

CINTHIA DE SOUZA MARTINS GOMES

COLORAÇÃO DE GRAFOS E APLICAÇÕES

LAVRAS – MG

2023

CINTHIA DE SOUZA MARTINS GOMES

COLORAÇÃO DE GRAFOS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciada.

Prof. Dr. Ricardo Edem Ferreira

Orientador

LAVRAS – MG

2023

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Martins Gomes, Cinthia de Souza

Coloração de grafos e aplicações / Cinthia de Souza
Martins Gomes. – Lavras : UFLA, 2023.

57 p. :

Monografia(graduação)–Universidade Federal de Lavras,
2023.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Edem Ferreira.

Bibliografia.

1. Teoria dos grafos. 2. Coloração de mapas. 3. Monogra-
fia. I. Ferreira, Ricardo Edem. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente aos meus pais, todos os meus professores desde o ensino fundamental, aos meus professores na Universidade Federal de Lavras por sempre acreditarem em mim e por me encorajarem a buscar o conhecimento.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de classe, pelas horas de estudo compartilhadas, pelas discussões enriquecedoras e pelo incentivo mútuo, ao longo dessa jornada acadêmica.

Por fim dedico este trabalho a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

É preciso ter o caos dentro de si para dar a luz à uma estrela dançante .

(Nietzsche)

Teoria dos Grafos. Coloração de mapas.

RESUMO

O problema das quatro cores, também conhecido como o teorema das quatro cores, é um problema matemático clássico que afirma que é possível colorir qualquer mapa plano usando no máximo quatro cores, de modo que regiões adjacentes (compartilhando uma fronteira) não tenham a mesma cor. Esse problema tem diversas aplicações práticas em várias áreas, como cartografia, planejamento de rotas, organização de horários e tarefas. O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo da teoria de grafos necessária para compreender e aplicar o processo de coloração de um mapa da região sudeste brasileira. Foi possível concluir que o algoritmo guloso se mostrou eficiente para a coloração do mapa escolhido, apesar da dependência da escolha do vértice inicial.

Palavras-chave:

ABSTRACT

The Four-Color Problem, also known as the Four-Color Theorem, is a classic mathematical problem that states that any flat map can be colored using at most four colors in such a way that adjacent regions (sharing a boundary) do not have the same color. This problem has several practical applications in various areas, such as cartography, route planning, scheduling, and task organization. The aim of this study was to conduct research on graph theory necessary to understand and apply the process of coloring a map of the Brazilian Southeast region. It was possible to conclude that the greedy algorithm proved to be efficient for coloring the chosen map, despite its dependence on the choice of the starting vertex.

Keywords: Graph Theory. Map coloring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – A direita, grafo da representação das pontes e a esquerda, as pontes de Königsberg.	9
Figura 2.1 – Grafo G_1 representando a definição de vizinhança.	11
Figura 2.2 – Grafo G_2 representando um grafo orientado.	12
Figura 2.3 – Grafo G_3 representando a definição de um percurso.	14
Figura 2.4 – A direita o subgrafo G' , e a esquerda o grafo G	15
Figura 2.5 – Grafo G_6 representando um ciclo.	17
Figura 2.6 – Grafo G_7 representando um caminho fechado.	17
Figura 2.7 – Grafo G_8 representando um caminho aberto.	18
Figura 2.8 – A direita, G_9 representa um grafo conexo, e a esquerda o grafo G_{10} representa um grafo desconexo.	19
Figura 2.9 – Grafo G_{10} representando um grafo bipartido.	20
Figura 2.10 – Grafo G_{11} representando um grafo bipartido completo.	21
Figura 2.11 – Grafo G_{12}	21
Figura 2.12 – Grafo G_{13}	23
Figura 2.13 – Grafo G_{15} representando um percurso eureliano.	25
Figura 2.14 – Grafo G_{16} representando um percurso pré eureliano.	26
Figura 2.15 – A direita G_{17} é um grafo conexo, e a esquerda temos um percurso hamiltoniano do grafo G_{17}	27
Figura 2.16 – Jogo do dodecaedro	28
Figura 3.1 – Fluxograma do algoritmo guloso para determinação de $\alpha(G)$	31
Figura 3.2 – A direita o grafo G_{18} , e a esquerda a aplicação do algoritmo guloso para determinação de $\alpha(G_{18})$	32
Figura 3.3 – A direita o grafo G_{18} , e a esquerda uma outra possível coloração dos vértices de G_{18}	33
Figura 3.4 – A direita o grafo C_n ciclo par, e a esquerda o grafo C_{n-1} ciclo ímpar.	34
Figura 3.5 – Grafo G_{20}	37
Figura 3.6 – Troca de cores dos vértices do grafo G_{20}	38
Figura 3.7 – Troca de cores dos vértices do grafo G_{20}	38
Figura 3.8 – Grafo bipartido G_{21}	39

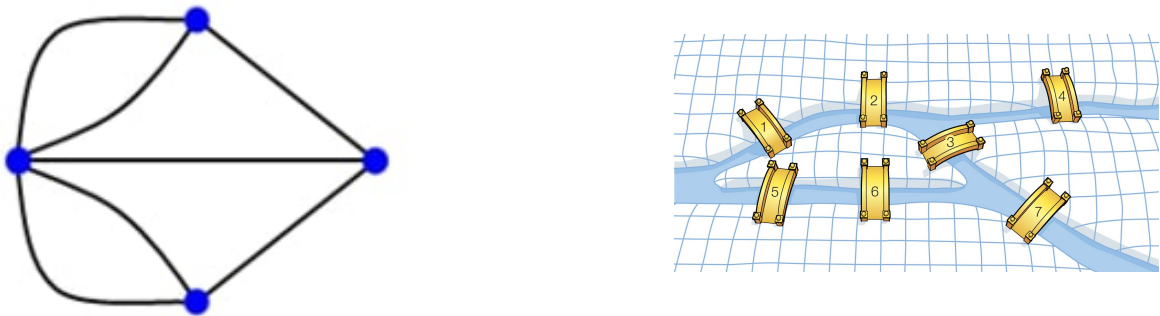
Figura 3.9 – Grafo bipartido G_{22}	40
Figura 3.10 – Sólidos de Platão	42
Figura 3.11 – Representação do tetraedro por um grafo planar G_{23}	43
Figura 3.12 – Representação do cubo por um grafo planar G_{24}	43
Figura 3.13 – Representação do grafo K_5	44
Figura 3.14 – Possíveis colorações do mapa do Brasil	49
Figura 3.15 – Fluxograma do algoritmo "guloso" para coloração de vértices.	50
Figura 3.16 – Região nordeste do Brasil.	50
Figura 3.17 – Representação da região nordeste por um grafo.	51
Figura 3.18 – Possível coloração da região nordeste do Brasil.	52
Figura 3.19 – Se G é planar, então α e β não se cruzam.	55

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Boaventura/Jurkiewicz (2009), o primeiro registro sobre o estudo de grafos, começou a ser estudado em 1736. Euler, visitou a cidade de Königsberg, na Prússia oriental (atualmente chamada de *Kaliningrad*, situada em uma pequena porção da Rússia, entre a Polônia e a Lituânia).

Segundo a obra de Netto (2011), Euler formulou e desenvolveu o primeiro de seus problemas em meio a sua fantástica produção científica. Como citado em Boaventura/Jurkiewicz (2009), no rio *Pregel*, que corta a cidade, havia duas ilhas que eram ligadas entre si por uma ponte.

Figura 1.1 – A direita, grafo da representação das pontes e a esquerda, as pontes de Königsberg.



Fonte: Da autora.

Como na Figura 2.4, a cidade ainda possui mais seis pontes, totalizando ao todo sete pontes. A dúvida em questão na época,

"É possível atravessar as sete pontes do rio sem passar duas vezes pela mesma ponte, retornando ao ponto de partida?".

Euler observou que o número de passagens de uma margem para outra era sempre ímpar, ou seja, é possível passar, mas em algum momento não conseguirá retornar.

Embora o estudo sobre caminhos tivesse pouca importância na época, sua relevância era limitada, o que pode ter desestimulado a sua investigação naquele momento. A falta de clareza em relação à abordagem a ser utilizada resultou no isolamento do primeiro problema que hoje conhecemos como teoria dos grafos. Esse desinteresse na época estava relacionado à ausência de aplicações práticas.

De acordo com Boaventura/Jurkiewicz (2009) , ao longo do século *XX*, cresceu o interesse de muitos matemáticos pelo estudo de grafos, em geral trazido pelo estudo de problemas como esse de Euler. Assim, foi desenvolvido um corpo teórico que permite a abordagem de muitos problemas novos.

A teoria dos grafos é, hoje, um campo de interesse crescente, cujas aplicações vão desde os problemas de localização e de traçado de rotas para diversos tipos de serviços, ao projeto de processadores eletrônicos, planejamento de horários, estudo de estrutura do DNA, etc.

2 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

Neste capítulo iremos mostrar os aspectos básicos sobre teoria dos grafos, como o estudo de vértices, arestas, subgrafo, grafos bipartidos, dentre outras definições relacionadas ao assunto, que é essencial para a compreensão das colorações apresentadas nos capítulos seguintes. Iremos usar como referência os conceitos abordados principalmente em Netto (2011), Boaventura/Jurkiewicz (2009) e Alves (2015).

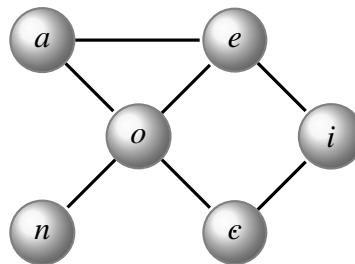
De acordo com Alves (2015), para qualquer conjunto $V \neq \emptyset$ denotamos por $V \times V$. O conjunto de todos os pares de elementos de V . Os elementos de $V \times V$ podem ser identificados como os subconjuntos de V que possuem cardinalidade igual a 1 ou 2, isto é, subconjuntos que possuem 1 ou 2 elementos. Os elementos de V são denominados vértices e os elementos de um conjunto $E \in V \times V$ são denominados de arestas.

Definição 1. O **grafo** é um par (V, E) em que $V \neq \emptyset$ é um conjunto arbitrário. Seja $V = \{a, b, c, d, e\}$ o conjunto de vértices e $E = \{(a, b), (a, e), (b, a), \dots, (e, f)\}$ as relações que constituem as arestas, vemos que $E \subset V \times V$.

Definição 2. Seja $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, a), (a, e), \dots, (e, e)\}$ em um grafo $G = (V, E)$, em que dois vértices a e b estão geometricamente ligados, ou seja, $(a, b) \in E$. Se (a, b) é uma aresta, diremos que os vértices a e b são **vizinhos**, ou ainda, **adjacentes**.

Por exemplo, o grafo a seguir:

Figura 2.1 – Grafo G_1 representando a definição de vizinhança.



Fonte: Da autora

Definição 3. Dado um grafo G , podemos determinar o **grau máximo** de seus vértices, que será representado por $\Delta(G)$. E o **grau mínimo** representado por $\delta(G)$.

Para o grafo G_1 , temos que o grau máximo $\Delta(G) = 4$ é obtido somente pelo vértice o . E o grau mínimo $\delta(G) = 1$, obtido apenas pelo vértice n . Ainda temos o caso em que existem grafos onde todos os seus vértices possuem o mesmo grau.

Também existem os casos de grafos orientados. Consequentemente, é possível determinar o grau dos vértices, o que não acontece em grafos não-orientados. Neste caso os conceitos adequados são os grau de entrada e grau de saída, definidos a seguir.

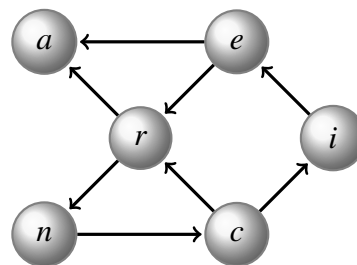
Definição 4. Um grafo é **orientado** (ou **direcionado**), quando este possui sentido, isto é, $(a,b) \neq (b,a)$.

