



**GLEISON ELIAS DE ALMEIDA MORAIS**

**O DESENVOLVIMENTO DA NOÇÃO DE FRAÇÃO EM  
SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM**

**LAVRAS - MG  
2020**

**GLEISON ELIAS DE ALMEIDA MORAIS**

**O DESENVOLVIMENTO DA NOÇÃO DE FRAÇÃO EM  
SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Federal de  
Lavras, como parte das exigências do  
Curso de Pedagogia, para obtenção do  
título de Licenciado em Pedagogia.

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade  
Orientador

**LAVRAS - MG  
2023**

**GLEISON ELIAS DE ALMEIDA MORAIS**

**O DESENVOLVIMENTO DA NOÇÃO DE FRAÇÃO EM  
SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Federal de  
Lavras, como parte das exigências do  
Curso de Pedagogia, para obtenção do  
título de Licenciado em Pedagogia.

APROVADO em 10 de Março de 2023.  
José Antonio Araujo Andrade UFLA  
Fernanda Barbosa Ferrari UFLA  
Helaina de Fátima Vinhas Pereira UFLA

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade  
Orientador

**LAVRAS - MG  
2023**

*A todos que lutam por uma educação pública de  
qualidade, e que dela usufruem e merecem uma formação  
que os qualifique a realizar seus sonhos e viver suas vidas  
com dignidade.*

## **AGRADECIMENTOS**

Após muita luta e dedicação na formação, finalmente concluo o curso, como representado neste trabalho. Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que me ajudaram nessa empreitada, seja com apoio emocional, teórico ou prático. A todos que dedicaram seu tempo para me fornecer base, força e conforto na continuidade do curso e na elaboração deste trabalho.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, que me deu forças e condições para continuar. Sem ele nada posso ser e fazer.

Gostaria de agradecer à minha família, pelo apoio constante e por sempre acreditar no meu potencial.

Ao meu namorado, Welliton, gostaria de agradecer pelo apoio incondicional e pela parceria na vida, seja ela em momentos bons ou ruins.

Agradeço a todos os meus amigos, que estiveram presentes em diferentes momentos, cada um contribuindo à sua maneira.

Agradeço aos meus amigos e colegas de apartamento Clisman'n, Giovane e Raphael, e os demais que mesmo em menor tempo sempre me apoiaram, assim como aos demais moradores amigos vizinhos da Moradia Estudantil.

A todos meus professores da educação básica, que me inspiraram a seguir o caminho da educação, e a todos os professores do curso de Pedagogia, que me formaram para ser um educador capaz de fazer a diferença na aprendizagem de cada estudante.

Ao meu orientador, José Antônio, agradeço pelos valiosos ensinamentos teóricos e à banca de defesa deste trabalho, que contribuíram para aprimorá-lo ainda mais.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente, participaram da minha formação acadêmica e cidadã.

## RESUMO

É perceptível a dificuldade dos estudantes e professores nos anos iniciais no que diz respeito a números racionais, devido a poucas discussões sobre o assunto, como confirmado em pesquisas. Por essa razão, o presente trabalho teve como objetivo fazer uma análise do desenvolvimento do pensamento empírico/teórico de estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em situações desencadeadoras de aprendizagem elaboradas a partir de uma compreensão lógico-histórica do conceito de números racionais. Para isso, o trabalho teve por base pressupostos histórico-culturais, propostos por Lev Vygotski, com ênfase no conceito de zona de desenvolvimento iminente e de pensamento empírico e teórico. O estudo se deu a partir de registros de áudio, desenhos e escritas, resultados do desenvolvimento de situações desencadeadoras de aprendizagem das quais foram analisadas seguindo a proposta metodológica de núcleos de significação de Wanda Aguiar et al, relacionando os dados coletados com os pressupostos estudados e documentos oficiais. Foi percebido pelo estudo, que os estudantes desenvolveram algumas noções sobre números racionais, sobretudo em relação a medida e equivalência.

Palavras-chave: Educação Matemática. Núcleos de Significação. Noções de Fração. Teoria Histórico-Cultural

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>6</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>8</b>
2.1 Materialismo Histórico-Dialético e a Teoria Histórico-Cultural .....	8
2.2 Psicologia Histórico-Cultural .....	10
<b>3 DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMEROS RACIONAIS</b> .....	<b>14</b>
3.1 Construção do campo dos números racionais .....	14
3.2 Nexos Conceituais .....	15
<b>4 METODOLOGIA</b> .....	<b>18</b>
4.1 Contexto e sujeitos da pesquisa .....	18
4.2 O objeto da pesquisa .....	18
4.2.1 Situação Desencadeadora de Aprendizagem I .....	19
4.2.2 Situação Desencadeadora de Aprendizagem II .....	21
4.2.3 Situação Desencadeadora de Aprendizagem III .....	23
4.3 Instrumentos de estudo e apresentação da metodologia .....	25
4.4 Leitura Flutuante e Organização .....	26
4.5 Construção dos núcleos de significação .....	28
<b>5 ANÁLISE SINTETIZADORA</b> .....	<b>30</b>
5.1 “ <i>O que é uma fração?</i> ” .....	30
5.1.1 Associação com Figuras .....	31
5.1.2 Associação com operações .....	32
5.2 “ <i>O que aprendi sobre frações?</i> ” .....	33
5.2.1 Conjuntos numéricos .....	33
5.2.2 Propriedades dos Números Racionais .....	34
5.2.3 Operações Básicas .....	35
5.3 “ <i>Por que aprendi frações?</i> ” .....	36
5.4 Integração dos Núcleos de Significação .....	37
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>39</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Santos (2009) aponta que os cursos de pedagogia apresentam pouca ênfase na disciplina de matemática e mais se preocupam em ensinar matemática do que como ensiná-la. Uma das dificuldades dos pedagogos é o ensino de “resolução de problemas e sistema de numeração decimal” (SANTOS, 2009. p. 40). O autor também aponta a necessidade de se discutir os conceitos matemáticos, como sendo a principal dificuldade nos cursos de Pedagogia atualmente.

Pesquisas no campo de educação matemática, como de Lansing (2018) e Oliveira (2016) apontam frequentes dificuldades de elaborações conceituais para o ensino de conteúdos relacionados aos números racionais nos anos iniciais. Isso pode refletir desafios nos anos posteriores, dificultando a aprendizagem de outros conhecimentos teóricos por não ter sido devidamente trabalhado os conceitos básicos anteriores.

Levando em consideração as dificuldades supracitadas, pretendeu-se investigar quais elaborações conceituais estudantes dos Anos Iniciais produzem respeito dos números racionais – e como elas são desenvolvidas – em situações desencadeadoras de aprendizagem. Para tanto, foi realizado um estudo da Teoria Histórico-Cultural, um estudo da dissertação de Pereira (2021) que trata sobre o mesmo assunto deste trabalho e por fim uma análise de estudo em campo.

O objetivo deste trabalho foi analisar o desenvolvimento do pensamento empírico e teórico de estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em situações desencadeadoras de aprendizagem elaboradas/organizadas a partir de uma compreensão lógico-histórica a respeito do número racional. Teve-se por objetivos específicos: elaborar situações desencadeadoras de aprendizagem do conceito de número racional a partir da compreensão do desenvolvimento lógico-histórico do conceito e analisar as significações produzidas no processo de significação do conceito em estudo.

Em um primeiro momento (seções 2 e 3), foi feito um estudo sobre a Teoria Histórico-Cultural, que dá o fundamento para pensar sobre o desenvolvimento dos pensamentos empíricos e teóricos. Para tanto, foi desenvolvido ideias básicas da teoria progressivamente, desde o materialismo histórico-dialético até o fundamento lógico-histórico dos números racionais.

Em um segundo momento (sessão 4), para realização prática do estudo, foram elaboradas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, situações cujo intuito foi suscitar a atividade dos alunos. As situações foram elaboradas pensando no contexto escolhido para o estudo e de forma que os resultados possam contribuir com os objetivos da pesquisa.

Em um terceiro momento, foram organizados os resultados obtidos por meio da metodologia de Núcleos de Significação (AGUIAR et al, 2015). Essa organização se dará em três etapas, apontando indicadores importantes para o estudo. A terceira etapa dessa organização culminará na identificação dos núcleos de significação.

Por fim, a análise foi feita articulando todos os resultados obtidos com o fundamento teórico estudado, na seção 5. Como o próprio fundamento teórico e a metodologia exigem, essa articulação também considerará o contexto imediato dos resultados, que está nos sujeitos e nos objetos da mediação.

## **2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Para elaboração deste trabalho, tivemos por base teórica pressupostos do materialismo histórico-dialético e a teoria histórico-cultural. Nesta sessão iremos explorar esses conceitos para que na sessão seguinte o tópico específico em matemática abordado no trabalho seja explorado segundo esses fundamentos.

### **2.1 Materialismo Histórico-Dialético e a Teoria Histórico-Cultural**

Para que seja compreendido o fundamento teórico deste trabalho é importante primeiramente abordarmos nesta seção alguns constructos desenvolvidos e/ou apropriados por Marx que contribuíram para constituição do materialismo histórico-dialético. Quando se fala em materialismo histórico-dialético é importante mencionar três conceitos, como o método se autodescreve: materialismo, história e dialética.

