UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

ROSIANA DE OLIVEIRA PEDROSO

TEORIA DE GRUPOS DE LIE APLICADA A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS:

RESOLUÇÃO DE EDO'S ATRAVÉS DE SIMETRIAS

LAVRAS – MG

2023

ROSIANA DE OLIVEIRA PEDROSO

TEORIA DE GRUPOS DE LIE APLICADA A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS:

RESOLUÇÃO DE EDO'S ATRAVÉS DE SIMETRIAS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciada.

Prof. Helvécio Geovani Fargnoli Filho
Orientador

LAVRAS – MG
2023

ROSIANA DE OLIVEIRA PEDROSO

TEOREA DE GRUPOS DE LIE APLICADA A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: RESOLUÇÃO DE EDO'S ATRAVÉS DE SIMETRIAS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciada.

APROVADA em 16 de Fevereiro de 2023.

Prof. Helvécio Geovani Fargnoli Filho	UFLA
Profa. Ana Claudia Pereira	UFLA
Prof. Fernando Lourenço	UFLA
Prof. José Sérgio Domingues	IFMG

Prof. Helvécio Geovani Fargnoli Filho
Orientador

LAVRAS – MG
2023

Dedico este trabalho a cada um que contribuiu,
seja diretamente ou indiretamente, para que
me tornasse a pessoa que sou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois mesmo me recusando a perceber, por um longo período, que sou totalmente dependente do Seu amor, nunca desistiu de mim e aguardou pacientemente meu retorno.

Agradeço à minha família, em especial a minha mãe, Rosânjela, e meu irmão, Rogério, que, mesmo, muitas vezes, não compreendendo minhas aflições, nunca deixaram de me apoiar e me incentivar a prosseguir.

Agradeço ao meu orientador, professor Helvécio Geovani Fargnoli Filho, pela dedicação, atenção, paciência e compreensão. Procurarei sempre me espelhar em seu exemplo de profissionalismo, professor!

Agradeço a todas as docentes e todos os docentes do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - IFMG, campus Formiga-MG, no qual iniciei minha trajetória acadêmica, e da Universidade Federal de Lavras-MG - UFLA, na qual dei continuidade a mesma, pela dedicação, atenção, carinho e por incentivarem suas alunas e seus alunos a sempre acreditarem em si mesmas e em si mesmos.

Agradeço a todos os membros do Movimento Face a Face com Deus da Diocese de Campanha-MG, por não desistirem, mesmo em meio às inúmeras dificuldades encontradas, de fazer com que percebamos o quanto o fardo se torna mais leve quando permitimos que Jesus se faça presente em nossas vidas.

Agradeço ao Padre Ednaldo Barbosa e ao Padre Paulo César Teixeira, por terem sido instrumentos de Deus em minha caminhada, contribuindo para que a chama da vida voltasse a arder em meu coração.

Agradeço a todas as docentes e todos os docentes, com quem convivi no decorrer de minha Educação Básica, que contribuíram para que essa conquista, de cursar o Ensino Superior, fosse possível.

Tudo tem seu tempo.
Há um momento oportuno
para cada coisa debaixo do céu...
(Eclesiastes 3,1)

RESUMO

Neste trabalho abordamos um método de solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, equações que envolvem uma função de uma variável e sua derivada e que auxiliam o estudo e a análise de inúmeros fenômenos físicos e biológicos, através da Teoria de Grupos de Lie, especificamente das simetrias de Lie, transformações que, além de preservarem a estrutura da equação diferencial, têm como imagem soluções da própria equação.

Palavras-chave: Grupos de Lie. Grupos de simetrias. Métodos de solução de EDO's.

ABSTRACT

In this work we approach a method of solving first order ordinary differential equations, equations that involve a function of a variable and its derivative and that help the study and analysis of countless physical and biological phenomena, through the Theory of Lie Groups, specifically of Lie symmetries, transformations that, in addition to preserving the structure of the differential equation, have solutions of the equation itself as an image.

Keywords: Lie groups. Symmetry groups. ODE's solution methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Análise geométrica de $R_1 \circ I$ 18
Figura 2.2 – Análise geométrica de $I \circ R_1$ 18
Figura 5.1 – Ação da simetria $\Gamma_\varepsilon(x,y) = (\varepsilon x, \varepsilon^2 y)$ 50
Figura 5.2 – Rotação do círculo unitário 51
Figura 5.3 – Algumas soluções de $y' = 0$ 52