Nesse tipo de grafo, as arestas possuem uma direção específica, indicando a relação de um vértice de origem para um vértice de destino, ou vice-versa.

Definição 5. Em um grafo orientado, o **grau de entrada** K_e são as arestas que chegam em um vértice do grafo, enquanto o **grau de saída** K_s são as arestas que saem de um vértice.

Por exemplo,

Figura 2.2 – Grafo G_2 representando um grafo orientado.



Fonte: Da autora

O grafo orientado da figura 2.3, possui um vértice r que apresenta o mesmo grau de entrada e o mesmo grau de saída, $K_e = K_s$. Já o vértice c possui o grau de saída $K_e = 1$ e $K_s = 2$.

De acordo com Boaventura/Jurkiewicz (2009) existem muitas formas de se organizar os dados sobre um grafo, que pode ser representado por listas ao serem introduzidos em um computador. Dessa forma, podemos associar essa lista às linhas e colunas de uma matriz quadrada, que receberá o nome de **matriz de adjacência**.

Indicada por $X = [x_{ij}]$ definida como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta entre os vértices } v_i \text{ e } v_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim podemos localizar uma posição qualquer em uma matriz por meio de um par de índices.

Definição 6. *Um grafo não-orientado é um grafo em que as arestas entre dois vértices não possui sentido e nem direção.*

A figura 2.1 é uma representação de um grafo não-orientado, como podemos ver a seguir. Assim, obtemos uma tabela com objetivo de mostrar como é determinada a matriz de adjacência:

	a	b	c	h	e	f
a	0	1	0	0	1	0
b	1	0	1	0	1	1
c	0	1	0	1	0	0
h	0	0	1	0	1	0
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	0	0	0

Portanto a matriz de adjacência da figura 2.1 é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É possível concluir que a matriz é simétrica no caso de um grafo não orientado. No entanto, em um grafo orientado, atribuímos uma orientação específica às arestas.

A matriz de adjacência de grafos orientados pode ser determinada levando em consideração o grau de entrada e o grau de saída de cada vértice, portanto o grafo da figura 2.3 possui a seguinte matriz de adjacência:

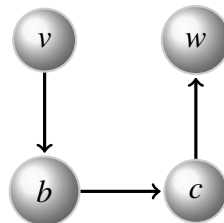
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É importante observar que, nos grafos orientados, a matriz não necessariamente será simétrica. Enquanto em grafos não orientados a matriz triangular inferior e superior são simétricas. Além disso, nos grafos orientados, é possível determinar um caminho específico entre os vértices, ou seja, é possível determinar um percurso na definição a seguir.

Definição 7. Segundo Netto (2011), um **percurso** (ou cadeia, caminho, ciclo) é uma família de ligações sucessivamente adjacentes, onde cada vértice possui uma extremidade conectada ao vértice anterior e a outra extremidade conectada ao vértice subsequente. O percurso será fechado quando a última ligação de sucessão for adjacente à primeira, e será aberta em caso contrário.

Por exemplo,

Figura 2.3 – Grafo G_3 representando a definição de um percurso.



Fonte: Da autora

Conforme descrito por Netto (2011), um percurso é considerado simples quando não apresenta ligações repetidas. Além disso, um percurso é considerado elementar quando não ocorre repetição de vértices. Também é possível determinar o comprimento de caminho de grafo, como na definição a seguir.

Definição 8. *O comprimento de caminho é o número de arestas entre um vértice a a um vértice i . Assim, se um caminho possui m -vértices, seu comprimento é pelo menos $m - 1$.*

Por exemplo, no grafo da figura 2.1 é possível identificar que o menor caminho entre os vértices a e i é 3. Para o grafo da figura 2.2, o comprimento do caminho entre os vértices n e o vértice e é 3.

De acordo com Boaventura/Jurkiewicz (2009), um subgrafo é um grafo que pode ser obtido a partir de outro grafo, removendo-se alguns de seus vértices e/ou arestas. Em outras palavras, um subgrafo é uma parte do grafo original que mantém a mesma estrutura e propriedades básicas, porém com um conjunto reduzido de elementos. Veremos a seguir, uma definição para o subgrafo.

Definição 9. *Dizemos que H é um subgrafo do grafo G , se o conjunto das arestas de H está contido no conjunto das arestas de G , assim como o conjunto dos vértices de H está contido no conjunto dos vértices de G . Isto é,*

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ e } E(H) \subseteq E(G)$$

Considerando o subgrafo $G' = \{a, b, c\}$ onde $G' \subseteq G$.

Figura 2.4 – A direita o subgrafo G' , e a esquerda o grafo G .



Fonte: Da autora.

Quando abordamos a representação de grafos, estamos discutindo as relações de adjacência. Essa concepção nos conduz à noção de vizinhança, que se refere ao vértice mais próximo em termos de conexões.

Definição 10. *Em um grafo $G = (V, E)$ não orientado, um vértice i é **vizinho** de um vértice a se existir em G uma aresta (a, i) .*

A conectividade está relacionada a possibilidade de passagem de um vértice a outro em um grafo através das ligações existentes.

É válido ressaltar que é sempre possível construir um percurso fechado que percorra todos os vértices de um grafo, mesmo que isso envolva repetir um ou mais vértices ao longo do caminho.

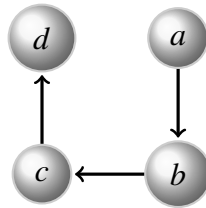
De acordo com Netto (2011), a relevância dos caminhos como subestrutura de um grafo, juntamente com a definição de distância associada ao menor valor de um caminho, atribui à classe de problemas de minimização de caminhos. Isso ocorre devido à diversidade de situações nas quais esses problemas são encontrados, assim como sua necessidade como etapa fundamental em qualquer estudo que envolva conhecimento das distâncias em um grafo. Um percurso é considerado fechado se a última lição da sequência for adjacente à primeira, e aberto caso contrário.

Dizemos que um percurso é abrangente, em relação a um dos conjuntos de um grafo, quando utiliza-se todos os elementos desse conjunto ao menos uma vez. Ainda é possível dizer que exista um percurso fechado, isto é, um ciclo, como veremos na definição a seguir.

Definição 11. *Um **ciclo** é um percurso simples e fechado. Os grafos formados por apenas um ciclo constituem uma classe denominada C_n . Um ciclo C_n é um percurso fechado, onde n é o número de vértices.*

A figura 2.5 tem como objetivo representar um ciclo, como a seguir.

Figura 2.5 – Grafo G_6 representando um ciclo.

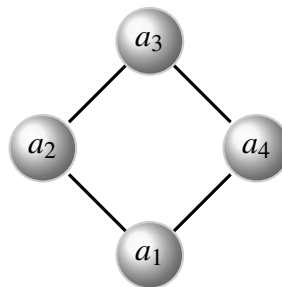


Fonte: Da autora.

Como um caminho é um subgrafo, seus vértices podem ser rearranjados em uma possível sequência, $E = \{(a_i, a_{i+1}), 1 \leq i \leq n - 1\}$. Caso o grafo da figura 2.5 possua a aresta (a_n, a_1) pertencente a $E(G_6)$, então G_6 é classificado como um caminho fechado. Conseqüentemente, o primeiro vértice é conhecido como vértice inicial, enquanto o último é chamado de vértice final.

A seguir, podemos observar um caminho fechado no grafo da figura 2.6 a seguir, sendo que temos a sequência de vértices $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Figura 2.6 – Grafo G_7 representando um caminho fechado.



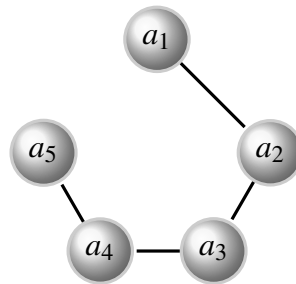
Fonte: Da autora.

O grafo da figura 2.6 é um exemplo de um grafo de caminho fechado, pois o vértice inicial está adjacente ao vértice final. Por outro lado, o grafo da figura 2.7, o vértice inicial e o vértice final não possuem adjacência entre si. Assim é possível ter um outro tipo de caminho, o caminho aberto, como mostra a definição a seguir.

Definição 12. Um grafo é dito **caminho aberto** se não possui adjacência entre o vértice final e o inicial.

Assim, a figura 2.7 representa um exemplo de grafo no qual temos um caminho aberto.

Figura 2.7 – Grafo G_8 representando um caminho aberto.



Fonte: Da autora.

Para este exemplo, determinamos o vértice a_1 como o vértice inicial e a_5 como o vértice final. Logo é possível perceber que estes vértices não possuem adjacência entre si.

Ainda é possível determinar o caminho entre dois vértices distintos, sem eles possuem uma adjacência, especificamente o estudo de caminho mínimo, isto é, o menor caminho possível entre dois vértices, como a próxima definição.

Definição 13. *O caminho mínimo tem como objetivo encontrar o caminho de menor custo - por um critério dado - entre dois vértices quaisquer de um grafo $G = (V, E)$, orientado ou não.*

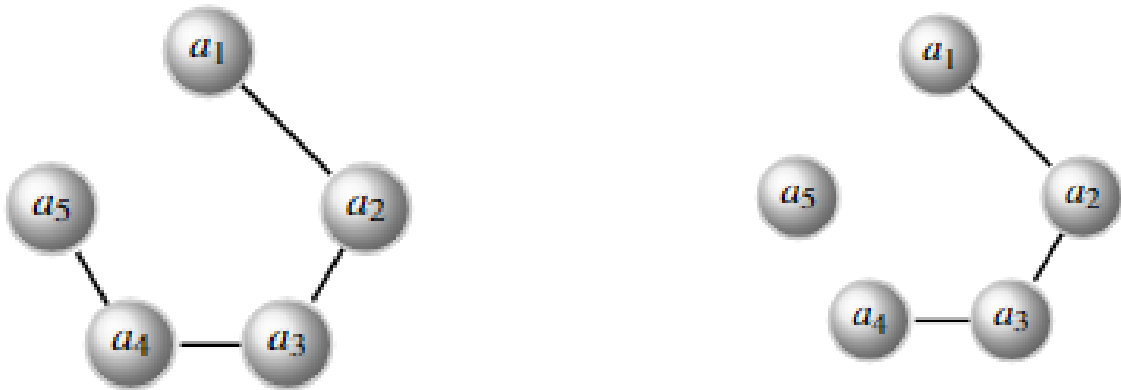
No grafo da figura 2.5, o caminho mínimo entre os vértices a e d é de 4 unidades. Para o grafo da figura 2.6, podemos observar que o caminho mínimo entre os vértices a_1 e a_3 é de 2 unidades.

Existem casos particulares de grafos que merecem nossa atenção. Até o momento, apresentamos grafos nos quais existem caminhos entre um par de vértices, isto é, grafos conexos. Porém, existem casos que não há um caminho entre um vértice aos demais vértices existentes em um grafo. Essa característica representa um grafo desconexo, como veremos na definição a seguir.

Definição 14. *O grafo é **conexo** quando existe um caminho entre quaisquer pares de vértices distintos de G . Caso os vértices não satisfazem tal propriedade, temos um grafo **desconexo**.*

A seguir, é possível notar que os grafos da figura 2.8 podem ser classificados como grafos conexos e desconexos, essa distinção pode ser feita analisando a falta de conexões, isto é, a falta de arestas incidentes em um vértice do grafo.

Figura 2.8 – A direita, G_9 representa um grafo conexo, e a esquerda o grafo G_{10} representa um grafo desconexo.



Fonte: Da autora.

Como sabemos, os vértices de um grafo são elementos de um conjunto. É possível particionar este conjunto de vértices, com a condição de que um par de vértices de um mesmo conjunto não possui vizinhança, como veremos na próxima definição.

