SARAH MARTINS REZENDE

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL NO ENSINO MÉDIO: PERCEPÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

LAVRAS – MG
2023

SARAH MARTINS REZENDE

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL NO ENSINO MÉDIO: PERCEPÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciada.

Prof.ª Dr.ª Evelise Roman Corbalan Gois Freire
Orientadora

LAVRAS – MG
2023

SARAH MARTINS REZENDE

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL NO ENSINO MÉDIO: PERCEPÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

A DIDACTIC SEQUENCE ON POLYNOMIAL INTERPOLATION IN HIGH SCHOOL: PERCEPTIONS AND INTERDISCIPLINARITY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciada.

APROVADO em _07_/_03_/_2023_

Prof.ª Dr.ª Amanda Castro Oliveira - UFLA

Prof.ª Dr.ª Andreza Cristina Beezão Moreira - UFLA

Documento assinado digitalmente
gov.br
EVELISE ROMAN CORBALAN GOIS FREIRE
Data: 13/03/2023 19:36:55-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof.ª Dr.ª Evelise Roman Corbalan Gois Freire
Orientadora

LAVRAS – MG
2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Em primeiro lugar a Deus, por me ajudar a vencer todos os obstáculos encontrados ao longo do curso e que fez com que meus objetivos fossem alcançados;

À Universidade Federal de Lavras, essencial no meu processo de formação profissional, pelo aprendizado adquirido e experiências vivenciadas;

À minha orientadora Evelise, pelas correções, paciência, ajuda e por todo o conhecimento compartilhado;

Aos meus pais Sandra e Darlei, meu irmão Darlan e todos da minha família, pelo apoio, amor e carinho doado, por todo o incentivo nas pequenas vitórias, pela paciência nos momentos difíceis e pela compreensão das minhas ausências;

Ao meu namorado Fernando, por estar sempre ao meu lado e sempre me apoiando em todas minhas tomadas de decisões, por doar amor, carinho, paciência e por ser meu grande incentivador;

Aos amigos da matemática Ellen, Kellyane, Louiziane, Pedro, Teresa, Thalison, Thiago e Vitória, pela convivência ao longo desses anos, pelo companheirismo, descobertas e todas as trocas de experiências.

Muito obrigado!

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.” (Albert Einstein)

RESUMO

Em geral, os Métodos Numéricos são trabalhados no Ensino Superior de cursos da área de ciências exatas de maneira restrita à fórmula e à utilização de uma metodologia de ensino tradicional. No entanto, algumas metodologias poderiam ser utilizadas como forma de aprofundamento de conceitos matemáticos estudados no ensino básico, como por exemplo, polinômios. Esses métodos possuem importância nas mais variadas situações, pois possibilitam uma solução aproximada em casos em que a solução analítica é inviável ou de alta complexidade. Assim, a utilização dos Métodos Numéricos poderia se tornar mais evidente nos ambientes escolares, pois são métodos que podem ajudar os estudantes perceberem que, nem sempre será possível encontrar uma resposta exata e, principalmente, que há muitas outras funções existentes que são menos estudadas no Ensino Básico (os polinômios de grau superior a dois, por exemplo). Com isso, o objetivo deste estudo foi propor uma sequência didática sobre Interpolação Polinomial de Lagrange para ser desenvolvida em uma turma do Ensino Médio. Ademais, esta sequência deseja, também, sugerir uma interdisciplinaridade com a aprendizagem baseada em problemas, colocando um problema de cunho prático relacionado com a Biologia, mais especificamente, com a contagem do número de um certo inseto, montando assim uma tabela de dados concretos para que os estudantes analisassem. Isto é, nosso intuito é estimular a importância da análise crítica no processo de resolução de problemas e na análise dos resultados. A turma escolhida foi o 3º ano do Ensino Médio em uma escola pública na cidade de Lavras, Minas Gerais. A análise dos dados coletados foi de caráter qualitativo. Estes resultados mostraram que a utilização de metodologias de ensino alternativas, colocando os estudantes em contato com a matemática do cotidiano e como autores dos próprios processos de ensino-aprendizagem, pode auxiliar no pensamento crítico e na análise daquele resultado encontrado, evitando a simples repetição e execução de métodos. Com isso, o estudo da Interpolação Polinomial no Ensino Básico se mostrou importante para a relação da matemática com aplicações em outras áreas do conhecimento, pois, mesmo tendo dificuldades em parte do conteúdo, os discentes se mostraram interessados, incentivados e curiosos com esta relação. Concluímos, assim, que a relação da matemática com a prática escolar deve centrar-se nos estudantes e com o contexto no qual estão inseridos, identificando os conceitos aprendidos de forma mais lúdica.

Palavras-chave: Matemática. Métodos Numéricos. Interpolação de Lagrange. Metodologias Ativas.

ABSTRACT

In general, the Numerical Methods are worked in higher education in exact sciences courses in a restricted manner to the formula and the use of a traditional teaching methodology. However, some methodologies could be used as a way to deepen mathematical concepts studied in elementary school, such as polynomials. These methods are important in a variety of situations, as they enable an approximate solution in cases where an analytical solution is impractical or highly complex. Thus, the use of Numerical Methods could become more evident in school environments, because they are methods that help students realize that it will not always be possible to find an exact answer and, especially, that there are many other functions less studied in Elementary School (polynomials of degree greater than two, for example). Therefore, the objective of this study was to propose a didactic sequence about Lagrange Polynomial Interpolation to be developed in a High School class. Moreover, this sequence also wanted to suggest an interdisciplinary approach to problem-based learning by posing a practical problem related to biology, more specifically, counting the number of a certain insect, thus assembling a table of concrete data for students to analyze. That is, we intend to stimulate the importance of critical analysis in the problem-solving process and the analysis of the results. The chosen class was in the 3rd year of high school in a public school in the city of Lavras, Minas Gerais. The analysis of the data collected was qualitative. These results showed that the use of alternative teaching methodologies, putting the students in contact with everyday mathematics and as authors of their teaching-learning processes, helps in critical thinking and in the analysis of that result found, avoiding the simple repetition and execution of methods. With that, the study of Polynomial Interpolation in Elementary School proved to be important for the relationship of mathematics with applications in other areas of knowledge, because, even though they had difficulties in part of the content, the students were interested, encouraged, and curious about this relationship. We conclude, therefore, that the relationship between mathematics and school practice should focus on the students and the context in which they are inserted, identifying the concepts learned playfully.

Keywords: Mathematics. Numerical Methods. Lagrange interpolation. Active Methodologies.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em busca de um tema para o desenvolvimento desta pesquisa, a autora se deparou com os cálculos. Entretanto, desde o início, já havia a certeza e o sentimento de necessidade de "passear" pelo mundo dos números e da matemática em si. Esse sentimento de necessidade surgiu com o desejo de conseguir evidenciar a importância, a utilidade, o significado, o potencial e várias outras características que, muitas vezes, ficam escondidas no estudo dessa grande área.

Desse modo, um dos fatores importantes para o desenvolvimento desta pesquisa é a possibilidade de se trabalhar o cálculo (numérico) e alguns Métodos Numéricos no Ensino Médio (E.M.). Isto é, o objetivo será verificar se a introdução ao cálculo e ao estudo das técnicas numéricas pode formar um conjunto de ferramentas úteis para o cotidiano desses estudantes.

Com a atual organização da grade curricular de matemática para o E.M., o conteúdo de funções, matrizes, sistemas lineares, noções de estatística e, em especial, operações e propriedades sobre relações e dependências entre duas grandezas, representação gráfica e algébrica pode ser desenvolvido desde o 1º ano. E, quando o discente alcança o 3º ano, sua formação em matemática já pode lhe dar base suficiente para compreender o Método Numérico da Interpolação Polinomial. Ademais, considerando que o pensamento crítico pode começar a ser desenvolvido ainda na educação básica, o estudante deve se habilitar para esse tipo de pensamento, se tornando um ser autônomo em relação às suas investigações e criação de modelos, conjecturando e julgando os resultados obtidos em relação a polinômios de grau superior a dois.

Além disso, intenciona-se que o discente consiga perceber que, nem sempre, é possível encontrar fórmulas exatas e prontas para serem aplicadas imediatamente ao problema encontrado. E, quando isso acontecer, após a realização da pesquisa, deseja-se que os estudantes sejam capazes de compreender o comportamento do que está sendo proposto e o modo como manipular o problema para que, assim, seja resolvido apenas com operações aritméticas. Dessa forma, a pesquisa se apresenta como um caminho para estimular, nos estudantes, o gosto pela teoria, uma vez que auxilia na resolução de possíveis situações-problema.

É interessante ressaltar, ainda, a importância do estudo desse tema. Tal importância é direcionada à análise das aproximações de dados por funções e, ainda, na condição e possibilidade de conseguir uma função que represente (ou aproxime) de certo processo e, com isso, fazer simulações para resultados intermediários ou próximos, diminuindo a necessidade de repetição para os experimentos ou observações. Ou seja, o Cálculo Numérico busca produzir respostas numéricas, como uma estratégia de aproximação, para problemas matemáticos e, portanto, necessita, muitas vezes, dessas respostas numéricas de modo mais ágil, descomplicado e com uma abordagem discreta (ao invés da contínua). Pode-se pensar, então, (e confirmaremos a posteriori) que os Métodos Numéricos consistem em técnicas e formulações aplicadas a um problema matemático para que, assim, este possa ser resolvido com operações aritméticas.

Neste sentido, ao elaborar este material, tem-se o intuito de que ele seja uma ferramenta útil para a introdução do estudo de aproximações por “Interpolação Polinomial” e, em especial, apresentar o “Método de Interpolação Polinomial de Lagrange”. Para tanto, por meio dos estudos aqui demonstrados, um dos objetivos iniciais será entender os conceitos básicos sobre os métodos numéricos: como surgiram e se desenvolveram, os princípios básicos, os problemas que podem ser resolvidos por Cálculo Numérico e como podem ser aplicados no ambiente escolar.

A pesquisa teve como foco um desses métodos para que, assim, seja conquistado o alicerce sobre o tópico para a pesquisa, evidenciando sua funcionalidade, objetivo e vantagem, que também podemos chamar, segundo Skovsmose (2008), por materacia. Isso, pois, “materacia não se refere apenas a habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática” (SKOVSMOSE, 2008, p.16). Ou seja, a materacia vai além da aplicação de fórmulas matemáticas, ela engloba uma reflexão sobre essa aplicação.

Posteriormente, essa pesquisa teve como base um conjunto de aulas ministradas em uma turma do 3º ano do Ensino Médio na cidade de Lavras, Minas Gerais. Essas aulas foram elaboradas objetivando a construção do conhecimento sobre Cálculo Numérico ainda no Ensino Médio, algumas aplicações no cotidiano e, também, a análise crítica perante os resultados encontrados.

Por fim, foi analisado todo o estudo desenvolvido, tanto com os estudantes como também no início desse trabalho, a evolução do entendimento acerca da grande área da matemática e suas aplicações e, ainda, os resultados esperados e obtidos ao longo de todo esse processo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os Métodos Numéricos já são utilizados há muito tempo por pesquisadores e matemáticos. Segundo Lopes e Costa (2017, p. 246), “tais métodos foram desenvolvidos durante o século XIX, possibilitando o desenvolvimento desse novo ramo da Matemática, antigamente chamado de Matemática Numérica”.

Muitos dos problemas, em matemática, conduzem a equações dos mais variados tipos. Assim, com a motivação para a resolução desses problemas, que nem sempre é uma tarefa fácil, depara-se com outro problema: encontrar soluções aproximadas.

2.1 Diferença entre Métodos Numéricos e Métodos Analíticos

Inicialmente, é importante salientar a diferença entre um Método Analítico e um Método Numérico na resolução de problemas. Em geral, os Métodos Numéricos consistem em técnicas de manipulação que contribuem na obtenção de soluções numéricas, em geral aproximadas, de inúmeros problemas complexos com os quais deparamos no mundo real. Esses métodos se aplicam, principalmente, em problemas que não são conhecidas suas soluções exatas e, desse modo, necessitam de resoluções numéricas. Já os Métodos Analíticos, são aqueles que fornecem as soluções exatas, em geral por meio de fórmulas explícitas, de um problema (desprezando os erros de arredondamentos).

Esses métodos possuem suas vantagens e desvantagens em cada caso. Por exemplo, os Métodos Numéricos podem nos auxiliar em problemas complexos, utilizando um computador e obtendo a solução de forma rápida, entretanto, como são métodos que exigem certa repetição, a pessoa que realiza os cálculos pode efetuar algum erro durante os mesmos. Já os Métodos Analíticos nos dão uma exatidão e, ainda, fornecem informações gerais, além de uma maior informação quanto à natureza e à dependência das funções envolvidas no modelo. Entretanto, muitas vezes esses problemas são complexos e envolvem fenômenos não-lineares e, assim, passa a ser difícil encontrar uma solução analítica para o problema estudado. Por isso,

> tratando-se de objetos específicos para métodos numéricos, surgem novas características importantes como a da qualidade da informação que deve avaliar se os conteúdos são corretos, fidedignos e a carga informacional compatível com o tema e aspecto da confiabilidade do objeto onde se deve ter a preocupação com a correção dos cálculos com alto grau de exatidão. (CARMEN, 2007, p. 32).

Desse modo, é interessante escolher o método mais eficiente de acordo com o problema encontrado, sendo um esquema eficiente quando este apresenta soluções dentro de uma precisão desejada com custo computacional (tempo de execução + memória) baixo. Muitas vezes, há a necessidade de uma exatidão alta, de uma capacidade de manipulação mais simples e rápida, dentre várias outras características que podem ser encontradas ao se resolver um problema. Assim, a escolha de um Método Analítico ou um Método Numérico irá depender do contexto.

2.2 Princípios Básicos dos Métodos Numéricos

Segundo Franco (2006), os Métodos Numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grandes grupos: os Métodos Exatos e os Métodos Iterativos. Segundo ela, ainda,

> Métodos Exatos: são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações. Métodos Iterativos: são aqueles que permitem obter a solução de um sistema com uma dada precisão através de um processo infinito convergente. (FRANCO, 2006, p. 111).

Desse modo, os Métodos Exatos produzem uma solução com um número finito de operações aritméticas, porém, se considerado os erros de arredondamento, esse método pode tornar a solução sem significado. Já os Métodos Iterativos, podem requerer um número infinito de operações para produzir uma solução exata e, assim, nesses métodos, os erros de arredondamento não se acumulam, pois se acumulam quando uma longa série de cálculos é feita.

Segundo Berlandi e Brandi (2016, p. 6), "os procedimentos numéricos podem ser executados em computadores e, também, em algumas calculadoras. Idealmente, os valores aproximados da solução serão acompanhados de cotas para os erros que garantem um nível de precisão para aproximações". Segundo elas, ainda,

> a obtenção de uma solução numérica para um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornece valores que se encaixem dentro de limites razoáveis. Esta afirmação é verdadeira mesmo quando se aplica um método adequado e os cálculos são efetuados de uma maneira correta. Esta diferença é chamada de erro e é inerente ao processo. (BERLANDI; BRANDI, 2016, p. 6).

Em outras palavras, mesmo com os Métodos Numéricos, ainda podem existir erros a partir dos processos de manipulação da resolução dos problemas e, também, do método escolhido. Com isso, pode-se perceber que o erro é desconhecido, pois, se fosse conhecido, a resposta seria corrigida e seria encontrada uma resposta correta. Logo, o que pode ser feito é controlar este erro, isto é, saber que se está errando menos que determinado valor.

Uma solução utilizando esses tipos de métodos será um conjunto de dados numéricos que, manipulados de acordo com as possibilidades de quem está tentando resolver, proporcionam uma aproximação para a solução exata do problema. Outrossim, de acordo com a aproximação e com a repetição estabelecida previamente, a solução pode ser atingida levando em consideração um nível gradativo de precisão.

Dessa forma, os métodos numéricos são importantes instrumentos atuais, com a utilização de ferramentas computacionais e com visibilidade nos problemas cotidianos. Mas antes, precisamos dos conceitos sobre funções polinomiais.

2.3 Funções Polinomiais

Primeiramente, é importante relembrar o conceito de Função Polinomial. Acredita-se que tal conceito surgiu de forma intuitiva a partir da necessidade das pessoas de resolver problemas práticos do dia a dia em que havia dependência entre duas grandezas distintas. Os estudos e ideias sobre funções percorrem o conhecimento escolar desde as primeiras noções de proporcionalidade, ou seja, se iniciam já nos primeiros anos escolares, mas são aprofundadas, principalmente, no ensino fundamental e médio. Além disso,

> funções estão entre as mais poderosas e úteis noções em toda a matemática e inclusive em várias outras ciências. O impacto da tecnologia, sobre a maneira como as funções matemáticas são representadas, está conduzindo educadores matemáticos a repensarem o modo como as funções são ensinadas na escola. (CAIRES; NASCIMENTO, 2012, p. 2).

Ou seja, é possível compreender a importância desse conceito e como ele pode estar presente no dia a dia de todos. Isso porque, muitas situações cotidianas, envolvem relações entre grandezas e demandam conhecimento para resolvê-las.

Nesse sentido, os estudantes devem saber o que é uma função, identificar correspondências que são funções e correspondências que não são funções, reconhecer funções representadas de diversas formas etc. Desse modo, o conceito de função surge, historicamente, relacionado com a Geometria e a Álgebra e, ainda, o grande desenvolvimento do conceito de função deve-se ao fato de constituir uma poderosa ferramenta para o estudo dos mais diversos fenômenos naturais.

Ao trabalhar com o conceito de Função é necessário apontar sua definição assim como as definições dos elementos que a acompanham. Por isso, apresentaremos os conceitos e definições sobre as funções matemáticas, seus tipos e características.

Definição 2.3.1 *"Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se Domínio e Y*

Contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f.” (LIMA, 2013, p. 41)

Temos também que,

> existem quatro modos principais de representar uma função: (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 117).

Em outras palavras, os discentes devem ser capazes de compreender que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que satisfaz uma certa condição.

Duas outras funções existentes são as funções afim e quadrática. Abaixo, apresentaremos as definições de cada uma dessas funções.

Definição 2.3.1 *Uma função afim tem por domínio $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$) e é dada por uma regra de correspondência da forma $f(x) = ax + b$, sendo a e b números racionais (ou reais). No caso particular em que $b = 0$, esta relação tem a forma $f(x) = ax$ e dizemos que se trata de uma função linear. Esta função representa uma relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas e o seu gráfico é uma reta que contém a origem do referencial. Quando $b \neq 0$, a função diz afim não linear e o seu gráfico é uma reta que não contém a origem do referencial.* (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 119)

Definição 2.3.2 *A função quadrática, também chamada de função do segundo grau, é expressa como $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, sendo que os coeficientes a, b e c números reais e a diferente de 0 (zero). O gráfico desta função é outra curva – uma parábola – para a positivo, a parábola tem a concavidade virada para cima e, para a negativo, a concavidade está voltada para baixo.* (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 121)

Podemos imaginar que os gráficos de funções polinomiais de grau superior a três não são tão regulares e estruturados como acontece nas funções que foram aqui relembradas (SILVA, 2014). Posteriormente, essas serão as funções trabalhadas nos Métodos Numéricos, mais especificamente, com a Interpolação Polinomial durante esta pesquisa, mas sendo possível, também, a utilização em funções de grau inferior a três.

Continuando com as definições, seja $P_n(x)$ um polinômio dado por

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-I} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

onde os a_n's são constantes. Este polinômio é dito de grau n quando $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Com isso, conseguimos perceber que

> Uma função polinomial, f(x), é aquela definida por um polinômio. Note que tanto para o polinômio de grau *n* quanto para a função polinomial de grau n, nem sempre teremos *n - 1* termos, porque alguns a_n's podem ser iguais a zero. Uma função linear é uma função polinomial de grau 1, enquanto que uma função de 2º grau é uma função polinomial de grau 2. (THIEGHI, 2017, p. 1).