Esse conceito parte do pressuposto que o ser humano faz parte da natureza, de forma que suas ações partem e implicam em mudanças materiais e não apenas ideais. Mais do que isso, as mudanças por ele realizadas são base para mudanças posteriores, criando ciclos e fases na história que se interagem conforme veremos adiante.

Segundo Marx, produzir e reproduzir é a essência da atividade vital humana – o seu trabalho (PIRES, 1997). A relação entre sociedade, produção e reprodução são fortes e dinâmicos ao ponto de desencadear mudanças estruturais, por exemplo, mudanças na forma de produzir foram cruciais para a transição do feudalismo para o capitalismo. Mudanças culturais, como por exemplo, a configuração da família e os papéis/funções esperados aos indivíduos também se relacionam com o modo de produzir. Essa relação de sociedade, produção e reprodução é o que se entende por materialismo.

A princípio, por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto desde seu surgimento ao desenvolvimento (KOPNIN, 1978. p. 183). Pela perspectiva marxista, esse conceito se estende, não podendo ser visto apenas como resultados de casualidades, mas em unidade à lógica. A história é, portanto, o resultado de consequências e mudanças realizadas pelas ações da humanidade sobre a natureza e sobre a própria humanidade.

Embora o próprio Hegel não a tenha citado dessa forma, a sua lógica é conhecida pela tríade tese, antítese e síntese. Um pensamento, que pode ser incompleto e contraditório, é denominado tese. Uma reflexão pode confirmar a tese, a contrariando ou completando, temos a antítese. Assim, por meio da lógica dialética sempre irão ocorrer novos conhecimentos, pois para Kopnin (1978, p. 224), “as leis da dialética atuam como princípio lógico de transição a um novo conhecimento, de síntese do conhecimento, que leva à interrupção da gradualidade”.

É da dialética hegeliana que Marx se apropria e acrescenta a concepção materialista e o caráter histórico. Isto é, ele compreende como as relações humanas e a sociedade se organizam e se desenvolvem ao longo da história devam ser estudadas considerando as contradições que ela mesma produz — que não são ideais mas sim resultados dessa história.

O método materialista histórico-dialético caracteriza-se pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade, isto é, trata-se de descobrir (pelo movimento do pensamento) as leis fundamentais que definem a forma organizativa dos homens durante a história da humanidade. (PIRES, 1997. p. 87)

Esses movimentos dentro da história, a forma como a sociedade pensa, se organiza, age, é essencialmente o trabalho, a atividade essencial da vida humana (PIRES, 1997). No materialismo histórico-dialético o trabalho não se restringe a definição dada comumente de prática de um ofício, de uma profissão. Aqui, o trabalho abrange ações humanas para transformação da natureza. Isso pode incluir tanto o processo em si da transformação, como também o produto deste processo (MANACORDA, 1991). É com o trabalho que o ser humano cria, produz e reproduz, sendo a atividade essencial dentro da história.

O conceito de trabalho é apropriado por Vygotski, que desenvolve sua teoria tendo como um constructo fundamental a atividade humana. Vygotski vê o trabalho no contexto capitalista como um redutor da potencialidade humana, tanto coletivamente como individualmente. Pontua especificamente também a potência intelectual, que é tratada como propriedade da classe dominante para atender seus interesses. Considerando isso, o capitalismo então reconduz a humanidade “a uma degradação mais profunda da personalidade humana e de seu potencial crescimento omnilateral” (VYGOTSKI, 1930, p. 6).

Se a dinâmica do trabalho modifica a sociedade e por ela é modificada, temos uma interação entre as duas dinâmicas. Essa interação entre a sociedade e a atividade humana, forma um tipo de homem histórico, isto é, um sujeito que é produto e transformador dentro da história. Esse tipo de humano histórico não é somente individual já que se forma no coletivo, é a humanidade em conjunto. Assim, para formação de um novo tipo de homem histórico é necessário uma transformação de todos os sujeitos da história e como eles se relacionam.

Para o teórico, a formação de um novo tipo de homem histórico que rompa com a redução e divisão do potencial humano se dá, centralmente, através da educação. Segundo ele, “as novas gerações e suas novas formas de educação representam a rota principal que a história seguirá para criar o homem tipologicamente novo” (VYGOTSKI, 1930). Esta nova educação é diversa e promove a unidade entre teoria e prática, ao contrário da educação que comumente se limita a proporcionar uma técnica laboral.

Esse papel da educação na transformação do tipo de homem histórico, se dá a medida que ela parta da e proporcione uma interação do sujeito com seu meio que promova essa transformação. Nisso, entra também o professor que irá mobilizar elementos de mediação (signos e instrumentos), que mediam as interações entre o sujeito aprendiz e seu meio. A própria educação pode ser vista como atividade mediadora nesse processo, como será descrito adiante.

## **2.2 Psicologia Histórico-Cultural**

Ao longo da história, o ser humano desenvolveu ferramentas que o auxiliam para superar as suas limitações biológicas. Essas ferramentas foram desenvolvidas pelas mesmas forças presentes em outros tempos, de produção e reprodução. Embora o uso de ferramentas esteja presente por razões biológicas em muitos animais, da qual a humanidade encontra raízes, o uso da ferramenta como essencial ao trabalho é próprio de nossa espécie, constituindo parte da atividade humana (VYGOTSKI, 2001).

As ferramentas podem ser vistas, então, ao longo da história, como mediadoras da transformação do homem na natureza, isto é, nas atividades humanas. A mediação, seja pelo que for, tem papel fundamental no

desenvolvimento de funções superiores, aprimorando suas capacidades além dos limites físicos e intelectuais elementares.

Nos parágrafos seguintes iremos abordar sobre o pensamento empírico e teórico. No pensamento empírico que se desenvolve as primeiras abstrações conceituais (ROMEIRO; MORETTI, 2016). Já no pensamento teórico que, por sua vez, está o trânsito do abstrato para o concreto e permite utilizar o conceito internalizado para resolução de conteúdos como de números racionais (LIBÂNEO; FREITAS, 2006). Se apropriar do pensamento teórico possibilita o desenvolvimento do potencial humano, relacionado com a zona de desenvolvimento iminente, conceito que também abordaremos. (ROMEIRO; MORETTI, 2016).

Considera-se o pensamento empírico o ponto de partida para a aprendizagem e, conseqüentemente, para o desenvolvimento do pensamento. No contexto escolar, o professor ganha um papel fundamental de mediar esse processo de aprendizagem para que os estudantes desenvolvam o pensamento teórico, isto é, passe a refletir, criticar e realizar experimentos mentais com o objeto de estudo. Para Davydov (1998) o pensamento teórico é o processo pelo qual o objeto passa a ser experimentado mentalmente. A partir do momento em que o objeto é apropriado pela mente, já não se fala em apenas representações, mas também em conceitos, no como se constrói, e nas conexões que resultam nessa construção que se desenvolve o pensamento teórico.

Para Kopnin (1978, p. 154), ambas as formas de pensamento são “níveis de movimento” entre a consciência e a realidade: no primeiro – o empírico – os objetos são apreendidos segundo seu contexto imediato, sua manifestação concreta na realidade, e no pensamento teórico os objetos são percebidos por relações e características internas da consciência, a partir de elaborações racionais.

Segundo Leontiev (2004), os elementos de mediação que desenvolvem as funções superiores do ser humano, constitui uma relação constante entre atividade interior e atividade exterior. Atividade interior que diz respeito ao intelecto, empírico e abstrato, enquanto atividade exterior sobre a concretude do trabalho. Logo, para falar de mediação precisamos abordar o conceito de atividade.

A atividade é a ligação prática entre o ser humano e a realidade ao seu redor enquanto objeto. A atividade nem sempre tem uma ligação direta à necessidade que lhe deu origem, podendo constituir de uma ação que foi necessária para o objetivo disposto. Leontiev (1978) cita, por exemplo, quando é realizada uma pesquisa

científica que a princípio exigiria apenas um exercício mental – uma atividade interior da consciência – mas ao decorrer do processo da pesquisa é necessário a montagem de um laboratório, o que exige uma atividade prática exterior que não era diretamente esperada pela necessidade (pesquisa científica).

Como dito no início desta seção, a divisão das forças de trabalho ocasionou uma redução do desenvolvimento do potencial humano. Leontiev (1978) destaca que, na sociedade contemporânea, os trabalhadores perderam o seu vínculo direto com os meios de produção. Como resultado, o conhecimento e habilidades intelectuais que os trabalhadores possuem são apropriados pela classe dominante, enquanto o intelecto da classe trabalhadora é reduzido a um papel técnico.

Essa venda de uma força trabalhadora que sequer tem vínculo com o meio de produção e o produto e que reduz seu desenvolvimento potencial ao dominante é denominada política de alienação (LEONTIEV, 1978). Sendo assim, a nova educação deve considerar o contexto histórico e cultural da sociedade de modo que desenvolva o que o modo de produção não favorece que desenvolva.