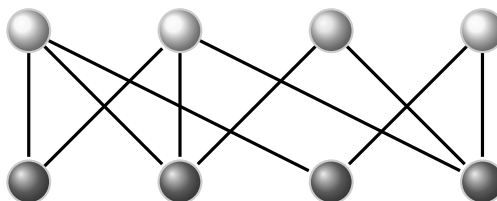
Definição 15. Um grafo é classificado como **bipartido** quando seu conjunto de vértices pode ser dividido em dois subconjuntos, isto é, não existe adjacência entre dois vértices pertencentes ao mesmo subconjunto. Boaventura/Jurkiewicz (2009).

Consequentemente, se não existe adjacência entre um par de vértices de um mesmo conjunto, então dizemos que são independentes. A seguir, a definição nos apresenta este conceito com mais detalhes.

Definição 16. Um conjunto de vértices no qual os vértices não têm relações de adjacência entre si é chamado de **conjunto independente** de vértices.

A seguir, na figura 2.9 é possível ver a representação de um grafo bipartido, como destacado anteriormente. Observe que vértices de um mesmo subconjunto não possuem adjacência. Consequente é possível ter conjuntos independentes de vértices.

Figura 2.9 – Grafo G_{10} representando um grafo bipartido.



Fonte: Da autora.

O grafo é bipartido pois os vértices em preto não possuem adjacência entre si, o mesmo acontece para os vértices em cinza. Além disso, observamos que o grafo é um $K_{4,4}$, indicando que ele possui dois conjuntos independentes de tamanho 4 cada. No entanto, não é um grafo bipartido completo, uma vez que alguns nós não possuem a mesma cardinalidade nos conjuntos independentes.

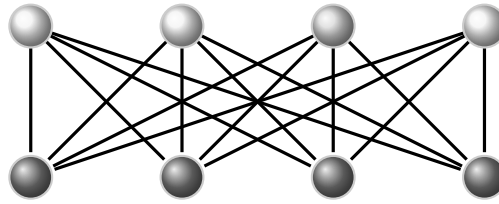
Ainda é possível definir um outro caso particular de grafo bipartido, como mostra a definição a seguir.

Definição 17. O grafo **bipartido completo** é um grafo bipartido que contém o maior número possível de arestas, isto é, todos os vértices deste grafo possuem mesmo grau.

Denotaremos esse grafo como $K_{c,d}$, onde c e d são as cardinalidades dos dois conjuntos independentes. A soma das cardinalidades c e d é igual a m , representando o total de vértices do grafo. Portanto, o grafo $K_{c,d}$ terá exatamente $c \times d$ arestas, que é o máximo possível para um grafo bipartido completo.

A próxima figura 2.10 nos mostra com mais detalhes sobre a representação de um grafo bipartido completo.

Figura 2.10 – Grafo G_{11} representando um grafo bipartido completo.



Fonte: Da autora.

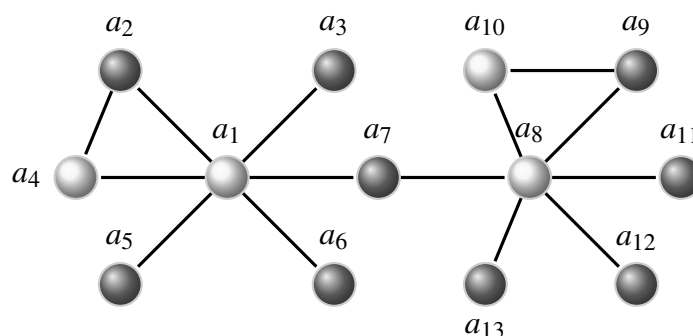
Neste caso o grafo é bipartido completo, pois é grafo um $K_{4,4}$, como no caso do grafo da figura 2.9. No entanto, os vértices possuem a mesma cardinalidade nos conjuntos independentes.

Além disso, é possível determinar conjuntos independentes com o objetivo de analisar se é possível adicionar um outro vértice ao conjunto independente e também analisar a sua cardinalidade. A definição a seguir nos mostra como este processo pode ser feito.

Definição 18. Um conjunto independente é dito **maximal** se ao adicionar um novo vértice a esse conjunto, ele deixa de ser independente. Além disso, ele é **máximo** quando não existe outro conjunto independente com número maior de vértice, isto é, com cardinalidade maior.

A próxima figura 2.11 nos mostra um grafo, cujo objetivo é determinar um conjunto independente máximo, e consequentemente, um conjunto independente maximal.

Figura 2.11 – Grafo G_{12} .



Fonte: Da autora.

A princípio analisando a figura 2.11, é possível determinar um conjunto independente. Inicialmente pelo vértice a_1 , é possível analisar que ele é vizinho dos vértices a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7 .

Portanto, o vértice a_1 não pode ser incluído no mesmo conjunto dos demais vértices, isto ocorre porque existe um conflito. Impossibilitando a determinação de um conjunto independente de vértices. Observe que o vértice a_2 também possui adjacência com o vértice a_4 , logo não é possível incluir o vértice a_4 no mesmo conjunto independente que a_2 .

Observe que o vértice a_8 possui adjacência com os vértices $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ e a_{13} , como no caso do vértice a_1 , a_8 não pode ser incluído neste conjunto independente. Como no caso dos vértices a_2 e a_4 , os vértices a_9 e a_{10} não é possível incluir o vértice a_{10} no mesmo conjunto independente de a_9 .

Assim o conjunto independente maximal que estávamos procurando é:

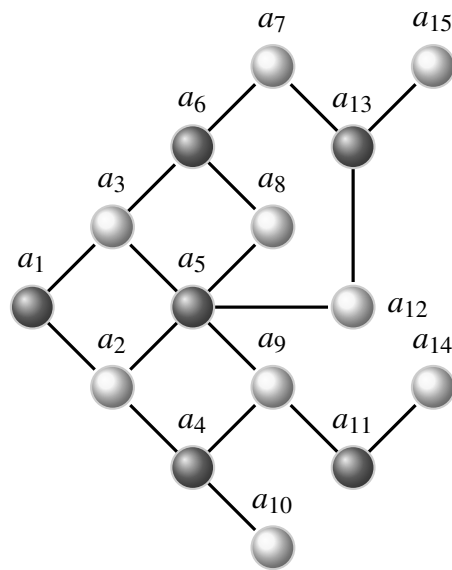
$$\{a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$$

Além disso, é possível terminar o conjunto independente máximo do grafo da figura 2.11. Antes de determinar este conjunto, usaremos a notação da próxima definição.

Definição 19. *O número de independência $\alpha(G)$ é definido como a cardinalidade do conjunto independente máximo de vértices do grafo. Alves (2015).*

Portanto, o conjunto independente máximo do grafo da figura 2.11 que queríamos determinar é $\alpha(G_{12}) = 9$.

Na próxima figura 2.12, temos mais um exemplo de um grafo para analisar a possibilidade de existência de um conjunto independente máximo e maximal.

Figura 2.12 – Grafo G_{13} .

Fonte: Da autora.

Logo, podemos observar que os conjuntos independentes são

$$V = \{a_1, a_4, a_5, a_6, a_{11}, a_{13}\} \text{ e } W = \{a_2, a_3, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{12}, a_{14}\}$$

Porém, apenas o conjunto W é um conjunto independente máximo, logo $\alpha(G_{13}) = 8$. Os conjuntos independentes V e W são conjuntos independentes maximais.

Como foi possível mostrar as definições básicas para compreender o estudo sobre caminhos e que conseqüentemente, foi possível desenvolver um estudo sobre teoria dos grafos. A partir deste momento temos como objetivo mostrar o estudo de grafos Eulerianos e Hamiltonianos.

Conforme descrito por Netto (2011), um caso particular dos problemas relacionados a percursos em grafos ocorre quando se utiliza todos os elementos de um dos conjuntos que definem o grafo, ou seja, um percurso. Como já visto anteriormente, um percurso, seja ele aberto ou fechado, engloba todas as conexões do grafo.

Particularmente, existem percursos nos quais utilizam cada ligação do grafo uma única vez. Conseqüentemente, temos dois casos, como veremos nas duas próximas definições.

Definição 20. *Um grafo é dito **eureliano** se possuir um percurso, aberto ou fechado, sendo que cada aresta do grafo é utilizada uma única vez Netto (2011).*

As aplicações de percursos eulerianos são diversas, não somente na área da matemática, como também diversas áreas do conhecimento. Um exemplo bastante interessante e atual é o roteamento em redes de computadores, os grafos eurelianos tem como objetivo encontrar caminhos de transmissão eficientes para evitar congestionamentos em redes.

Além disso, existem os casos em que todos os vértices de um grafo possuem grau par.

Com as afirmações apresentadas, apresentamos a seguir um teorema bastante importante para o estudo de grafos eurelianos.

Teorema 1 (O teorema de Euler). *Um grafo $G = (V, E)$ conexo e não orientado possui um ciclo eureliano se e somente se todos os vértices possuem grau par.*

Demonstração: \Rightarrow Um grafo $G = (V, E)$ eureliano, ao buscarmos percorrer um ciclo euleriano nele, podemos começar selecionando um vértice inicial e , em seguida, atravessar os demais vértices, eliminando as arestas à medida que são utilizadas. Ao percorrermos um vértice v , seu grau $d(v)$ será reduzido em duas unidades, correspondendo às arestas de entrada e saída. Consequentemente, todos os vértices intermediários no percurso devem ter grau par. O vértice inicial também deve ter grau par, uma vez que o uso de uma de suas arestas adjacentes ao início resultará em um grau ímpar, permitindo assim a compensação do grau ao final do processo.

\Leftarrow Considerando um grafo $G = (V, E)$ com todos os vértices de grau par, vamos supor a existência de uma aresta (v, w) cuja remoção não afeta a conectividade de G . Nesse caso, procuramos um percurso α_{vw} que não utilize essa aresta. Eliminando as arestas percorridas ao longo do caminho, há duas possibilidades distintas:

- O percurso utiliza todas as arestas restantes do grafo; juntamente com (v, w) formará um ciclo euleriano;
- O percurso não utiliza todas as arestas do grafo; Os vértices intermediários terão graus finais pares, possibilitando a formação de ciclos que saem e retornam a α_{vw} . Esses ciclos podem ser percorridos com a eliminação de arestas até que todos os graus sejam anulados. Ao alcançar o vértice w , atravessa-se a aresta (v, w) , anulando os graus desses vértices. Dessa forma, é obtido um ciclo euleriano. □

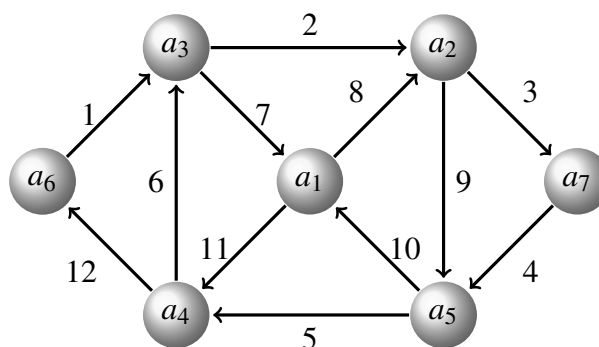
Para os casos em que temos vértices de grau ímpar, devemos procurar uma solução mais geral. Isso quer dizer que não podemos esperar que todos os grafos que apareçam em nossos modelos tenham apenas vértices de grau par, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2. *O número mínimo de percursos que particionam o conjunto de arestas de um grafo não orientado e conexo, com $2k$ vértices de grau ímpar é k .*

A demonstração deste teorema como mais detalhes está em Boaventura/Jurkiewicz (2009).

Os percursos eulerianos podem ser bastante úteis em diversos casos do nosso cotidiano, afim de minimizar custo e tempo, a seguir podemos ver um dos exemplos nos quais podemos aplicar um percurso euleriano.

Figura 2.13 – Grafo G_{15} representando um percurso euleriano.