Desse modo, poderíamos concluir, intuitivamente, que uma função de grau n tem n raízes, entretanto pode-se encontrar raízes idênticas ou raízes complexas. Um exemplo para esse caso seria $x^2 = 0$, onde há duas raízes idênticas e iguais a zero (Thieghi, 2017). Um polinômio de grau n, com $n \geq 1$, terá n raízes r_i, e pode ser representado na forma de fatores, dado por

$$P_n(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdots (x - r_n) \qquad (2)$$

Segundo Thieghi (2017, p. 1), "para o caso de duas raízes r_i's serem idênticas, dois dos fatores acima seriam condensados em um único fator elevado ao quadrado; para o caso de três raízes serem idênticas, três dos fatores acima seriam condensados em um único fator elevado ao cubo, e assim por diante".

Agora, iniciaremos os estudos sobre Interpolação Polinomial, utilizando os conceitos vistos anteriormente e, também, novos conceitos que serão introduzidos.

2.4 Interpolação Polinomial

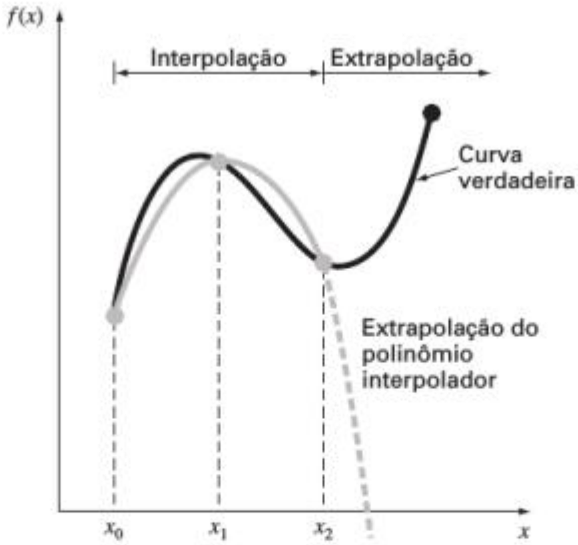
Segundo Lopes e Costa (2017), a Interpolação é um Método Numérico utilizado quando se conhece apenas alguns pontos no intervalo $[a, b]$ de uma f(x) e se quer encontrar um valor dessa função, nesse mesmo intervalo, porém em um ponto diferente dos que já são conhecidos. Ou seja, muitas vezes em algum experimento, são realizados testes em pontos específicos e a ideia desse método é supor que o fenômeno estudado é um fenômeno polinomial e fazer uma interpolação para os valores não observados, mas que serão utilizados em algum problema. Franco (2006) afirma que, tais métodos são utilizados como uma aproximação para uma função f(x), principalmente, nas situações em que:

> a) não conhecemos a expressão analítica de f(x), isto é, sabemos apenas seu valor em alguns pontos x_0, x_1, x_2, ..., (esta situação ocorre muito frequentemente na prática, quando se trabalha com dados experimentais) e necessitamos manipular f(x) como, por exemplo, calcular seu valor num ponto, sua integral num determinado intervalo etc.
> b) f(x) é extremamente complicada e de difícil manejo. Então, às vezes, é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos. (FRANCO, 2006, p. 280).

Segundo Lopes (2018, p. 34), “interpolar uma função significa aproximá-la através de uma outra função, escolhida em uma classe de funções previamente definidas tais que $f(x_i) = y_i = g(x_i)$”. Isto é, consiste em encontrar um valor dentro de um determinado intervalo e, neste mesmo sentido, encontrar um ponto não observado anteriormente a partir dos outros, distintos, obtidos no experimento ou problema proposto e do polinômio que será calculado, também, a partir destes pontos.

Para Franco (2006, p. 280) “toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio”. Assim, como pode-se verificar na Figura 1, o gráfico da função g(x) se ajusta ao gráfico da função f(x) nos pontos observados (experimentalmente ou de alguma outra forma). Em outras palavras, apesar das funções f(x) e g(x) gerarem curvas diferentes, os nós (os valores de x_0, x_1, ..., x_n) são iguais (SILVA, 2014).

Figura 1 - Interpolação de uma função f(x) por outra função g(x).



Fonte: LCAD - UFES

Por exemplo, a Tabela 1 abaixo relaciona os valores de *x* com f(x):

Tabela 1 - Pontos ordenados (x, f(x)).

x	-1	0	3
f (x)	15	8	-1

Fonte: Das autoras (2023).

A partir desses dados, suponhamos que se queira calcular o valor da função do ponto x=1 e o valor de x para que a função assuma f(x) = 3. A interpolação tem o objetivo de ajudar na resolução deste tipo de problema, ou em casos em que se possui um conjunto de valores obtidos através de experimentos. Logo, a função que resulta do processo de interpolação passa nos pontos fornecidos e, em relação a outros pontos, pode se tratar de um simples ajuste. Assim,

> em síntese, quando a função interpoladora é um polinômio, definida como F(x), a interpolação será o processo de avaliação de F(x), $x \in [a, b]$, sendo substituída a função f(x) por uma função F(x), de forma que ficará: $F(x_i) = f(x_i)$, i = 1, 2, ..., n. Desse modo, o f(x) se apresenta como função real definida em $[a, b] \in \mathbb{R}$, da que se conhecem os valores nos pontos de abscissas: x_1, x_2, ..., x_i, ..., $x_n \in [a, b]$. (MARTINS, 2017, p.32).

Além disso, os Métodos de Interpolação são diretos, ou seja, não tem velocidade de convergência, que é uma característica dos Métodos Iterativos.

2.4.1 Polinômio de Interpolação

O estudo da aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas e usadas até hoje devido à facilidade de tratamento de tais tipos de funções. Por isso, é muito comum substituir uma função complexa por um polinômio que a represente, mesmo que de forma aproximada. Assim,

> o problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, dados n+1 números (ou pontos) distintos (reais ou complexos) x_0, x_1, ..., x_n e n + 1 números (reais ou complexos) y_0, y_1, ..., y_n, números estes que, em geral, são n + 1 valores de uma função y = f(x) em x_0, x_1, ..., x_n, determinar-se um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que $P_n(x_0) = y_0$; $P_n(x_1) = y_1$; ...; $P_n(x_n) = y_n$. (FRANCO, 2006, p. 280).

Desse modo, é possível mostrar que tal polinômio existe e é único, na hipótese de que os pontos x_0, x_1, ..., x_n sejam distintos. Resumindo,

> para n + 1 pontos dados, existe um e somente um polinômio de grau n que passa por todos os pontos. Por exemplo, existe uma única reta (isto é, um polinômio de primeiro grau) que liga dois pontos [...]. Analogamente, existe uma única parábola ligando um conjunto de três pontos [...]. A interpolação polinomial consiste em determinar o único polinômio de grau n que passa pelos n + 1 pontos dados. Esse polinômio, então, fornece uma fórmula para calcular valores intermediários. Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por n + 1 pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso. (CHAPRA; CANALE, 2016, p. 431)

Agora, mostraremos a definição de Polinômio de Interpolação e o teorema sobre sua unicidade.

Teorema 2.4.1.1 *Dados n+1 pontos distintos x_0, x_1, ..., x_n (reais ou complexos) e n + 1 valores y_0, y_1, ..., y_n, existe um e só um polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que $P_n(x_k) = y_k$, com k = 0, 1, ..., n.* (FRANCO, 2006, p. 281).

Definição 2.4.1.2 *Chama-se polinômio de interpolação de uma função y = f(x) sobre um conjunto de pontos distintos x_0, x_1, ..., x_n, ao polinômio de grau no máximo n que coincide com* *f(x) em x_0, x_1, ..., x_n. Tal polinômio será designado por $P_n(f;x)$ e, sempre que não causar confusão, simplesmente por $P_n(x)$.* (FRANCO, 2006, p. 282).

Para exemplificar a utilização do polinômio interpolador, podemos pensar em formas de encontrar a equação da reta que passa pelos pontos (1, 1) e (2, 2). Antes de utilizar o polinômio, poderíamos pensar em utilizar um sistema 2×2. Inicialmente, sabemos que uma reta é definida por $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [1, 2], x \rightarrow f(x) = ax + b\}$ e, com isso, podemos encontrar uma função *f(x)* para o conjunto de pontos dados com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que $a = 1$ e $b = 0$. Logo, a função interpoladora *f*, utilizando a ideia de sistema, é tal que $f(x) = x$, para todo $x \in [1, 2]$.

Com este exemplo, pode-se perceber que, ao aumentar o número de equações ou pares ordenados, aumenta-se também o número de operações a se resolver, resultando em um caminho mais longo para se chegar na solução, além da possibilidade de erros de arredondamento. Neste caso, utilizar o método de Interpolação Polinomial será mais vantajoso, pois diminui o trabalho a ser feito no caso de várias equações.

Pode-se perceber também que a escolha do método utilizado mais eficiente deve envolver: a precisão que se deseja para os resultados, o esforço computacional (se for usado um método computacional para a solução), dentre outras características. Isso porque, há mais de uma forma de resolver muitos dos problemas encontrados no dia a dia, mas devem ser levados em consideração os fatores e necessidades que estão envolvidos naquele momento. Ou seja,

> as não linearidades deixam perplexos tanto os técnicos como os pesquisadores, pois não se dispõe de métodos analíticos gerais para resolver sistemas de equações algébricas não lineares. Mesmo tratando-se dos métodos numéricos, não há um método universal para resolver sistemas não lineares algébricos ou diferenciais. (SOUZA, 2020, p. 1).

Em outras palavras, os métodos aproximados buscam uma aproximação do que seria o valor exato, mas não há uma única forma de encontrarmos esse valor. É necessário entender o contexto, o que está sendo solicitado por trás daquela pergunta, para que assim, sejamos capazes de manipular um dos métodos para se chegar na solução, seja ela exata ou aproximada.

2.5 Fórmula de Lagrange

Joseph Louis de Lagrange foi um matemático da segunda metade do século XVII e começo do século XVIII. A fórmula de Interpolação de Lagrange tem um papel fundamental em investigar problemas sobre polinômios desconhecidos com apenas valores conhecidos em alguns pontos. Assim, como já citado anteriormente,

> em matemática, interpolação finita significa construir um novo conjunto de dados a partir do conhecimento de um conjunto de valores do domínio e de suas respectivas imagens. Através da interpolação podemos criar uma função que se aproxima dos valores conhecidos e conferir a eles uma continuidade. (CARVALHO, 2016, p.1)

Para chegarmos na fórmula de Lagrange, vamos utilizar $x_0, x_1, ..., x_n$, n+1 pontos distintos. Considerando $k = 1, 2, ..., n$, os polinômios $\ell_k(x)$ de grau n tem-se:

$$\ell\mathrm{k}(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \qquad (3)$$

Ela é utilizada para encontrar o polinômio de interpolação que melhor se adapta aos pontos dados. Desse modo, pode-se notar algumas características nessa fórmula, como: Se forem dados n+1 pontos distintos, o polinômio resultante será de grau n, ou seja, o polinômio será o número de pontos dados menos 1 (n - 1); se $\ell_k(x_j) = 0$, pode-se concluir que $k \neq j$; e se $\ell_k(x_j)=1$, pode-se concluir que $k = j$.

De fato, se substituirmos x por x_k em (3) é possível verificar que o numerador e o denominador serão exatamente iguais, ou seja, $\ell_k(x_k) = 1$. Agora, se substituirmos x por x_j, com $j \neq k$, será visível que o numerador se anula e, assim, $\ell_k(x_j) = 0$. E podemos, ainda, verificar que quando calculado o produto $y_i \times \ell_i(x_i)$ temos como resultado o valor de $P_n(x_i) = y_i$ no ponto x_i, que assegura que o polinômio $P_n(x)$ passa exatamente pelo ponto (x_i, y_i).

Desse modo, para valores dados como, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, ..., $f_n = f(x_n)$ de uma função $y = f(x)$, o polinômio:

$$P_n(x_k) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\ell_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \qquad (4)$$

é de grau no máximo n e, considerando as características que foram observados, satisfaz $P_n(x_k)=f_k$ com $k = 0, 1, 2, ..., n$. Portanto, a fórmula (4) é chamada de Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação e, $P_n(x)$ assim definido é o polinômio de Interpolação de f(x) sobre os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Alguns exemplos rotineiramente encontrados em livros didáticos para o ensino superior, sobre a fórmula de Lagrange, são iniciados com uma tabela de dados concretos e com perguntas diretamente ligadas a esta tabela. Estes exemplos/exercícios, na maioria das vezes, são mecânicos e com aplicação direta da fórmula anterior. Para exemplificar, vamos utilizar a seguinte tabela:

x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1

A partir destes dados, vamos determinar o polinômio de interpolação com a fórmula de Lagrange e, depois, calcular uma aproximação para f(1).

Temos os seguintes pontos:

$$x_0 = -1 \text{ e } f_0 = f(x_0) = 15$$

$$x_1 = 0 \text{ e } f_1 = f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \text{ e } f_2 = f(x_2) = -1$$

e, portanto, n = 2. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$P_2(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{2} \mathrm{f_k} \ell_{\mathrm{k}}(\mathrm{x})$$

Para determinar os polinômios $\ell_{\mathrm{k}}(\mathrm{x})$ para k = 0, 1 e 2, temos que:

$$\ell_0(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 3)} = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$\ell_1(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(0 + 1)(0 - 3)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{-3}$$

$$\ell_2(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(3 + 1)(3 - 0)} = \frac{x^2 + x}{12}$$

Portanto,

$$P_2(\mathrm{x}) = f_0 \times \ell_0(\mathrm{x}) + f_1 \times \ell_1(\mathrm{x}) + f_2 \times \ell_2(\mathrm{x})$$

$$P_2(\mathrm{x}) = 15 \times \left[\frac{x^2 - 3x}{4}\right] + 8 \times \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{-3}\right] - 1 \times \left[\frac{x^2 + x}{12}\right]$$

Agrupando os termos semelhantes, temos o polinômio interpolador:

$$P_2(\mathrm{x}) = x^2 - 6x + 8.$$

Agora, para encontrarmos uma aproximação de f(1), precisamos apenas calcular $P_2(1)$ utilizando o polinômio encontrado:

$$P_2(1) = (1)^2 - 6 \times 1 + 8$$

$$P_2(1) = 1 - 6 + 8$$

$$P_2(1) = 3.$$

Desse modo, é possível perceber que, para obter o valor da função em um ponto não observado ou dado, podemos aproximar uma função por seu polinômio de interpolação e, através deste, ter uma aproximação do valor da função no ponto.

Outra forma em que podemos encontrar as questões sobre interpolação polinomial é com o objetivo de ajustar um polinômio aos pares ordenados escolhidos. Abaixo, será resolvido um exemplo com as especificações citadas.

Exemplo 2.5.1: *Encontre o polinômio que melhor se ajusta aos pontos (-1, 3), (2, 6) e (4, -2)* (ECT/UFRN (2018)).

Solução:

Como o problema forneceu três pontos, sabe-se que o polinômio será de grau 2. Utilizando as fórmulas (3) e (4), temos:

$$\ell_0(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1-2)(-1-4)} = \frac{1}{15}(x-2)(x-4)$$

$$\ell_1(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-4)}{(2+1)(2-4)} = -\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$$

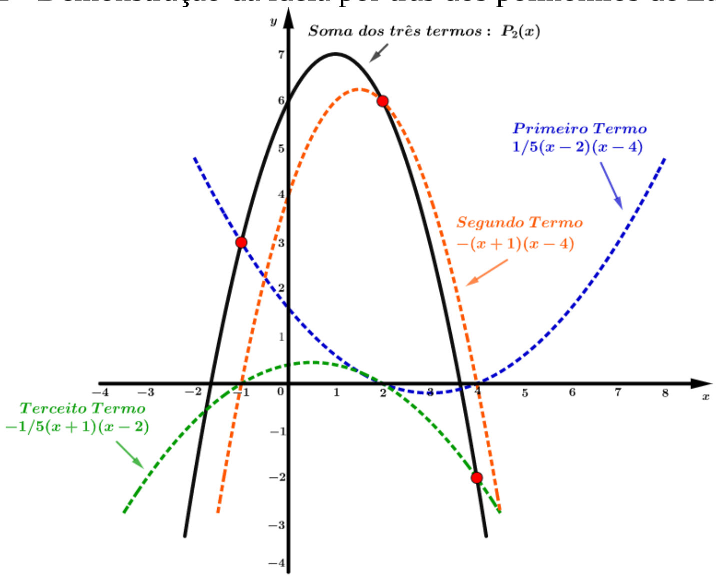
$$\ell_2(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(4+1)(4-2)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)$$

$$\mathrm{P}_2\,(\mathrm{x}) = 3 \times \left[\frac{1}{15}(x-2)(x-4)\right] + 6 \times \left[-\frac{1}{6}(x+1)(x-4)\right] - 2 \times \left[\frac{1}{10}(x+1)(x-2)\right]$$

ou

$$\mathrm{P}_2\,(\mathrm{x}) = -x^2 + 2x + 6.$$

Figura 2 - Demonstração da ideia por trás dos polinômios de Lagrange.



Fonte: ECT/UFRN (2018).

A Figura 2 evidencia o que acontece por trás dos polinômios de Lagrange. Ela mostra o caso do exemplo feito anteriormente e, assim, é possível verificar cada um dos três termos da equação passando por um dos pontos dados e, também, a soma dos três termos, resultando em um polinômio de segundo grau e que passa exatamente por todos os três pontos destacados.

É exatamente esse o objetivo dos problemas resolvidos pela interpolação polinomial: encontrar um polinômio que passa exatamente nos pontos dados no enunciado utilizando a soma de polinômios desenvolvidos pela interpolação. Cada polinômio é responsável por "oferecer" um ponto de seu gráfico e, assim, unindo todos os pontos ofertados, obtém-se o resultado: um polinômio ajustado para todos os valores.

Portanto, analisando os referenciais e exemplos citados até aqui, os métodos numéricos são, na maioria das vezes, utilizados como um método de resolver cálculos de forma mais simples, porém, sem a interpretação necessária para um entendimento verdadeiro. Muitos dos métodos são aprendidos apenas como uma forma de resolver problemas, em os autores citam, por exemplo, que

> os métodos numéricos são ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas. Eles são capazes de lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complicadas que não são incomuns na prática da engenharia e, em geral, são impossíveis de resolver analiticamente. Dessa forma, eles aumentam enormemente a capacidade de resolver problemas. (CHAPRA; CANALE, 2016, p. 4)

Sendo assim, fica evidente a necessidade de trabalhos e pesquisas com objetivos alternativos. Mais especificamente, propostas relacionadas a problemas de interpolação aplicados a casos reais, que sejam ensinados de forma mais íntima e com uma metodologia de ensino que objetiva o ensino crítico e o processo de ensino e aprendizagem.

3 MAPEAMENTO DE TRABALHOS

Como já introduzido anteriormente, sentimos a necessidade de realizar um trabalho com objetivos focados nos estudantes e no entendimento da Interpolação de forma mais prática. Para isso, realizamos um pequeno mapeamento bibliográfico de estudos publicados que relacionam o conteúdo de métodos de interpolação polinomial com a rede básica de ensino brasileira, seja esta pública ou privada. Nosso intuito foi verificar a quantidade de trabalhos, analisar a proposta metodológica de cada um e, a partir disso, desenvolver uma sequência didática de cunho prático buscando aplicar a interpolação no ensino básico de forma mais lúdica, palpável e com foco nos estudantes.

Para isso, iniciamos as pesquisas com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Encontramos que,

> a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 529)

Então, pode-se pensar que os estudos desenvolvidos no Ensino Médio (EM) devem contemplar situações do cotidiano dos estudantes, além de proporcionar uma aplicação de tudo que foi construído ao longo dos outros anos escolares. Dessa forma, acredita-se que essa parte prática deveria contar com resolução de problemas, mas não apenas isso, o professor de matemática precisa encontrar meios alternativos para auxiliar na compreensão efetiva de alguns resultados matemáticos utilizados ou que poderão ser utilizados no dia a dia.