Para a psicologia histórico-cultural fica claro que o desenvolvimento de funções superiores é consequência da aprendizagem, que está dentro de um contexto histórico e que esse desenvolvimento pode ser reduzido a força trabalhadora que a classe dominante almeja ou a transformação do tipo do homem histórico, e a mediação têm papel fundamental nesse desenvolvimento. Em suas pesquisas, Vygotski (2001) aponta que as crianças passam por fases de desenvolvimento na aprendizagem: há uma diferença entre o que ela já tem desenvolvido com o que tem a se desenvolver, diferença essa denominada zona de desenvolvimento iminente<sup>1</sup>, e é nela que o adulto ao mediar a aprendizagem deve trabalhar.

Também na perspectiva de originar um novo ser humano, Leontiev (p. 45) fala da necessidade de se concretizar os sentidos para novas motivações de trabalho. Isto quer dizer criar significações, assimilações, experiências práticas que desenvolva sua atividade interna e intelectual, pois é criando significação nas atividades exteriores que se internaliza seu conhecimento e se desenvolvem novos conceitos de função superior como sua memória, sua atenção, sua percepção etc.

---

<sup>1</sup> A tradução “zona de desenvolvimento iminente”, que se diferencia de outras traduções que transcrevem principalmente “zona de desenvolvimento proximal”, é o termo que usaremos aqui com base nas observações feitas por Prestes (2012), que aponta que esse seria o melhor termo a ser usado.

Relacionando os constructos analisados à educação, a organização do ensino, a intervenção do professor, pode desencadear os processos de significação/internalização, que conduz à aprendizagem e desenvolvimento. Esta intervenção pode ser orientada por Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA), que utilizaremos para o material de estudo.

As SDA fazem parte do desenvolvimento das atividades de ensino, por parte do professor, ao passo que elas são elaboradas intencionalmente para que o estudante desenvolva sua atividade de estudo. Para que a atividade de ensino ocorra, é necessário que o professor compreenda o conceito enquanto objeto e elabore as ações pelo contexto lógico-histórico (PEREIRA, 2021, p. 66). As SDA são a forma de mediação entre essa atividade de ensino com a atividade de estudo, isto é, como os alunos, por sua vez, irão compreender o conceito a partir da instigação do professor.

### 3 DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMEROS RACIONAIS

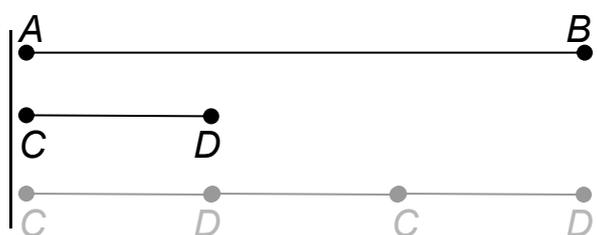
Para fundamentar o que entende-se por números racionais dentro da perspectiva histórico-cultural, utilizaremos, sobretudo, a abordagem de Helaina Pereira (2021) em sua dissertação sobre o mesmo assunto.

#### 3.1 Construção do campo dos números racionais

Pela perspectiva histórico-cultural, considera-se importante o contexto histórico, a sociedade e suas necessidades, que levaram à construção do conceito. A necessidade que levou ao desenvolvimento dos números racionais parte de um outro conceito, o conceito de medida como explicaremos a seguir.

Segundo Caraça (1989), conforme foram cada vez mais necessárias formas melhores de medição de um objeto, foi preciso dividir segmentos de medida, desenvolvendo aí o conceito também de frações. Um evento importante que o autor destaca se refere a terrenos ao redor do Rio Nilo, no Egito. Para que o governo pudesse cobrar justamente com as devidas proporções de tamanho de cada terra os impostos aos proprietários, ele media o comprimento desses terrenos ao longo do rio. No entanto, as cheias e alterações constantes no rio fazia com que os terrenos mudassem suas medidas em tamanhos menores que as unidades já colocadas, levando a necessidade de dividir essas unidades.

Figura 1 – Divisão de segmentos para medida

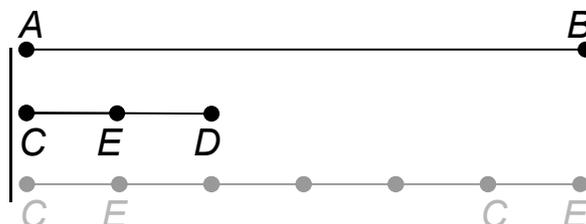


Fonte: Autor

Na figura acima, nota-se um segmento ( $\overline{AB}$ ) e um segmento menor ( $\overline{CD}$ ).  $\overline{AB}$  poderá ser medido pelas unidades repetidas de  $\overline{CD}$  que completam o comprimento de  $\overline{AB}$ . Essas unidades  $\overline{CD}$  podem ser de grandezas inteiras, não havendo necessidade de uma subdivisão. O que foi notado, porém, é que nem todos segmentos podem ser divididos por unidades inteiras de forma que, somadas,

possam completar seu comprimento sem falhas (figura 2). A partir desse dilema, Caraça (1989) aponta que foi construído então um novo instrumento numérico, já que unidades inteiras não supriam a necessidade de medida.

Figura 2 – Subdivisão de segmentos para medida



Fonte: Autor

Se pensarmos o segmento  $\overline{CD}$  como um outro segmento divisível por segmentos menores, podemos medir o segmento  $\overline{AB}$  a partir do novo segmento menor  $\overline{CE}$  repetido  $n$  vezes. Esses segmentos podem ser representados da seguinte forma:

Figura 3 – Representação dos segmentos em números racionais

$$\frac{\overline{CD}}{n} \cdot m = \overline{AB}$$

Fonte: Autor

Isto é: o segmento  $\overline{CD}$  dividido  $n$  vezes (as subdivisões  $\overline{CE}$ ), sendo repetido por  $M$  vezes resulta no segmento  $\overline{AB}$ .

### 3.2 Nexos Conceituais

Pode-se observar que a comparação entre objetos a fim de medi-los é fundamental para a compreensão de números racionais da forma historicamente construída. Dessa ligação entre o pensamento lógico conforme desenvolvido e o pensamento histórico, se trata os chamados nexos conceituais (PEREIRA, 2021). A comparação, como dito, se constitui de grande importância enquanto nexo conceitual para o conceito de medida, e a medida por sua vez como conceito gerador do conceito de números racionais, de seus nexos conceituais ou se assemelhando a esses (CUNHA, 2008 apud PEREIRA, 2021).

Os nexos conceituais podem ser separados em dois tipos: nexos internos e externos. Essa separação é importante para destacar que o objetivo a ser alcançado pelo professor é desenvolver os nexos internos, pois são eles que permitirão a construção dos conceitos teóricos.

Os nexos externos estão relacionados à representação formal do conceito – aos elementos perceptíveis. Por outro lado, os nexos internos envolvem o contexto histórico, social, político e econômico que deram origem ao conceito.  
(PEREIRA, 2021)

Um exemplo da diferença entre os nexos internos e externos podemos verificar nos nexos conceituais da medida. Por nexos internos, entende-se a comparação das diversas qualidades do que é medido (quantidade, qualidade, grandeza, continuidade, etc.) enquanto os nexos externos se referem ao ato de medir em si (CUNHA, 2008 apud PEREIRA, 2021).

Quando se pensa na elaboração das SDAs para o desenvolvimento do conceito de números racionais, é imprescindível que a intencionalidade pedagógica seja o desenvolvimento dos nexos internos. Todavia, não é possível desenvolver o pensamento empírico sem a concretude, sem a realidade, que passa pelo nexo externo de medir. A própria ação de medir, ainda que nexo externo, exige planejamento e intencionalidade (CARAÇA, 1989), o que caracteriza o movimento para o pensamento teórico, da consciência.

No campo dos números racionais, percebemos os mesmos nexos conceituais dos números inteiros como por exemplo contagem, correspondência e ordenação. Soma-se ao campo, nexos conceituais ligados a medida, que fora a necessidade que levou a construção dos números racionais e os subconstructos resultantes desse novo campo numérico, que são:

Os subconstructos são definidos como os significados centrais, as diferentes interpretações desses números, baseados em Behr et al (1983): medida fracionária (relação parte-todo), razão de um número racional, taxa de número racional, quociente, coordenada linear, decimal do número racional, operador e probabilidade. (PEREIRA, 2021)

Para Pereira (2021, p. 56), a infinidade, continuidade, ordenação e densidade se constitui do último estágio de desenvolvimento do conceito de números racionais. Tais propriedades enquanto nexos conceituais podem ser observadas a partir de

pontos sob uma reta numérica. A reta numérica possibilita, entre outras coisas, que o estudante perceba as divisões dos números e como usá-las em medida – o que, sem os números racionais, é impossível.

Levando em consideração a construção histórica dos números racionais e os nexos lógico-históricos desse conceito, elaborou-se uma sequência didática que perpassa, sobretudo, as noções de comparação, de partes de um todo e das frações como operadores. Na seção seguinte será explanado a metodologia utilizada e a elaboração das SDAs.