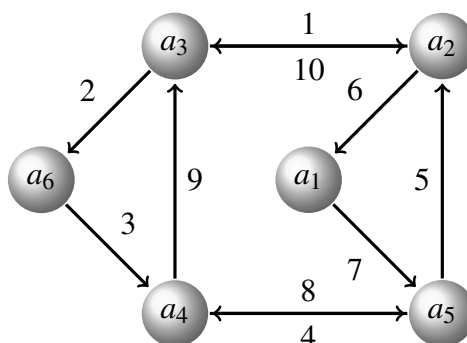
Fonte: Da autora.

Observe que, nesse caso, todos os vértices do grafo possuem grau par, o que o torna um grafo euleriano. Isso significa que existe um ciclo que passa por todas as arestas do grafo, conhecido como ciclo euleriano. Além disso, vemos que é possível fazer um percurso onde usamos cada aresta uma única vez.

Ainda existem alguns casos particulares, onde é necessário repetir alguns trechos do percurso, isto ocorre quando o grafo não é euleriano, logo dizemos que é um **percurso pré-euleriano**. Um problema bastante conhecido que envolve percursos pré-eulerianos é o **problema do carteiro chinês**, ou seja, um carteiro deve percorrer todas as ruas de modo que a rota utilizada visite todas as ruas pelo menos uma vez usando a menor distância possível.

O grafo da figura 2.14 nos mostra um exemplo sucinto de um caso de grafo pré-euleriano.

Figura 2.14 – Grafo G_{16} representando um percurso pré euliano.



Fonte: Da autora.

Na figura 2.14, observe que os vértices a_1 e a_6 possuem duas arestas incidentes, isto é, possuem vértices de grau par. Enquanto os vértices a_2, a_3, a_4 e a_5 possuem um número ímpar de arestas incidentes. É possível perceber que é necessário repetir arestas, logo é um percurso pré-euliano. Consequentemente é possível obter algumas conclusões a respeito, como veremos a seguir:

- Um grafo é euliano se todos os seus vértices possuem grau par.
- Um grafo é pré-euliano se existem exatamente dois vértices com grau ímpar.
- Um grafo é não euliano se existem mais de dois vértices com grau ímpar.

Outros problemas que ao invés de considerar o percurso em relação às arestas, considera um percurso em relação aos seus vértices, são os problemas hamiltonianos.

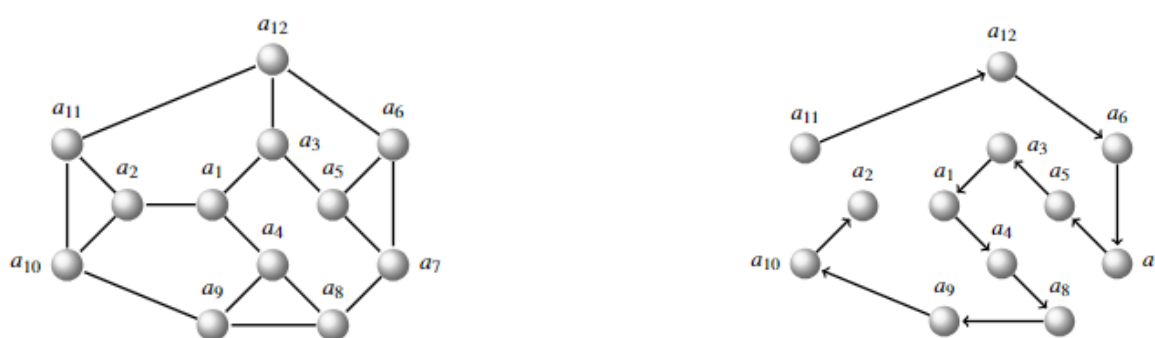
Segundo Netto (2011), os problemas hamiltonianos aplicados estão relacionados a atendimentos sequenciais em locais que são relativamente distantes uns dos outros. Até o momento, ainda não foi possível estabelecer a existência de um percurso abrangente em um grafo qualquer, onde todos os vértices sejam percorridos exatamente uma vez.

Conforme Boaventura/Jurkiewicz (2009), embora as duas classes de problemas, o problema euliano e o problema hamiltoniano pareçam semelhantes, elas são completamente distintas e independentes entre si. É possível encontrar exemplos de grafos que possuam ambas as propriedades, sejam apenas eulianos ou apenas hamiltonianos, ou ainda que não possuam nenhuma das duas propriedades. A definição a seguir, nos explica exatamente o que é um grafo hamiltoniano.

Definição 21. Um grafo é **hamiltoniano** se possui um percurso abrangente em relação aos vértices, fechado e que não repita nenhum vértice.

Em outras palavras, é possível percorrer o grafo seguindo as suas arestas de forma que todos os vértices sejam visitados uma única vez, retornando ao vértice de partida. No grafo da figura 2.15 é possível obter um percurso hamiltoniano.

Figura 2.15 – A direita G_{17} é um grafo conexo, e a esquerda temos um percurso hamiltoniano do grafo G_{17} .



Fonte: Da autora.

Além disso, em 1859 Sir William Rowan Hamilton desenvolveu o jogo do dodecaedro. O jogo era formado por um dodecaedro onde cada vértice estava marcado com o nome de cada cidade e as arestas representavam as possibilidades de viajar pelas cidades. O objetivo do jogo é encontrar um percurso no qual é possível visitar cada cidade apenas uma única vez. Este possui uma relação com os grafos hamiltonianos devido à estrutura do dodecaedro regular. O dodecaedro regular pode ser visto como um grafo onde cada vértice representa um dos furos do jogo e as arestas representam as possíveis conexões entre os furos adjacentes como mostra a figura 2.16.

Figura 2.16 – Jogo do dodecaedro



A configuração do jogo pode ser vista como um percurso hamiltoniano no grafo correspondente ao dodecaedro. Tal percurso representa uma sequência de furos que visita os demais exatamente uma vez, formando um ciclo fechado. Logo, de certa forma está buscando-se encontrar um percurso hamiltoniano no grafo correspondente ao dodecaedro.

Além disso é possível obter uma relação conceitual entre o jogo e os grafos hamiltonianos. Isso demonstra como os conceitos dos grafos podem ser aplicados em diferentes contextos. Existem diversas aplicações práticas do ciclo hamiltoniano que estão relacionadas a problemas de otimização. Um exemplo é o sistema de entrega dos correios, onde os ciclos hamiltonianos podem ser usados para organizar o roteamento de entregas diárias de forma mais eficiente.

Na próxima seção, iremos mostrar como é possível associar o conceito de grafos eulérianos e hamiltonianos para a coloração de mapas.

3 COLORAÇÃO

Na teoria dos grafos, a coloração é um conceito fundamental que consiste em atribuir cores a vértices ou arestas de um grafo, com algumas restrições. Onde cada vértice ou aresta de grafo não assume a mesma coloração. Neste trabalho, estamos interessados em apresentar um estudo mais aprofundado em relação a coloração de vértices de um grafo.

O estudo da coloração de mapas ganhou popularidade através do matemático *Francis Guthrie*. Que em 1852 estava tentando colorir um mapa da Inglaterra e se questionou da seguinte forma: "*É possível colorir qualquer mapa utilizando apenas quatro cores? De modo que regiões vizinhas não possuem a mesma cor?*".

Através desta observação, foi possível formular uma conjectura sobre o teorema das quatro cores, que se tornou um dos problemas mais famosos da teoria dos grafos e da matemática em geral.

Embora Guthrie tenha feito várias contribuições acadêmicas em outros campos, ele é lembrado principalmente por sua conjectura sobre a coloração de mapas. Ao decorrer deste capítulo, introduziremos os conceitos sobre coloração de vértices e o raciocínio do algoritmo utilizado para a coloração de mapas.

3.1 Coloração de vértices

Como já apresentado, colorir um grafo consiste em atribuir uma cor com algumas restrições. Na coloração de vértices não é muito diferente, pois o nosso objetivo é realizar uma coloração de modo que vértices adjacentes não possuem a mesma coloração. Ainda devemos considerar a possibilidade de utilizar o menor número de cores possíveis, a fim de reduzir custos e o tempo necessário para essa tarefa.

Um exemplo bastante conhecido na programação é como o problema de organização de tarefas que devem ser feitas. Os vértices neste caso representam as tarefas, enquanto a coloração representa a ordem em que as tarefas precisam ser executadas.

Outro exemplo citado por NETTO, 2011 consiste em determinar o menor número de dias necessários para realizar um conjunto de provas. Neste caso, os vértices do grafo representam as provas e as arestas indicam as restrições de tempo ou pré-requisitos entre as provas. Logo, ao encontrar uma coloração adequada, é possível determinar um cronograma ótimo para a realização das provas, minimizando o número de dias necessários.

Além disso, é importante destacar que o problema de coloração de vértices não é necessariamente eficiente. Neste contexto, abordamos a divisão dos vértices de um grafo em conjuntos independentes. Uma forma de ver esse problema é atribuir cores aos vértices dos subconjuntos independentes.

Por exemplo, temos os conjuntos $A = \{a, c, e\}$ e $B = \{b, d, f\}$, onde $A \cap B = \emptyset$, logo neste caso atribuímos duas cores para a coloração de vértices.

Observe que os subconjuntos A e B formam uma partição. Consequentemente, existem casos em que uma partição contém até n elementos, isto é, o número de cores é menor ou igual ao número de elementos, que chamamos de k -coloração. Assim, é possível dizer que o grafo correspondente é k -cromático ou k -colorível como veremos na próxima definição.

Definição 22. *O número cromático, $\chi(G)$, de um grafo G é o menor número de cores para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.*

Isso se deve ao número de cores possíveis para realizar uma possível coloração de vértices, seguindo a condição de que dois vértices adjacentes não assumam a mesma coloração. Além disso, se usarmos um conjunto de n cores distintas, o valor mínimo de A será dado por $\chi(G)$.

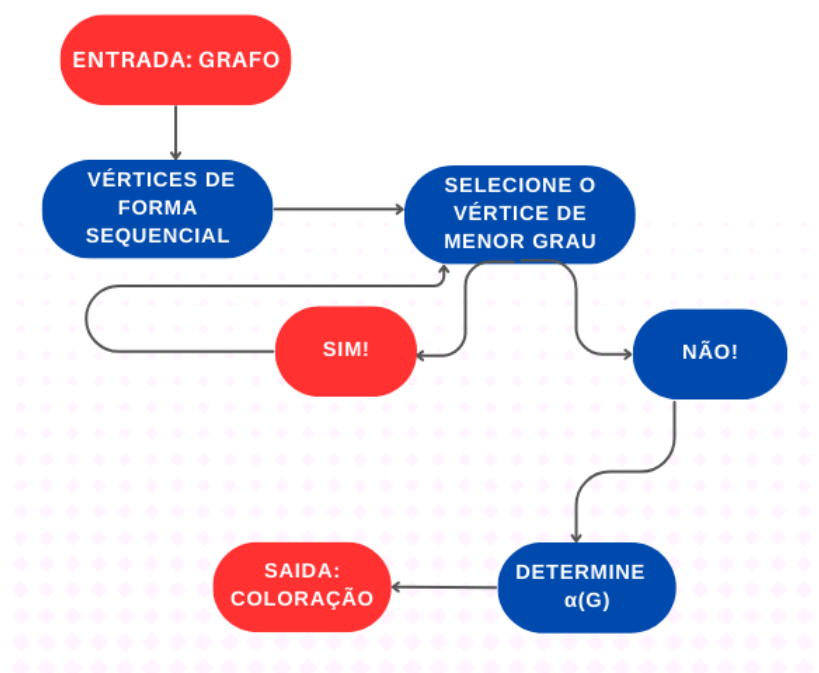
Para que seja possível obter uma coloração de vértices, podemos usar um algoritmo que possui o objetivo de fazer escolhas pela melhor solução imediata sem pensar nas consequências futuras, que chamamos de algoritmos gulosos.

Esses algoritmos são interessantes quando não estamos muito preocupados com a qualidade da solução, pois são rápidos e fáceis de programar. Mas são raros os casos em que eles funcionam bem. Consequentemente, os algoritmos gulosos são usados para determinar também um subconjunto independente máximo de um grafo, como mostra a próxima definição.