SUMÁRIO

1	**Introdução**	10
2	**Grupos**	11
2.1	**Subgrupos**	18
2.2	**Homomorfismos e Isomorfismos de Grupos**	19
2.3	**Subgrupos Normais e Grupos Quocientes**	21
3	**Equações Diferenciais**	25
3.1	**Classificação das Equações Diferenciais**	26
3.2	**Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem**	28
3.2.1	**Equações Lineares**	29
3.2.2	**Equações Separáveis**	31
3.2.3	**Equações Exatas**	33
3.3	**Existência e Unicidade de Soluções**	35
4	**Grupos de Lie**	37
4.1	**Topologias**	37
4.2	**Variedades Diferenciáveis**	37
4.2.1	**Grupos Topológicos**	38
4.3	**Grupos de Lie**	41
4.3.1	**Grupos de Lie Matriciais**	41
4.3.2	**Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares**	42
4.4	**Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais**	47
5	**Grupos de Lie e Equações Diferenciais Ordinárias**	49
5.1	**Simetrias**	49
5.1.1	**Simetrias de Equações Diferenciais**	51
5.1.2	**Condição de Simetria**	53
5.1.3	**Utilizando Simetrias para Determinar a Solução de EDO’s**	55
5.1.4	**Coordenadas Canônicas**	57
5.1.5	**Condição de Simetria Linearizada**	59
5.1.6	**Geradores Infinitesimais de Simetrias**	61
5.1.7	**Exemplo de como Utilizar Simetrias para Determinar a Solução de EDO’s**	61
5.1.8	**Simetrias e algumas Técnicas de Resolução de EDO’s**	66
6	**Conclusão**	70

REFERÊNCIAS 71

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais, equações que apresentam derivadas em suas expressões, auxiliam o estudo e a análise de processos complexos por permitirem a utilização de equações simples, ou de combinações das mesmas, para a compreensão e a descrição de inúmeros fenômenos físicos e biológicos. Quando utilizadas para a análise de fenômenos físicos, sendo denominadas de “modelos matemáticos”, classificam-se quanto ao tipo, a ordem e a linearidade (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Dentre elas, destacam-se as equações diferencias ordinárias ou EDO’s, equações que envolvem uma função de uma variável e suas derivadas, e suas distintas técnicas de resolução.

O conceito de grupo, definido pelo francês Evariste Galois, enquanto dava continuidade a estudos sobre a resolução de equações algébricas com grau maior do que ou igual a cinco, contribuiu para a simplificação da análise de muitos outros objetos matemáticos, ao facilitar a organização dos mesmos de acordo com a ocorrência de propriedades em comum.

Estabelecendo uma relação entre esses dois importantes conceitos, Sophus Lie – cujo início de sua teoria, denominada de teoria de Lie, remonta, aproximadamente, ao ano de 1870 – fez importantes descobertas, dentre elas a dos grupos infinitesimais, ao propor a análise das soluções de equações diferenciais ordinárias e parciais mediante seus grupos de simetria, principalmente os grupos contínuos de transformações.

Sendo assim, neste trabalho abordaremos, inicialmente, conceitos relacionados a Teoria de Grupos e a Equações Diferenciais, para, posteriormente, apresentarmos o que vem a ser os Grupos de Lie, especialmente os grupos de Lie a 1-parâmetro, e de que forma seus elementos, denominados de simetrias de Lie, auxiliam na resolução de EDO’s de primeira ordem.

2 GRUPOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições sobre grupos e alguns exemplos, baseados em Bassalo e Cattani (2008) e Domingues e Iezzi (2003), especialmente de grupos de matrizes, com o intuito de auxiliar na compreensão dos assuntos a serem abordados nos demais capítulos.

Definição 1. *Um sistema matemático constituído de um conjunto G, com $G \neq \emptyset$, e uma operação $(x,y) \mapsto x * y$ sobre G será denominado grupo se essa operação se sujeitar aos seguintes axiomas:*

i) ***Fechamento:*** $\forall\, a,b \in G,\ a * b = c \in G$;

ii) ***Associatividade:*** $(a * b) * c = a * (b * c)$, *quaisquer que sejam* $a,b,c \in G$;

iii) ***Existência de elemento neutro:*** *existe um elemento* $e \in G$ *tal que* $a * e = e * a = a$, *qualquer que seja* $a \in G$;

iv) ***Existência de simétricos (ou inversos):*** $\forall\, a \in G$ *existe um elemento* $a' \in G$ *tal que* $a * a' = a' * a = e$.

Se ela ainda se sujeitar ao axioma

v) ***Comutatividade:*** $a * b = b * a$, *quaisquer que sejam* $a,b \in G$,

o grupo receberá o nome de grupo comutativo ou abeliano.

Assim, sendo G munido da operação * um grupo, o denotaremos por $(G, *)$. Se * representar uma adição, o grupo será denominado de *grupo aditivo*, e se representar uma multiplicação, será denominado de *grupo multiplicativo*. No que se refere à existência do simétrico de um elemento a qualquer, se o grupo for aditivo ele será denominado de elemento oposto e indicado por $-a$. Já se o grupo for multiplicativo, ele será denominado de elemento inverso e indicado por a^{-1}.