## **4 METODOLOGIA**

A metodologia de pesquisa do presente trabalho tem caráter qualitativo, pois entende-se que seja o melhor para os objetivos da pesquisa. Na pesquisa qualitativa o ambiente, o contexto, a dinâmica do sujeito com o mundo são bases para coleta de dados (FREITAS; PRODANOV, 2013, p. 70) e, a partir desses dados, se faz a interpretação dos fenômenos e atribuições de significados, processo básico para a metodologia de núcleos de significação que será descrito adiante. Ainda conforme Freitas e Prodanov (2013), o método dialético empregado sob esse caráter de pesquisa constitui-se de “um método de interpretação dinâmica e totalizante da realidade, pois considera que os fatos não podem ser relevados fora de um contexto social, político, econômico etc.” (p. 34), isto é, a pesquisa consegue melhor considerar as diversas variáveis subjetivas que não podem ser isoladas e analisadas apenas numericamente como induz uma pesquisa quantitativa (p. 69).

### **4.1 Contexto e sujeitos da pesquisa**

O estudo se deu em uma turma de 26 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. A turma em questão estava introduzindo o conteúdo de frações, e o próximo tópico a ser estudado neste assunto é equivalência de frações. Foi um momento oportuno, visto que se estava iniciando o assunto e as SDA previamente pensadas teriam foco na equivalência de frações.

Com o contexto favorável, foi possível elaborar o que já estava previsto para as SDA, conforme o capítulo seguinte. A intencionalidade desse conjunto de SDA foi o desenvolvimento conceitual do campo dos números racionais.

### **4.2 O objeto da pesquisa**

O objeto dessa pesquisa é o desenvolvimento do pensamento sobre números racionais, mediado pelo professor a partir da intervenção pedagógica descrita nesta seção, é o objeto a ser pesquisado neste trabalho, conforme abordado no tópico 2.2. Para tanto, essa intervenção pedagógica se deu pelas SDAs com auxílio de registros de falas, escritas e desenhos. A partir desses registros, propõe-se analisar

enquanto problema a ser investigado o desenvolvimento do conceito de números racionais.

Para o desenvolvimento das SDA de forma a atrair e contextualizar os estudantes no assunto, o pesquisador conversou com a turma sobre suas perspectivas a respeito de matemática, o que já sabiam sobre números racionais e como gostariam de aprender. O uso dos materiais manipulativos, dentro daquele contexto onde foi constatado pelos relatos de que havia o interesse mas não o uso, também despertou o interesse dos alunos e auxiliou no desenvolvimento das situações.

Quadro 1 – Introdução das Situações Desencadeadoras de Aprendizagem

<b>Situações Desencadeadoras de Aprendizagem</b>
<p><b>Objeto de Conhecimento:</b>            Conceito de números racionais, noções de equivalência e representações.            Habilidades (BNCC): EF05MA03; EF05MA04.</p> <p><b>Objetivos específicos:</b>            Compreender noções básicas de números racionais, representados por frações;            Perceber os números racionais como divisões de um todo inteiro/contínuo dentro de uma medição de comprimento e um todo discreto com objetos concretos.</p>

Fonte: Autor

#### 4.2.1 Situação Desencadeadora de Aprendizagem I

Na primeira aula os alunos trabalharam em grupos, com cubos de madeira. Foi pedido que esses cubos fossem divididos em partes iguais, e a partir dessas partes foi pedido outras operações para que já começassem a perceber a equivalência de frações em uma grandeza discreta.

## Quadro 2 – SDA I

**Situação Desencadeadora de Aprendizagem I**

Manipulando peças em conjuntos

**Materiais e Recursos:**

Para as “peças” pode ser usado tampas de garrafas, recortes ou cubos de unidades do material dourado.

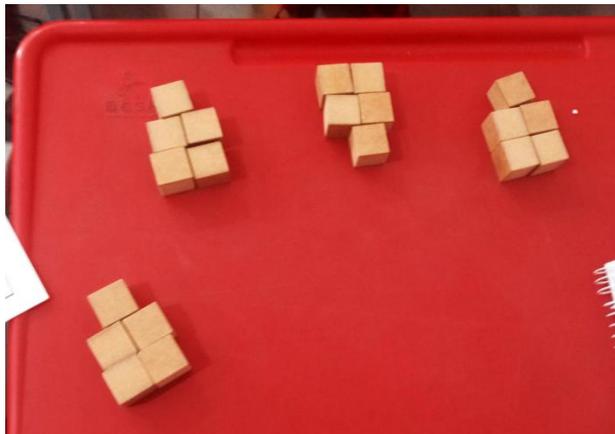
**Desenvolvimento:**

- Para essa SDA, a turma será dividida em grupos.
- 1. Será distribuído peças, em números não-primos, para os grupos. Os grupos deverão dividir as peças em conjuntos de 10;
- 2. Será então pedido que retirem, coloquem, dividam, o número de peças em cada conjunto. Cada momento uma instrução, de modo que vários conjuntos diferentes sejam formados e percebam as divisões;
- 3. Será instruído que se faça o registro de quantas peças ficou em cada conjunto e quantas peças estão no total;
- 4. Será então, como em todas situações dessa sequência, realizada uma roda de discussão e ensino expositivo para reflexão do que aconteceu na atividade que desenvolveram.
- 5. Para fixar o que foi aprendido, cada aluno deverá representar, nas peças novamente distribuídas, uma fração equivalente ao do aluno do lado e também registrar.

Fonte: Autor

Apesar do material utilizado serem cubos, a SDA pode ser realizada com o uso de quaisquer materiais manipulativos que, como este, sejam pequenos itens que possam representar unidades de um mesmo conjunto de objetos (várias tampas, vários recortes iguais de uma figura geométrica, vários lápis, etc). O material foi concedido por empréstimo do Laboratório de Ensino de Matemática da UFLA.

Figura 4 – Material da SDA I (cubos)



Fonte: Acervo do autor

Eles tiveram a oportunidade de esboçar os conjuntos em suas folhas de registro e nesse esboço realizarem as operações pedidas. Dessa forma, a observação do material concreto – recurso para desenvolvimento do pensamento empírico – era racionalizado para que fosse registrado, de modo a desenvolver também o pensamento teórico a partir da SDA que realizaram.

A folha de registro foi pensada para facilitar as variadas formas de registro e acompanhamento das atividades de estudo, por isso optou-se por um quadro quadriculado.

#### **4.2.2 Situação Desencadeadora de Aprendizagem II**

Na segunda aula foi desenvolvida uma SDA com intenção de suscitar atividades para desenvolver noções de medida, um nexos conceitual importante para o conceito de números racionais. No início, tiveram dificuldade para realizarem as medidas solicitadas, mas até o final da aula conseguiram medir e perceberam as frações nas mesmas.

Depois da SDA, foi contado a eles uma pequena história que ilustra a construção do campo dos números racionais e explicado também as subdivisões que seriam possíveis e necessárias para medir.

## Quadro 3 – SDA II

**Situação Desencadeadora de Aprendizagem II**  
Medindo com papel quadriculado**Materiais e Recursos:**

Material com folha quadriculada; régua de frações.