Para tanto, analisando alguns trabalhos, teses e dissertações, além de artigos que já foram citados anteriormente, percebe-se que a preocupação maior nas atividades propostas é a aplicação direta da fórmula de interpolação ou, às vezes, há a construção da fórmula, mas com atividades diretamente ligadas a esse resultado posteriormente. Por exemplo, de acordo com Silva (2014, p. 79), tem-se uma das frases mais utilizadas nos textos analisados: “Neste momento, será descrita uma sequência de atividades didáticas que se destina ao ensino da interpolação polinomial e algumas questões acerca deste assunto que podem ser desenvolvidas no ensino médio”.

Continuando, outro trabalho analisado possui a seguinte estrutura:

> Na atividade 4 sugere-se a interpolação por um polinômio de grau 2 da função exponencial e a realização de uma estimativa para o erro: • obter o polinômio de Lagrange, gerar o polinômio interpolador para então aproximar a função no ponto dado; • efetuar a representação gráfica dos dados, do polinômio

> interpolador e do ponto aproximado; • aplicar a definição de erro para obter um limitante para este e fazer uma comparação com o erro no ponto aproximado, estimulando o aluno a refletir sobre os conceitos aqui trabalhados; • utilizar um software para a representação gráfica dos dados e das funções envolvidas na atividade. (SANTOS, 2015, p. 51)

Assim, pode-se perceber que a atividade é bem estruturada e construída com os conceitos que os próprios estudantes sabem, porém, seria interessante ter uma introdução do tema de forma mais prática, com a obtenção de dados juntamente com a turma. Além disso, o professor de matemática pode, ainda, pensar em experimentos que sejam possíveis de serem realizados dentro da escola e que, propositalmente, durante a realização da atividade, falte algum dado necessário para determinado problema, o que implicaria na necessidade da interpolação.

Outrossim, tem-se também outro exemplo dessa proposta de atividade restrita à resolução de problemas e na utilização de uma avaliação expressa em Silva (2014, p. 92), no qual ele cita: “Nesse sentido, sugerimos que o professor utilize todas as atividades propostas como forma de avaliação. Observe a participação e as várias habilidades do aluno garantindo seu direito de ser analisado nas suas melhores maneiras de mostrar como e o que aprendeu”. Ou seja, é evidenciado novamente a necessidade de atividades propostas distintas das já realizadas e que vão ao encontro do desenvolvimento real dos estudantes.

Além disso, um dos artigos analisados foi o de Pontes (2019), em que é realizado um teste composto de três questões sobre o conteúdo abordado, sendo elas

> Questão Um: Seja $y = f(x) = ax^2+bx+c$, tal que $f(-1) = 3$; $f(2) = 5$ e $f(5) = -8$. Encontre f(x) e construa seu gráfico. Questão Dois: Dado o conjunto de pontos apresentado na Tabela 3, encontre o polinômio interpolador dos pontos e apresente seu gráfico. Questão Três: Seja a função polinomial do 3º grau $f(x) = (x^2-1) \times (x+2)$. Encontre o polinômio interpolador e construa seu gráfico. (PONTES, 2019, p. 46-47)

Esta pesquisa foi realizada em uma turma de curso técnico e tinha o intuito de comprovar que o grau de motivação e de interesse pela matemática aumentou com a utilização de um ambiente computacional. O autor cita que,

> o intuito da resolução dos três problemas de matemática era para perceber o quanto os estudantes envolvidos tinham absorvido o estudo dos polinômios interpoladores através de um ambiente computacional. Diante de toda a evolução tecnológica do mundo moderno é indispensável o uso de software educativo para o ensino eficiente de matemática. (PONTES, 2019, p. 47)

Entretanto, pode-se fazer o questionamento se o aprendizado efetivo destes alunos ficou dependente apenas das três questões diretamente aplicadas. Estas questões podem ser levadas em consideração para garantir a motivação e o estudo de conteúdos distintos? Será que as atividades relacionadas com o tema “Interpolação Polinomial de Lagrange” devem ser realizadas apenas neste formato?

Para encontrarmos estes trabalhos, realizamos a coleta de dados utilizando as plataformas da CAPES, repositórios acadêmicos e o Google Acadêmico. As buscas foram feitas utilizando as palavras-chaves “interpolação”, “ensino médio” e “rede básica”. Foram levantados 32 trabalhos que fundamentam esta análise, no qual, 75% destes são dissertações (mestrados profissionais e científicos), 15,6% são teses e 9,4% são artigos científicos. Dentre as dissertações, foram identificadas algumas semelhanças, como o fato de 92% dos trabalhos analisados fazerem parte do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Além disso, com a análise das produções, foi possível identificar Estados como MT, MS, AP e RJ, todos na rede pública de ensino. A maioria dos trabalhos foram desenvolvidos no Ensino Médio, mais especificamente no 3º ano, e alguns na Educação Técnica. Porém, há uma quantidade considerável, também, que não objetiva nenhuma série escolar específica e apenas elaborou atividades que podem ser aplicadas de acordo com os objetivos da professora ou professor em turmas a serem escolhidas para tal fato.

Os dados foram relacionados diretamente com a forma que a matemática e a interpolação são trabalhadas no ensino básico, no qual, na maioria dos casos, não há uma construção do conhecimento ou o objetivo do ensino crítico. Apesar da inegável contribuição em trabalhar conceitos de interpolação polinomial na rede básica, os trabalhos são reproduções e aplicações diretas das fórmulas. Isso evidencia, portanto, a necessidade e importância de trabalhos nesta área, de pesquisas que desenvolvam materiais construídos e desenvolvidos conjuntamente com os discentes. Segundo Rezende e Freire (2022), os resultados salientam a importância de que o planejamento das atividades seja baseado em metodologias ativas, como resolução de problemas ou modelagem matemática, evitando a simples repetição e execução de métodos.

4 METODOLOGIA

O objetivo da pesquisa foi realizar os estudos sobre a Interpolação Polinomial e encontrar um caminho para levar estes estudos para dentro da sala de aula, de forma distinta das apresentadas no mapeamento realizado e prática. Já o objetivo de ensino, desenvolvida dentro da aula de matemática, foi apresentar os Métodos Numéricos, mais especificamente o método da Interpolação Polinomial, para uma turma de 3º ano do Ensino Médio para que os estudantes possam conhecer, calcular, utilizar e aplicar os conhecimentos iniciais sobre cálculo numérico e sobre os métodos na solução de problemas com ou sem solução analítica.

Além disso, com esta pesquisa, espera-se também estabelecer a diferença entre métodos analíticos e métodos numéricos utilizando problemas palpáveis e reais; sintetizar os princípios básicos dos métodos numéricos e, principalmente, da obtenção dos polinômios interpoladores; traçar um caminho seguro para que os estudantes consigam compreender como e quando utilizar um método numérico e/ou a interpolação polinomial; e organizar e produzir uma sequência de aulas dinâmicas e práticas acerca desse método estudado, visando o conhecimento e aplicações.

Para isso, essa pesquisa é de natureza qualitativa e com revisão bibliográfica dos principais conteúdos relacionados com o tema sobre Interpolação Polinomial de Lagrange. Esse tipo de pesquisa, segundo Godoy,

> ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes. Algumas características básicas identificam os estudos denominados "qualitativos". Segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando "captar" o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes. Vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno. (GODOY, 1995, p. 21).

Assim, pode-se entender que a análise qualitativa é essencial para o entendimento da realidade humana, das dificuldades vivenciadas, das atitudes e dos comportamentos dos sujeitos envolvidos, constituindo-se um suporte teórico essencial.

Para um melhor desenvolvimento da pesquisa, será estruturado todo um conhecimento básico sobre os principais ideais acerca do assunto. Para isso, planejamos um conjunto de aulas para ser trabalhado em uma turma de 3º do EM e, depois, analisamos todo o trabalho, ou seja, a construção do conhecimento, a eficácia do conjunto de aulas propostas e, também, o desenvolvimento e resultados obtidos com a turma escolhida. O conjunto de aulas foi desenvolvido perante o envio e aceitação ao Comitê de Ética da UFLA (Universidade Federal de Lavras), solicitando a pesquisa dentro de uma escola pública para a obtenção de resultados práticos.

Essa eficácia, citada anteriormente, foi analisada de acordo com todo o processo, isto é, a participação dos estudantes, o interesse, as dinâmicas que os discentes desenvolveram entre o conteúdo teórico estudado, a proposta de trabalho, os resultados obtidos e o trabalho em grupo. É importante lembrar que, essa proposta didática teve um caráter alternativo: a preocupação não estava em “aplicar” uma atividade, com questões e problemas, e esperar apenas as respostas corretas. Isto é, nosso intuito foi estimular a importância da análise crítica no processo de resolução de problemas e na análise dos resultados.

Para tal fato, utilizamos a modelação matemática para ajudar nessa etapa. Modelação Matemática é o método que, alicerçado na Modelagem, desenvolve os conteúdos matemáticos por meio da análise e da criação de modelos em cursos regulares, como o Ensino Médio. Com a possibilidade de relacionar outras áreas do conhecimento humano com a matemática, bem como a matemática com ela própria, pode despertar o interesse do aluno à medida que se apresenta como ferramenta de aplicabilidade prática do cotidiano. Este termo tem como referência o professor Bassanezi (2002), que diz que,

> A produção matemática tem ocorrido de modo supostamente desvinculado de um contexto sócio-cultural-político e com pouca preocupação em tornar-se utilitária ou mais bem definida em suas metas – o que, de certo modo, diferencia a Matemática de outras Ciências. Na verdade, tal produção apresenta-se como fruto exclusivo da mente humana, resultando numa linguagem que almeja essencialmente elegância e rigor. (Bassanezi, 2002, p. 171)

Desse modo, é possível perceber que o ambiente da modelação está associado à problematização, onde, o trabalho com tarefas na sala de aula constitui uma orientação curricular atual muito importante. Na visão do autor,

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação dos modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelação consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (Bassanezi, 2002, p.24).

Além disso, o foco foi relacionar a teoria matemática com a prática escolar, a introdução do cálculo ainda no EM e o desejo de evidenciar a utilidade da Matemática, presente em vários lugares não pensados. Assim, esta metodologia também alcançará a identificação dos conceitos matemáticos no cotidiano dos estudantes, visando o pensamento crítico para os modelos não ensinados na educação básica e o entendimento sobre a interdisciplinaridade. Logo,

> Não podemos negar que a Matemática tem penetrado fortemente na Economia, Química, Biologia, entre outras, na perspectiva da utilização de

> modelos matemáticos, quase sempre apoiados, no início, nos paradigmas que nortearam a Física – como as leis de conservação e analogias consequentes. Outras áreas como Sociologia, Psicologia, Medicina, Linguística, Música, e mesmo a História, começam a acreditar na possibilidade de ter suas teorias modeladas por meio da linguagem matemática. (Bassanezi, 2002, p. 173)

Pois bem, a educação deve ser um dos aspectos fundamentais no desenvolvimento e, para isso, deve haver mudanças e estímulos que vão ao encontro da construção do conhecimento dos estudantes de uma maneira concreta, afetiva, interessante, independente e que, ainda, proporciona novos conhecimentos, novas maneiras de ensinar e, também, de aprender.

Deste modo, visando uma educação matemática crítica, no qual a classe consegue estudar, encontrar e analisar os resultados obtidos, com diferentes estratégias e capazes de enfrentar o novo e, também, o próprio dia a dia e seus problemas rotineiros, pode-se pensar em formas de estimular todas essas características de maneira construtiva. Isto é,

> Grosso modo, quando procuramos agir/refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, compreender ou modificá-la, o processo usual é selecionar, no sistema em estudo, argumentos ou parâmetros considerados essenciais, formalizando-os por meio de um processo artificial denominado modelo. (Bassanezi, 2002, p. 173)

Nesse sentido, é interessante solicitar que os estudantes escrevam uma explicação de seu processo de entendimento como parte do desenvolvimento da aula. Conforme estes se esforçam para explicar seus raciocínios e defender suas respostas, eles passarão um período mais concentrado pensando nas ideias envolvidas. Essas explicações podem ser em um relatório, registro, desenhos, esquemas e outros, elas devem ser guardadas e revistas posteriormente, como uma ajuda para descobrir alunos que estão com dificuldade, planejar melhorias e extensões.

Continuando nesta perspectiva,

> Em relação às aplicações da Matemática, duas alternativas mostram-se bem delineadas: uma primeira visão consiste em adaptar conceitos, configurações ou estruturas matemáticas aos fenômenos da realidade – muitas vezes, sujeitando aspectos da realidade, físico- sociais e outros, a tender da melhor maneira possível aos modelos matemáticos que lhes são atribuídos. Numa segunda alternativa temos situações da realidade servindo como fonte para a obtenção de novos conceitos e estruturas matemáticas – com efeito, neste sentido, os paradigmas da construção científica, já estabelecidos, dão lugar a novos paradigmas e a Matemática evolui como um retrato do universo. Talvez, seja esta visão, próxima de uma explicação platônica sobre o desenvolvimento da Matemática, a razão da existência e funcionalidade da Matemática. (Bassanezi, 2002, p. 174)

E, com isso, o objetivo se volta para

> ... a combinação das duas alternativas. Há, então, a possibilidade da construção de modelos matemáticos, a partir de uma teoria conhecida que, por sua vez, não contém técnicas e métodos suficientes para obtenção dos resultados desejados. Tais situações exigem do matemático aplicado

> habilidades e criatividade, em especial de tendências matemáticas, de modo a desenvolver novos métodos e técnicas que vão se mostrando necessários – naturalmente, tais dinâmicas são fontes geradoras de motivação para a produção científica em processo. Do nosso ponto de vista, a posição mais razoável para o matemático praticante das aplicações, pesquisador ou professor, é a de estar atento para adotar as facetas mais producentes das estratégias disponíveis, ajustando-as, de modo conveniente, em cada etapa do trabalho. (Bassanezi, 2002, p. 174)

Por isso, é necessário que o professor consiga lidar com a diversidade em sala de aula e, para isso, deve escutar toda a classe com cuidado, pode-se planejar múltiplos pontos de partida e formas alternativas de registrar as ideias e caminhos encontrados pelos discentes. Além disso, o professor pode formar grupos heterogêneos de alunos, fazer acomodações e modificações visando a troca de conhecimentos e, até mesmo, de experiências.

Para finalizar, optamos por utilizar uma abordagem/metodologia unificada, unindo a sequência didática já com os resultados obtidos. Acreditamos que essa forma de organização fornecerá um melhor entendimento do processo e das análises envolvidas. Porém, no Apêndice A estará a sequência didática em branco, desenvolvida para ser utilizada em uma turma de 3º ano do ensino médio e com algumas sugestões para o professor de como adaptar as aulas da melhor forma.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste momento será descrita uma sequência didática (SD) para o ensino de interpolação polinomial, utilizando a fórmula de Lagrange, no ensino médio.

Para que os objetivos de uma sequência didática sejam alcançados, precisa-se de uma descrição detalhada, de objetivos claros e específicos e qual atividade será trabalhada. Com isso, essa clareza e organização ajudará o educando na aproximação com o objeto de estudo, possibilitando a elaboração de módulos que promovam o desenvolvimento da linguagem, leitura e escrita.

Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p. 97-98) dizem que a sequência didática é “um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito”, com finalidade de “dar acesso aos alunos a práticas de linguagem novas ou dificilmente domináveis”. Desse modo, segundo eles, a sequência didática tem como propósito

> Criar contextos de produção precisos, efetuar atividades ou exercícios múltiplos e variados: é isso que permitirá aos alunos apropriarem-se das noções, das técnicas e dos instrumentos necessários ao desenvolvimento de suas capacidades de expressão oral e escrita, em situações de comunicação diversas (DOLZ, NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, p. 96).

Consequentemente, pode-se reiterar que a construção de uma SD é um instrumento pedagógico de grande importância para o professor sistematizar e planejar de maneira eficiente suas atividades e para que o aluno compreenda que o trabalho vai além desse processo avaliativo, necessário para o crescimento do sujeito crítico/reflexivo e indispensável para a vida.

Neste estudo, o ensino foi baseado em um experimento prático para que, assim, os estudantes consigam visualizar a teoria na prática, a matemática no cotidiano e na possibilidade de compreensão de todas as áreas dessa disciplina. Essa sequência didática conta com as atividades propostas e o desenvolvimento de problemas práticos trabalhados dentro do ambiente escolar. Assim, essa proposta didática é constituída por um conjunto de aulas e um problema prático, objetivando a criação de condições para a compreensão dos principais conceitos e, principalmente, das suas aplicações no cotidiano.

5.1 Objetivo geral

Desenvolver uma proposta didática para o ensino de interpolação polinomial, utilizando o polinômio interpolador de Lagrange, para uma turma do 3º ano do ensino médio.

5.2 Pré-requisitos

Como já citado no início deste trabalho, o conteúdo de funções, relações entre variáveis e grandezas, sistemas lineares e representação gráfica já vem sendo desenvolvido desde o 1º ano do ensino médio. Assim, quando o discente alcança o 3º ano, sua formação em Matemática já lhe dá base suficiente para compreender o Método Numérico da Interpolação Polinomial. Desse modo, esta proposta possui atividades que utilizam, operações com polinômios e, com isso, a representação de coordenadas cartesianas no plano cartesiano (pares ordenados).

5.3 Materiais e recursos

Os materiais utilizados podem ser modificados de acordo com a necessidade de cada aula/professor. Porém, nesta proposta, os materiais necessários são: lápis, borracha, régua, caderno, atividades impressas para toda a turma, giz e quadro, caixa preparada para observação contendo pulgões, tabelas para anotações e materiais para manipulação com os insetos (lupa).

5.4 Habilidades da BNCC

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização.

5.5 Recomendações metodológicas

Nesta atividade, o professor deve observar dificuldades e questionamentos entre os estudantes, visando a construção de condições para o aprendizado do novo conteúdo estudado. As atividades aqui descritas podem ser trabalhadas individualmente ou em pequenos grupos.

5.6 Dificuldades previstas

Como a proposta desta sequência didática visa estudar a Interpolação Polinomial com estudantes do 3º ano do EM, é provável que parte desses alunos não se recorde de alguns conteúdos citados nos pré-requisitos e, também, não compreenda a importância de tal tema no ensino básico. Desse modo, o professor deve relembrar estes conteúdos e evidenciar a importância da interpolação como uma teoria de aproximações, com aplicação em vários momentos em que não seja possível coletar valores, dentro de um determinado intervalo, e que serão importantes em alguma necessidade específica.

5.7 Descrição geral da sequência didática

A proposta didática descrita foi planejada e dividida em cinco etapas: Estudos iniciais; Experimentação prática; Introdução ao problema do experimento; Formalização dos conceitos sobre Interpolação; e Finalização do projeto. Essas etapas foram desenvolvidas ao longo de 10 aulas destinadas para este projeto em uma escola na cidade de Lavras, MG. No geral, a sequência didática se apoiou em aulas introdutórias, revisão de conceitos, definição de novos conceitos, exemplos e trabalho prático. Por fim, foi necessária a análise crítica dos resultados obtidos com os dados desenvolvidos pelos estudantes dentro da sala de aula.

5.7.1 1ª ETAPA: Estudos iniciais

1ª aula: Introdução.

Nesta primeira aula, foi realizada uma roda de conversa para conhecermos a turma, identificar conhecimentos prévios e necessidades específicas de cada estudante. Além disso, apresentamos a ideia central da pesquisa e, também algumas dúvidas sobre os termos que deveriam ser assinados (APÊNDICES B e C).

Para identificar as necessidades dos discentes, entregamos uma atividade introdutória (APÊNDICE D) contendo algumas questões sobre assuntos importantes para a continuação da proposta, como pontos em eixos cartesianos, funções afins e quadráticas, esboço de gráficos e uma questão sobre o que os estudantes sabiam sobre polinômios com grau superior a dois. Essa parte da proposta tem como intuito verificar se os estudantes compreendem sobre representações de pontos em um sistema de eixos coordenados, quais seus conhecimentos sobre funções e o esboço de seus gráficos.