São propriedades imediatas de um grupo:

- o elemento neutro de $(G, *)$ é único;
- o simétrico de cada elemento de $(G, *)$ é único;
- se e é o elemento neutro, então $e' = e$;

- $(a*b)' = b'*a'$ e, para $n \geq 1$, $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)' = a'_n * a'_{n-1} * \ldots * a'_1$;

- todo elemento de G é regular para a operação $*$. Logo, se $a*x = a*y$ (ou $x*a = y*a$), então $x = y$;

- no grupo G, a equação $a*x = b$ (ou $x*a = b$) tem uma única solução, o elemento $a'*b$ (respectivamente, $b*a'$).

Para detalhes a respeito das demonstrações dessas propriedades, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 139).

Definição 2. *O número de elementos de um grupo é chamado de* ***ordem*** *do grupo e é denotado por* $\mathbf{o}(G)$. *Os grupos podem ser* ***finitos****, se G for um conjunto finito, ou* ***infinitos****, caso G seja infinito.*

Definição 3. *Um grupo cujos elementos são caracterizados por um número de parâmetros contínuos é chamado* ***grupo contínuo****.*

Exemplos de grupos:

i) ***Grupos aditivos:*** sistema formado pelo conjunto $\mathbb{K}$, , com $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e a adição usual sobre cada um desses conjuntos, sendo a soma de dois números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, definida por $z+w = (a+c)+(b+d)i$, visto que essa operação é associativa e comutativa. Ela possui um elemento neutro, o número $0 = 0+0i$, e, para todo elemento $z \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos determinar um oposto $-z = (-a)+(-b)i$. Vale ressaltar que, pelo fato da adição usual sobre os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ ser comutativa, todos esses grupos são *grupos aditivos comutativos*.

ii) ***Grupos multiplicativos:*** sistema formado pelo conjunto $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$, e a multiplicação usual sobre cada um desses conjuntos, sendo o produto de dois números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, definido por $z \cdot w = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$. Ela é associativa, possui um elemento neutro, o número $1 = 1+0i$, e para todo elemento $z \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, o mesmo se pode dizer do seu inverso, denotado agora por $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{(-b)}{a^2+b^2}i$ para $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Como no exemplo anterior, devido à multiplicação usual sobre os conjuntos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$ ser comutativa, todos esses grupos são *grupos multiplicativos comutativos*.

iii) ***Grupo aditivo de matrizes $m \times n$:*** denotando por $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o conjunto de todas as matrizes sobre $\mathbb{K}$ com m linhas e n colunas, vamos mostrar que $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ é um grupo aditivo.

Sejam $A, B, C \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pela adição de matrizes

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K}).$$

Portanto, trata-se de uma operação sobre o conjunto $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$.

Em relação ao axioma da *associatividade*, temos

$$\begin{aligned}
A + (B + C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & \cdots & a_{1n} + (b_{1n} + c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + (b_{m1} + c_{m1}) & \cdots & a_{mn} + (b_{mn} + c_{mn}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & \cdots & (a_{1n} + b_{1n}) + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) + c_{m1} & \cdots & (a_{mn} + b_{mn}) + c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \\
&= (A + B) + C.
\end{aligned}$$

Ela também satisfaz os axiomas da *existência de elemento neutro* e da *existência de opostos*, sendo representados, respectivamente, pelas matrizes nula e oposta de ordem $m \times n$

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \forall A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K}),$$

pois,

$$A + 0_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A,$$

de forma análoga demonstramos que $0_{m\times n} + A = A$, e

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-a_{m1} & \cdots & a_{mn}-a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0_{m\times n},$$

de forma análoga demonstramos que $(-A) + A = 0_{m\times n}$.

Além disso, o grupo é comutativo, pois também satisfaz o axioma da *comutatividade*, sendo

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} = B + A.$$

Portanto, $(\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K}), +)$ é um grupo aditivo abeliano para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

iv) ***Grupos lineares de grau n:*** denotando por $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o conjunto de todas as matrizes de ordem $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, vamos mostrar que apenas para $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, o conjunto de todas as matrizes inversíveis de ordem $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, teremos um grupo multiplicativo.

Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Pela multiplicação de matrizes, temos

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = (C)_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}), \text{ com } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ela satisfaz o axioma da *associatividade*, pois

$$\begin{aligned}[(AB)\,C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(AB)_{ik}\,C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{il}\,B_{lk}\,C_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{il}\,B_{lk}\,C_{kj} = \sum_{l=1}^{n}A_{il}\sum_{k=1}^{n}B_{lk}\,C_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}A_{il}\,(BC)_{lj} = [A\,(BC)]_{ij},\end{aligned}$$

e também o da *existência de elemento neutro*, sendo o mesmo representado pela matriz identidade de ordem $n \times n$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

visto que

$$(A\mathbb{1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}A_{ik}\,\mathbb{1}_{kj} = A_{ij}\,\mathbb{1}_{jj} = A_{ij}\,1 = A_{ij} = 1\,A_{ij} = \mathbb{1}_{ii}A_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\mathbb{1}_{il}A_{lj} = (\mathbb{1}A)_{ij}.$$

Entretanto, no que se refere ao axioma da *existência de simétrico*, que para grupos multiplicativos é denominado de elemento inverso, ele só será satisfeito para as matrizes cujo determinante for diferente de zero, ou seja, matrizes que pertencem ao conjunto $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, pois, conforme Barata (2022, cap. 10)[1]:

Teorema 1. *Para toda matriz* $A \in Mat(n, \mathbb{K})$*, se* $det(A) = 0$*, então* A *não tem inversa.*

Demonstração: Se $\det(A) = 0$, então A não pode ter inversa, pois se existisse A^{-1} teríamos

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\,\det(A^{-1}) = 0,$$

absurdo.■

Portanto, $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \cdot)$ é um grupo multiplicativo para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ele não é co-

[1] Devido à obra estar em constante atualização e, consequentemente, ocorrerem alterações em relação às páginas nas quais os temas abordados se encontram, indicaremos seus capítulos, com o objetivo de minimizar possíveis confusões.

mutativo para $n > 1$, pois, por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

teremos

$$AB = \begin{pmatrix} n & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Logo, $AB \neq BA$.

O grupo $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \cdot)$ é chamado de *grupo linear racional*, *real* ou *complexo*, *de grau* n, para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, respectivamente.

v) ***Grupos aditivos de classes de restos:*** o conjunto das classes de resto módulo m, para $m \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$, $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo m. Logo, $\overline{0}$ é formado por todos os inteiros côngruos a 0, módulo m, $\overline{1}$ por todos os inteiros côngruos a 1, módulo m, e assim por diante.

A adição módulo m, definida por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b},$$

com $a, b \in \mathbb{Z}$, é uma operação sobre $\mathbb{Z}_m$ que satisfaz os axiomas da *associatividade* e da *comutatividade*. Possui elemento neutro, $\overline{0}$,

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a},$$

e elemento oposto, definido, para $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$, pela classe $\overline{m-a}$, pois

$$\overline{a} + \overline{m-a} = \overline{a + (m-a)} = \overline{m} = \overline{0},$$

visto que $m \equiv 0(\bmod m)$. Então, $\overline{-a} = \overline{m-a}$. Logo, satisfaz também os axiomas da *existência de elemento neutro* e da *existência de simétricos*.

Portanto, $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo comutativo, denominado *grupo aditivo das classes de resto módulo m*, $\forall\, m > 1$, com $\mathrm{o}((\mathbb{Z}_m, +)) = m$.

vi) ***Grupo de permutações*** $S(E)$***:*** compreendendo por *permutação* uma bijeção de um conjunto nele mesmo, denotaremos por $S(E)$, com $E \neq \emptyset$, o conjunto das permutações dos elementos de E.

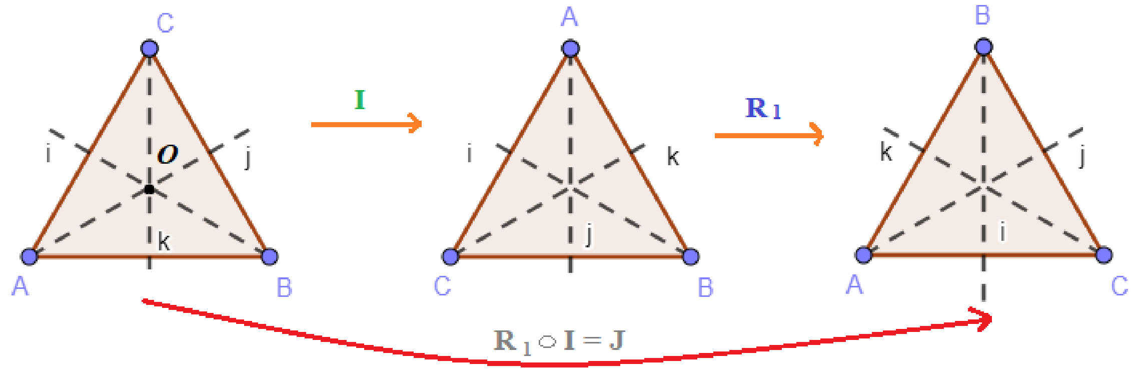
A composição de aplicações é uma operação sobre $S(E)$, pois, se f e g são permutações de E, ou seja, se $f: E \to E$ e $g: E \to E$ são bijeções, então a composta $g \circ f: E \to E$ também é uma bijeção. Essa operação satisfaz os axiomas da *associatividade* e da *existência de elemento neutro*, sendo o mesmo representado pela função i_E, pois $i_E: E \to E$ (aplicação identidade de E) é uma bijeção. Assim, $(i_E \circ f)(x) = i_E(f(x)) = f(x)$, para todo $x \in E$, o que garante a igualdade $i_E \circ f = f$. De forma análoga, podemos provar $f \circ i_E = f$. Sendo f uma permutação de E, o mesmo acontecerá com f^{-1} (aplicação inversa de f), que é uma bijeção e é o elemento inverso de f para a composição de aplicações, pois $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_E$.