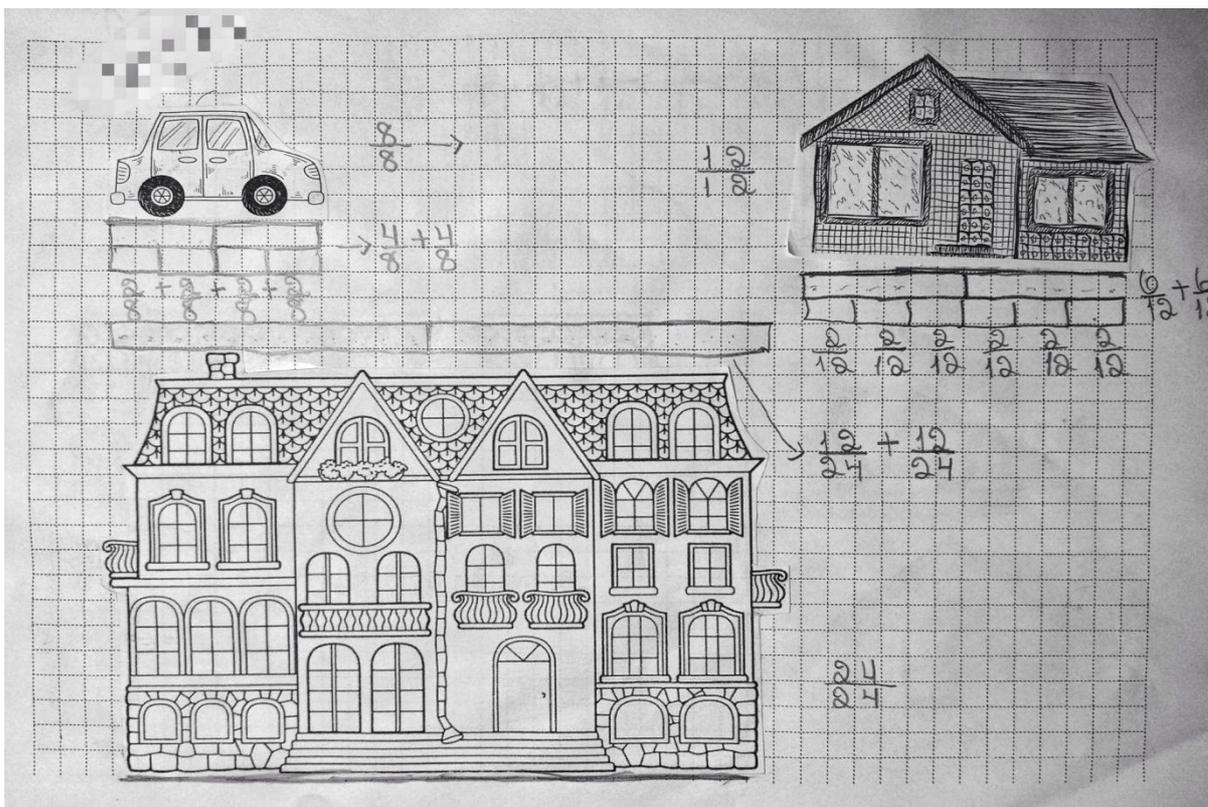
**Desenvolvimento:**

- Essa situação será desenvolvida individualmente.
- 1. Cada um receberá uma folha quadriculada grande, para melhor manipulação. Em cada folha, haverá uma figura que precisará ser medida;
- 2. Com a devida mediação, será pedido que se meça a figura com o próprio quadriculado, dividindo o número de quadrados em partes iguais;
- 3. O aluno será desafiado a fazer novas medições, escolhendo outra divisão em partes iguais dos quadrados;
- 4. Todas decisões deverão ser registradas em folha à parte;
- 5. Em seguida, será discutido como foram feitas as medições e como perceberam a equivalência de frações nelas;
- 6. Com auxílio da régua de frações, será ensinado também além das equivalências as somas possíveis de segmentos de modo que se possa medir um linha reta com frações diferentes, conforme Caraça.

Fonte: Autor

As folhas quadriculadas mais uma vez presentes, foram úteis para medição das figuras. Optou-se por preencherem quadrados, em vez de uma linha reta, para que desenvolvessem o conceito a partir de algo que eles estavam mais familiarizados, que é representar frações “por quadradinhos” – que foi uma das falas da primeira aula. Depois disso foi introduzido a reta, utilizada para contar a história. Um ponto a se destacar aqui é que nessa sequência de SDA que os estudantes tiveram o primeiro contato com uma folha quadriculada em toda vida escolar, não estando habituados.

Figura 5 – Exemplo de registro da segunda aula



Fonte: Acervo do Autor

#### 4.2.3 Situação Desencadeadora de Aprendizagem III

O desenvolvimento da terceira SDA teve uma particularidade: a baixa presença dos estudantes. Do total de 26 alunos, apenas 11 estavam presentes. Houve três tentativas de ministrar a aula com uma presença maior, porém sem sucesso. Essa SDA seria fundamental para finalizar a unidade didática, concluir a intencionalidade de toda essa sequência de situações, o que aconteceu com menos da metade dos estudantes.

## Quadro 4 – SDA III

**Situação Desencadeadora de Aprendizagem III**

## Muro de Frações

**Materiais e Recursos:**

Régua de frações ou material semelhante.

**Desenvolvimento:**

- Essa situação será desenvolvida em pequenos grupos.
- 1. Será retomado o que foi aprendido ao final da aula anterior.
- 2. Cada grupo receberá uma régua de frações e deverá fazer uma linha na moldura da régua, com partes de qualquer tamanho desde que complete a linha perfeitamente;
- 3. O que fora feito na régua deverá ser desenhado e descrito em registro à parte;
- 4. Feito a linha e o registro, será feito um rodízio da régua para o próximo grupo completar mais uma linha e registrar, e assim sucessivamente;
- 5. Completada a moldura toda, os registros serão compartilhados e discutidos para reflexão. Possíveis contradições também serão mediadas para aprimorar o conceito;
- 6. Para observar se o conceito foi desenvolvido, uma tarefa individual será distribuída, com um “muro de frações” a ser completado pelas partes faltantes.

Fonte: Autor

Para essa SDA foi utilizado o material chamado “Régua de Frações”, também disponibilizado e concedido pelo Laboratório de Ensino de Matemática da UFLA.

Figura 6 – Material da SDA III (régua/muro de frações)



Fonte: Acervo do autor

A SDA também seria melhor desenvolvida com um número maior de alunos presentes, pois foi elaborada considerando o número total. Por conta dessa

dificuldade particular da terceira aula, a participação já comumente baixa fora menor, a atividade de estudo desenvolvida mais rápida que o intencionado e os registros também foram menores.

Figura 7 – Exemplo de registro da terceira aula

**Registro**

Nome: XXXXXXXXXX

$\frac{1}{5}$  ■ □ □ □ □  
 $\frac{1+1+1}{5+5+5} = \frac{3}{15}$   
 $3 \times 1 = \frac{3}{5}$   
 $3 \times 2 = 2226$   
 um quinto + um quinto + um quinto + um quinto + um quinto  
 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5}$

|-----|-----|-----|-----|-----|

Fonte: Acervo do autor

### 4.3 Instrumentos de estudo e apresentação da metodologia

Ressalta-se o uso da proposta metodológica denominada núcleos de significação de Aguiar et al. (2015). São reunidos pré-indicadores a partir de falas presentes nas atividades estudadas, que num primeiro movimento são esquematizados em indicadores a partir de categorias simples de análise histórico-dialética. Cabe aqui apontar a importância da linguagem na construção do conceito matemático, como destaca a obra de Nacarato et al. (2004). Em um segundo movimento são percebidas as relações entre os indicadores no processo de constituição de sentidos, a partir de categorias metodológicas como por exemplo de historicidade e mediação, saindo uma dimensão empírica e abstrata para um

pensamento concreto. Esse último movimento é denominado “processo de teorização dos achados da pesquisa” (AGUIAR et al, 2015. p. 70).

Foram utilizados como instrumentos metodológicos a produção de dados e arquivos de pesquisa. Essa diversidade de registros é importante para que as mais diversas variáveis do contexto estudado fossem observadas, para uma melhor fonte de dados para constituição dos pré-indicadores a serem analisados pela proposta dos núcleos de significação. O diário de campo teve sua importância para o registro a partir de um olhar do investigador no momento em que as ações são desenvolvidas; o registro de atividades para uma coleta de informações para além das observadas no momento de cada SDA e a gravação é de suma importância como fonte de informação imediata das ações dos alunos e professores.

Todos esses registros condizem com a abordagem qualitativa do trabalho, podendo ser usados como ferramentas de observação do ambiente pesquisado e das interações entre os sujeitos envolvidos na pesquisa e o mundo. Analisando todos os documentos produzidos pelos instrumentos metodológicos supracitados, a partir da metodologia de núcleos de significação, os mesmos foram relacionados com as bases teóricas estudadas do conceito de números racionais.

#### **4.4 Leitura Flutuante e Organização**

O primeiro passo para sistematização dos núcleos de significação é a leitura atenta dos registros, o que Aguiar e Ozella (2015) denominam por leitura flutuante. Essa leitura deve estar atenta a informações que possam ter importância ao estudo, de modo que se consiga encontrar os pré-indicadores. Nesse momento, se observa as palavras com seu significado, a partir de seu contexto imediato, levando em consideração o sujeito que as externaliza. A análise categórica dessas palavras constituirá os pré-indicadores.

Ressaltando que a “palavra com significado” (AGUIAR et al, 2015) tem sua maior importância no levantamento dos pré-indicadores, houve dificuldade nesse processo devido à baixa participação dos estudantes. Dessa baixa participação, algumas frases foram repetidas diversas vezes – demonstrando dificuldades ou aprendizagens em comum na turma – que se consideraram importantes para o estudo realizado. Abaixo exemplos de frases encontradas repetidamente nos

registros destacando-se trechos que, a partir de similaridades (AGUIAR et al, 2015), puderam constituir pré-indicadores.

Quadro 5 – Pré-indicadores

PRÉ-INDICADORES	
[Fração] é um círculo	Associação com figuras
<b>Frações são</b> quadrinhos	
[Fração] é 1/4	Associação com operações
<b>É uma conta</b> de dividir	
[Fração] é uma <b>conta</b>	
[Fração] é uma <b>soma</b> de números	
<b>É uma conta</b> de + ou - ou × ou ÷	
<b>É uma atividade</b>	Associação com exercício escolar
<b>Fração faz parte</b> dos números racionais	Associação com conjunto numérico
<b>Frações podem</b> ser equivalentes	Constatação de propriedades
<b>Fração divide</b> em parte	
<b>Pode</b> colorir?	Questionamento sobre o que é para ser feito
<b>Precisa</b> de régua?	
<b>Essa atividade</b> não é chata	Opinião sobre a SDA
<b>Por que</b> tinham terreno?	Questionamento sobre a história contada
<b>Somar</b> várias vezes é multiplicação	Constatação de propriedade sobre operações básicas
<b>Metade de 3</b> é 1,5	Resolução de um problema de operação básica
4/8 <b>mais</b> 4/8 é 8/8	

Fonte: Autor

A partir dos pré-indicadores, é possível articular as informações entre si, considerando também premissa de similaridades e complementaridades. Nesse momento as frases já não são observadas em seu contexto imediato, mas analisadas em suas contradições além do que explícito verbalmente:

...o segundo (sistematização dos indicadores) tem como finalidade a negação do discurso tal como se apresenta, isto é, a negação do dito. Para que isso seja possível, é preciso explicitar, por meio do processo de análise e síntese, as contraditórias relações existentes entre os pré-indicadores, relações estas que, inclusive, nos levam a articulá-los para compor os indicadores. (AGUIAR et al, 2015)

Os pré-indicadores foram reunidos em seis indicadores conforme quadro abaixo.