A atividade realizada se encontra abaixo, ela foi entregue de forma impressa e recolhida ao final da aula (depois da correção, que foi realizada no caderno).

Atividade introdutória:

1) Em um plano cartesiano, marque os seguintes pares ordenados:

(2, -3), (0, 0), (-1, -4), (2, 5), (-4, 6), (0, 2) e (3, 0).

2) Dados os polinômios $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ e $q(x) = x^2 - 3x + 4$, descubra a diferença entre $p(3)$ e $q(-2)$.

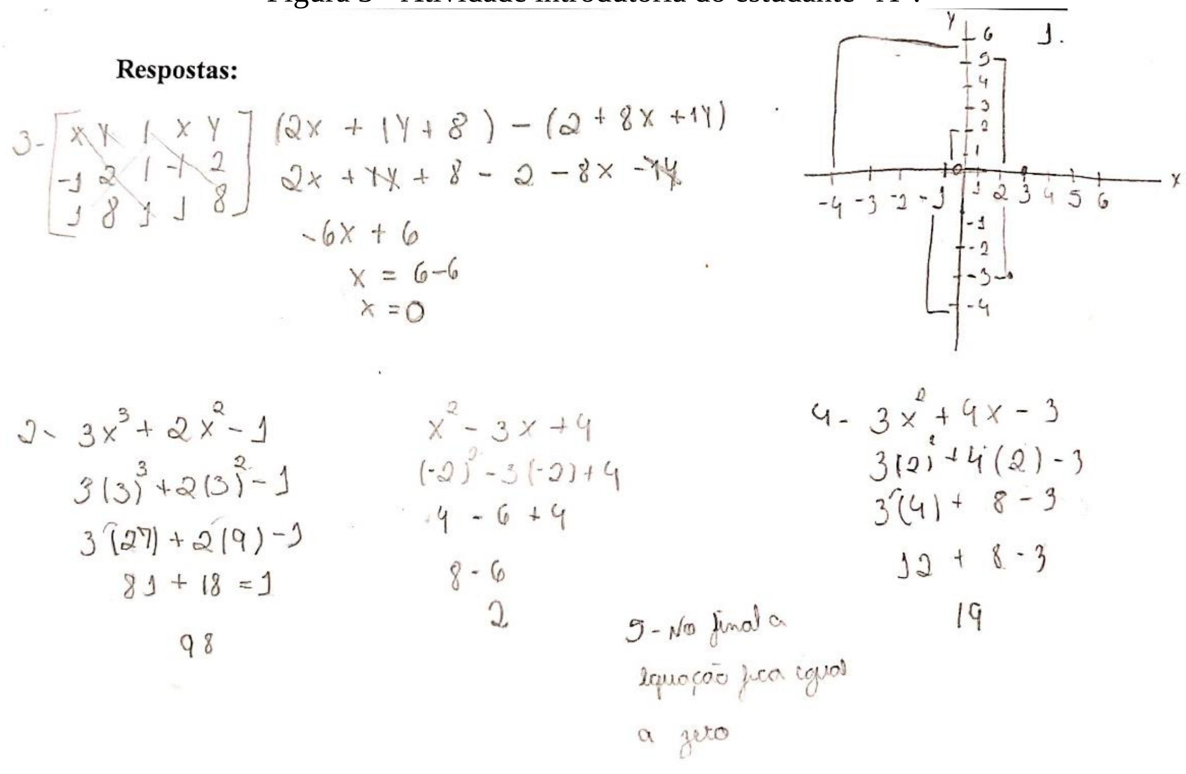
3) Determine a equação da reta que passa pelos pontos (-1, 2) e (1, 8).

4) Em plano cartesiano, esboce o gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$.

5) Descreva o que você conhece sobre funções de grau superior a 2.

Ao final desta aula, recolhemos a atividade e explicamos para a turma que a correção seria realizada no caderno na próxima aula. Desse modo, conseguimos analisar as respostas de cada estudante de forma a compreender as necessidades e dificuldades. Para exemplificar, abaixo estão as respostas dos estudantes “A” e “B”, respectivamente, em que apresentam dificuldades para marcar os pontos no plano cartesiano, com a função do segundo grau e, principalmente, com as funções de grau superior a dois.

Figura 3 - Atividade introdutória do estudante "A".



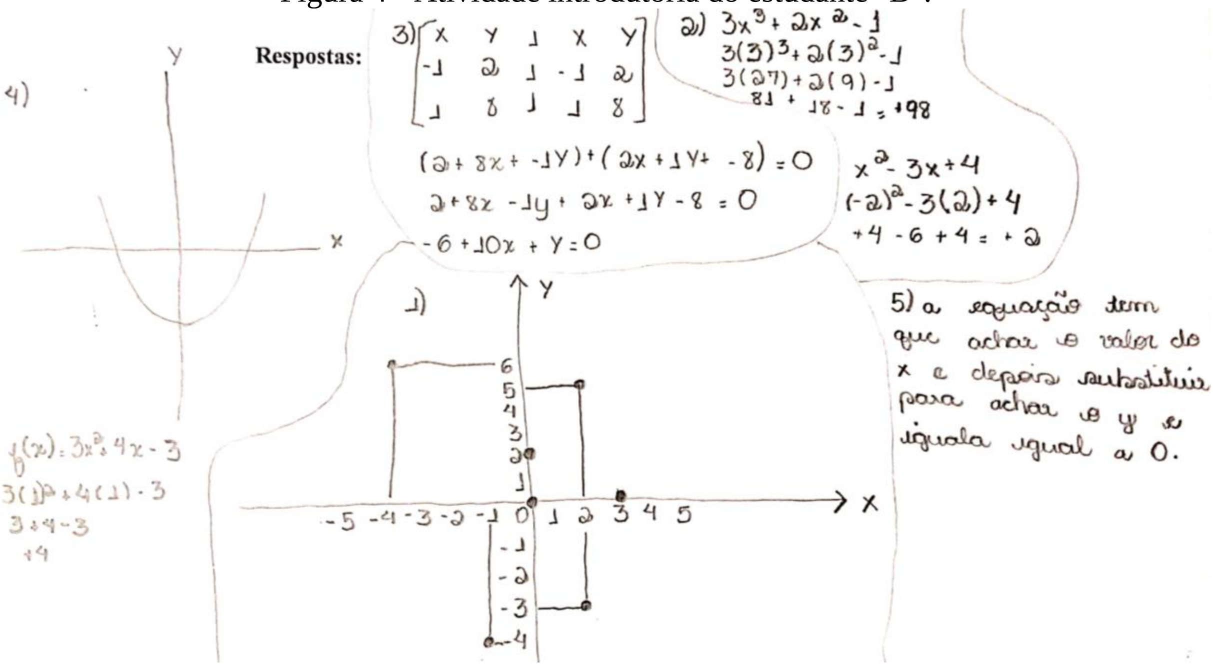
Fonte: Das autoras (2023)

Na Figura 3, na questão 1, o estudante “A” não consegue marcar os pontos em cima dos eixos, como (0, 0), (0, 2) e (3,0), evidenciando a dificuldade de orientação quando uma das coordenadas é nula. Além disso, na questão 2 ocorreu um erro de cálculo, já que o segundo polinômio (q(-2)) possui resultado 14 e, o que ocorreu com a maioria dos discentes, foi a falta de finalização da questão, pois foi solicitado a diferença entre os polinômios, resultado assim em 98 – 14 = 84.

Na questão 3 e 4, conseguimos perceber a dificuldade na compreensão do que foi solicitado e, também, no domínio do conteúdo. O estudante “A” não conseguiu encontrar a equação da reta devido alguns erros de cálculo e não soube realizar o esboço do gráfico da equação do segundo grau, substituindo um valor qualquer na incógnita x.

Já na última questão é evidenciado o problema que já imaginávamos no início da pesquisa: a falta de informação sobre os polinômios e equações de grau superior a dois. O estudante não consegue correlacionar problemas do cotidiano ou vistos anteriormente na escola com o questionamento realizado, mostrando como o estudo de polinômios deve ser mais preciso e prático na educação básica, com foco em suas propriedades, aplicações, resoluções e envolvimento com vários outros temas escolares.

Figura 4 - Atividade introdutória do estudante "B".



Fonte: Das autoras (2023)

Agora, temos as respostas do estudante “B” na Figura 4. Este discente consegue marcar os pontos no plano cartesiano corretamente, mas comete os mesmos erros do aluno “A” na questão 2. Na questão 3 também se encontram alguns erros de cálculo que acabam influenciando na resposta final, como a soma dos parênteses em vez da subtração dos mesmos. Mais adiante, na questão 4 e 5, encontramos algumas semelhanças nas respostas da turma, como a dificuldade do esboço de uma função do segundo grau e de informações de polinômios de grau superior a dois. Grande parte dos discentes substituíram um valor qualquer na incógnita x e não encontraram nenhuma relação necessária para a construção do gráfico, apenas um ponto específico. Além disso, levaram o mesmo raciocínio para a última questão, colocando como resposta a substituição do valor de x para encontrar o valor de y, igualando a equação a zero.

Desta forma, conseguimos perceber que as necessidades da turma se baseava na dificuldade de compreensão e, talvez, no tempo e forma em que estes conteúdos foram abordados, já que a turma cursou três anos do ensino básico durante a pandemia de COVID-19, agravando dificuldades e necessidades ao longo dos anos.

Esta primeira aula nos auxiliou para o reconhecimento da turma e suas ideias acerca da pesquisa. Apesar da dificuldade demonstrada anteriormente, a turma demonstrou interesse pelo conteúdo apresentado, se dedicaram na atividade inicial e, principalmente, aproveitaram o momento para sanar dúvidas e, com isso, aproveitaram o tempo de forma adequada. Essas características positivas estimulam o professor a continuar com suas ideias e conosco não foi diferente, nos sentimos estimuladas para cada etapa que se seguiria.

2ª aula: Retomada de conceitos.

Com os resultados obtidos na atividade anterior, realizamos uma aula com a correção das questões e, principalmente, com revisão dos conceitos que a turma mais apresentou dificuldade. Essas retomadas são importantes para o entendimento do conteúdo sobre Interpolação Polinomial e para o aprendizado efetivo, pois é importante, também, considerar dois fatores que desempenham papel fundamental: os conceitos e as habilidades que o aluno já possui. Ou seja, os materiais de aprendizagem devem ser organizados e as novas ideias devem ser significativas.

Esta aula foi realizada no mesmo dia que a anterior, assim, recolhemos a atividade introdutória e solicitamos que a correção fosse feita no caderno de matemática. Esta correção foi realizada no quadro, propondo a ajuda dos discentes, detectando erros, semelhanças e necessidades em cada uma das questões. Ao final da aula, os alunos disseram suas perspectivas para as próximas etapas da pesquisa, objetivando desenvolver os conceitos que foram relembrados.

5.7.2 2ª ETAPA: Experimentação prática

3ª aula: Explicações sobre o experimento.

Nesta aula, iniciamos explicando como aconteceria o experimento, quais seus objetivos iniciais, quais materiais seriam utilizados, qual o papel de cada estudante e, principalmente, o objetivo final. Desta forma, os dados explicitados aos discentes foram: a etapa inicial é a contagem do número de pulgões, em cada aula de matemática, durante três dias não consecutivos. O pulgão *Myzus Persicae* apresenta um ciclo de vida curto e com alta capacidade reprodutiva, portanto, quase sempre atinge altas densidades populacionais no campo.

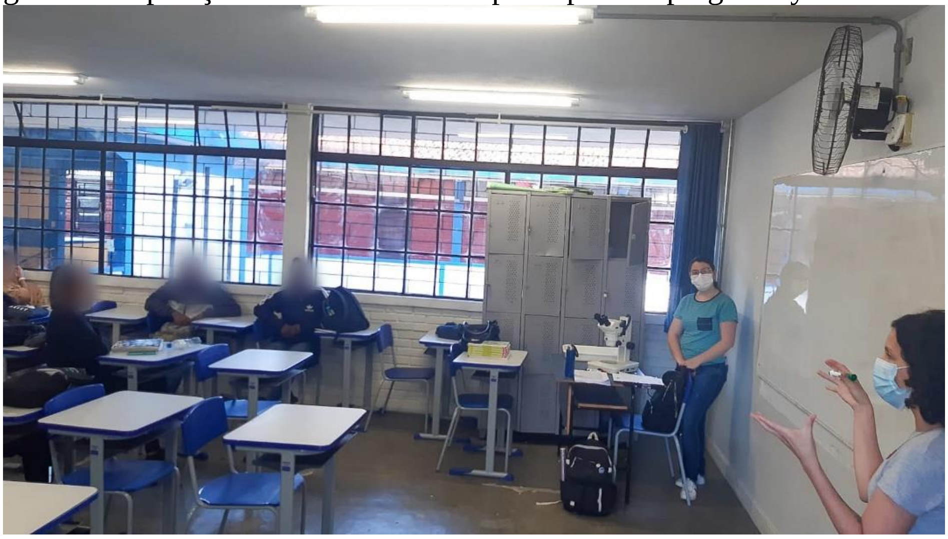
Diante disso, convidamos uma doutoranda do departamento de Entomologia da Universidade Federal de Lavras para que a mesma fornecesse mais informações sobre estes insetos para toda a turma, como sua reprodução, o manejo adequado, materiais importantes para a coleta de dados, dentre outros. Esta aula foi destinada ao reconhecimento da proposta do experimento, dos insetos que seriam trabalhados e dos objetivos para cada contagem, além de evidenciar a forma como essa contagem deveria ser realizada e anotada. A convidada também preparou e providenciou as lâminas para observação e acompanhamento do crescimento populacional do pulgão (Figura 5).

Figura 5 - Pulgões Myzus Persicae.

Fonte: Das autoras (2023).

No primeiro momento, a convidada expôs as características principais do pulgão, reprodução, ambiente em que mais podemos encontrar este inseto, ciclo de vida, função de cada parte do corpo, dentre outros, como podemos observar na Figura 6.

Figura 6 - Exposição das características principais do pulgão Myzus Persicae.



Fonte: Das autoras (2023)

Após este momento, convidamos a classe para observar os insetos no estereomicroscópio gentilmente trazido para a escola pela doutoranda, além de materiais como lupas e lentes para observação das lâminas entregues aos grupos formados para a realização das contagens e compartilhamento de ideias, como está exemplificado na Figura 7.

Figura 7 - Observação dos pulgões no estereomicroscópio.

Fonte: Das autoras (2023).

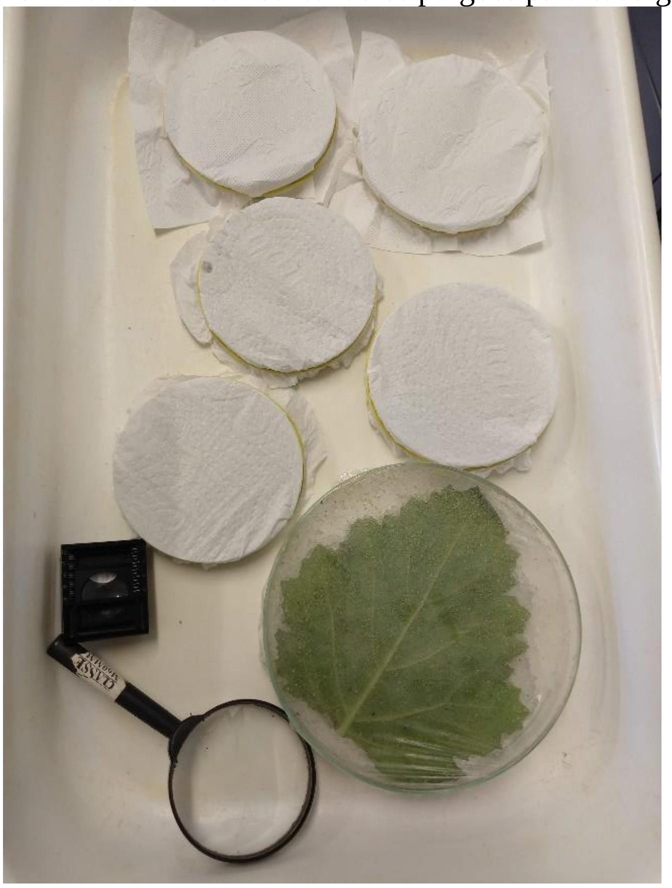
Para esta observação, foram colocados alguns pulgões mais evoluídos em uma folha de couve e colocada em uma placa de Petri de tamanho médio contendo hidrogel. Pudemos perceber como a turma se interessou por esta parte prática, o contato com o objeto de estudo ficou mais próximo e, assim, o restante da pesquisa evoluiu de forma mais fruitiva.

4ª aula: Entrega dos pulgões.

Para iniciar a atividade, dividimos a turma em 5 grupos com 5 estudantes em cada e organizamos a sala de acordo com estes grupos. Após, entregamos uma placa de Petri com um número inicial de pulgões distinto para cada grupo de alunos. Essas placas estavam envolvidas por um papel toalha e um elástico como proteção, como podemos observar na Figura 8.

Inicialmente, os grupos observaram as placas, os insetos, suas características mais visíveis e o número inicial entregue para cada um deles, comparando com as informações fornecidas pela convidada e com os outros pulgões analisados no estereomicroscópio. Depois deste momento, entregamos a tabela que foi utilizada para a coleta de dados (APÊNDICE E), nesta tabela, os estudantes anotaram o número de pulgões observados no primeiro dia.

Figura 8 - Placas de Petri contendo os pulgões para cada grupo.



Fonte: Das autoras (2023).

Para elucidar o início da contagem, explicamos a forma correta como esta seria realizada: em todas as aulas de matemática, dentro daquele período da pesquisa, os estudantes com o auxílio do professor deverão abrir a caixa e fazer a contagem do número de pulgões naquele dia, cada grupo, com a tabela em mãos, deverá anotar o respectivo dia de contagem e o número de insetos observados. A tabela utilizada e entregue aos estudantes está abaixo:

Tabela 2 - Como organizar os dados coletados.

Dia	1	2	3	4	5	6
Número de pulgões						

Fonte: Das autoras(2023).

Com isso, realizamos a primeira contagem com todos os grupos, observamos eventuais dúvidas e orientamos para os demais dias. Ou seja, preenchemos a tabela com o primeiro dia de contagem e o número inicial de pulgões, repetindo a contagem em cada grupo.

5.7.3 3ª ETAPA: Introdução ao problema do experimento

5ª aula: Segunda coleta de dados e Estimativas iniciais.