Portanto, $(S(E), \circ)$ é um grupo, o *grupo das permutações sobre E*, que é comutativo se, e somente se, $\mathrm{o}(S(E)) = 1$ ou $\mathrm{o}(S(E)) = 2$.

vii) ***Grupo de simetrias do triângulo equilátero:*** compreende-se por *simetria* de um triângulo equilátero T qualquer aplicação bijetora $f: T \to T$ que preservar distâncias, ou seja, se a e b forem pontos arbitrários do triângulo, então a distância de $f(a)$ a $f(b)$ será igual à distância de a a b.

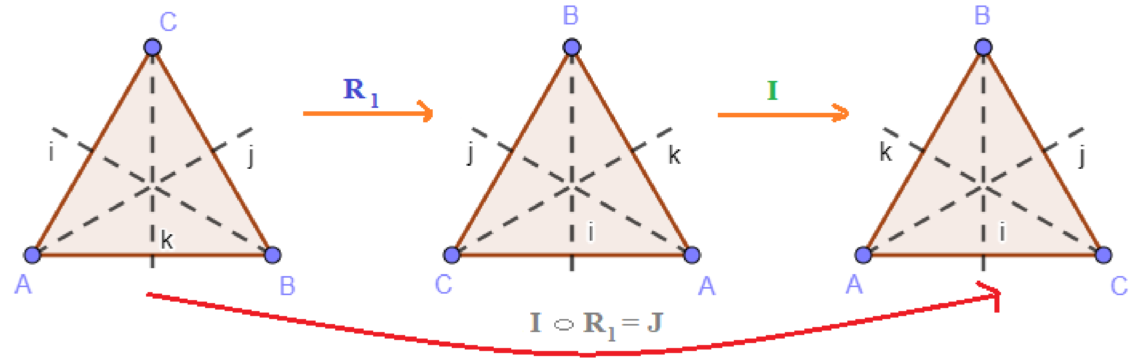
Visando caracterizar geometricamente as simetrias do triângulo, indicaremos seus vértices consecutivamente por A, B e C e consideraremos as seguintes retas pelo seu baricentro O: j, pelo vértice A, i, pelo vértice B, e k, pelo vértice C. Denotando-se por R_0, R_1 e R_2 as rotações de 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ radianos em torno de O no sentido anti-horário e por J, I e K, respectivamente, as reflexões espaciais de π radianos em torno das retas j, i e k, prova-se que o conjunto das simetrias do triângulo é exatamante $\{R_0, R_1, R_2, J, I, K\}$. Esse conjunto, com a composição de transformações, é um grupo não abeliano. As Figuras 2.1 e 2.2 ilustram como são obtidas, geometricamente, $R_1 \circ I$ e $I \circ R_1$, por exemplo.

Figura 2.1 – Análise geométrica de $R_1 \circ I$



Fonte: Da autora (2022).

Figura 2.2 – Análise geométrica de $I \circ R_1$



Fonte: Da autora (2022).

2.1 Subgrupos

Definição 4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto $H \subset G$, com $H \neq \emptyset$, será um subgrupo de G, sendo denotado por $H < G$, se:*

i) H é fechado para a operação $*$, ou seja, se $a, b \in H$, então $a * b \in H$;

ii) $(H, *)$ também é um grupo.

Os subgrupos $\{e\}$ e o próprio G, sendo e o elemento neutro de G, são denominados de *subgrupos triviais* de G.

Uma outra forma de determinar se $H \subset G$ é ou não um subgrupo de um grupo G é apresentada pela proposição a seguir:

Proposição 1. *Seja $(G, *)$ um grupo. Para que um subconjunto $H \subset G$, com $H \neq \emptyset$, seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a * b' \in H$ sempre que $a, b \in H$.*

A proposição 1 não será demonstrada. Para maiores detalhes, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 154).