Definição 23. *O número de independência $\alpha(G)$, é a cardinalidade de subconjunto independente máximo de vértices do grafo.*

Para que seja possível aplicar o algoritmo guloso para a determinação de um subconjunto independente máximo, a estratégia mais intuitiva é iniciar por um vértice que possua a menor ligação possível, isto é, o vértice que possuir o menor número de arestas incidentes. Ainda temos os casos em que existem vértices como mesmo grau. O critério utilizado para escolher qual vértice do grafo irá assumir tal coloração pode ser feito de forma arbitrária. Para compreender como este processo é feito, o fluxograma da figura 3.1 irá ilustrar o algoritmo utilizado.

Figura 3.1 – Fluxograma do algoritmo guloso para determinação de $\alpha(G)$.



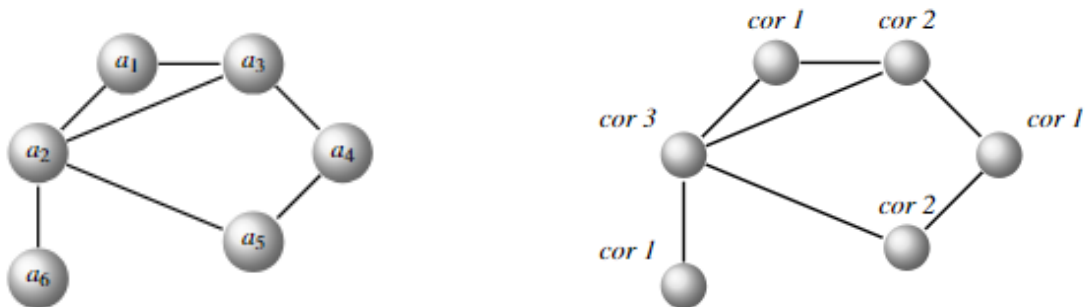
Fonte: Da autora.

O processo pode assumir diferentes resultados, isso depende estritamente do modo em que os vértices foram escolhidos. Portanto, como existe diferentes ordenações dos vértices, então é possível gerar diferentes resultados de coloração. Ou seja, o problema que envolve coloração não possui uma única solução. Além disso, ao utilizar o método de coloração sequencial, é possível obter um limite superior para $\chi(G)$ de modo que este número nunca será maior que $\Delta + 1$ cores.

Por exemplo, seja a um vértice que está prestes a ser colorido, assim o número de cores utilizadas pelos outros vértices não é maior do que o seu grau $d(a_i)$, $\Delta = \max d(a_i)$. Deste modo, uma das cores $1, 2, \dots, \Delta + 1$ está disponível para tentarmos colorir cada um dos vértices a_i . Portanto, $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Os grafos da figura 3.2 nos mostra como o algoritmo guloso apresentado na figura 3.1 pode ser aplicado para obter uma possível coloração do grafo G_{18} .

Figura 3.2 – A direita o grafo G_{18} , e a esquerda a aplicação do algoritmo guloso para determinação de $\alpha(G_{18})$.



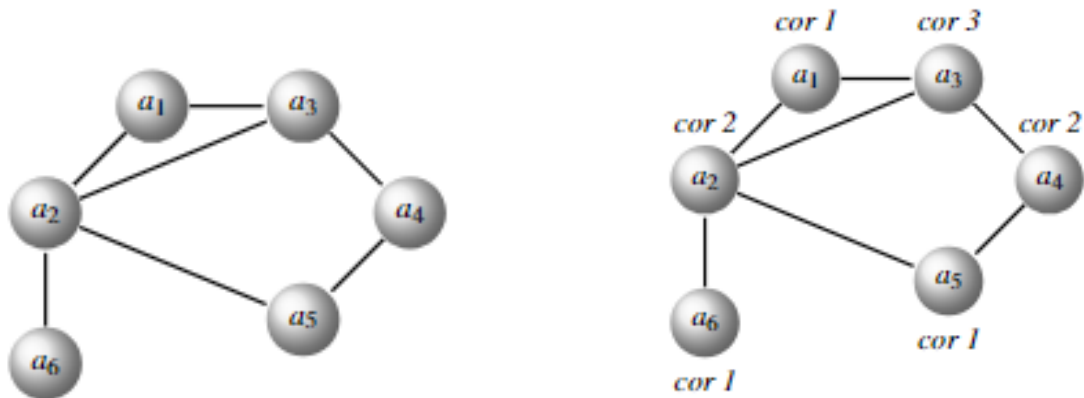
Fonte: Da autora.

Analisando o grafo G_{18} da figura 3.2, o vértice que possui menor grau é a_6 , e pode ser colorido com a *cor 1*. O próximo vértice na ordem sequencial é o vértice a_1 , que pode assumir a *cor 1* pois não possui adjacência com o vértice a_6 . O vértice a_4 também pode ser colorido com a *cor 1* já que não possui adjacência com os vértices a_1 e a_6 . Como não é possível atribuir a *cor 1* em nenhum outro vértice do grafo, é necessário atribuir uma *cor 2* para colorir os demais vértices. O próximo vértice de grau mínimo é a_5 , portanto iremos atribuir a *cor 2*. Consequentemente, o próximo vértice a_3 também pode ser colorido com a *cor 2*.

Por fim, nos resta atribuir uma coloração ao vértice a_2 , observe que este não pode assumir a *cor 1* e nem a *cor 2*, sendo necessário então atribuir uma *cor 3*. Assim, o subconjunto independente máximo é $\{a_1, a_4, a_6\}$, e o número de independência $\alpha(G_{18}) = 3$.

Porém, como o critério de desempate pode ser feito de forma arbitrária, a escolha pode afetar a maneira como a coloração pode ser aplicada nos vértices de um grafo. Usando uma nova ordenação obtemos a seguinte coloração para o grafo G_{18} como mostra a figura 3.3 a seguir.

Figura 3.3 – A direita o grafo G_{18} , e a esquerda uma outra possível coloração dos vértices de G_{18} .



Fonte: Da autora.

Observe que, por mais que alteramos a ordem da coloração dos vértices, não altera o número de independência $\alpha(G)$, isto é, o número de cores utilizadas para colorir os vértices do grafo nas figuras 3.2 e 3.3 não se altera.

Geralmente, a maioria dos casos possuem comportamentos diferentes do grafo G_{18} . Isto é, depende da estrutura do grafo em que estamos trabalhando. Portanto, depende do número de vértices e arestas de um grafo, especificamente, quanto maior o grau de um vértice de um grafo, maiores restrições ele possui. Com essas conclusões, obtemos um teorema sobre a ordenação dos vértices de um grafo.

Teorema 3. *Seja G um grafo qualquer, existe uma ordenação de seus vértices tal que, o método de coloração sequencial de vértices produz uma coloração ótima.*

A demonstração para este teorema pode ser vista em Alves (2015).

Precisamos considerar os casos em que existem grafos que possuem número par de vértices, assim como, número ímpar de vértices e que são ciclos. Particularmente são os casos em que obtemos um grafo C_n , como diz a próxima definição.

Definição 24. *Um grafo C_n é **ciclo par** quando apresenta n vértices pares. Enquanto, um grafo **ciclo ímpar** apresenta $n - 1$ vértices ímpares.*

De modo geral, a coloração dos vértices do grafo ciclo C_n e C_{n-1} pode ser feita usando o algoritmo guloso mostrado na figura 3.1. Consequentemente, é possível obter a seguinte conclusão para este caso particular de grafos:

$$\chi(G) = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim podemos determinar com o algoritmo guloso, o subconjunto independente máximo e obter o número cromático de grafos ciclos. A seguir podemos ver na figura 3.4 a representação dos grafos G_n e G_{n-1} .

Figura 3.4 – A direita o grafo C_n ciclo par, e a esquerda o grafo C_{n-1} ciclo ímpar.



Fonte: Da autora.

Na figura 3.4, podemos observar que o grafo C_n possui número par de vértices e também o grafo C_{n-1} , que possui um número ímpar de vértices. Logo, um vértice de índice ímpar é sempre adjacente a um vértice de índice par.

Assim, podemos colorir os vértices v_i , com i ímpar todos com uma *cor 1* e os vértices v_j , com j par, podem ser coloridos com uma *cor 2*. Para grafos onde obtemos ciclos $n - 1$ ímpares, a coloração dos vértices do grafo ciclo C_{n-1} ocorrerá do mesmo modo descrito anteriormente para o grafo C_n . Portanto, para C_{n-1} sempre serão necessárias três cores para obter uma coloração própria do grafo ciclo ímpar.

Aplicando o algoritmo guloso apresentado na figura 3.1, obtemos os seguintes resultados para a coloração de vértices de grafos G_n e G_{n-1} . No caso do grafo G_{24} , temos:

Tabela 1 – Tabela para determinação de $\alpha(C_n)$.

a_1	entra no conjunto
a_2	conflito
a_3	entra no conjunto
a_4	conflito
a_5	entra no conjunto
a_6	conflito
conjunto	$\{a_1, a_3, a_5\}$

Fonte: Da autora.

Tal método é possível porque percorremos cada vértices do grafo. Se não há conflito entre os vértices, é possível acrescentá-los ao conjunto até obter um conjunto independente de vértices.

De fato conseguimos determinar um conjunto independente máximo. Como o grafo C_n da figura 3.4 possuir número par de vértices, podemos concluir que não existe nenhum subconjunto independente máximo com cardinalidade maior que 3, logo $\alpha(G) = 3$.

Ainda hoje não há um algoritmo eficiente que analisa os vértices de um grafo G e determine o número $\alpha(G)$, pois o método se torna computacionalmente inviável devido ao aumento de ordenações possíveis dos vértices.

O processo realizado trata-se de um método razoável para achar um conjunto independente maximal em um grafo G . Podemos iniciar com qualquer vértice de G e então adicionar mais vértices ao conjunto, desde que os adicionados não sejam adjacentes a qualquer outro vértice do conjunto independente. Ainda devemos lembrar que o método não garante que o conjunto independente maximal seja máximo.

Ao aplicar o algoritmo guloso para grafos C_{n-1} vemos resultado diferente em comparação aos grafos C_n como mostra a Tabela 2:

Tabela 2 – Tabela para determinação de $\alpha(C_{n-1})$.

a_1	entra no conjunto
a_2	conflito
a_3	entra no conjunto
a_4	conflito
a_5	conflito
conjunto	$\{a_1, a_3\}$

Fonte: Da autora.

O que podemos concluir sobre grafos C_{n-1} , é possível obter um conjunto independente maximal, mas não necessariamente iremos obter um subconjunto independente máximo do grafo C_{n-1} . Para os casos onde todos os vértice de um grafo possuem mesmo grau, um grafo completo K_n , é necessário n cores para que seja possível fazer tal coloração, logo dizemos que $\chi(K_n) = n$.

Consequentemente, quando G é um grafo completo temos que $\chi(G) = \Delta + 1$, isto é, o número de independência $\alpha(G)$ é igual ao número de $\Delta + 1$ cores utilizadas para aplicar a coloração aos vértices do grafo. Assim temos que $\Delta(G) = n - 1$, onde cada vértice de G está ligado aos demais $n - 1$ vértices do grafo e são necessários n cores distintas para aplicar a coloração nos vértices do grafo G .

Para compreender como o número de independência $\alpha(G)$ pode nos auxiliar no estudo de coloração de mapas, iremos apresentar um breve histórico sobre o surgimento do teorema das quatro cores e alguns aspectos importantes para o desenvolvimento do estudo de colorações.

A mais de 150 atrás, no ano 1852, quando Frederick Guthrie era aluno de Augustus de Morgan, Guthrie trouxe um problema proposto por seu irmão para que De Morgan analisasse, no qual se tratava de uma conjectura.

Posteriormente em 1879, Alfred Bray Kempe utilizou uma técnica e apresentou sua demonstração onde era possível colorir um mapa com apenas 4 cores, como mostra a seguinte definição.