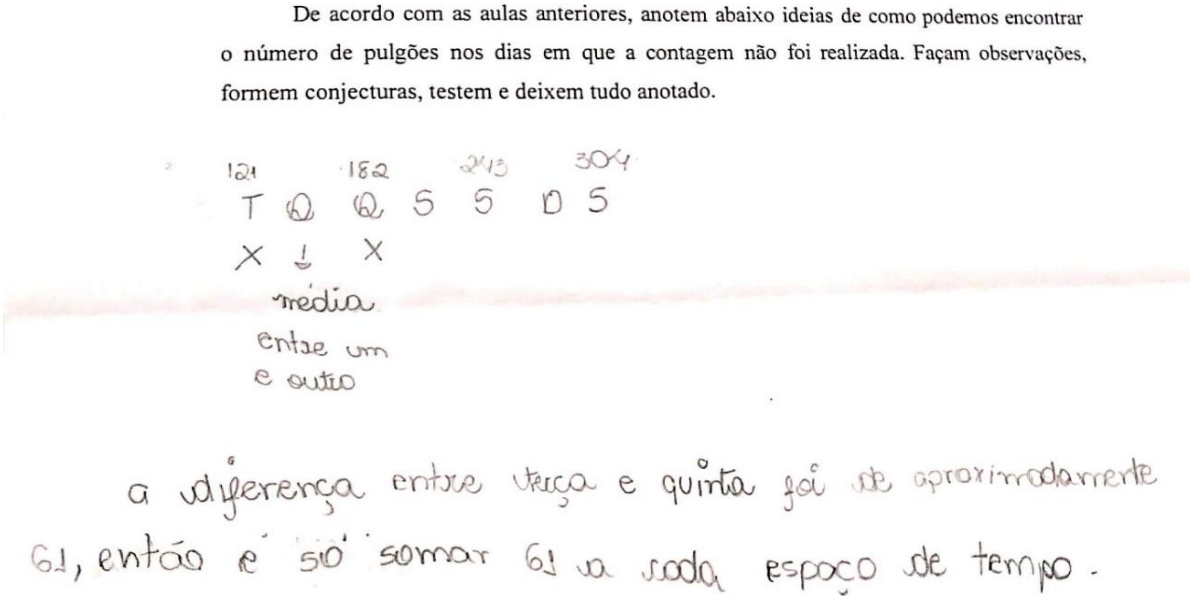
Iniciamos a aula organizando a turma nos grupos formados anteriormente, entregamos as placas com os pulgões que foi recolhido pela professora da turma e solicitamos que realizassem a segunda contagem. Durante esta etapa, percebemos que as tabelas ficariam totalmente diferentes entre os grupos, pois algumas placas tiveram o número de pulgões elevados, outras tiveram o número reduzidos e em uma delas acabaram falecendo todos os insetos. Este momento foi importante para que a turma refletisse sobre a influência do meio no crescimento populacional em cada lâmina.

Ao longo das aulas de matemática e das contagens dos pulgões, os estudantes foram preenchendo a tabela e coletando os dados. Entretanto, nesta aula, introduzimos a discussão do problema do experimento. O problema proposto se baseou no fato que, a contagem dos pulgões foi realizada nas aulas de matemática, porém, propositalmente, nos dias em que não houve aula, a contagem não foi realizada. Com isso, conseguimos uma maneira de questionar os estudantes a pensarem em formas de estimar o número de pulgões nos dias em que não foi feita a coleta de dados, o que serve como base para introduzir os conceitos de interpolação polinomial.

Por isso, nesta aula levantamos questionamentos e conjecturas para que os grupos conseguissem estimar a quantidade de pulgões em um dia entre as duas contagens que já foram realizadas. Para isso, entregamos uma folha de estimativas iniciais (APÊNDICE F) para cada um deles e, nesta folha, os alunos colocaram suas ideias para resolver o problema, colocando os nomes dos integrantes do grupo e entregando ao final da aula.

Durante este tempo, observamos os diálogos entre a turma e, por fim, recolhemos as folhas entregues para analisar suas ideias. Notamos que a maioria da turma pensou em fazer média aritmética simples para encontrar o número de pulgões no dia determinado, como podemos perceber na Figura 9. O grupo abaixo, nomeado como Grupo 1, calculou a diferença do número de insetos observados e concluiu que o crescimento populacional se manteria constante.

Figura 9 - Estimativas iniciais do Grupo 1.



De acordo com as aulas anteriores, anotem abaixo ideias de como podemos encontrar o número de pulgões nos dias em que a contagem não foi realizada. Façam observações, formem conjecturas, testem e deixem tudo anotado.

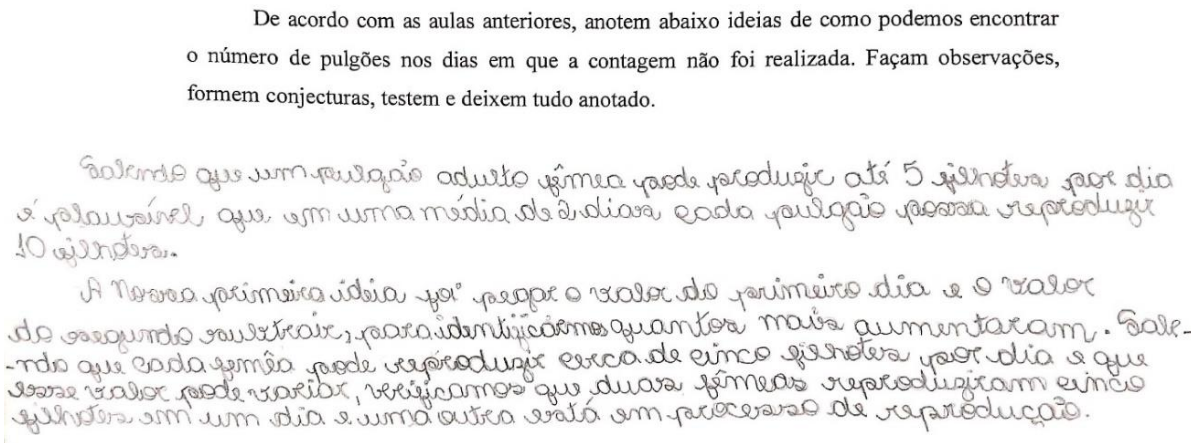
121 182 243 304
T Q Q S S D S
X ↓ X
média
entre um
e outro

a diferença entre terça e quinta foi de aproximadamente 61, então é só somar 61 a cada espaço de tempo.

Fonte: Das autoras (2023).

Temos também o exemplo do Grupo 2 (Figura 10).

Figura 10 - Estimativas iniciais do Grupo 2.



De acordo com as aulas anteriores, anotem abaixo ideias de como podemos encontrar o número de pulgões nos dias em que a contagem não foi realizada. Façam observações, formem conjecturas, testem e deixem tudo anotado.

Sabendo que um pulgão adulto fêmea pode produzir até 5 filhotes por dia é plausível que em uma média de 2 dias cada pulgão possa reproduzir 10 filhotes.

A nossa primeira idéia foi pegar o valor do primeiro dia e o valor do segundo subtrair, para identificarmos quantos mais aumentaram. Sabendo que cada fêmea pode reproduzir cerca de cinco filhotes por dia e que esse valor pode variar, verificamos que duas fêmeas reproduziram cinco filhotes em um dia e uma outra está em processo de reprodução.

Fonte: Das autoras (2023).

Este grupo tentou utilizar uma informação dada pela doutoranda do departamento de entomologia em que as pulgonas adultas conseguem reproduzir até cinco filhotes por dia, porém não conseguiram finalizar o raciocínio.

Assim sendo, os grupos consideraram que a variação do número de pulgões seria constante, tanto aqueles que tiveram seu número elevado, quanto aqueles em que o número de pulgões na lâmina reduziu. Isto é, tanto a natalidade como a mortalidade dos insetos seriam observados de maneira linear. Assim, tentamos evidenciar que a média aritmética é uma medida de tendência central que, por uniformizar os valores de um conjunto de dados, não representa da melhor maneira os conjuntos que revelam tendências extremas, assim como não é possível estabelecer relações entre os dados trabalhados utilizando apenas a média.

5.7.4 4ª ETAPA: Formalização dos conceitos sobre Interpolação

6ª aula: Novos conceitos.

Para introduzir o conteúdo de Interpolação, iniciamos a aula explicando sobre o conceito de aproximações de funções. Para isso, escrevemos no quadro: "Aproximações de funções consiste em utilizar métodos que aproximem funções a outras mais simples, obtendo uma caracterização de ambas as funções. Com isso, temos os polinômios e sua simplicidade, que permite uma aproximação polinomial de vários modos distintos. Um destes modos é a Interpolação Polinomial, então, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a represente". Após apresentar este pequeno resumo, solicitamos aos estudantes que copiassem no caderno e, posteriormente, questionamos os estudantes sobre seus entendimentos sobre o tema.

Em seguida, explicamos mais características da Interpolação Polinomial, novamente escrevendo no quadro: "Esses métodos de Interpolação Polinomial são utilizados como uma aproximação para uma função f(x), principalmente, nas seguintes situações: 1) não conhecemos a expressão analítica de f(x), ou seja, sabemos apenas seu valor em alguns pontos e necessitamos manipular f(x) em algum outro ponto específico; ou f(x) é extremamente complicada e de difícil manejo, então, é possível sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos".

A ideia foi explicar de forma simples, evidenciando a importância deste método no cotidiano e sanar todas as dúvidas iniciais sobre o tema. A classe recebeu essas novas informações demonstrando interesse, com um pouco de receio por ser algo novo, mas curiosos para ver a relação entre as contagens da população dos pulgões com a matemática e a interpolação.

7ª aula: O polinômio interpolador.

Com base na aula anterior e com aquelas ideias iniciais de cada discente, por meio dos registros escritos, continuamos o conceito de interpolação. Nesta, introduzimos o conceito de Polinômio Interpolador com a seguinte explicação no quadro: “O problema geral da Interpolação por meio de polinômios consiste em, dados n+1 pontos distintos, determinar um polinômio Pn(x) de grau no máximo n, tal que Pn(x0)=y0; Pn(x1)=y1; ...; Pn(xn)=yn. Tal polinômio existe e é único. Desse modo, chama-se polinômio de interpolação de uma função y = f(x) sobre um conjunto de pontos distintos x0, x1, ... , xn, ao polinômio de grau no máximo n que coincide com f(x) em x0, x1, ... , xn. Tal polinômio será designado por Pn(x)”.

Da mesma forma que a aula anterior, adaptamos de forma oral as definições de acordo com as necessidades da turma, buscando sanar possíveis dúvidas e questionamentos de acordo com o tema.

Nesta mesma aula, para finalizar, retornamos aos pulgões e realizamos a terceira coleta de dados. Encontramos novos desafios para planejar os próximos passos: apenas um grupo conseguiu encontrar um número mínimo de pulgões, o restante dos grupos encontraram suas placas sem pulgões sobreviventes. Orientamos a turma para que escrevesse o número real encontrado e fizemos questionamentos do porquê aquele fato poderia ter ocorrido. Todos concordaram que o tempo que os insetos ficaram nas placas e a forma como foram armazenados pode ter acarretado a diminuição drástica para a última contagem. Mais uma vez, foi possível notar a questão da influência do meio ambiente no crescimento populacional dos insetos.

8ª aula: Fórmula de Lagrange.

Nesta aula, introduzimos os conceitos sobre a fórmula de Lagrange, porém, pedindo aos estudantes que formassem conjecturas do problema inicial do número de pulgões antes de ensinar tal fórmula. O intuito foi verificar se os estudantes, ou alguns deles, utilizariam a aula anterior para encontrar alguma relação com o problema introduzido no início da pesquisa.

Após, prosseguimos com a interpolação polinomial, mas nesta aula introduzimos a fórmula de Lagrange com um pequeno resumo na lousa: “Sejam x0, x1, ... , xn n+1 pontos distintos. Consideremos para k = 0, 1, ... , n, os seguintes polinômios lk(x) de grau n:

$$\ell k(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Para valores dados: $f_0=f(x_0)$, $f_1=f(x_1)$, ... , $f_n=f(x_n)$ de uma função y = f(x), o polinômio:

$$P_n\ (x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\ell_k(x)$$

é de grau no máximo n e satisfaz: $P_n\ (x_k) = f_k$, com k = 0, 1, 2, ..., n. Portanto, a fórmula $\ell k(x)$ é chamada de Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação e, $P_n(x)$, é o polinômio de Interpolação de f(x) sobre os pontos x_0, x_1, ..., x_n”.

Durante a discussão, notamos que a notação de somatório não estava sendo compreendida de forma adequada e muitos estudantes solicitaram a explicação do conceito. Desse modo, recordamos as ideias principais, no quadro e de forma oral, e a socialização de todas as ideias e recordações da classe perdurou até o final da aula. Sendo assim, solicitamos à turma que realizassem uma pesquisa sobre este tema em casa e levasse para a sala de aula sugestões de como relacionar todas as aulas que tivemos até aquele dia.

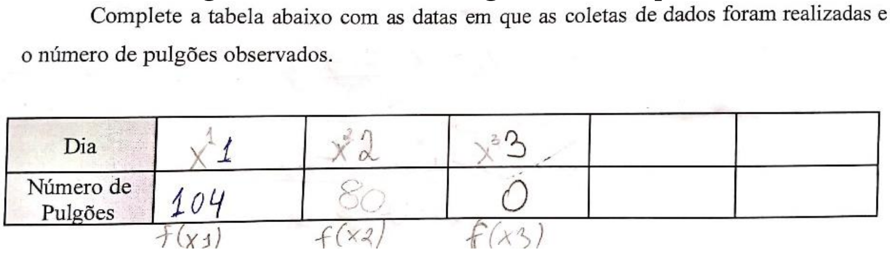
5.7.5 5ª ETAPA: Finalização do projeto

9ª aula: Retomada ao problema dos pulgões.

Para que os estudantes pudessem compreender a interpolação polinomial e a fórmula de Lagrange, tentamos induzir a turma a associar o problema dos pulgões com uma tabela de dados concretos e, ainda, com a utilização da fórmula para a resolução do problema. Indagamos sobre a pesquisa solicitada, mas nenhum estudante a realizou, mas se explicaram que, por estarem no final do ano letivo, se preocupando com as provas finais, formatura e alguns jogos interclasses, acabaram se esquecendo do que foi solicitado. Com isso, percebemos que o período escolhido para a realização da pesquisa pode ter influenciado em alguns resultados, pois ela foi realizada após o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), com poucas aulas restantes para o final do ano letivo e perto das provas finais.

Para retomar o problema dos pulgões, pedimos à turma para organizar os grupos e entregamos as folhas recolhidas nas aulas anteriores (estimativas iniciais e a tabela de registro). Após, relembramos o problema em encontrar o número de pulgões em um determinado dia da semana em que a contagem não foi realizada e a classe iniciou os cálculos utilizando a fórmula, como podemos verificar nas Figuras 11 e 12. A tabela do grupo, demonstrada abaixo, nos permite perceber que eles conseguiram determinar o x1, x2 e x3 e, também, a f(x1), f(x2) e f(x3) ainda na interpretação dos dados para prosseguir com os cálculos. E, olhando para os cálculos na Figura 12, conseguimos encontrar algumas características, como a tentativa de organização da folha, as marcas de erros cometidos, setas e riscos, além de esquemas para o entendimento do problema que estava sendo estudado naquele momento.

Figura 11 - Tabela de registro do Grupo 3.



Complete a tabela abaixo com as datas em que as coletas de dados foram realizadas e o número de pulgões observados.

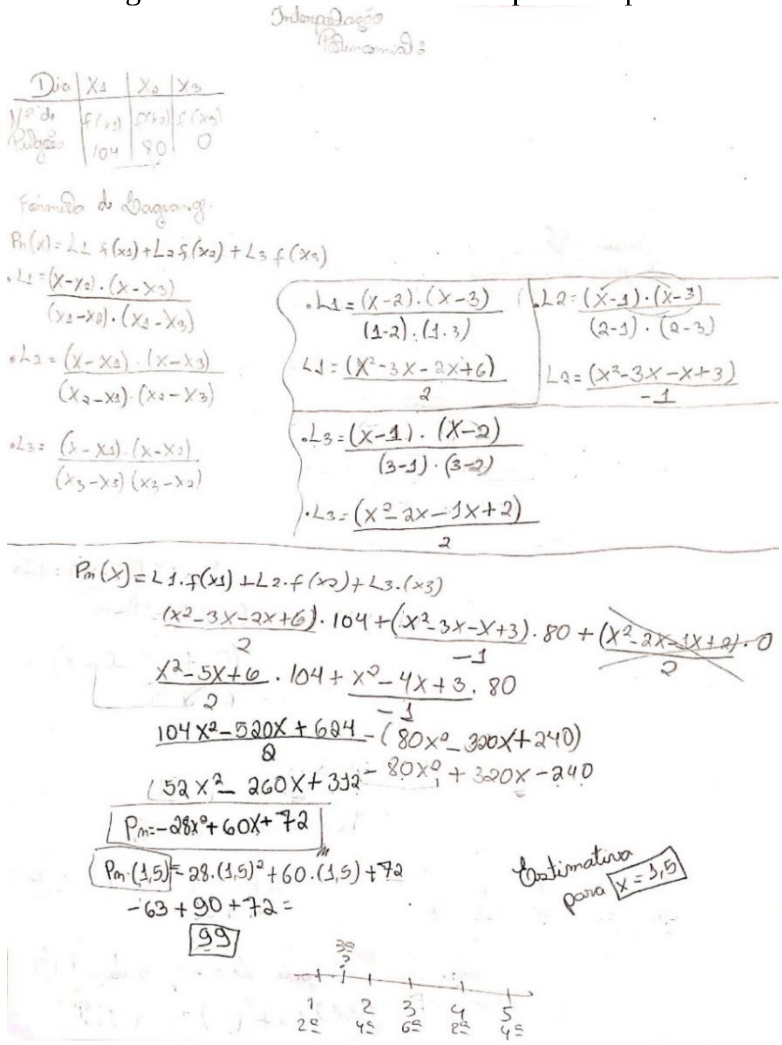
Dia	x^1 1	x^2 2	x^3 3		
Número de Pulgões	104	80	0		

$f(x_1)$ $f(x_2)$ $f(x_3)$

Fonte: Das autoras (2023).

Estas características demonstram o interesse, as tentativas, os erros, as persistências no problema proposto e, principalmente, a curiosidade de encontrar o número de pulgões.

Figura 12 – Cálculos realizados pelo Grupo 3.



Interpolação Polinomial:

Dia	x_1	x_2	x_3
Nº de Pulgões	$f(x_1)$ 104	$f(x_2)$ 80	$f(x_3)$ 0

Fórmula de Lagrange.

$P_n(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$

$\cdot L_1 = \dfrac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}$

$\cdot L_2 = \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}$

$\cdot L_3 = \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

$\cdot L_1 = \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{(1-2)\cdot(1-3)}$

$L_1 = \dfrac{(x^2-3x-2x+6)}{2}$

$\cdot L_2 = \dfrac{(x-1)\cdot(x-3)}{(2-1)\cdot(2-3)}$

$L_2 = \dfrac{(x^2-3x-x+3)}{-1}$

$\cdot L_3 = \dfrac{(x-1)\cdot(x-2)}{(3-1)\cdot(3-2)}$

$\cdot L_3 = \dfrac{(x^2-2x-1x+2)}{2}$

$P_m(x) = L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2) + L_3 \cdot (x_3)$

$\dfrac{(x^2-3x-2x+6)}{2}\cdot 104 + \dfrac{(x^2-3x-x+3)}{-1}\cdot 80 + \cancel{\dfrac{(x^2-2x-1x+2)}{2}\cdot 0}$

$\dfrac{x^2-5x+6}{2}\cdot 104 + \dfrac{x^2-4x+3}{-1}\cdot 80$

$\dfrac{104x^2-520x+624}{2} - (80x^2-320x+240)$

$52x^2-260x+312-80x^2+320x-240$

$\boxed{P_m = -28x^2+60x+72}$

$\boxed{P_m(1,5)} = -28\cdot(1,5)^2+60\cdot(1,5)+72$

$-63+90+72=$

$\boxed{99}$

Estimativa para $\boxed{x=1,5}$

1 2 3 4 5

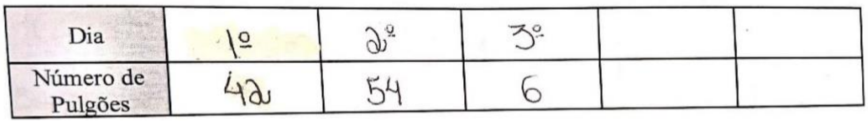
2º 4º 6º 2º 4º

Fonte: Das autoras (2023).

Para este grupo, perguntamos qual foi a experiência, tanto com os novos conceitos, quanto com os cálculos a serem realizados. O grupo nos informou que estava gostando da ideia de “misturar” matemática com biologia, mas que eles estavam com dificuldade de realizar as “contas”. Explicamos que os polinômios devem ser bem trabalhados no ensino básico, visando uma base adequada para os problemas que podem ser encontrados no cotidiano e, por isso, a dificuldade com os cálculos podem vir de várias fontes como cansaço e esquecimento dos assuntos necessários, como distributiva, funções, dentre outros. Contudo, mesmo com todos os obstáculos, conseguiram resolver o problema proposto.