Vale ressaltar que, se o grupo for aditivo, a proposição 1 poderá ser interpretada como: se $a,b \in H$, então $a+(-b) \in H$; e se for multiplicativo, como: se $a,b \in H$, então $ab^{-1} \in H$.

2.2 Homomorfismos e Isomorfismos de Grupos

Definição 5. *Dá-se o nome de homomorfismo de um grupo $(G,*)$ em um grupo $(J,\cdot)$ a toda aplicação $f: G \to J$ tal que, quaisquer que sejam $x,y \in G$,*

$$f(x*y) = f(x)\cdot f(y).$$

Se um homomorfismo é uma aplicação injetora, será denominado de *homomorfismo injetor*. E se for uma aplicação sobrejetora, de *homomorfismo sobrejetor*.

Algumas proposições e corolários, referentes à definição 5, serão apresentados sem serem demonstrados. Para maiores detalhes, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 164-165).

O símbolo de multiplicação será utilizado para representar as operações dos grupos considerados, podendo ser substituído pelo que melhor se adequar à situação analisada.

Sejam G e J grupos multiplicativos, com elementos neutros iguais a e e u, respectivamente, e $f: G \to J$ um homomorfismo de grupos.

Proposição 2. $f(e) = u$*.*

Proposição 3. *Se $a \in G$, então $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.*

Corolário 1. $f(ab^{-1}) = f(a)\,[f(b)]^{-1}$*.*

Proposição 4. *Se $H < G$, então $f(H) < J$.*

A proposição 4 garante que um homomorfismo $f: G \to J$ transforma subgrupos de G em subgrupos de J. Em particular, $\mathrm{Im}(f) < J$.

Proposição 5. *Sejam G, J e L grupos. Se $f: G \to J$ e $g: J \to L$ são homomorfismos de grupos, então o mesmo se pode dizer de $g \circ f: G \to L$.*

Corolário 2. *Se f e g são homomorfismos injetores (ou sobrejetores), então $g \circ f$ também é um homomorfismo injetor (ou sobrejetor).*

No que diz respeito ao *núcleo de um homomorfismo*:

Definição 6. *Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se u for o elemento neutro de J, o seguinte subconjunto de G será chamado núcleo de f e denotado por $N(f)$ ou $Ker(f)$*

$$N(f) = \{x \in G \mid f(x) = u\}.$$

Pela proposição 2, temos que $e \in \mathrm{N}(f)$.

Proposição 6. *Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Então*

i) $N(f) < G$;

ii) *f é um homomorfismo injetor se, e somente se, $N(f) = \{e\}$.*

Para maiores detalhes a respeito da proposição 6, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 166).

No que se refere ao *isomorfismo de grupos*:

Definição 7. *Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se f for também uma bijeção, diremos que é um isomorfismo de grupos e será chamado de isomorfismo do grupo G no grupo J. Se $G = J$ e a operação for a mesma, f é um isomorfismo de G.*

Proposição 7. *Se $f : G \to J$ é um isomorfismo de grupos, então o mesmo ocorre com $f^{-1} : J \to G$. Assim, dizemos que os grupos G e J são isomorfos.*

Para maiores detalhes a respeito da proposição 7, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 168).

O Teorema de Cayley

Conforme Domingues e Iezzi (2003), o teorema de Cayley estabelece uma relação entre os distintos grupos existentes, pois garante que todo grupo é isomorfo a um conveniente grupo de permutações.

Definição 8. *Seja G um grupo. Para cada $a \in G$, a aplicação*

$$\delta_a : G \to G$$

tal que $\delta_a(x) = ax$, para qualquer $x \in G$, será denominada de translação à esquerda definida por a. De forma análoga, podemos definir translação à direita.

Se G for um grupo aditivo, a translação à esquerda definida por $a \in G$ será denotada por $\delta_a(x) = a + x$.

Considerando qualquer uma das translações, temos:

Proposição 8. *Toda translação é uma bijeção, ou seja, é uma permutação dos elementos de G. Assim,* $T(G) \subset S(G)$*, sendo* $T(G)$ *o conjunto das translações em G e* $S(G)$ *o conjunto das permutações dos elementos de G.*

Proposição 9. *i) A composição de translações é uma operação sobre* $T(G)$*;*

ii) a inversa da translação δ_a *é a translação* $\delta_{a^{-1}}$*;*

iii) $T(G) < (S(G), \circ)$.

Proposição 10. *(Teorema de Cayley) Se G é um grupo, a aplicação* $f : G \to T(G)$ *que associa a cada elemento a a translação* δ_a*, ou seja,* $f(a) = \delta_a$*, é um isomorfismo de grupos.*

Para maiores detalhes a respeito das proposições apresentadas, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 169-170).