Definição 25. *Seja G e K grafos, uma coloração própria de G é uma **cadeia de Kempe** se G é correspondente à duas cores a, b de K . Sendo K um subgrafo formado exatamente pelos vértices de cores a ou b . Alves (2015)*

Mais tarde, Heawood percebeu uma falha sutil na demonstração de Kempe, fazendo que esta fosse invalidada. Portanto é possível utilizar a cadeia de Kempe na demonstração de Appel e Haken. O próximo lema, tem como objetivo mostrar que o teorema das quatro cores realmente é válido.

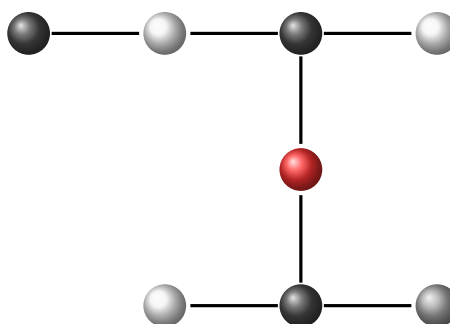
Lema 1. *Em um grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

A sua demonstração está em Boaventura/Jurkiewicz (2009).

No grafo da figura 3.5 obtemos uma coloração própria utilizando exatamente duas cores. Portanto, a coloração de vértices influencia diretamente sobre a cadeia de Kempe, sendo que as arestas dependem de vértices coloridos com a mesma cor em uma possível coloração. Além disso, alguns métodos de coloração podem usar esse modelo para coloração de grafos.

O próximo grafo na figura 3.5, nos mostra como podemos determinar um subgrafo que usa exatamente a aplicação das cores a e b nos vértices do grafo G_{20} .

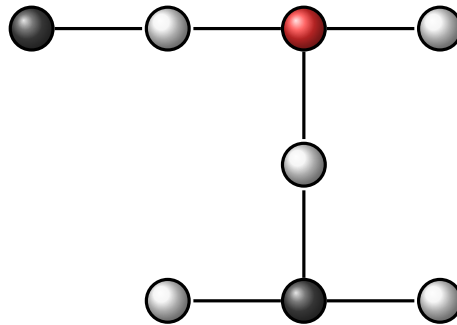
Figura 3.5 – Grafo G_{20} .



Fonte: Da autora.

A troca de cores entre vértices do subgrafo $H(a, b)$ de G_{20} é possível resultando em uma nova coloração. Portanto, não há em $H(a, b)$ dois vértices que possam causar um conflito de cores. Para compreendermos este processo, iremos usar o mesmo grafo da figura 3.5 para ilustrar a troca de cores utilizadas no raciocínio de Kempe.

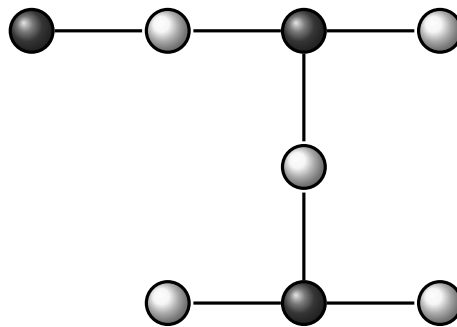
Figura 3.6 – Troca de cores dos vértices do grafo G_{20} .



Fonte: Da autora.

Na tentativa de diminuir o número de cores de uma coloração de vértices, as trocas de cores podem ser aplicadas sistematicamente, reorganizando a coloração dos vértices e tornando desnecessárias as cores adicionais. Portanto, as cores a e b são suficientes para realizar a nova coloração dos vértices de G_{20} . Finalmente obtemos o subgrafo $H(a,b)$ formando a cadeia de Kempe, como mostra a figura 3.7.

Figura 3.7 – Troca de cores dos vértices do grafo G_{20} .



Fonte: Da autora.

Portanto, a cadeia de Kempe nos dá um resultado simples e útil em relação ao número de cores utilizadas para que seja possível atribuir uma coloração aos vértices de um grafo. O teorema a seguir nos mostra um resultado associado ao número cromático $\chi(G)$.

Teorema 4. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$*

Demonstração: (\Rightarrow) Se G é um grafo bipartido, basta determinar o conjunto independente e corresponder a uma das duas cores a ou b , assim $\chi(G) = 2$.

(\Leftarrow) Se um grafo possuir $\chi(G) = 2$ podemos separar em dois subconjuntos, de modo que os vértices de mesma cor permaneçam juntos, isto é, vértices adjacentes não assumem a mesma coloração. Portanto, somente poderá existir arestas adjacentes aos vértices de outro subconjunto, o que corresponde a definição de grafo bipartido. □

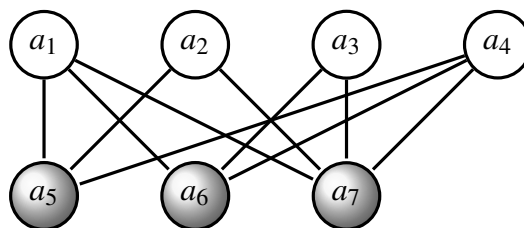
Além da demonstração que acabamos de apresentar, existe um corolário que faz a associação entre grafos bipartidos e grafos de ciclos pares.

Corolário 1. *Grafos que correspondem a ciclos pares ou que são caminhos bipartidos, possuem $\chi(G) = 2$.*

Demonstração: Para o grafo de ciclo par, podemos particionar os vértices do grafo de modo que os vértices ímpares e os pares sejam agrupados em dois subconjuntos distintos, trata-se de um grafo bipartido, logo $\chi(G) = 2$. Se o grafo for um caminho, podemos realizar uma partição do mesmo modo no grafo de ciclo par, que também será bipartido. □

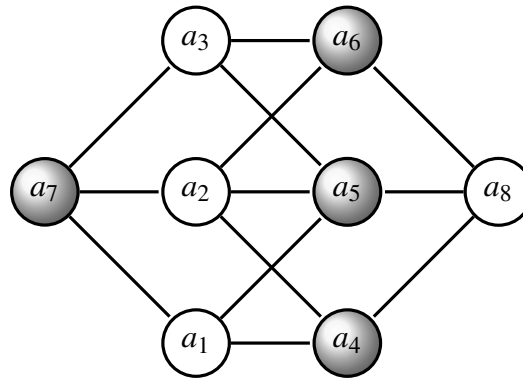
Ainda podemos dizer que um grafo é bicolorido se for possível atribuir uma de suas duas cores a cada vértice do grafo de forma que as pontas de cada aresta tenham cores distintas. Nas próximas figuras, 3.8 e 3.9, podemos ver alguns exemplos de grafos que são bicoloridos e bipartidos.

Figura 3.8 – Grafo bipartido G_{21} .



Fonte: Da autora.

Observe que o grafo G_{21} da figura 3.8 possui conjuntos independentes de vértices, portanto pode ser particionado em dois subconjuntos que iremos chamar $X_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e

Figura 3.9 – Grafo bipartido G_{22} .

Fonte: Da autora.

$X_2 = \{a_5, a_6, a_7\}$, conseqüentemente vemos que forma uma partição $\{X_1, X_2\}$.

No próximo grafo da figura 3.9, é possível também obter uma bipartição, assim como no caso do grafo da figura 3.8.

Existem casos nos quais podemos trocar a rotulação dos vértices para aplicar o algoritmo guloso. Para isso, é necessário adicionar $\Delta + 1$ cores para colorir um vértice qualquer com o objetivo de mostrar que os vértices adjacentes a ele usam no máximo Δ cores. Logo, $\chi(G) \leq \Delta + 1$. O próximo teorema a ser enunciado nos diz a respeito sobre este raciocínio.

Teorema 5 (Brooks). *Se G é um grafo conexo e não é K_n e se $\Delta \geq 3$, então $\chi(G) \leq \Delta$.*

Para conhecimento do leitor, sugerimos que veja a demonstração apresentada na obra de Alves (2015).

A próxima seção tem como objetivo mostrar o estudo de grafos planares e a sua importância para nos auxiliar na compreensão do estudo de coloração de mapas.

3.1.1 Teorema das Quatro cores

Conforme mencionado por Netto (2011), *Guthrie* propôs a conjectura do teorema das quatro cores em 1852. Esse problema permaneceu sem solução por 124 anos. Tal problema ganhou popularidade na comunidade científica.

Posteriormente, Arthur Cayley ficou interessado no estudo do teorema das quatro cores e escreveu o primeiro artigo sobre o teorema, atribuindo a conjectura à De Morgan.

Mais tarde, em 1879 Kempe acreditava ter encontrado uma prova correta para o teorema das quatro cores. Mas descobriu-se que sua demonstração estava incorreta. Foi o matemático alemão *Julius Petersen* que em 1891, encontrou uma falha na demonstração de *Kempe*, invalidando assim sua suposta prova.

Após a descoberta do erro na demonstração de *Kempe*, o teorema das quatro cores permaneceu sem uma prova sólida até a demonstração bem-sucedida feita por *Kenneth Appel* e *Wolfgang Haken* em 1976, que apesar de ter sido criticada inicialmente, pelo fato da demonstração ser feita de forma analítica, foi posteriormente corrigida e confirmada por *Georges Gonthier* em 2005.

Como citado em Netto (2011), a ideia de grafo planar está intrinsecamente ligada à noção de mapa, que é uma representação de elementos dispostos em um plano. A associação entre grafos e mapas traz consigo várias consequências, que serão discutidas neste capítulo. Um dos primeiros questionamentos que surgiu foi a necessidade de colorir mapas com diferentes cores para distinguir suas regiões. Isso levantou a questão de como provar o que a prática demonstrava: que não são necessárias mais do que quatro cores para colorir um mapa.

Os grafos planares possuem uma característica distintiva que os diferencia dos demais grafos: eles podem ser representados em um plano como mostra a próxima definição.

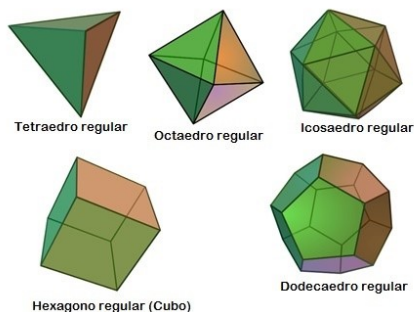
Definição 26. *Um grafo planar é um grafo que admite uma representação gráfica de modo que as arestas só se encontram nos vértices incidentes, ou seja, de tal forma que suas arestas não se cruzem.*

Qualquer grafo planar possui vértices e arestas limitam suas regiões. Diferente dos grafos que estudamos até o momento, os grafos planares também possuem regiões que determinam faces internas e externas, como mostra a definição.

Definição 27. *Em um grafo planar, uma face é um ciclo que separa o plano em regiões. Além disso, existe a face **ilimitada** que é região externa do grafo planar.*

A seguir, mostraremos um exemplo bastante utilizado para a representação de grafos planares que são dados por poliedros regulares, como mostra a figura 3.10.

Figura 3.10 – Sólidos de Platão

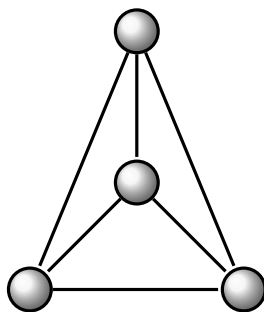


Fonte: Da autora.

Para que seja possível compreender a representação de poliedros regulares em grafos planares, iremos utilizar definições intuitivas de geometria descritiva. Imagine que os sólidos da figura 3.10 sejam flexíveis e que seja possível esticar uma de suas faces e suas arestas sob um plano. Deste modo, todas as demais faces e arestas formarão uma figura dentro desta primeira face, que foi esticada inicialmente.