Quadro 6 – Indicadores

PRÉ-INDICADORES	INDICADORES
Associação com figuras	Associação representativa
Associação com operações	
Associação com conjunto numérico	Descrição pelo que foi aprendido
Constatação de propriedades	
Associação com exercício escolar	Associação contextual
Questionamento sobre o que é para ser feito	Preocupação com a SDA
Opinião sobre a SDA	
Questionamento sobre a história contada	Questionamento de necessidade
Constatação de propriedade sobre operações básicas	Demonstração de aprendizagem sem ser questionado
Resolução de um problema de operação básica envolvendo racionais	

Fonte: Autor

#### 4.5 Construção dos núcleos de significação

A última etapa da metodologia aqui usada é a construção dos núcleos de significação.

...é um momento mais especificamente voltado para a síntese, isto é, que visa a superar o discurso aparente, descolado da realidade social e histórica, e que busca, por meio do "processo de articulação dialética" dos indicadores, a realidade concreta, ou seja, os sentidos que, histórica e dialeticamente, articulam a fala e o pensamento do sujeito. (AGUIAR et al, 2015)

Essa etapa se constitui de duas fases, uma primeira apenas de organização, a partir da reflexão crítica da leitura realizada articulando os indicadores com as teorias, e uma segunda fase da discussão teórica dos núcleos.

Como a proposta deste trabalho é discutir o desenvolvimento de um conceito matemático a partir da teoria histórico-cultural, optou-se por organizar os indicadores de modo que contemple um diagnóstico de aprendizagem – para a Zona de Desenvolvimento Iminente – o objetivo da intervenção/mediação pedagógica e a necessidade e contexto do sujeito.

A constituição dos Núcleos de Significação foi organizada conforme quadro abaixo:

Quadro 7 – Núcleos de Significação

<b>INDICADORES</b>	<b>NÚCLEOS DE SIGNIFICAÇÃO</b>
Associação representativa	O que é uma fração? Aprendizados pré-mediações
Descrição pelo que foi aprendido	O que aprendi sobre frações? Aprendizados pós-mediações
Demonstração de aprendizagem sem ser questionado	
Associação contextual	Por que aprendi frações? Necessidade e contexto real
Preocupação com a SDA	
Questionamento de necessidade	

Fonte: Autor

## 5 ANÁLISE SINTETIZADORA

Na segunda fase da última etapa, Aguiar (2015) propõe uma análise sintetizadora, que, de forma mais completa, culmina na integração dos núcleos de significação entre si. A análise se dará por cada núcleo, destacando observações para cada pré-indicador.

### 5.1 “O que é uma fração?”

A turma estudada tinha pouca comunicação durante as aulas, sendo necessário uma intervenção por meio de questionamentos. Em vista disso, colocar uma questão para denominar os núcleos de significação faz jus aos momentos do estudo. Uma questão pertinente foi “o que é uma fração?”, cuja resposta daria base para se saber o que a turma já conhece sobre o conceito de números racionais.

O que contempla esse núcleo são as associações que os estudantes fizeram dos números racionais os associando, principalmente, com objetos que os representariam. Ressalta-se aqui, que no levantamento dos pré-indicadores não cabe uma correção de ideias, pois a análise é feita posteriormente, neste momento de discussão dos núcleos. As possíveis e esperadas contradições entre os pré-indicadores fazem parte fundamental do estudo pela metodologia adotada.

Nos registros da primeira aula foi possível perceber os variados pensamentos sobre “o que é uma fração” entre os estudantes, que vão além daquilo que foi verbalizado. No exemplo a seguir, é desenhado um círculo com uma parte pintada – algo que não foi instruído – representando o que o aluno entende por “fração”.

Figura 8 – Exemplo do registro da primeira aula

**Registro**

Nom. 50/117

Dividindo o fraco em partes

$\frac{1}{4}$

RAEICAS  
TO AFURNA

$\frac{1}{7} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Aprendi pel fracoos por parte de numero raciones

Fonte: Acervo do autor

### 5.1.1 Associação com Figuras

Nas falas foi comum que os estudantes associassem frações com figuras como círculos ou quadrados. Muito provavelmente, estava se desenvolvendo como conceito de fração os desenhos que faziam nas tarefas que a professora solicitava a

respeito deste assunto. Na leitura de cadernos dos estudantes, constatou-se de fato que as tarefas focavam na representação das frações por essas figuras.

Quadro 8 – Ex. de diálogo

Aluno A: <i>São círculos</i>
Professor: Por que você acha que são círculos?
Aluno A: A professora <i>desenha assim</i>

Fonte: Dados

Essa associação com figuras tem sua importância no constructo dos números racionais enquanto operadores, que “quando aplicada em figuras geométricas, transforma-as em figuras semelhantes, e, quando aplicada a um conjunto discreto, atua como um multiplicador–divisor” (NACARATO, 2004. p.58). Por se tratar de uma relação essencial no desenvolvimento dos números racionais, Pereira (2021) entende o constructo como nexos conceitual. No entanto, apenas a aplicação em figuras foi observada até então, não havendo situações diretamente relacionadas a grandezas discretas.

Isso não significa, porém, que o conceito dos números racionais aplicado a conjuntos discretos não esteja se desenvolvendo, pois segundo Pereira (2021), a partir do momento que se corta em “pedaços” uma figura geométrica para, por uma medição observar uma fração na mesma, temos também um número racional aplicado a um conjunto discreto.

### 5.1.2 Associação com operações

Outro elemento comum nas falas, foi a associação com operações matemáticas básicas. Essa associação tem duas características: primeiro, tem uma relação com o nexos conceitual operador a partir dos números racionais; e também, em outros pré-indicadores, mostra relação com as operações possíveis com os números racionais. Essa segunda característica não é apontada como um nexos conceitual de números racionais por nenhum teórico estudado aqui.

Percebemos as operações com os números racionais estreitamente ligadas ao conceito de medida. Caraça (1989, p.41) aponta as operações como sendo propriedades do campo racional e, particularmente sobre adição, faz uma relação com medida. Essa relação pode ser estendida às outras operações, se os números

racionais forem entendidos como devem ser, como um outro instrumento numérico, pelo princípio de economia as definições já conhecidas dos números inteiros aplicasse aqui (CARAÇA, 1989. p. 38).

Essa associação em certo momento remeteu à associação anterior, explicitando uma construção de pensamento que podemos entender como uma base para nexos conceituais de medida e operador, necessários para compreensão dos números racionais.

Quadro 9 – Ex. de diálogo

Aluno B: <i>É um quarto</i>
Aluno B: (...) <i>Só pegar o círculo e dividir em quatro</i>

Fonte: Dados

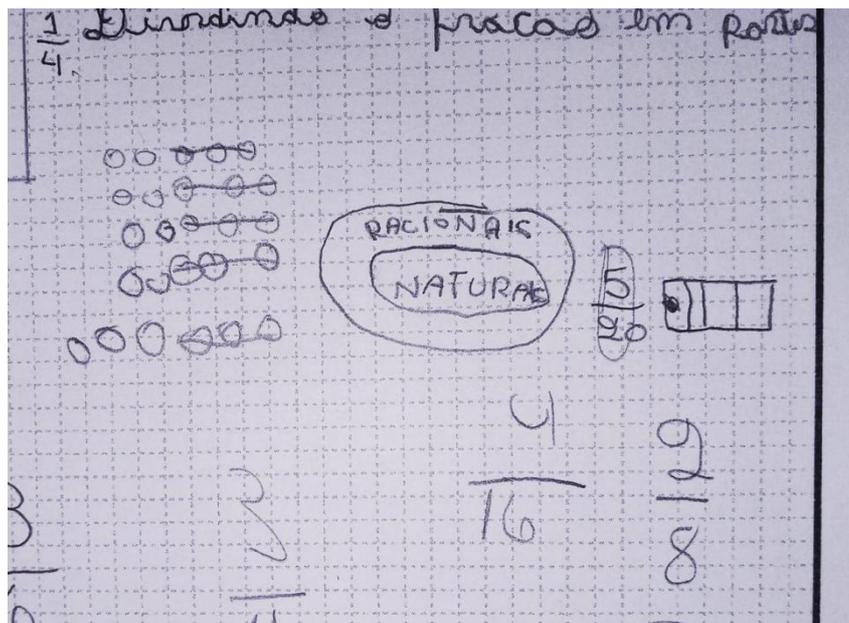
## 5.2 “O que aprendi sobre frações?”