Da proposição 10, um exemplo de *teorema de representação*, temos que o grupo $\mathrm{T}(G)$ é uma representação do grupo G, visto que os elementos de $\mathrm{T}(G)$ são particulares permutações dos elementos de G. Logo, todo grupo pode ser representado por um grupo de permutações dos elementos de G.

2.3 Subgrupos Normais e Grupos Quocientes

Antes de definirmos os grupos que nomeiam esta seção, iremos apresentar, conforme Domingues e Iezzi (2003), a definição de classe lateral e como se comporta a multiplicação de subconjuntos.

Proposição 11. *Sejam um grupo* $(G, \cdot)$ *e um subgrupo* $H < G$ *arbitrários:*

i) A relação $\approx$ *sobre G definida por "* $a \approx b$ *se, e somente se,* $a^{-1}b \in H$*" é uma relação de equivalência;*

ii) Se $a \in G$*, então a classe de equivalência determinada por a é o conjunto* $aH = \{ ah \mid h \in H \}$.

Demonstração: *i)*

- Como $e = a^{-1}a \in H$, então $a \approx a$ e, portanto, vale a reflexividade para a relação em estudo.

- Se $a \approx b$, então $a^{-1}b \in H$; mas, sendo $H < G$, então $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$. Isso mostra que $b \approx a$ e, portanto, que a simetria também se verifica para $\approx$.

- Suponhamos $a \approx b$ e $b \approx c$; então $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$; daí $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c \in H$ e, portanto, $a \approx c$. Logo, a transitividade também vale neste caso. Assim, $\approx$ é uma relação de equivalência.

ii)

- Seja $\overline{a}$ a classe de equivalência do elemento a. Se $x \in \overline{a}$, então $x \approx a$, ou seja, $x^{-1}a \in H$. Portanto, $x^{-1}a = h$, para um conveniente elemento $h \in H$. Daí, $x = ah^{-1}$ e, portanto, $x \in aH$, uma vez que $h^{-1} \in H$.

- Por outro lado, se $x \in aH$, então $x = ah$, para algum $h \in H$. Daí, $x^{-1}a = h^{-1} \in H$ e, portanto, $x \approx a$. De onde, $x \in \overline{a}$.

Dessas conclusões, segue que $\overline{a} = aH$. ■

Assim:

Definição 9. *Para cada $a \in G$, a classe de equivalência aH definida pela relação $\approx$ é chamada de classe lateral à direita, módulo H, determinada por a.*

De maneira análoga se demonstra que a relação $\cong$ definida por " $a \cong b$ se, e somente se, $ab^{-1} \in H$” também é uma relação de equivalência sobre o grupo G. Neste caso, a classe de equivalência de um elemento $a \in G$ é o subconjunto $Ha = \{ ha \mid h \in H \}$, chamado *classe lateral à esquerda, módulo H, determinada por a*. Se G for comutativo, então $aH = Ha$, para qualquer $a \in G$.

Em decorrência da proposição 11, o conjunto das classes laterais à direita, módulo H, determina uma partição em G, ou seja:

a) se $a \in G$, então $aH \neq \emptyset$;

b) se $a, b \in G$, então $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$;

c) a união de todas as classes laterais é igual a G.

O conjunto quociente de G por essa relação, denotado por G/H, é o conjunto das classes laterais aH $(a \in G)$, sendo H um de seus elementos, pois $H = eH$.

No que se refere à multiplicação de subconjuntos, sejam o grupo $(G, \cdot)$ e $A, B \subset G$. Indicaremos por AB e nomearemos de *produto* de A por B o seguinte subconjunto de G:

$$\begin{aligned} AB &= \emptyset, \text{ se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset \qquad \text{e} \\ AB &= \{\, xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}, \text{ se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, a "lei" que associa a cada par (A, B), com $A, B \subset G$, seu produto AB é uma operação sobre o conjunto $\mathcal{P}(G)$, conjunto das partes de G, chamada *multiplicação de subconjuntos* de G. Essa operação goza da propriedade associativa, pelo fato de a multiplicação em G gozar, e, se caso o grupo G for comutativo, irá gozar também da propriedade comutativa.

Definição 10. *Um subgrupo $N < G$ é chamado subgrupo normal, ou invariante, se, para todo $x \in G$, se verifica a igualdade*

$$xN = Nx.$$

Ou seja, a classe lateral à direita, módulo N, determinada por x, é igual à classe lateral à esquerda, módulo N, determinada por x, para qualquer $x \in G$. Denotaremos por $N \lhd G$, quando N for um subgrupo normal de G. Vale ressaltar que, se G for abeliano, então todo subgrupo de G é normal.