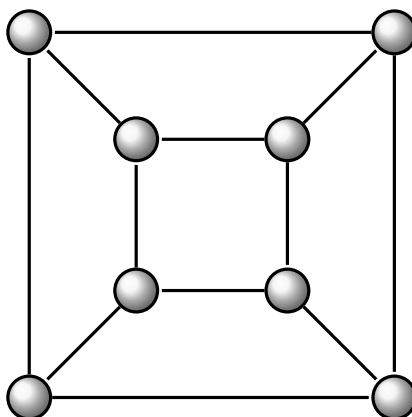
Especificamente, o tetraedro e o cubo podem ser obtidos usando o conceito de grafos planares como mostra as figuras 3.11 e 3.12.

Figura 3.11 – Representação do tetraedro por um grafo planar G_{23} .



Fonte: Da autora.

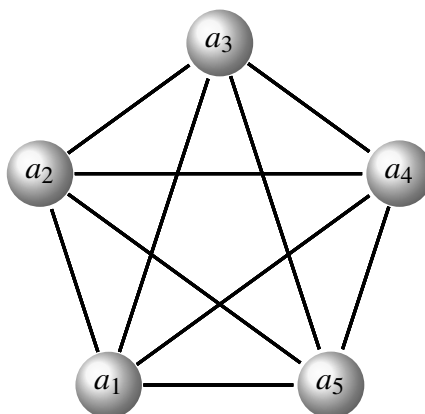
Figura 3.12 – Representação do cubo por um grafo planar G_{24} .



Fonte: Da autora.

Os grafos G_{23} e G_{24} são planares, pois as arestas só se encontram com seus vértices vizinhos e pode ser representada em um grafo plano.

Porém, existem casos de grafos onde existe cruzamento de arestas. A pergunta que pode ser feita é, se existe casos em que um grafo não é planar. Um desses casos é o grafo K_5 , como mostra a próxima figura 3.13.

Figura 3.13 – Representação do grafo K_5 

Fonte: Da autora.

Analiticamente, qualquer representação de K_5 deverá ter um ciclo de comprimento 5, que divide o plano em "interior" e "exterior". Intuitivamente, no interior deste ciclo, é impossível traçar todas as arestas de modo que elas não se cruzem; no exterior a situação é a mesma como a figura 3.13 nos mostra.

Ainda é possível acrescentar arestas a um grafo planar sem prejudicar sua planaridade, isto é, sempre que um porção do plano estiver limitada por um ciclo de comprimento maior do que 3 como mostra a próxima definição.

Definição 28. Um grafo é *planar maximal* quando não é possível acrescentar arestas sem comprometer a sua planaridade.

O grafo da figura 3.13 não é suficiente para mostrar que K_5 não é planar. É necessário testar a veracidade dos fatos rigorosamente. Logo, precisamos de um teorema capaz de mostrar que é possível traçar um caminho que passa por todas as arestas de um grafo conexo uma única vez de modo que volte ao vértice inicial formando um ciclo euliano.

A relação de Euler é bastante interessante para mostrar a associação entre o número de vértices, arestas e faces de um grafo planar como mostra o próximo teorema.

Teorema 6 (Teorema de Euler). Em um grafo planar conexo com f faces, v vértices e a arestas, $f - a + 2 = 2$.

Como é um teorema bastante importante para a classificação de grafos planares, podemos usá-lo no próximo teorema para mostrar matematicamente o motivo pelo qual K_5 não é planar.

Teorema 7. *Em um grafo planar conexo G , $a \leq 3v - 6$ é válida se G é um grafo planar maximal.*

Demonstração: Ao considerar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face possui no mínimo 3 arestas, assim temos ao menos $3f/2$ arestas no grafo. Assim, o grafo possui a arestas, logo

$$3f \leq 2a$$

A igualdade se verifica se todas as faces forem triangulares. Usando a relação de Euler,

$$f - a + v = 2,$$

$$3f - 3a + 3v = 6,$$

Como $3f \leq 2a$, temos que

$$2a - 3a + 3v \geq 6,$$

$$-a + 3v \geq 6,$$

$$-a \geq 6 - 3v$$

Multiplicando por (-1) em ambos os lados obtemos,

$$a \leq 3v - 6$$

□

Este teorema nos mostra que K_5 não é planar. De fato, K_5 não obedece ao teorema, pois temos, 10 arestas e 5 vértices.

Temos que,

$$10 \leq (3 \times 5) - 6,$$

$$10 \leq 15 - 6,$$

$$10 \leq 9$$

Que é absurdo, porque $10 > 9$.

Iremos usar essa mesma relação para mostrar que o grafo da figura 3.12 é de fato um grafo planar. Sabendo que o cubo possui 8 vértices, 12 arestas e 6 faces, temos:

$$12 \leq (3 \times 8) - 6$$

$$12 \leq 24 - 6$$

$$12 \leq 18$$

De fato, o grafo G_{24} da figura 3.12 obedece a inequação $a \leq 3v - 6$.

Para outros casos particulares de grafos, como o grafo bipartido, também é possível mostrar que é um grafo planar. Como mostra o teorema a seguir.

Teorema 8. *Em um grafo planar bipartido conexo G vale $a \leq 2v - 4$.*

Demonstração: Para grafos bipartidos, é possível obter ciclos pares. Como cada face possui no mínimo 4 arestas, o número de faces é quatro vezes menor do que o dobro de aresta de um grafo.

$$4f \leq 2a$$

Usando a relação a de Euler,

$$f - a + v = 2,$$

$$4f - 4a + 4v = 4 \cdot 2,$$

$$4f - 4a + 4v = 8,$$

como $4f \leq 2a$,

$$2a - 4a + 4v \geq 8,$$

$$-2a + 4v \geq 8,$$

$$-2a \geq 4v - 8$$

$$-a \geq \frac{4v - 8}{2}$$

$$a \leq 2v - 4$$

□

Para grafos que são bipartidos completos, $K_{n,n}$, é possível concluir que este não caracteriza como grafo planar. Por exemplo, o grafo $K_{3,3}$ não é planar, pois $9 > 2 \times 6 - 4$, o que contraria o teorema.

Por fim, o último capítulo deste trabalho tem como objetivo mostrar como todos os conceitos abordados até momento podem auxiliar nas aplicações práticas que serão apresentadas a seguir.

3.1.2 Coloração de Mapas

Assim como na coloração de vértices de grafo, o mesmo raciocínio é aplicado na coloração de mapas. Onde cada estado (ou país) corresponde a um vértice, e a vizinhança de cada estado a outro corresponde a uma aresta.

Como já mencionado anteriormente, o problema de coloração de mapas ganhou popularidade na comunidade científica. Fazendo com que vários matemáticos tentassem resolver o problema sem êxito. Apesar do problema permanecer em aberto por muito tempo, buscaram uma maneira de mostrar que o teorema das quatro cores é válido para qualquer mapa de maneira que fosse imposto menos restrições.

A técnica usada para coloração de mapas continua sendo bastante útil nos dias atuais, principalmente em problemas de otimização. Além disso, desempenha um papel fundamental para inteligência artificial (IA) e pode ser amplamente utilizada em algoritmos e problemas complexos.

Para começarmos este capítulo, podemos apresentar alguns exemplos sobre possíveis colorações de mapas que tem como objetivo nos mostrar porquê o teorema das quatro cores de fato funciona.

A seguir, podemos ver uma possível coloração do mapa do Brasil usando apenas quatro cores.

Figura 3.14 – Possíveis colorações do mapa do Brasil



Fonte: www.google.com.br

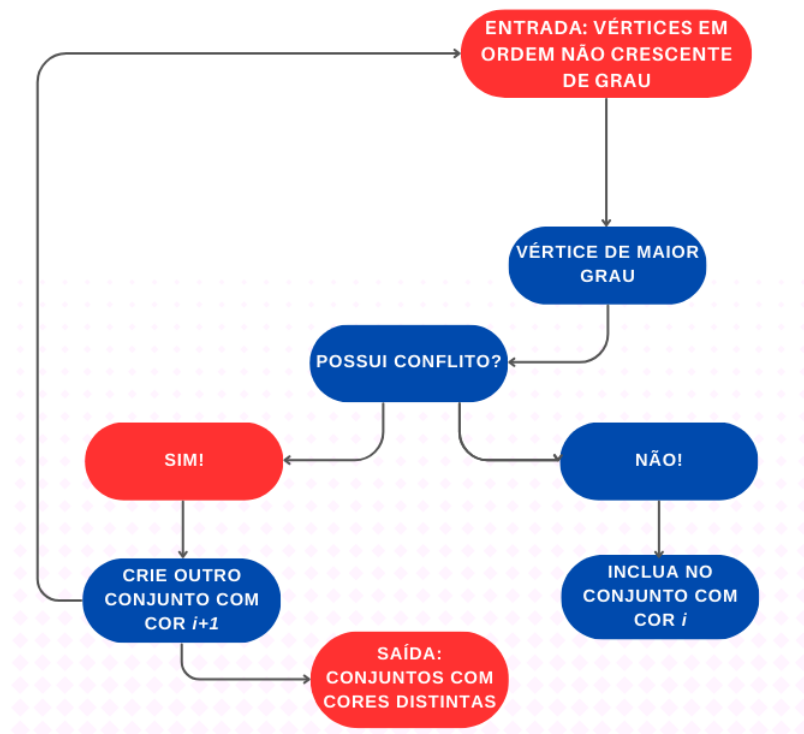
Observe que, da esquerda para a direita, o primeiro mapa da figura 3.14 não foi aplicado nenhuma coloração. A partir do segundo mapa vemos duas prováveis colorações. Isso se deve as restrições feitas no algoritmo para coloração de vértices. De forma semelhante ao método sequencial, os vértices serão ordenados de acordo com seu grau.

O método sequencial para coloração de vértices que usaremos a seguir, analisa elemento a elemento de modo que a cada passo seja adicionado um elemento candidato, que é conhecido como heurística gulosa.

Diferente do algoritmo guloso, o método sequencial inicia a coloração pelos vértices que possuem menores restrições. Em mapas onde existem muitos estados, isto é, possuem muitos vértices, o método de coloração sequencial não se mostra muito eficiente pois o tempo gasto é maior, e conseqüentemente aumenta o custo.

Portanto, o algoritmo guloso pode determinar boas soluções na maioria das vezes, mas não é possível garantir uma boa solução para todos os casos. Neste sentido, a ideia é percorrer todos os vértices do grafo de modo que se o vértice selecionado não possuir conflito com outros vértices, podemos adicioná-lo ao conjunto independente. Na próxima figura 3.15 ilustraremos passo a passo o processo de coloração vértices usando algoritmo guloso.

Figura 3.15 – Fluxograma do algoritmo "guloso" para coloração de vértices.



Fonte: Da autora.

Como já apresentamos o fluxograma do processo de coloração, nos resta aplicá-lo em um mapa. A próxima figura, representa a região nordeste do Brasil, com seus respectivos estados.

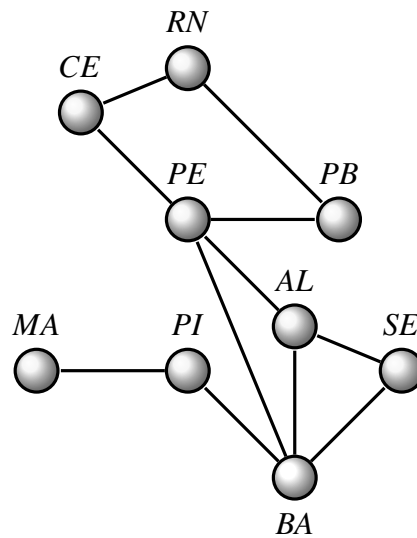
Figura 3.16 – Região nordeste do Brasil.



Fonte:suburbanodigital.blogspot.com

Considerando os estados do nordeste como os vértices de um grafo e os estados vizinhos por arestas, o próximo grafo da figura 3.17 representa a região nordeste do Brasil por meio de um grafo.

Figura 3.17 – Representação da região nordeste por um grafo.



Fonte: Própria autora.