Ao final das aulas era perguntado o que aprenderam. Em outros momentos, mesmo não sendo questionados, os estudantes apontavam soluções ou características que se enquadram nos objetivos da intervenção pedagógica. Pode-se dizer que o núcleo anterior aponta para o momento da intervenção, este aponta para o momento posterior. Enquanto o anterior se constitui de uma espécie de avaliação diagnóstica e processual das SDA, este segundo se constitui de uma avaliação final das SDA visando perceber se, a partir da zona de desenvolvimento iminente dos estudantes, eles desenvolveram os conceitos dentro de sua zona de possibilidades de aprendizagem e dos objetivos da SDA.

### 5.2.1 Conjuntos numéricos

A maior parte dos registros escritos da primeira aula continham uma frase como “frações são números racionais” ou algo semelhante. Além da escrita, foi comum um desenho circular denotando os conjuntos racionais e naturais como exemplificado na imagem a seguir.

Figura 9 – Registro de Aula, com os conjuntos em círculo



Fonte: Acervo do Autor

Cabe observar que, no início das aulas ao serem questionados “o que são números racionais?”, os estudantes não souberam responder. Nos cadernos, também não havia o assunto descrito quando as tarefas sobre frações eram realizadas. Provavelmente, esse registro escrito e desenhado sobre os números racionais enquanto conjunto numérico se deu após explanações durante a primeira aula.

Na segunda aula, ao serem questionados sobre números racionais, alguns já sabiam associar às frações sem uma explicação prévia. Soma-se então, às associações com figuras e operações, uma nova associação que pode ajudar no desenvolvimento do conceito e na resposta para a pergunta que deu nome a esse núcleo.

### 5.2.2 Propriedades dos Números Racionais

Nesse pré-indicador novamente entra o nexos conceitual, ou constructo, dos números racionais enquanto operadores. As frações como multiplicadoras-divisoras já eram perceptíveis nos desenhos das frações nos registros e nas falas do primeiro pré-indicador, e agora se evidencia mais uma vez.

Por vários momentos os estudantes apontaram as frações como sendo partes e divisões de um todo, na primeira aula. Ao final da mesma aula, acrescentaram a descrição de que frações podem ser equivalentes. Essa conclusão se deu a partir

das divisões realizadas com os cubos da primeira SDA. Eles compreenderam que a fração não estava na quantidade de cubos, mas em como essa quantidade se distribuía – e que independente da quantidade, a distribuição continuava na mesma proporção, denotando o que foi denominado equivalência.

### 5.2.3 Operações Básicas

Na terceira e última aula teve destaque as observações dos estudantes envolvendo operações básicas. As observações foram no sentido de descrever propriedades de operações e resolver operações, sem a necessidade de questionar a solução para eles.

Uma das observações dos estudantes foi que “metade de 3 é 1,5”, e isso não foi tema de nenhuma SDA. Para finalizar as aulas, foi desenhada uma reta numérica no quadro com os números, e um dos estudantes apontou para o lugar que seria o 1,5. Provavelmente, conhecia isso de alguma medida ou da régua escolar. De qualquer forma, reconhecer aquele lugar como sendo metade de outro e saber a denominação daquele ponto exato demonstra um desenvolvimento um pouco mais avançado do conceito de números racionais.

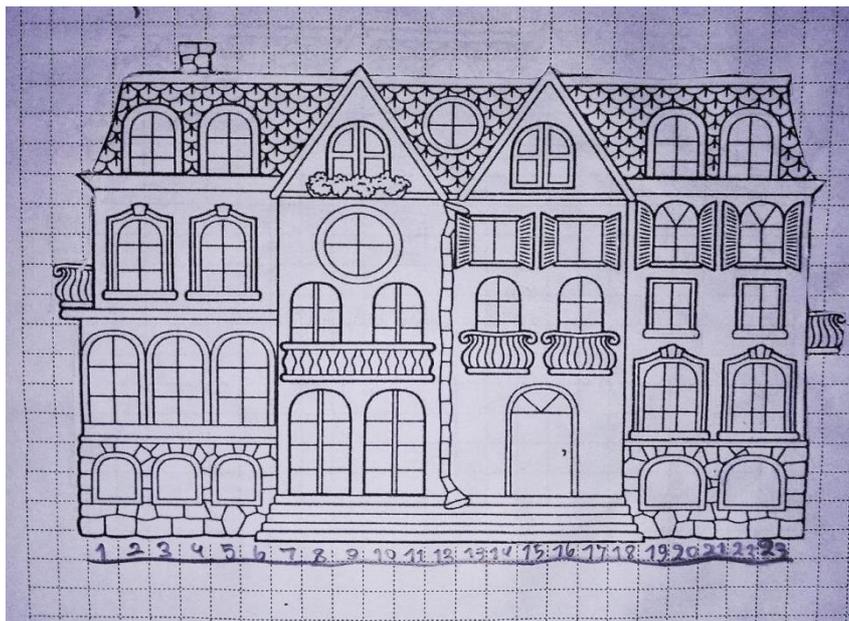
Quadro 10 – Ex. de diálogo

(é desenhada uma reta numérica no quadro)
Aluno C: A metade do 3 é 1,5 (apontando para o número)
Professor: Onde?
Aluno C: <i>depois do 1, antes do 2</i>

Fonte: Dados

Ressalta-se que reta numérica se mostra ferramenta importante para conceituar os números racionais quanto aos nexos de continuidade, densidade, ordenação e infinidade. O estudante nesse caso, apresentou essa noção de ordenação e continuidade possibilitada pela reta numérica, e percebida entre outras coisas na régua escolar. Em menor nível, também pode ser observado alguns desses nexos nos esboços usados nas atividades, por exemplo, ao medir as figuras na segunda SDA.

Figura 10 – Figura medida na SDA 2, com a medição representada por uma sequência numérica abaixo da figura, similar a uma reta numérica



Fonte: Acervo do Autor

Os estudantes conseguiram, ainda que pouco, começar a elaborar um pensamento generalizante dos números racionais, tendo capacidade de aplicar o conceito em objetos diferentes. Isso constitui o processo de abstração do pensamento empírico para além do que também já se havia percebido na memória consciente (VYGOTSKI, 2001).

### 5.3 “Por que aprendi frações?”

Nas três SDA foi recorrente questões sobre as propostas, o que é comum para os estudantes (dúvidas sobre o que e como é para realizar as tarefas). Ainda que seja comum, cabe a reflexão de como é preocupante para o estudante o fazer correto em sua atividade, ao realizar o que fora proposto nas SDA. Isso parte do pressuposto equivocado que as SDA são feitas de cima para baixo, em uma relação hierárquica com o professor. No entanto, como já abordado neste trabalho, a atividade é um processo de movimento do sujeito, de apropriação do conhecimento – e não a tarefa posta pelo professor – podendo ter contradições que fazem parte do desenvolvimento dos conceitos.

Também houve questionamentos ao contar a história dos números racionais, com destaque para o “por que tinham terreno?”. Essa pergunta pode ser respondida

por várias perspectivas sócio-históricas e, essencialmente, denota uma necessidade social que levou, entre outras coisas, à construção do novo campo numérico.

Na primeira SDA, enquanto os estudantes estavam explorando a divisão dos cubos – desenvolvendo o conceito de frações dentro de uma grandeza discreta – um grupo queria dividir 20 peças dispostas em conjuntos de 5, um conjunto para cada membro, mas havia 5 membros. Nesse momento, logo na primeira SDA, uma razão de se aprender frações foi explorada.

Quadro 11 - Ex. de diálogo

Aluno D, de grupo A: vamos dividir cinco cubos para cada um
Professor: Acho que não é possível, tentem
(eles organizam os cubos)
Aluno E, de grupo A: Como você sabia?
(professor explica a conta de divisão)

Fonte: Dados

Essas preocupações e questionamentos sobre as SDA e as histórias, constituiu esse núcleo denominado “Por que aprendi frações?”. Esse questionamento não foi feito por nenhum estudante, porém é o que mais se adequa aos indicadores. A construção de SDA que façam sentido, que partam de uma necessidade ou que remontem às necessidades históricas que levaram à construção dos conceitos matemáticos, é desafiador.

#### 5.4 Integração dos Núcleos de Significação

Em um último movimento de “análise mais completa e sintetizadora” (AGUIAR et al, 2015), propõe-se uma síntese final dos núcleos, articulando-os entre si.

Os núcleos foram pensados para compor uma sequência que condiz com a Teoria Histórico-Cultural de modo que se possa estabelecer importantes relações.

O núcleo “O que é uma fração” nos traz aspectos que dizem respeito ao desenvolvimento real dos estudantes, o que eles já aprenderam com e sobre o mundo. Neste núcleo foi possível perceber o pensamento empírico dos estudantes, sobretudo fundamentado na observação e manipulação concreta das operações e representações, sem aprofundamentos de apropriação do conhecimento. Nesse

mesmo núcleo já se percebe os primeiros passos de abstração e memorização, que será confirmado no segundo núcleo.

O núcleo “O que aprendi sobre frações?” mostra a intervenção pedagógica, evidenciada nas atividades dos estudantes providas nas SDA, a transição entre o desenvolvimento real e a ZDI. Por fim, neste núcleo se observa o início de uma formação de pensamento generalizante, ao passo que os estudantes já conseguem perceber os números racionais em figuras ou retas numéricas, sem a intervenção do professor.