Agora, temos os dados obtidos pelo Grupo 4, representados nas Figuras 13 e 14. Conseguimos perceber que, este grupo utilizou a fórmula corretamente, encontrou o polinômio interpolador, multiplicou pelos coeficientes (que neste caso era o número de pulgões) e encontrou uma aproximação para P(1,5), que seria o dia intermediário entre a primeira e a segunda coleta de dados. Entretanto, quando o grupo finalizou os cálculos e o resultado foi Pn(1,5) = 55,5, eles questionaram o método e responderam que a resposta não estava correta, já que o valor encontrado não estava entre os números de pulgões e, sim, acima.

Figura 13 - Tabela de registro Grupo 4.



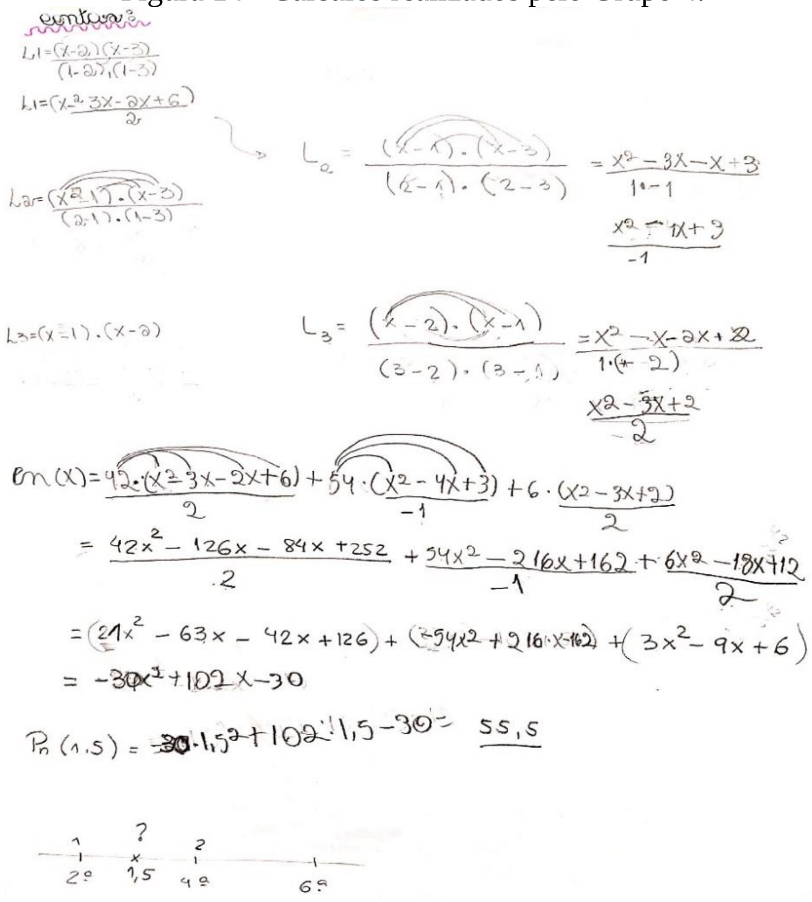
Dia	1º	2º	3º		
Número de Pulgões	42	54	6		

Fonte: Das autoras (2023).

Percebemos que outro grupo estava com o mesmo ‘problema’ e, para aproveitar este acontecimento, interrogamos sobre qual seria o erro cometido e se os próprios grupos poderiam encontrar este erro.

O grupo 4 refez os cálculos e percebeu que nada estava errado e, assim, conseguimos iniciar a discussão do pensamento crítico perante um resultado duvidoso. Este grupo recordou que os dados coletados eram sobre animais e que sua reprodução poderia estar afetada com a forma que foram armazenados. Além disso, relembramos que a interpolação polinomial é uma aproximação de resultados numéricos, que pode deturpar a realidade por utilizar uma função aproximada por outra. Ou seja, os grupos compreenderam que os resultados aproximados podem depender da quantidade de pontos utilizados e da função resultante da aproximação e, com isso, foi possível evidenciar a importância da análise crítica no processo de resolução de problemas. Explicamos que, o pensamento crítico é importante para auxiliar indivíduos e equipes a diagnosticar problemas de maneira mais eficaz e identificar possíveis soluções que não são totalmente óbvias, mas, independentemente do tipo de problema, elas precisam ser tratadas de forma construtiva e eficiente.

Figura 14 - Cálculos realizados pelo Grupo 4.



Fonte: Das autoras (2023).

Temos também o resultado do grupo 5, em que a aproximação para Pn(1,5) resultou em um número negativo. Neste caso, o próprio grupo percebeu o erro pela incoerência da resposta, em que não seria possível encontrar um número negativo de pulgões para a contagem do tamanho da população. Podemos verificar sua análise nas Figuras 15 e 16.

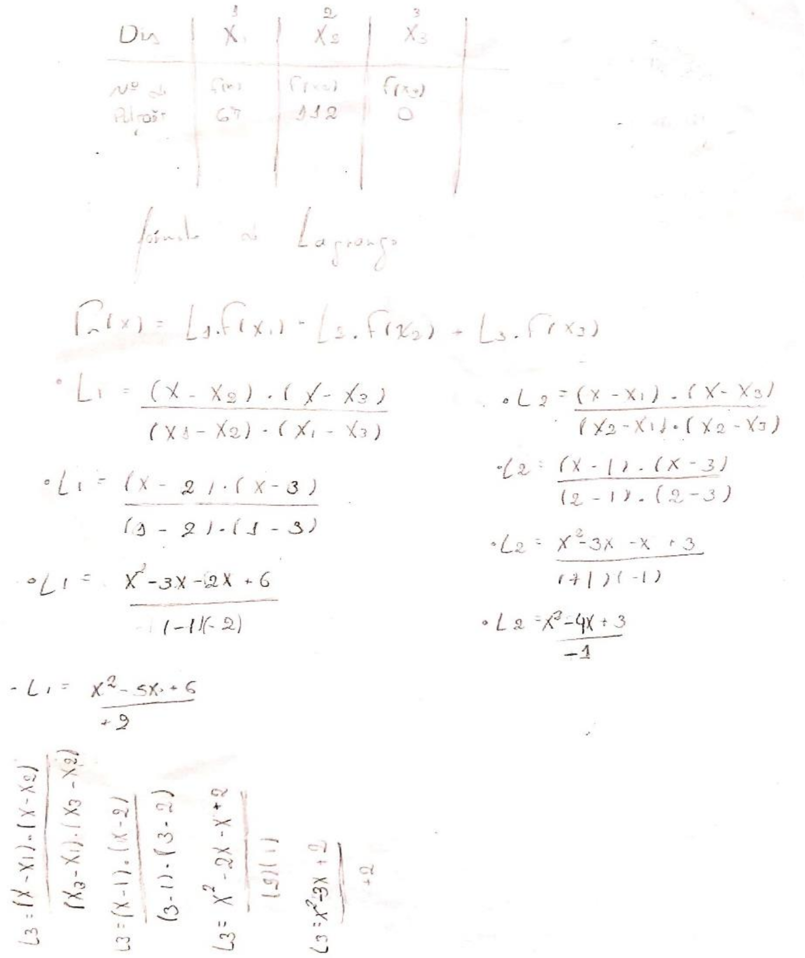
Figura 15 - Tabela de registro Grupo 5.

Dia	1	2	3		
Número de Pulgões	67	112	0		

Fonte: Das autoras (2023).

A realização dos cálculos para encontrar os termos L_1, L_2 e L_3 estão corretos, entretanto o grupo acabou realizando distributivas de forma errônea tentando encontrar o polinômio interpolador.

Figura 16 - Cálculos realizados pelo Grupo 5.

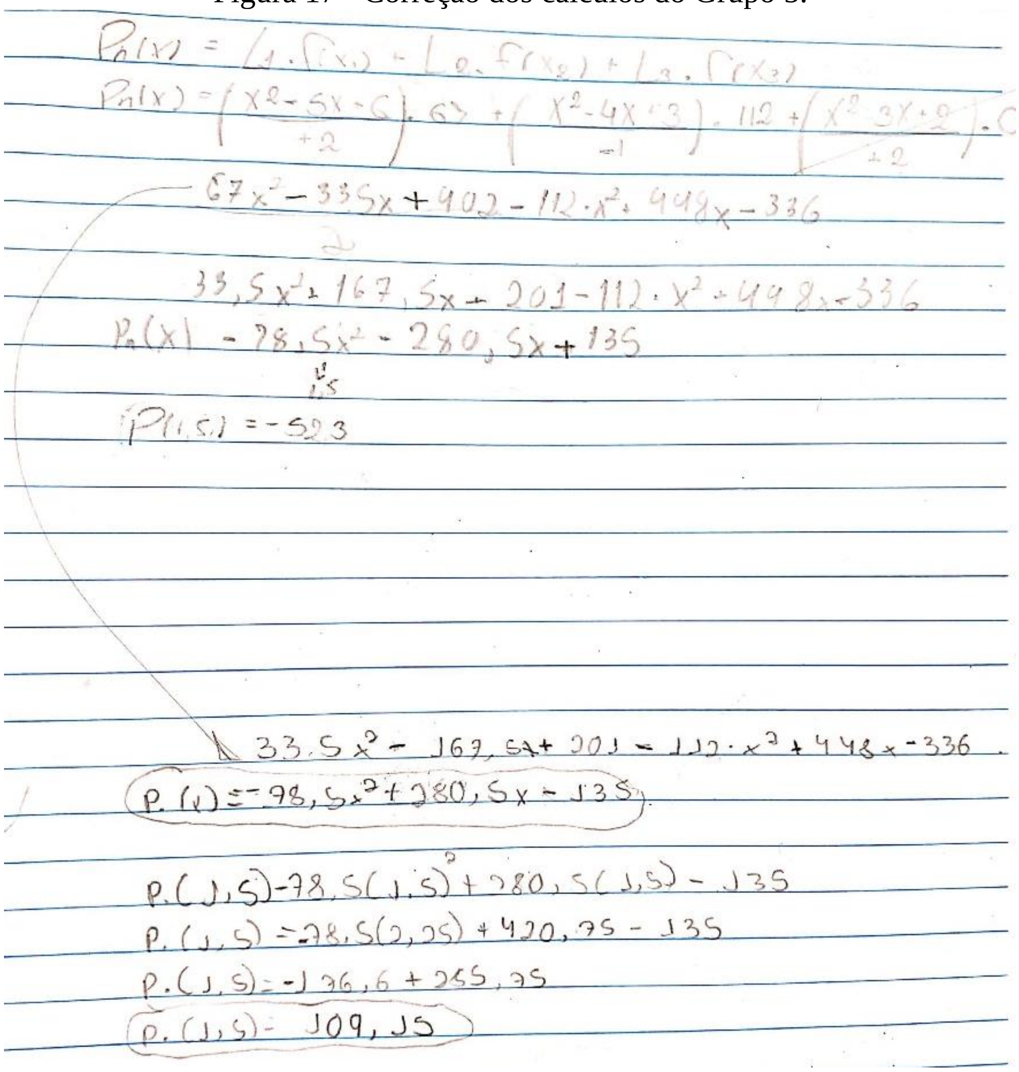


Fonte: Das autoras (2023).

Com isso, aproveitamos o momento para criarmos, novamente, um momento de discussão sobre o pensamento crítico e a necessidade de analisar o resultado obtido, questionando o método utilizado, possíveis erros e ajustes que podem ser necessários. Neste momento, conseguimos perceber que a classe se interessou pelo assunto e pela forma como essas análises poderiam ser realizadas, já que a coleta de dados já estava finalizada e era impossível de ser retomada no mesmo experimento por conta da extinção das populações nas lâminas.

Em seguida, os cinco grupos fizeram análises dos resultados obtidos e o Grupo 5 refez os cálculos, encontrando o erro cometido, como podemos perceber na Figura 17. Este momento se estendeu até o final da aula, aparecendo questionamentos e dúvidas para serem respondidas perante a forma de como analisar corretamente um resultado duvidoso, principalmente utilizando um método numérico.

Figura 17 - Correção dos cálculos do Grupo 5.



Fonte: Das autoras (2023).

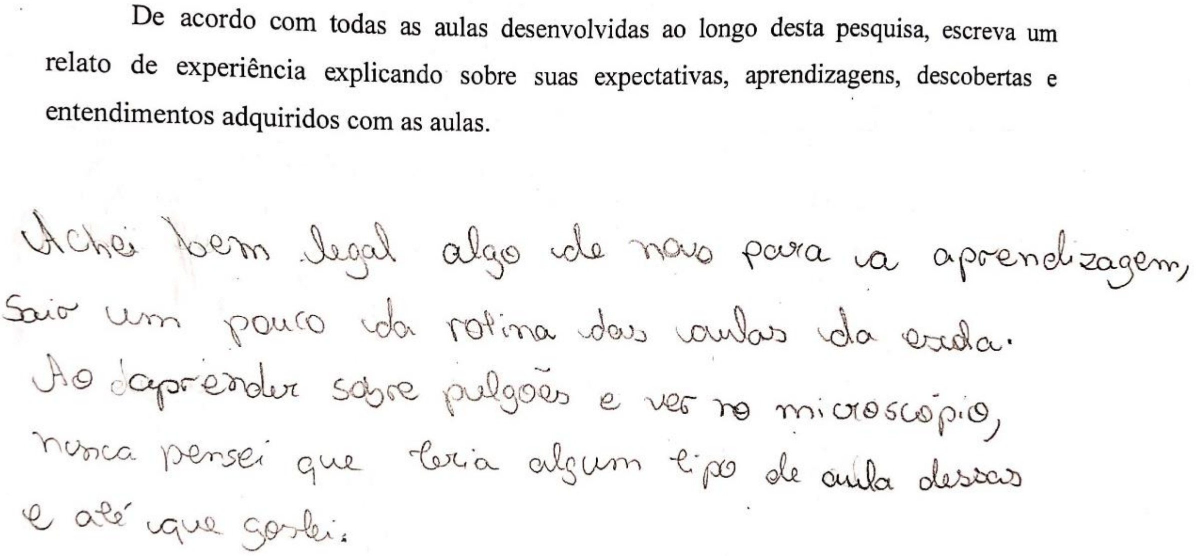
10ª aula: Finalização da pesquisa.

O professor pode, nesta aula, entregar questões de fixação sobre o conteúdo estudado, entretanto, esta etapa da sequência didática é opcional, pois o foco está na experimentação realizada anteriormente. Acreditamos que o processo prático é uma maneira mais didática de se trabalhar o conteúdo de Interpolação no EM, já que as fórmulas e técnicas vão sendo desenvolvidas aos poucos e, assim, a turma consegue criar conjecturas e testá-las em aulas posteriores. Isso faz com o que os próprios alunos consigam reformular suas ideias, chegar em resultados de forma autônoma e, principalmente, consiga compreender o processo.

Portanto, realizamos nesta aula o fechamento da pesquisa e a análise de todo o processo. Primeiramente, realizamos uma conversa sobre os resultados encontrados na aula anterior, se todos os grupos conseguiram compreender as respostas obtidas e o porquê de algumas não coincidirem exatamente com o intervalo esperado. Além disso, explicamos também que a função escolhida para interpolar os dados podem interferir no resultado, pois dependendo do número de pontos observados, a aproximação com a realidade pode ser maior.

Após, entregamos uma folha para que os estudantes pudessem colocar suas considerações sobre o projeto (APÊNDICE G), problemas, erros, dúvidas, dificuldades etc. Uma dessas considerações é do estudante “C”, conforme pode ser observado na Figura 18.

Figura 18 - Considerações finais do estudante "C".



De acordo com todas as aulas desenvolvidas ao longo desta pesquisa, escreva um relato de experiência explicando sobre suas expectativas, aprendizagens, descobertas e entendimentos adquiridos com as aulas.

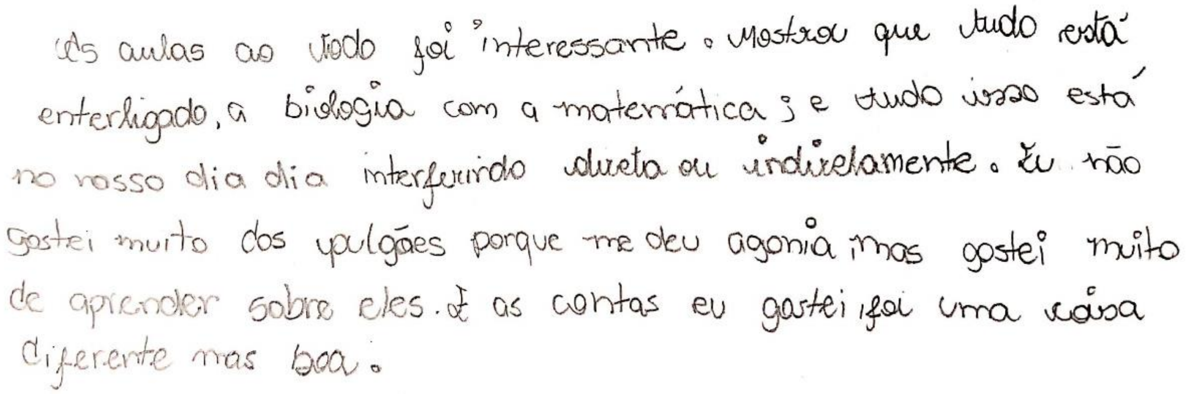
Achei bem legal algo de novo para a aprendizagem,
Saio um pouco da rotina das aulas da escola.
Ao aprender sobre pulgões e ver no microscópio,
nunca pensei que teria algum tipo de aula dessas
e até que gostei.

Fonte: Das autoras (2023).

Ele cita que foi algo novo, que saiu da rotina das aulas tradicionais de matemática e que nunca pensou que teria uma aula assim. Ou seja, a utilização de uma metodologia ativa e de uma atividade distinta das rotineiras, motivou este estudante e evidenciou como a matemática pode ser encontrada na realidade de diferentes formas. Outro fato interessante é o contato com o novo, a fala “até que gostei” demonstra a experiência e a sensação confusa de ver a matemática sendo trabalhada de forma distinta do que ele estava acostumado. Esse costume não é de responsabilidade apenas da professora regente, mas de vários anos com a sensação de que a matemática possui o fim nela mesma. Precisamos, enquanto professores, salientar a importância da interdisciplinaridade, da aplicação da matemática para a motivação do aprender, da autonomia e de parcerias para a formação continuada, para que o trabalho em sala de aula se sustente com combinações eficazes para o processo de ensino e aprendizagem.

Além dessas considerações, temos também o estudante “D”, como podemos analisar na Figura 19. Este aluno conseguiu perceber a interdisciplinaridade proposta e que isso pode sempre ocorrer, além de estarmos cercados pela matemática em nosso cotidiano. Assim, mesmo não se sentindo muito confortável com a manipulação dos insetos, compreende uma forma diferente de aprender a matemática dentro da sala de aula, manuseando as relações intrínsecas que esta interdisciplinaridade pode revelar.