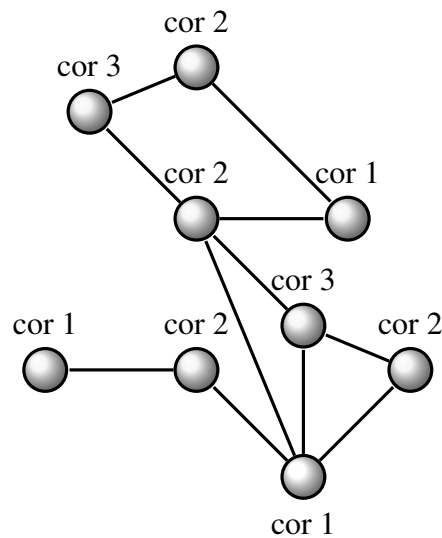
Inicialmente, iremos determinar um lista X que possui os vértices do grafo em ordem não crescente de grau.

$$X = \{BA, PE, AL, SE, PB, RN, CE, PI, MA\}$$

Os vértices BA e PE são os vértices de maior grau, como o critério de desempate pode ser feito de forma arbitrária, iremos escolher inicialmente o vértice BA , que será colorido com a *cor 1*. Portanto, os vértices vizinhos de BA , isto é, os vértices SE, AL, PE e PI não podem assumir a mesma coloração. O próximo vértice em ordem não crescente de grau que não possui adjacência com o vértice BA não é único. Por isso podemos escolher de forma arbitrária entre os vértices PB, RN e CE . Se escolhermos PB para assumir a *cor 1*, então os vértices incidentes à PB não podem pertencer ao conjunto de vértices de *cor 1*. Outro vértice que pode ser incluído ao conjunto é CE pois não possui conflito com os outros vértices do conjunto *cor 1*. O próximo vértice em ordem não crescente de grau é MA , e também pode ser incluído neste mesmo conjunto.

Como não é possível acrescentar nenhum outro vértice ao conjunto de modo que não perca a sua independência, é necessário usar outra coloração, *cor 2*. Usando o mesmo raciocínio, iremos determinar o conjunto independente de vértices que assumem a *cor 2*. Portanto temos $S_1 = \{BA, PB, CE, MA\}$, $S_2 = \{PE, SE, RN, PI\}$ e $S_3 = \{AL\}$. Logo, é necessário apenas três cores para fazer uma possível coloração na região nordeste do Brasil como mostra a figura 3.17:

Figura 3.18 – Possível coloração da região nordeste do Brasil.



Fonte: Própria autora.

Observe os conjuntos S_1, S_2, S_3 são independentes, isto é, não é possível atribuir duas cores em um mesmo vértice. Portanto, formam uma partição. No algoritmo apresentado, o número i representa quantas cores foram utilizadas para efetuar uma possível coloração dos vértices do grafo, e portanto, $i = 3$ para 3.17.

É possível concluir que qualquer mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores. O que nos leva a enunciar o teorema mais importante deste trabalho, o teorema das quatro cores.

Teorema 9 (Teorema das quatro cores). *Todo mapa pode ser colorido com 4 cores de modo que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.*

Este mesmo teorema pode ser escrito da seguinte forma: "Seja G um grafo planar e conexo, $\chi(G) \leq 4$ ". Pretendemos determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que qualquer região vizinha, com pelo menos uma fronteira em comum, tenha cores distintas. O problema das quatro cores trata-se da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de países reais ou imaginários.

Apesar de que a demonstração de Kempe apresentasse um erro, foi assim que várias dúvidas começaram a surgir depois que Appel e Haken, em 1976, conseguiram demonstrar o teorema, por duas razões:

1º) Parte da demonstração apresentada por Appel e Haken utiliza computadores, ou seja, é inviável ser verificada analiticamente.

2º) Mesmo com a parte dos cálculos da demonstração feitos à mão, é muito complicada. É fácil observar que ninguém nunca fez uma verificação completa dos cálculos.

No entanto, a questão permanece em aberto, pois é questionado se "Seria possível encontrar uma demonstração para o teorema de forma simples?", ou ainda, "Seria possível encontrar uma demonstração cujos cálculos tenham uma dimensão humanamente possível sem a ajuda de computadores?".

Na época, a demonstração não era muito aceita pela comunidade matemática pelo fato de ser realizada de forma analítica. Além disso, não possuía um rigor matemático para a demonstração. Por esse motivo, Appel e Haken fizeram uma modificação nas cadeias de Kempe, colocando menos restrições para a coloração de mapas. Portanto a sua demonstração nos diz que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Para isso, iremos usar o seguinte lema antes de enunciar o *Teorema das cinco cores*.

Lema 2. *Seja G um grafo conexo e planar com v vértices e a arestas, há pelo menos um vértice com grau menor ou igual que 5. Alves (2015)*

Demonstração: Sabemos que em um grafo planar a desigualdade é válida

$$3v - a \geq 6 \text{ ou seja, } a \leq 3v - 6$$

Suponha que todos os vértices tivessem grau 6, assim teríamos

$$2a \geq 6v$$

Isto ocorre pois, o $\sum_{w \in W} d(w) = 2a$ onde a soma dos graus deve ser no mínimo $6v$, ou seja, $a \geq 3v$ (o que é um absurdo). Então, pelo menos um vértice tem que ter um grau menor ou igual a 5. □

No século XX, um número significativo de trabalhos foi dedicado ao problema, e de fato, a teoria dos grafos foi grandemente enriquecida em termos instrumentais pelas tentativas feitas para resolvê-lo. Com este fato, foi possível desenvolver o *Teorema das cinco cores*.

Teorema 10 (Teorema das cinco cores). *Seja G um grafo conexo e planar, temos que $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração: Utilizaremos o processo de indução finita sobre o número de vértices de um grafo.

- O caso $n = 1$ é evidente, pois para os casos de 2 a 5 é possível utilizar uma cor para cada vértice do grafo G para que seja 5-colorível.
- Hipótese de indução: Suponha que todo grafo planar G com menos de n vértices é 5-colorível.
- Seja G um grafo planar com n vértices. Pelo lema anterior, temos que o grafo G possui pelo menos um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Tome o grafo $G' = G - \{v\}$, como G possui n vértices, segue que G' possui $n - 1$ vértices, e por hipótese de indução, o grafo pode ser colorido por 5 cores. Analisando a coloração do grafo G com a coloração já obtida em G' , mostraremos que é possível colorir o vértice v utilizando umas das 5 cores já utilizadas em G' .

Se $d(v) \leq 5$ e os vértices adjacentes a v não utilizam cinco cores na coloração dos vértices de G , podemos utilizar uma quinta cor para colorir o vértice v , portanto, o grafo é 5-colorível. Suponha que todos os vértices de G , exceto o vértice v , estejam coloridos. Sendo que cada vizinho do vértice v esteja colorido com uma cor diferente dentre as disponíveis.

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 os vértices adjacentes a v . Considere que o vértice v_1 esteja colorido com a cor 1, v_2 com a cor 2 e assim por diante. É possível trocar a cor de um dos vizinhos do vértice v , por exemplo, podemos mudar a cor do vértice v_1 de cor 1 para cor 3. Agora temos a cor 1 disponível para colorirmos o vértice v . Caso o impedimento seja o vértice v_1 ser vizinho do vértice que possui a cor 3, não é possível obter uma coloração própria de G .

Tome o subgrafo de G , constituído por todos os vértices com cor 1 e cor 3. Chamaremos este subgrafo de $G_{1,3}$. Assim obteríamos uma coloração própria de G' , isto é, a cor 1 não estaria entre os vizinhos de v , podendo atribuir a v a cor 1. Observe que os vértices v_1 e v_3 estarão em $G_{1,3}$. Caso estejam em componentes separadas, não há caminho entre v_1 e v_3 , logo é possível permutar as cores 1 e 3 na componente que contém v_1 . Se v_1 e v_3 estiverem na mesma componente, a permutação entre v_1 e v_3 não nos disponibiliza nenhuma cor para v .

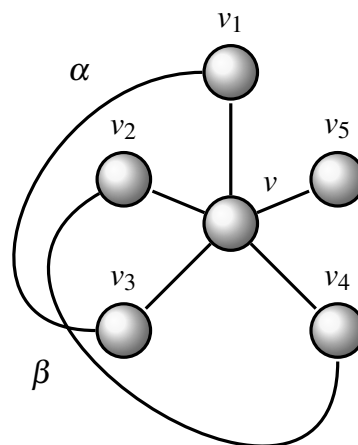
Ao tentar recolorir v_2 com a cor 4, tome $G_{2,4}$ que é o subgrafo de G induzido nos vértices de cor 2 ou cor 4. Se v_2 e v_4 estiverem em componentes separadas de $G_{2,4}$, poderemos permutar as cores na componente em que está o vértice v_2 . Esta coloração modificada ainda é própria de G' e poderíamos colorir o vértice v com a cor 2, obtendo assim uma 5-coloração de G . Talvez v_2 e v_4 estejam na mesma componente $G_{2,4}$, neste caso, a simples permutação entre as cores 2 e 4 ainda não nos permite uma coloração própria para G .

Quando os vértices v_2 e v_4 estão na mesma componente, existe um caminho α de v_2 à v_4 , onde os vértices estão coloridos com as cores 2 e 4. Da mesma forma, existe um β entre v_1 e v_3 , onde os vértices estão coloridos com as cores 1 e 3.

Imediatamente, α e β não possuem vértices em comum. Note que o caminho β acrescentado de v nos dá um ciclo, com v_2 na região interior e v_4 na região exterior. Deste modo, α ao passar em v_2 na região interior, para v_4 , na região exterior, cruzaria com β .

Não obstante, é impossível ocorrer já que o grafo G é planar, portanto não possui cruzamento de arestas. Consequentemente, v_2 e v_4 estão em componentes separadas de $G_{2,4}$, assim podemos recolorir a componente que contém v_2 . Por exemplo, ao disponibilizar a cor 2 para que seja possível atribuí-la ao vértice v , encontramos uma 5-coloração própria para G , o que demonstra o teorema Viana (2018). \square

Figura 3.19 – Se G é planar, então α e β não se cruzam.



Fonte: Própria autora.

4 CONCLUSÃO

A coloração de grafos é um campo de pesquisa muito ativo na atualidade. Em relação ao desenvolvimento de tecnologias e na matemática.

Neste trabalho formalizamos alguns conceitos teóricos utilizados para o desenvolvimento da teoria apresentada, em particular com atenção para a coloração de grafos. Destacamos também alguns problemas importantes para o estudo, como o problema das quatro cores e coloração de mapas. Apresentamos a ideia que Appel e Haken utilizaram para mostrar que qualquer mapa possa ser colorido por apenas quatro cores.

A demonstração que eles apresentaram em 1976 possui menos restrições, trazendo um retrocesso ao invés de um progresso para mostrar que a proposição apresentada pelo teorema das quatro cores seja verdadeira. Fazendo com que exista um aumento de custo e tempo computacional para fazer uma possível coloração de mapas.

Logo, podemos concluir que o teorema das quatro cores é mais vantajoso em problemas que incluem otimização. Mas para que seja possível mostrar que o teorema funcione para qualquer mapa, foi necessário desenvolver o teorema das cinco cores para mostrar que qualquer mapa pode ser colorido com apenas quatro cores.

Nos dias atuais, o estudo que envolve teoria dos grafos e coloração de mapas possui relevância, já que o desenvolvimento tecnológico está crescendo de forma exponencial. Além disso, possui grande importância para o estudo de redes de computadores, fluxo de dados, problemas de otimização, análise de dados em redes sociais, inteligência artificial, dentre outras aplicações nas diversas áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. P. *Coloração de grafos e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2015.

BOAVENTURA/JURKIEWICZ, S. *Grafos: Introdução e prática*. São Paulo: Blucher, 2009.

NETTO, P. O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

VIANA, A. C. Graduação. *Algumas caracterizações de grafos planares*. Florestal, MG: [s.n.], 2018.