massa dos pavimentos;
2. Quando a massa das colunas não é desprezível em relação à massa dos pavimentos ela

deve ser considerada. Os elementos de rigidez e amortecimento não possuem massa, assim sendo o modelo pode ser considerado de parâmetros concentrados, porém os mesmos componentes físicos que contribuem para a rigidez e/ou amortecimento, contribuem também para a inércia do sistema.

3. Uma aplicação de *model updating* só é válida quando o modelo analítico que descreve o comportamento da estrutura está bem definido, caso esta condição não seja satisfeita, o modelo proposto só descreverá uma única condição específica da estrutura.
4. É possível modificar a ordem em que as frequências naturais de torção aparecem em relação às de translação, mantendo estas inalteradas, apenas variando a configuração geométrica ( $R$ ), e mantendo os valores originais das dimensões dos componentes da estrutura.
5. Similaridades no comportamento da modificação da massa  $m_5$  e  $l_{45}$  são observadas, quando comparados aos demais parâmetros  $m_4$  e  $m_6$  e  $l_{04}$  e  $l_{56}$ , respectivamente. Estes parâmetros estão localizados no centro geométrico da estrutura real e modificam a região central das matrizes de rigidez e/ou matriz de massa de ambos os modelos.

Os objetivos propostos foram atingidos, apresentando um modelo representativo verificado experimentalmente e uma análise quantitativa da sensibilidade das frequências naturais à variação de parâmetros-chave do modelo.

Após a conclusão deste trabalho, sugere-se como trabalhos futuros:

1. Construção de uma superfície em um espaço N-dimensional para analisar a sensibilidade de todos os parâmetros significativos do sistema;
2. Desenvolvimento de um modelo de elementos finitos completo da estrutura para aprofundar a compreensão do comportamento dinâmico;
3. Identificação do amortecimento do sistema para melhorar a precisão das análises de resposta dinâmica;
4. Implementação de um sistema de controle na bancada.

## REFERÊNCIAS

- ASTM. **ASTM Volume 03.01 Metals Mechanical Testing; Elevated and Low Temperature Tests; Metallography**. ASTM, 2011.
- BLEVINS, R.D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. Krieger Publishing Company, 2001. ISBN 0442207107.
- EWINS, D. **Modal testing: theory, practice, and application**. Research Studies Press, 2000.
- GANGM, J.; SAIN, M.K. and SPENCER, B.F. Frequency domain system identification for controlled civil engineering structures. **IEEE transactions on control systems technology**, v. 13, 1055–1062, 6 2005.
- GOLA, M.; SOMÀ, A. and BOTTO, D. On a theoretical limits of dynamic model updating using a sensitivity-based approach. **Journal of sound and vibration**, v. 244(4), 538–595, 2000.
- LIN, J. and PARKER, R. Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters. **Journal of sound and vibration**, v. 228, 109–128, 1999.
- MAIA, N. and SILVA, J. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. Research Studies Press, 1997.
- MOHAMMADALI, M. and AHMADIAN, H. Improvement in modal testing measurements by modeling and identification of shaker–stinger–structure interactions. **Experimental techniques (Westport, Conn.)**, v. 40, 49–57, 1 2016.
- RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. Pearson Universidades, 2008.
- RAO, S. **The Finite Element Method in Engineering**. Butterworth-Heinemann, 2010.
- TABESHPOUR, M.R. and NOORIFARD, A. Analytical investigation of torsional mode in symmetric and asymmetric systems with mass or stiffness eccentricity. **Structures (Oxford)**, v. 27, 1433–1445, 2020.
- TANG, H.; XUE, S. and FAN, C. Differential evolution strategy for structural system identification. **Computers and structures**, v. 86, 2004–2012, 2008.
- TATAR, A.; SCHINWINGSHACKL, C.W. and FRISWELL, M. Modal sensitivity of three-dimensional planetary geared rotor systems to planet gear parameters. **Applied mathematical modelling**, v. 113, 309–332, 2023.
- WANG, Q.; TIAN, H.; QIAO, H.; TIWARI, N.D. and WANG, Q. Wind-induced vibration control and parametric optimization of connected high-rise buildings with tuned liquid-column-damper–inerters. **Engineering structures**, v. 226, 11352, 2021.
- YIN, Q.; ZHAO, J.; LIU, Y. and ZHANG, Y. The approximate calculation of the natural frequencies of a stockbridge type vibration damper and analysis of natural frequencies sensitivity to the structural parameters. **Mechanical Science**, v. 12, 863–873, 2021.



YOUNGGANG, L.; ERIJANG, E.; YIMIN, S. and ZHIYOU, F. Stiffness modeling and analysis of a novel 4-dof pkm for manufacturing large components. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 26, 1577–1585, 8 2013.

ZALKA, K. Torsional analysis of multi-storey building structures under horizontal load. **The structural design of tall and special buildings**, v. 22 (2), 126–143, 2013.

ZHANG, L.; ZONG, X.; TANG, Y.; CHEN, X.; FENG, J. and YUAN, X. Modal and natural frequency sensitivity of eletrohydraulic stewart paltform. **Shock and Vibration**, v. 2021, 2021.

ZHU, H.; HU, Y. and ZHU, W. Modification of natural frequencies of an automotive belt drive system based on eigen-sensitivity analysis of its configuration parameters. **European journal of mechanics**, v. 67, 137–156, 2018.

ZÁRATE, B.A. and CAICEDO, J.M. Finite element model updating: Multiple alternatives. **Engineering structures**, v. 30(12), 3724–3730, 2008.