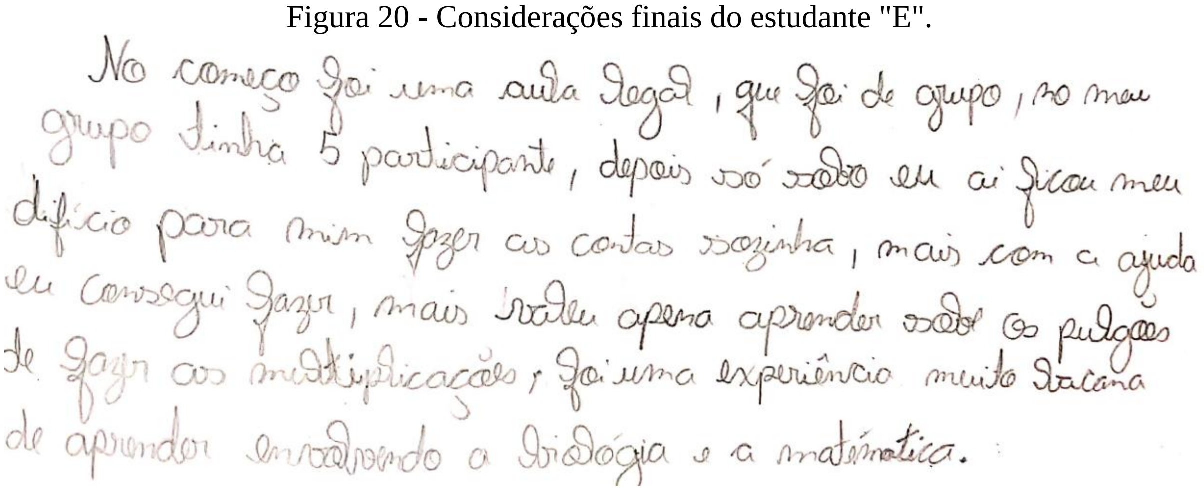
Figura 19 - Considerações finais do estudante "D".


As aulas ao todo foi interessante. Mostrou que tudo está enterligado, a biologia com a matemática; e tudo isso está no nosso dia dia interferindo direta ou indiretamente. Eu não gostei muito dos pulgões porque me deu agonia, mas gostei muito de aprender sobre eles. E as contas eu gostei, foi uma coisa diferente mas boa.

Fonte: Das autoras (2023).

Agora, o estudante “E”, com suas considerações na Figura 20, nos revela a insegurança de se trabalhar com a matemática de forma individual. Este fato poderia se tornar um complicador, mas ele ainda nos mostra como o auxílio do professor é de suma importância para o processo de ensino-aprendizagem dentro da sala de aula. Isto é, colocar confiança em cada discente permite que ele sinta confortável com a atividade proposta, deixando-o livre para experimentar e acolhido quando necessário.

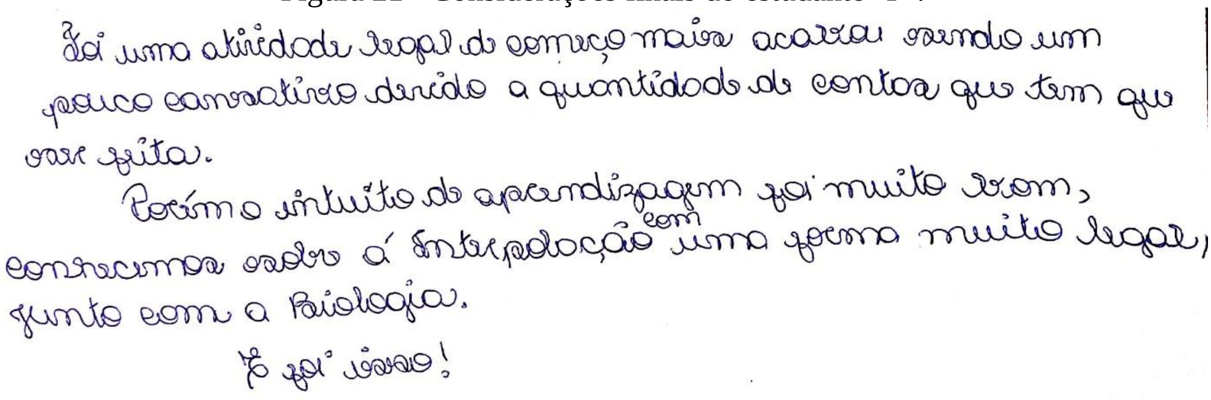
Figura 20 - Considerações finais do estudante "E".


No começo foi uma aula legal, que foi de grupo, no meu grupo tinha 5 participante, depois só sobro eu aí ficou meu dificio para mim fazer as contas sozinha, mais com a ajuda eu consegui fazer, mais valeu apena aprender sobre os pulgões de fazer as multiplicações, foi uma experiência muito bacana de aprender envolvendo a biologia e a matemática.

Fonte: Das autoras (2023).

Para completar nossas experiências, podemos verificar a fala do estudante “F” na Figura 21. Este estudante cita como foi uma maneira interessante de se conhecer a Interpolação Polinomial. Claro, conseguimos identificar a dificuldade com os cálculos e a análise que estas ações acabaram ficando um pouco cansativas, mas temos que levar em consideração o momento em que a turma se encontrava, pois já estavam finalizando o ano letivo, com recuperações e trabalhos finais para serem entregues. Mesmo assim, com todos os obstáculos ali presentes, conseguiram aprender a interpolação e a matemática de forma única e real.

Figura 21 - Considerações finais do estudante "F".


Foi uma atividade legal de começo mais acabou sendo um
pouco cansativo devido a quantidade de contas que tem que
ser feita.
Porém o intuito de aprendizagem foi muito bom,
conhecemos sobre á Interpolação com uma forma muito legal,
junto com a Biologia.
É foi isso!

Fonte: Das autoras (2023).

Para finalizar a aula, recolhemos estas anotações citadas anteriormente e agradecemos o contato, carinho e dedicação em todo o processo da pesquisa. Sabemos que este espaço é rico de informações, por isso, tentamos aproveitar o máximo, mas sempre com o auxílio da professora responsável.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do cenário atual em que a matemática está inserida e é trabalhada por muitos professores, é possível perceber que há novas formas de ensinar que podem ser trabalhadas e com um melhor compreendimento por muitos estudantes, ainda mais quando pensamos na heterogeneidade existente dentro do ambiente escolar.

Com isso, pode-se dizer que este trabalho pode contribuir para a elaboração de um material didático voltado para o ensino de polinômios e da interpolação polinomial no 3º ano do ensino médio. Além disso, é possível notar que aplicando metodologias diferenciadas, mesmo envolvendo conteúdos mais complexos, nesse caso os polinômios interpoladores, os alunos puderam alcançar resultados satisfatórios no processo de aprendizagem. Isso foi concretizado através de uma atividade prática e com os registros escritos recolhidos ao final de cada etapa, que se mostraram capazes de promover uma boa assimilação do conteúdo por parte dos alunos.

As fórmulas e técnicas podem ser decoradas, mas esse não foi o nosso objetivo. Queríamos que os alunos fossem capazes de compreender o conceito e aplicar de forma distinta a cada problema encontrado no dia a dia, avaliando os resultados de maneira crítica. Com isso, no decorrer das aulas propostas, foi possível notar que o público-alvo saiu do estado de inércia para uma posição ativa e participativa. Isso pôde ser notado na cooperação que apresentaram, participando das aulas, respondendo os questionamentos, indagando sobre o conteúdo abordado e os problemas encontrados pelo caminho, respondendo as atividades propostas e, principalmente, analisando os resultados obtidos no final da sequência.

Sendo assim, as principais conclusões que podemos observar com os resultados citados são: a importância da interdisciplinaridade para a motivação dos discentes, apresentando novos caminhos para que a construção do conhecimento seja realizada de forma autônoma e efetiva; a análise crítica ao encontrar resultados incoerentes e/ou negativos, indicando conjecturas para comprovar a dúvida e soluções para cada obstáculo no caminho; a percepção da aplicação de conceitos matemáticos estudados em problemas da vida real, revelando que a matemática não precisa ser um conteúdo isolado e tratada com algo de difícil acesso/entendimento; a importância do trabalho em grupo, assimilando as ideias dos colegas com a sua realidade e com a sua forma de interpretar o mundo; e por fim, a socialização e o compartilhamento de ideias, esclarecendo dúvidas, novas formas de pensar e agir, além de criar ambientes seguros para o trabalho com a matemática.

A atividade prática, desenvolvida ao longo da pesquisa, nos mostrou como a utilização de novas tecnologias, recursos, ferramentas e estratégias sempre são acompanhados de resultados satisfatórios, quando bem trabalhados e sem a simples repetição das fórmulas. Com isso, abordar a modelação matemática por meio da interpolação polinomial permitiu uma aproximação entre teoria e prática, o que foi fundamental para que o conteúdo matemático se tornasse mais familiar aos alunos, facilitando a aprendizagem. Isto é, uma das grandes dificuldades para a aprendizagem da matemática é a persistência na identificação desta fora da escola, buscando estímulos para o desenvolvimento da autonomia e da capacidade de enfrentar situações de forma crítica e justa.

Por fim, com a finalização deste trabalho, pudemos alcançar a vitória de que o assunto não ficou limitado ao conteúdo matemático, mas desencadeou uma proposta de ruptura de barreiras entre a teoria e a prática, o ensino superior e o básico, sobretudo, entre a matemática e o aluno. A partir desta perspectiva, compreendemos que os objetivos propostos foram alcançados, mesmo com limitações temporais, abrindo espaço para novas oportunidades e experiências.

Concluindo, pode-se notar a grande relevância dos polinômios na construção do conhecimento matemático. Para tanto, apresentamos aplicações diversificadas que podem ser estendidas para futuras pesquisas nessa área, pois não podemos deixar de apontar a necessidade e urgência de pesquisas envolvendo novos métodos de ensino, uma vez que é por meio da inovação que o conhecimento pode evoluir nas mais variadas esferas sociais.

7 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney. (2002). Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256007243_Ensino_aprendizagem_com_Modelagem_matematica>. Acesso em 09 de fev. de 2023.

BERLANDI, Letícia. B.; BRANDI, Analice C. **Comparação entre métodos numéricos computacionais na solução de um problema de valor inicial.** Revista Eletrônica Paulista de Matemática. Edição ERMAC. Volume 7, 2016. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v07a01-comparacao-entre-metodos-numericos.pdf>. Acesso em 20 de out. de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 14 de mar. de 2022.

CAIRES, João Batista Silva; NASCIMENTO, Jorge Costa do. Um estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus em ambiente informatizado. **Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 390-409, 2012. Disponível em: <https://web.archive.org/web/20180417124555id_/http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/viewFile/946/677>. Acesso em 02 de nov. de 2021.

CARVALHO, Edna M. de. **Estudos Numéricos dos Métodos de Interpolação: Lagrange, Newton, Hermite e Spline Cúbico.** Dissertação de Mestrado. Dissertação submetida ao PROFMAT da Universidade Federal de São João Del Rei. 2016.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia** – 7ª Edição. McGraw Hill Brasil, 2016. Disponível em: <https://dadospdf.com/download/metodos-numericos-para-engenharia-_5ae5a9a0b7d7bcf438f0b539_pdf>. Acesso em 10 de fev. de 2023.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michèle: SCHNEUWLY, Bernad. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento.** In: SCHNEUWLY, Bernard: DOLZ, Joaquim. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, 2004, p. 95-128.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico.** Pearson, 2006.

GODOY, Arilda Schmidt. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais.** Revista de Administração de empresas, 1995, 35.3: 20-29. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rae/a/ZX4cTGrqYfVhr7LvVyDBgdb/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em 14 de set. de 2021.

INTERPOLAÇÃO – Lagrange. **ECT/UFRN.** Disponível em <https://cn.ect.ufrn.br/index.php?r=conteudo%2Finterp-lagrange>. Acesso em 02 de nov. de 2021.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

LOPES, Álvaro Pereira et al. **Comparação entre métodos de aproximação numérica utilizando o programa MATLAB.** Revista Margens Interdisciplinar, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/handle/2011/12973>. Acesso em 13 de set. de 2021.

LOPES, Arthur Silva et al. **Polinômio Interpolador de Lagrange:** uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na Educação Básica. 2018. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6493>. Acesso em 03 de set. de 2021.

MARTINS, Flávio Inácio da Silveira. **Modelagem de funções via interpolação polinomial de Lagrange.** 2017. 49 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2017. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/8095>. Acesso em 29 de set. 2021.

PONTES, Edel Alexandre Silva. **Uma abordagem analítica da interpolação polinomial em um ambiente computacional: uma experiência prática no processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Técnica.** Revista Thema, v. 16, n. 1, p. 42-49, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1100/1057>. Acesso em 15 de mar. de 2022.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Portugal: Ministério da Educação-BGIdc, 2009. Disponível em: < https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105>. Acesso em 15 de jul. de 2022.

REZENDE, Sarah Martins; FREIRE, Evelise Roman Corbalan Gois. **Um mapeamento de estudos sobre o ensino de Interpolação Polinomial na rede básica brasileira**. In: Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3863/3913>. Acesso em 09 de fev. de 2023.

SANTOS, Alessandro Silva. **Ajuste de curvas por polinômios com foco no currículo do ensino médio.** 2015. 67 f Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1625741>. Acesso em 3 mar. 2022.

SILVA, Gelsivanio Souza da et al. **Uma sequência didática para a abordagem de interpolação polinomial no Ensino Médio.** 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/2424>. Acesso em 09 de nov. de 2021.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica.** Campinas, SP: Papirus. 2008. Disponível em: < https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4309>. Acesso em 10 de mar. de 2023.

SOUZA, Eurice de. **Sobre um método de interpolação polinomial para o problema de linearização exata.** 1998. 73 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade

Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020. Disponível em: <http://repositorio.ufu.br/handle/123456789/29248>. Acesso em 25 de set. de 2021.

THIEGHI, Leila T. **Funções Polinomiais.** 2017. Disponível em: https://repositorio.unifesp.br/xmlui/bitstream/handle/11600/61935/Fun%C3%A7%C3%B5es%20polinomiais_v2.pdf?sequence=1>. Acesso em 10 de nov. de 2021.

APÊNDICE A - Sequência didática de interpolação polinomial

Neste momento será descrito uma sequência didática (SD) para o ensino de interpolação polinomial, utilizando a fórmula de Lagrange, no ensino médio.

Objetivos:

Desenvolver uma proposta didática para o ensino de interpolação polinomial, apresentando os conceitos de interpolação utilizando o polinômio interpolador de Lagrange, para uma turma do ensino médio. Essa proposta didática constitui de um conjunto de aulas e de um problema prático, objetivando a criação de condições para a compreensão dos principais conceitos e, principalmente, das suas aplicações no cotidiano.

Público-alvo:

Alunos do 3º ano do ensino médio.

Pré-requisitos:

Esta proposta possui atividades que utilizará polinômios, o cálculo do seu valor numérico, operações com polinômios e, com isso, a representação de coordenadas cartesianas no plano cartesiano (pares ordenados).

Materiais e recursos:

Os materiais utilizados podem ser modificados de acordo com a necessidade de cada aula/professor. Porém, nesta proposta, os materiais necessários serão: lápis, borracha, régua, caderno, atividades impressas para toda a turma, giz e quadro, caixa contendo Pulgões, tabelas para anotações e materiais de manipulação com os insetos.

Habilidades da BNCC:

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização.

Recomendações metodológicas:

O professor deve observar dificuldades e questionamentos entre os estudantes, visando a construção de condições para o aprendizado do novo conteúdo estudado. As atividades aqui descritas podem ser trabalhadas individualmente ou em grupos pequenos.

Dificuldades previstas:

Como a proposta desta sequência didática visa estudar a Interpolação Polinomial com estudantes do 3º ano do E.M., é provável que parte desses alunos não se recorde de alguns conteúdos citados nos pré-requisitos e, também, não compreenda a importância de tal tema no ensino básico. Desse modo, o professor deve relembrar estes conteúdos e evidenciar a importância da interpolação como uma teoria de aproximações, com aplicação em vários momentos em que não seja possível calcular pontos, dentro de um determinado intervalo, e que serão importantes em alguma necessidade específica.

Descrição geral da proposta:

A proposta didática aqui descrita foi planejada e dividida em cinco etapas: Estudos iniciais, Experimentação prática, Introdução ao problema do experimento, Formalização dos conceitos sobre Interpolação e Finalização do projeto. Essas etapas deverão ser desenvolvidas ao longo das aulas destinadas para este projeto. No geral, a sequência didática se apoia em aulas introdutórias, revisão de conceitos, definição de novos conceitos, exemplos e trabalho prático. Por fim, é necessário que o professor analise calmamente os resultados obtidos e trabalhe em cima destes resultado para que, assim, o aprendizado seja efetivo e eficiente.

- **1ª ETAPA: Estudos iniciais.**

1ª aula: Introdução.

Nesta primeira aula, deverá ser realizada uma roda de conversa para identificar conhecimentos prévios e necessidades específicas de cada estudante. Para isso, sugerimos que o professor entregue uma atividade contendo algumas questões sobre assuntos importantes para a continuação da proposta. Essa atividade pode possuir assuntos sobre pontos em eixos cartesianos, funções afins e quadráticas, esboço de gráficos e uma questão sobre o que os estudantes sabem sobre polinômios com grau superior a dois.

Essa parte da proposta tem como intuito verificar se os estudantes compreendem sobre representações de pontos em um sistema de eixos coordenados, quais seus conhecimentos sobre funções (afim e quadrática) e o esboço de seus gráficos. A atividade deverá ser entregue de forma impressa e recolhida ao final da aula.

Ao final desta aula introdutória, o professor deve recolher a atividade e explicar para a turma que irá levar os resultados na próxima aula. Desse modo, o docente deve analisar as respostas de cada estudante de forma a compreender as necessidades e dificuldades.

2ª aula: Retomada de conceitos.

Com os resultados obtidos na atividade anterior, o docente deve realizar uma aula com revisão desses conceitos. Essas retomadas serão importantes para o entendimento do conteúdo sobre Interpolação Polinomial e para o aprendizado efetivo, pois é importante, também, que o professor considere dois fatores que desempenham papel fundamental: os conceitos e as habilidades que o aluno já possui. Ou seja, os materiais de aprendizagem devem ser organizados e as novas ideias devem ser significativas.

- **2ª ETAPA: Experimentação prática.**

3ª aula: Explicações sobre o experimento.

Nesta aula, o professor deve explicar como acontecerá o experimento, quais seus objetivos iniciais, quais materiais serão utilizados, qual será o papel de cada estudante e o objetivo final.

Um exemplo de experimentação é: a contagem do número de pulgões, em cada aula de matemática, durante um determinado período. O pulgão *Myzus Persicae* apresenta um ciclo de vida curto e com alta capacidade reprodutiva, portanto, quase sempre atinge altas densidades populacionais no campo. Diante disso, o professor pode convidar um grupo de pesquisadores do departamento de Entomologia de uma universidade para que estes deem mais informações sobre estes insetos para toda a turma, como sua reprodução, o manejo adequado, materiais importantes para a coleta de dados, dentre outros.

Desse modo, esta aula será destinada ao reconhecimento da proposta do experimento, dos insetos que serão trabalhados e dos objetivos para cada contagem, além de evidenciar a forma como essa contagem deve ser realizada e anotada.

4ª aula: Entrega dos pulgões.

Para iniciar a atividade, o professor deverá dividir a turma em grupos e reorganizar a sala de acordo com estes grupos formados. Após, deverá ser entregue uma caixa com o número inicial distinto de pulgões para cada grupo de alunos.

Inicialmente, os grupos irão observar a caixa, os insetos, suas características mais visíveis e o número inicial entregue para cada um deles. Depois deste momento, o professor deverá entregar os materiais no qual os grupos irão necessitar durante o experimento, sendo eles: luvas, espátulas de laboratório para pegar os pulgões (ou algo similar) e uma tabela para a coleta de dados.

O docente deve explicar a forma correta como será realizada a coleta de dados. Em todas as aulas de matemática os estudantes, com o auxílio do professor, deverão abrir a caixa e fazer a contagem do número de pulgões naquele dia. Cada grupo, com a tabela em mãos, deverão anotar o respectivo dia de contagem (1, 2, 3...) e o número de insetos observados. Um exemplo de tabela pode ser a seguinte:

Tabela 2 – Como organizar os dados coletados.

Dia	1	2	3	4	5	6			
Número de pulgões									

Fonte: Das autoras(2022).

O professor deverá realizar a primeira contagem com todos os grupos, observando eventuais dúvidas, orientando para os demais dias e, ainda, retomando a explicação realizada para cada estudante. Ou seja, o docente irá preencher a tabela com o primeiro dia de contagem e o número inicial de x pulgões, repetindo a contagem em cada grupo.

- **3ª ETAPA: Introdução ao problema do experimento.**

5ª aula: Análise dos dados coletados.