O núcleo “Por que aprendi frações?” descreve a importância da contextualização das SDA, considerando o contexto histórico-cultural em que o conceito foi construído e também que o sujeito, estudante, vive. Esses indicadores são importantes, haja vista que o desenvolvimento do pensamento empírico para o teórico é, conforme Kopnin (1978), outrora mencionado neste trabalho, um movimento entre o conhecimento da realidade e da consciência. Esse mesmo movimento realizado aqui no uso dessa metodologia, é o que os estudantes realizam para conceituar números racionais. De mesmo modo, o pensamento empírico também faz o movimento reverso, trazendo significado ao real a partir do consciente. Considerando isso, denota-se a importância de articular a realidade do sujeito com o que é aprendido: de modo que se aprenda a partir do concreto sensorial e para o concreto do pensamento se consolide a aprendizagem.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino é um desafio cotidiano para o aluno e o professor. Nesse desafio, é importante entender que os dois sujeitos do processo de ensino aprendizagem tem origens, vivências e convivências diferentes que precisam ser consideradas. Essas diferenças, no entanto, revelam algo em comum: todos têm sua própria história.

O processo ensino aprendizagem compreende uma parte da história de cada um, e essa história compreende o processo, faz parte dele. Não há como separar a história do sujeito a aprender, como também não há como separar os conhecimentos aprendidos das histórias em que eles foram construídos.

Em todo esse processo, entra a Teoria Histórico-Cultural. Ela mais uma vez se mostrou importante para a análise e prática do ensino. Neste trabalho utilizou-se da Teoria Histórico-Cultural como base para estudo do desenvolvimento do conceito de números racionais em estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. Conseguimos, a partir do pensar números racionais com essa base teórica, elaborar e desenvolver as situações desencadeadoras de aprendizagem para o estudo.

Antes que se elaborasse as situações, foi necessário revisar teoricamente a construção dos números racionais na história. Para tanto, usamos de autores como Caraça, que em seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática* (1951), explana a construção histórica de diversos conceitos matemáticos entre eles o campo dos números racionais, e Pereira (2021), que fez estudo semelhante sobre números racionais. Isso foi importante também para se pensar nos nexos conceituais, isto é, nos elos entre o pensamento lógico e a construção histórica do conceito. Com os nexos conceituais, é possível elaborar as situações de forma que o estudante desenvolva seu conhecimento relacionando a como esse mesmo conhecimento foi construído no decorrer da história.

As situações desencadeadoras de aprendizagem foram pensadas para que os estudantes aprendessem com o uso de materiais manipulativos, construíssem um pensamento empírico sólido que, com as devidas mediações pedagógicas, transicionasse para um pensamento teórico.

O estudo se deu também com base na teoria histórico-cultural, usamos da metodologia dos núcleos de significação, que levam em conta o contexto imediato dos estudantes, considerando sua história, seu contexto social, e principalmente sua palavra, elemento importante do processo de significação na teoria vygotskiana.

Um dos grandes desafios para esse estudo foi a baixa participação dos estudantes em falar. Acostumados a serem silenciados no ensino tradicional, é uma dificuldade romper com o paradigma do estudante em silêncio e disciplinado para que seja participativo e possa externalizar melhor suas aprendizagens e questionamentos. Em uma pesquisa mais aprofundada e em maior tempo isso seria mais bem realizado, como foi na pesquisa de Pereira (2021). Na teoria histórico-cultural, que deu base a metodologia do estudo, a fala é essencial e contribui para o desenvolvimento cognitivo, para a construção do conhecimento.

Para tentar contornar essa dificuldade, os estudantes foram questionados diversas vezes e também foi pensado em registros individuais por aula. Nesses registros tiveram a liberdade de escreverem, desenharem e esboçarem o que acharem pertinente durante as aulas. Os registros individuais foram os maiores bancos de dados para a pesquisa.

Nesses registros, foi possível notar respostas semelhantes que demonstravam uma relevância maior para a turma nessas respostas e foi possível pensar nas falas dentro do contexto dos demais esboços (figuras, desenhos, operações). Essas falas, dentro de seus contextos nos registros, foram fundamentais para a construção de indicadores que, por sua vez, constituíram três núcleos de significação.

Foram três núcleos na análise final: “o que são frações” – que denotam os aprendizados antes das mediações das aulas; “o que aprendi sobre frações” – sobre os aprendizados após as mediações; e “por que aprendi frações” – sobre as indagações dos estudantes a respeito das situações desencadeadoras de aprendizagem, sua necessidade e seu contexto.

Os três núcleos interagem entre si de modo processual, dentro da própria teoria histórica-cultural: desde a construção do pensamento empírico ao desenvolvimento do pensamento teórico com o teor generalizante. Dessa forma, este trabalho conseguiu fazer as articulações necessárias para atingir seus objetivos.

Foi percebido, por exemplo, que no início da aprendizagem os estudantes fazem muitas associações ligadas ao contexto de exercícios realizados com frações, e não com o conceito de números racionais em si. Associam figuras, operações, números, sem ligação direta ao conceito. Com o passar das mediações, essas associações que a princípio são até mesmo contraditórias entre si começam a ganhar sentido e significado.

O trabalho cumpriu com seu objetivo de analisar, dentro das situações desenvolvidas, o desenvolvimento do pensamento empírico e teórico envolvendo o conceito de números racionais. Foi possível perceber a construção de constructos necessários para a conceituação dos números racionais, bem como perceber essa construção dentro de uma lógica fundamentada na teoria histórico-cultural. Por exemplo, na primeira aula foi perceptível os conceitos prévios que os estudantes tinham, visando a Zona de Desenvolvimento Iminente, e a partir destes desenvolver novos conceitos. Durante a realização das atividades por parte dos estudantes, a manipulação com o concreto (os materiais utilizados) favoreceu para que desenvolvessem uma abstração que os levassem a transitar a aprendizagem ao pensamento teórico.

É preciso ainda mais pesquisas sobre o tema, e aprofundadas. Como dito na seção introdutória, é necessário maiores discussões sobre esse assunto e assuntos correlatos nos cursos de pedagogia, tornando-se preciso, para isso, que essas pesquisas sejam abordadas e feitas para serem discutidas. Algumas podem ser lembradas, como a pesquisa desenvolvida por Pereira (2021) citada neste trabalho, ainda sim. O tema segue sendo um desafio aos professores dos anos iniciais, mas havendo mais estudos e mais teoria, pode-se esperar melhorias na educação matemática das crianças como já está havendo.

## REFERÊNCIAS

AGUIAR, W. M. J.; SOARES, J. R.; MACHADO, V. C. Núcleos de significação: uma proposta histórico-dialética de apreensão das significações. **Cadernos de pesquisa**, v. 45, n. 155, p. 56-75, 2015.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1989.

DAVYDOV, V. V. Problemas do ensino desenvolvimental-. **A Experiência da Pesquisa**, 1998.

FREITAS, E. C.; PRODANOV, C. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2ª ed., 2013.

GRASS, Idania B. Peña. O método nas pesquisas educacionais: uma aproximação metodológica ao estudo do desenvolvimento cultural. In: MENDONÇA, Sueli Guadalupe de Lima; PENITENTE, Luciana Aparecida Araújo; MILLER, Stela (Org.). **A questão do método e a Teoria Histórico-Cultural: bases teóricas e implicações pedagógicas**. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2017.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Trad. por Paulo Bezerra. Ed. Civilização Brasileira S.A., coleção Perspectivas do Homem, vol. 123, 1978.

LANSING, Jardel. **Dificuldades na aprendizagem de números racionais**. Chapecó: UFSS, 2018.

LEONTIEV, A.N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LIBÂNIO, J. C.; FREITAS, R. M. Vygotsky, Leontiev, Davydov: três aportes teóricos para a Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a Didática. In: Congresso Brasileiro de História da Educação, 4., 2006, Goiânia. **Anais do IV CBHE**. Goiânia: Ed. da UFG. Não paginado. Eixo temático, v. 3.

MANACORDA, Mario Alighiero. **Marx e a pedagogia moderna**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1991.

MORETTI, V. D.; ROMEIRO, I. O. Pensamento teórico sobre número racional e sua representação fracionária: implicações para a formação docente. **Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

NACARATO, A. M. et al. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativo. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 53-64, jan./jun. 2004.

OLIVEIRA, C. M.; DA SILVA, E. C. Vygotski e a educação. **Revista Pró-Discente**, v. 17, n. 2, 2011.

OLIVEIRA, Jéssika N. de. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, p. 1-12, 2016.

PEREIRA, H. F. O desenvolvimento do pensamento teórico de estudantes do quinto ano na aprendizagem dos números racionais e do conceito de medida. **Dissertação**. UFLA. Lavras, 2021.

PRESTES, Z. Quando não é quase a mesma coisa: traduções de Lev Semionovitch no Brasil. Campinas, SP: **Autores Associados**, 2012.

RODRIGUES, W. R. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal**. São Paulo: PUC, 2005.

VYGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKI, Lev Semenovitch. **A transformação socialista do homem**. URSS: Varnitso, p. 1-9, 1930.