Ao longo das aulas de matemática e das contagens dos pulgões, os estudantes irão preenchendo a tabela e coletando os dados. Quando o professor perceber que há um número de observações suficientes e interessantes, deve iniciar a discussão do problema do experimento.

Esse problema consiste em que, a contagem dos pulgões será realizada em todas as aulas de matemática, porém, propositalmente, nos dias que não haverá aula de matemática, a contagem não será feita. Com isso, o professor consegue uma forma de questionar os estudantes a pensarem no número de pulgões nos dias que não foram feita a coleta de dados e, essa forma, é utilizar a Interpolação Polinomial como recurso.

Por isso, nesta aula o professor deve levantar questionamentos e conjecturas para que os grupos consigam estimar a quantidade de pulgões em determinado final de semana. Para isso, ele deve reorganizar a sala de acordo com os grupos formados e entregar uma folha branca para cada um deles. Nesta folha, os alunos devem colocar suas ideias para resolver o problema, colocando os nomes dos integrantes do grupo e entregar para o professor ao final da aula.

Durante este tempo, o docente deve observar os diálogos entre a turma e, se necessário, encaminhar o grupo para um caminho mais próximo das ideias iniciais de Interpolação.

4ª ETAPA: Formalização dos conceitos sobre Interpolação.

6ª aula: Novos conceitos.

Para introduzir o conteúdo de Interpolação, é interessante que o professor inicie a aula explicando sobre o conceito de aproximações de funções. Para isso, ele pode entregar um pequeno resumo impresso ou escrever no quadro, pedindo aos estudantes que copiem no caderno. Um exemplo de explicação sobre o tema é: "Aproximações de funções consiste em utilizar métodos que aproximem funções a outras mais simples, obtendo uma caracterização de ambas as funções. Com isso, temos os polinômios e sua simplicidade, que permite uma aproximação polinomial de vários modos distintos. Um destes modos é a Interpolação Polinomial, então, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a represente". Após apresentar este pequeno resumo, o professor deve questionar os estudantes sobre seus entendimentos do tema.

Mais adiante, o professor deve explicar mais características da Interpolação Polinomial: "Esses métodos de Interpolação Polinomial são utilizados como uma aproximação para uma função f(x), principalmente, nas seguintes situações: 1) não conhecemos a expressão analítica de f(x), ou seja, sabemos apenas seu valor em alguns pontos e necessitamos manipular f(x) em algum outro ponto específico; ou f(x) é extremamente complicada e de difícil manejo, então, é possível sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos".

Esses conceitos podem ser adaptados de acordo com a turma de cada professor. A ideia é explicar de forma simples, evidenciando a importância deste método no cotidiano e sanar todas as dúvida iniciais sobre o tema.

7ª aula: O polinômio interpolador.

Com base na aula anterior e com as ideias de cada discente, foi introduzido o conceito de interpolação. Agora, o professor deve introduzir o conceito de Polinômio Interpolador e um exemplo de explicação é: "O problema geral da Interpolação por meio de polinômios consiste em, dados n+1 pontos distintos, determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n, tal que $P_n(x_0)=y_0$; $P_n(x_1)=y_1$; ...; $P_n(x_n)=y_n$. Tal polinômio existe e é único. Desse modo, chama-se polinômio de interpolação de uma função y = f(x) sobre um conjunto de pontos distintos x_0, x_1, ... , x_n, ao polinômio de grau no máximo n que coincide com f(x) em x_0, x_1, ... , x_n. Tal polinômio será designado por $P_n(x)$".

Da mesma forma que a aula anterior, o professor pode adaptar as definições de acordo com as necessidades da turma, buscando sanar possíveis dúvidas e questionamentos. Nesta mesma aula, para finalizar, o professor pode resolver um pequeno exemplo junto com a turma, exemplificando os conceitos ensinados. Uma sugestão de problema é: "Dados os pares de pontos (−1, 15); (0, 8); (3, −1), determinar o polinômio de interpolação para a função definida por este conjunto de pares de pontos".

8ª aula: Mais conjecturas.

Nesta aula, o professor deve introduzir os conceitos sobre a fórmula de Lagrange, porém, pedindo aos estudantes que formem conjecturas do problema inicial do número de pulgões antes de ensinar tal fórmula. Com isso, o professor pode reorganizar a sala em grupos pequenos de alunos e entregar outra folha branca para cada um deles. O intuito é verificar se os estudantes, ou alguns deles, já conseguem utilizar a aula anterior e encontrar alguma relação com o problema introduzido no início da pesquisa. Ao decorrer desta aula, o professor deve verificar as conjecturas formadas e, se necessário, ajudar alguns grupos a começar suas ideias.

Após passar um tempo estabelecido pelo professor, ele deve escolher alguns grupos e pedir para que os estudantes demonstrem suas ideias no quadro. É interessante que o docente escolha grupos com diferentes respostas, com o objetivo de criar um ambiente de discussões sobre o assunto escolhido. No final da aula, o professor deve recolher as folhas que serão analisadas da mesma forma, buscando compreender características e necessidades específicas.

9ª aula: Fórmula de Lagrange.

Inicialmente, o professor deve introduzir a fórmula de Lagrange, com um pequeno resumo na lousa: "Sejam x_0, x_1, ... , x_n n+1 pontos distintos. Consideremos para k = 0, 1, ... , n, os seguintes polinômios $\ell_k(x)$ de grau n:

$$\ell k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Para valores dados: $f_0=f(x_0)$, $f_1=f(x_1)$, ... , $f_n=f(x_n)$ de uma função y = f(x), o polinômio:

$$P_n\ (x_k) = \sum_{k\,=\,0}^{n} f_x \ell_k(x)$$

é de grau no máximo n e satisfaz: $P_n\ (x_k) = f_k$, com k = 0, 1, 2, ..., n.

Portanto, a fórmula ℓk(x) é chamada de Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação e, $P_n(x)$ assim definido, é o polinômio de Interpolação de f(x) sobre os pontos x_0, x_1, ..., x_n”.

Para que os estudantes consigam compreender esta aula, o professor pode resolver um exercício, mas, dependendo da turma, o professor pode escolher deixar este exemplo para a próxima aula. Uma sugestão de exemplo é: “Conhecendo a seguinte tabela:

x	-1	0	3
f (x)	15	8	-1

Determine o polinômio de interpolação na forma de Lagrange e calcule uma aproximação para f(1) utilizando o polinômio encontrado”. Este exemplo já introduz uma tabela, que recorda a tabela preenchida pelos dados coletados na contagem dos pulgões, o professor deve incentivar que os estudantes resolvam a questão e, no final, faça a correção no quadro.

10ª aula: Formalização dos conceitos.

Para que o professor caminhe para o final da pesquisa, é interessante formalizar estes conceitos que foram estudados e trazer uma explicação geométrica, para os estudantes, do que está acontecendo por trás destes polinômios de interpolação. Para isso, é interessante começar com uma retomada: “Vimos então que para obter o valor da função em um ponto não tabelado, podemos aproximar a função por seu polinômio de interpolação e, através deste, ter uma aproximação do valor da função no ponto”.

O professor deve questionar eventuais dúvidas e, após, colocar o seguinte problema na lousa: “Encontre o polinômio que melhor se ajusta aos pontos (-1, 3), (2, 6) e (4, -2) (ECT/UFRN)”. Este exemplo deve ser resolvido pelo professor junto com a turma, encontrando o grau do polinômio, os polinômios de interpolação e o polinômio final. Com esses dados, o professor deve desenhar cada gráfico no quadro e explicar que, cada polinômio de interpolação é responsável por fornecer um ponto de seu gráfico e, assim, unindo todos os pontos ofertados, obtém-se um polinômio ajustado para todos os valores dados.

Para finalizar esta aula, o professor deve organizar a turma em uma roda e questionar sobre dúvidas em qualquer parte do conteúdo estudado e, com isso, tentar sanar todas elas. Caso não seja possível realizar ainda nesta aula, o docente pode iniciar a próxima aula com o restante das dúvidas.

4ª ETAPA: Finalização do projeto

11ª aula: Retomada ao problema dos pulgões.

Para retomar o problema dos pulgões, o professor deve pedir a turma que organize os grupos iniciais e, depois, entregar as duas folhas recolhidas nas aulas anteriores para cada grupo. Após, o mesmo deve pedir que os estudantes façam novas conjecturas sobre como encontrar o número de pulgões em um determinado final de semana em que a contagem não foi realizada.

Para os estudantes que ainda estiverem com dúvidas, o docente deve fazer observações e explicações pontuais, tentando deixar para os próprios estudantes perceberem qual é o erro cometido por eles.

Para finalizar esta aula, o professor pode escolher alguns dos dados coletados pelos estudantes, escrever no quadro e pedir para grupos diferentes encontrar o polinômio que melhor se ajusta aos dados coletados pelos colegas, utilizando a fórmula de Lagrange. Como o número inicial de pulgão de cada grupo foi distinto, essa etapa pode ser interessante para que os estudantes façam comparações entre seus resultados, encontrando erros e semelhanças entre as resoluções dependendo do número inicial.

12ª aula: Problemas de fixação (opcional).

O professor pode, nesta aula, entregar questões de fixação sobre o conteúdo estudado, entretanto, esta etapa da sequência didática é opcional, pois o foco está na experimentação realizada anteriormente. Acreditamos que o processo prático é uma maneira mais didática de se trabalhar o conteúdo de Interpolação no EM, já que as fórmulas e técnicas vão sendo desenvolvidas aos poucos e, assim, a turma consegue criar conjecturas e testá-las em aulas posteriores. Isso faz com o que os próprios alunos consigam reformular suas ideias, chegar em resultados de forma autônoma e, principalmente, consiga compreender o processo.

Sendo assim, esta atividade de fixação pode ser interessante se utilizada de forma correta, colocando problemas reais e do cotidiano dos estudantes, para que estes tentem desenvolver ideias sobre o conteúdo estudado, sem a simples repetição das fórmulas.

APÊNDICE B – Termo de assentimento

I - IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

Título do trabalho experimental: Uma sequência didática sobre Interpolação Polinomial de Lagrange no ensino médio.

Pesquisador(es) responsável(is): Sarah Martins Rezende (estudante de graduação) e Profª Drª Evelise Roman Corbalan Gois Freire (ICET/UFLA).

Telefone para contato: (35)99868-5444 e (35)98713-3334.

II - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO

A proposta didática foi planejada e dividida em cinco etapas: Estudos iniciais, Experimentação prática, Introdução ao problema do experimento, Formalização dos conceitos sobre Interpolação e Finalização do projeto. Na primeira aula, deverá ser realizada uma roda de conversa para identificar conhecimentos prévios e necessidades específicas de cada estudante. Com os resultados obtidos na atividade anterior, o professor deve realizar uma aula com revisão desses conceitos.

O experimento prático proposto é: a contagem do número de pulgões, em cada aula de matemática, durante um determinado período. O pulgão é da espécie *Myzus Persicae* apresenta um ciclo de vida curto e com alta capacidade reprodutiva. Estes insetos serão doados pelo departamento de Entomologia da UFLA e, por isso, alguns professores deste departamento irão até a escola esclarecer qualquer dúvida sobre os pulgões, além de entregar materiais adequados para a coleta de dados.

O objetivo da pesquisa é: a contagem dos pulgões será realizada em todas as aulas de matemática, porém, propositalmente, nos dias que não haverá aula de matemática, a contagem não será feita. Com isso, o professor conseguirá uma forma de questionar os estudantes a pensarem no número de pulgões nos dias que não foram feita a coleta de dados e, essa forma, é utilizar a Interpolação Polinomial como recurso (que é o objeto de estudo da pesquisa).

Com isso, o pesquisador irá desenvolver um conjunto de aulas para que os estudam consigam aprender sobre a interpolação polinomial no ensino médio, sempre de forma clara e objetiva, tentando mostrar a matemática no dia a dia.

III - PARTICIPAÇÃO VONLUNTÁRIA

A sua participação em qualquer tipo de pesquisa é voluntária. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva ou ligue para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037, Telefone: 3829-5182.

Eu____, declaro que li e entendi todos os procedimentos que serão realizados neste trabalho. Declaro também que, fui informado que posso desistir a qualquer momento. Assim, após consentimento dos meus pais ou responsáveis, aceito participar como voluntário do projeto de pesquisa descrito acima.

Lavras, _____ de __________________ de 20______.

NOME (legível)____RG_________________

ASSINATURA____

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

No caso de qualquer emergência entrar em contato com a pesquisadora responsável no ICET (Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas). Telefones de contato: (35)98713-3334.

APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

Prezado(a) Senhor(a), você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa de forma totalmente voluntária da Universidade Federal de Lavras. Antes de concordar, é importante que você compreenda as informações e instruções contidas neste documento. Será garantida, durante todas as fases da pesquisa: sigilo; privacidade; e acesso aos resultados.

I - Título do trabalho experimental: Uma sequência didática sobre Interpolação Polinomial de Lagrange no Ensino Médio
Pesquisador(es) responsável(is): Sarah Martins Rezende e Evelise Roman Corbalan Gois Freire.
Cargo/Função: Aluna de graduação e professora, respectivamente.
Instituição/Departamento: UFLA - Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas.
Telefone para contato: (35) 99868-5444 e (35)9871-3334, respectivamente.
Local da coleta de dados: Escola Estadual Firmino Costa.

II - OBJETIVOS
Desenvolver uma proposta didática para o ensino de interpolação polinomial, apresentando os conceitos de interpolação utilizando o polinômio interpolador de Lagrange, para uma turma do ensino médio. Essa proposta didática constitui de um conjunto de aulas e de um problema prático, objetivando a criação de condições para a compreensão dos principais conceitos e, principalmente, das suas aplicações no cotidiano.

III – JUSTIFICATIVA
A Interpolação Polinomial é uma ferramenta importante para a análise de funções em pontos, internos a um intervalo, que não foram dados. Desse modo, o estudo e a pesquisa nesta área do conhecimento é necessária para o entendimento de conceitos práticos, como aproximações de funções e análise dessas aproximações. Portanto, o desenvolvimento dessa sequência didática pode ser justificada pelo objetivo de evidenciar a matemática como algo presente em várias instâncias e, portanto, pode ser estudada e compreendida por todos os alunos.

IV - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO
AMOSTRA
A partir do desenvolvimento da sequência didática e da parte teórica, será utilizado para a coleta de dados as ideias escritas pelos alunos em folhas a serem entregues pelo professor no início das aulas e recolhidas ao final. Além disso, ao final da pesquisa, os estudantes responderão um questionário sobre a pesquisa, pesquisadora e os conhecimentos adquiridos ao longo das aulas. De acordo com a Res. 510/2016, Art. 2.XII, o registro do consentimento pode ser feito usando qualquer meio, formato ou mídia, como papel, áudio, filmagem, mídia eletrônica e digital, que registra a concessão de consentimento livre e esclarecido. Assim, O TCLE será parte do formulário o qual o aluno deverá preencher, garantindo assim que ao responder o questionário, o aluno está de acordo com o TCLE. Após, a pesquisadora se propõe ainda, a imprimir o TCLE e entregar uma via para cada estudante participante da pesquisa.

EXAMES
Considera-se participante da pesquisa aqueles estudantes que compareceram na aula introdutória, aceitaram participar da pesquisa, compareceram no mínimo em 60% das aulas e responderam ao questionário final que será entregue impresso no último dia de pesquisa.

V - RISCOS ESPERADOS
A avaliação do risco da pesquisa é MÍNIMO, mas não possamos descartá-los. Há, então, o risco de um aluno se sentir desconfortável em trabalhar com o inseto Pulgão, da espécie *Myzus Persicae*, mesmo que uma equipe da Entomologia da UFLA apresente instruções/orientações com respeito a este inseto, dando a garantia de que este não produza risco algum para a saúde das pessoas que os manusearão. Para minimizar este risco, um grupo de alunos e professores do departamento de Entomologia da UFLA se voluntariou a participar da segunda aula da pesquisa, levando considerações importantes sobre o inseto e, principalmente, sobre o seu manuseio. Diante disso, caso algum estudante não queira participar da pesquisa, este ficará desobrigado de participar da sequência didática e de responder qualquer questionário realizado.

VI – BENEFÍCIOS
Os participantes da pesquisa se beneficiarão do fato de haver discussões sobre Interpolação Polinomial, suas aplicações no cotidiano, métodos de resolução e, também, diferentes metodologias de ensino, já que, durante a pesquisa, utilizaremos metodologias alternativas de ensino, como modelagem investigativa e, principalmente, a parte prática da pesquisa, que pode evidenciar a matemática no cotidiano de toda a turma.

VII – CRITÉRIOS PARA SUSPENDER OU ENCERRAR A PESQUISA

Caso qualquer dificuldade seja encontrada pelos participantes, a pesquisa será interrompida imediatamente. Fora isso, a pesquisa deverá se encerrar após seguir seu cronograma, e a pesquisadora apresentar seu TCC e entregar a versão final de sua monografia (para o curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal de Lavras).

VIII - CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

SE PARTICIPANTE MENOR DE IDADE (CASO CONTRÁRIO, RETIRE ESSE CAMPO!)

Eu____, responsável pelo menor ____, certifico que, tendo lido as informações acima e suficientemente esclarecido (a) de todos os itens, estou plenamente de acordo com a realização do experimento. Assim, eu autorizo a execução do trabalho de pesquisa exposto acima.

Lavras, _____ de _________________ de 20_____.

______________________________________ ______________________________________

Nome (legível) / RG Assinatura

SE PARTICIPANTE MAIOR DE IDADE

Após convenientemente esclarecido pelo pesquisador e ter entendido o que me foi explicado, consinto em participar do presente Projeto de Pesquisa. Lavras, _____ de _________________ de 20_____.

______________________________________ ______________________________________

Nome (legível) / RG Assinatura

ATENÇÃO! Por sua participação, você: não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira; será ressarcido de despesas que eventualmente ocorrerem; será indenizado em caso de eventuais danos decorrentes da pesquisa; e terá o direito de desistir a qualquer momento, retirando o consentimento sem nenhuma penalidade e sem perder quaisquer benefícios. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037. Telefone: 3829-5182.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

No caso de qualquer emergência entrar em contato com o pesquisador responsável no ICET (Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas). Telefones de contato: (35)98713-3334.

Para possíveis dúvidas: Sarah Martins - (35) 99868-5444 – sarah.rezende@estudante.ufla.br

APÊNDICE D – Atividade Introdutória

Nome:

De acordo com os seus conhecimentos prévios, responda as questões abaixo.

1) Em um plano cartesiano, marque os seguintes pares ordenados:
(2, -3), (0, 0), (-1, -4), (2, 5), (-4, 6), (0, 2) e (3, 0).

2) Dados os polinômios $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ e $q(x) = x^2 - 3x + 4$, descubra a diferença entre p(3) e q(-2).

3) Determine a equação da reta que passa pelos pontos (-1, 2) e (1, 8).

4) Em plano cartesiano, esboce o gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$.

5) Descreva o que você conhece sobre funções de grau superior a 2.

Respostas:

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

APÊNDICE E – Tabela de registro de crescimento do pulgão *Myzus Persicae*

Integrantes do grupo:

1)

2)

3)

4)

5)

Complete a tabela abaixo com as datas em que as coletas de dados foram realizadas e o número de pulgões observados.

Dia					
Número de Pulgões					

Observações que o grupo deseja realizar:

APÊNDICE F – Estimativas iniciais

Integrantes do grupo:

1)

2)

3)

4)

5)

De acordo com as aulas anteriores, anotem abaixo ideias de como podemos encontrar o número de pulgões nos dias em que a contagem não foi realizada. Façam observações, formem conjecturas, testem e deixem tudo anotado.

APÊNDICE G – Finalizando a pesquisa

Nome:

De acordo com todas as aulas desenvolvidas ao longo desta pesquisa, escreva um relato de experiência explicando sobre suas expectativas, aprendizagens, descobertas e entendimentos adquiridos com as aulas.