Proposição 12. *Seja $N \lhd G$. Então, para quaisquer $a, b \in G$, vale a igualdade*

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

A proposição 12, cuja demonstração poderá ser consultada em Domingues e Iezzi (2003, p. 194), afirma que G/N é fechado em relação à multiplicação de subconjuntos de G. A associatividade da multiplicação de classes laterais é uma consequência desse fechamento e da associatividade da multiplicação de subconjuntos.

Além da propriedade apresentada na proposição 12, envolvendo a multiplicação de subconjuntos de G, restrita a G/N com $N \lhd G$, valem também:

- $[(aN)(bN)](cN) = (aN)[(bN)(cN)]$;
- $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$;
- $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$.

Logo, o conjunto quociente G/N, com a multiplicação de subconjuntos restrita a seus elementos, é um grupo com elemento neutro igual a $eN = N$ e no qual $(aN)^{-1} = a^{-1}N$.

No que diz respeito ao *grupo quociente*:

Definição 11. *Sejam G um grupo e $N \lhd G$. Nessas condições, o grupo quociente de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N e a restrição aos elementos desse conjunto da multiplicação de subconjuntos de G.*

Proposição 13. *Seja $f : G \to L$ um homomorfismo de grupos. Se $N \lhd G$, então a aplicação $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos cujo núcleo é N.*

Para maiores detalhes a respeito da proposição 13, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 196).

Com o intuito de complementar nossas observações, apresentaremos a:

Definição 12. *Seja $f : G \to L$ um homomorfismo de grupos. Se $N \lhd G$, então o homomorfismo $\mu : G \to G/N$ definido por $\mu(a) = aN$ é chamado homomorfismo canônico de G sobre G/N.*

e o:

Lema 1. *Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos, então $N = Ker(f)$ é um subgrupo normal de G e, portanto, G/N tem uma estrutura de grupo.*

Assim, podemos enunciar o teorema do homomorfismo:

Proposição 14. *(teorema do homomorfismo para grupos) Seja $f : G \to L$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se $N = Ker(f)$, então o grupo quociente G/N é isomorfo ao grupo L.*

Para maiores detalhes a respeito do lema 1 e da proposição 14, consultar Domingues e Iezzi (2003, p. 196-197).

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Conforme Boyce e DiPrima (2015), utilizadas para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos, as equações diferenciais, equações que contêm derivadas em suas expressões, se apresentam como uma ferramenta útil ao facilitar a descrição desses fenômenos, muitas vezes complexos, através de modelos constituídos por uma simples equação e sua solução ou por combinações delas, os sistemas de equações, e suas soluções.

Dentre os vários aspectos presentes no decorrer da análise de problemas que envolvem a utilização de equações diferenciais em sua resolução, como

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t,y) \tag{3.1}$$

na qual y, variável dependente, está em função de t, variável independente, e f é uma função de duas variáveis t e y, vale destacar o ***campo de direções***, que nada mais é do que a disposição, em uma malha retangular, de pequenos segmentos de reta que representam o coeficiente angular determinado pelo valor da função f em diferentes pontos, pontos esses que pertencem ao gráfico de uma solução da equação − funções $y = y(t)$ que determinam curvas no plano ty; e também a ***solução de equilíbrio***, que representa o valor para o qual $\frac{dy}{dt} = 0$ e que permite analisarmos se as demais soluções estão convergindo ou não para ela ou se são crescentes ou decrescentes, quando t assume diferentes valores. Vale ressaltar que, quanto mais fina a malha, maior será a precisão na análise do comportamento das soluções da equação e que, em conjunto, o campo de direções e a solução de equilíbrio auxiliam nessa análise antes mesmo das soluções serem determinadas.

Para uma equação diferencial da forma (3.1), quando atribuímos um valor para um ponto em específico do gráfico, por exemplo $y(t_0) = y_0$, em que $t = t_0$ e $y = y_0$, denominado de ***condição inicial***, constituímos um ***problema de valor inicial*** (***PVI***). Assim, tomando $f(t,y) = ay - b$, para a equação

$$\frac{dy}{dt} = ay - b, \tag{3.2}$$

em que a e b são constantes dadas, e a condição inicial $y(0) = y_0$, em que $t = 0$ e $y = y_0$, teremos

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y - \frac{b}{a}} = a,$$

com $a \neq 0$ e $y \neq \frac{b}{a}$ que, ao ser integrada, resultará em

$$\ln\left|y - \frac{b}{a}\right| = at + c, \tag{3.3}$$

com $c \in \mathbb{R}$ sendo uma constante de integração arbitrária. Aplicando a exponencial em (3.3) e resolvendo para y, teremos

$$y = \frac{b}{a} + c_0 e^{at}$$

na qual $c_0 = \pm e^c$. Essa equação representa infinitas soluções e, para $a \neq 0$, ela contém todas as soluções possíveis de (3.2), sendo denominada de ***solução geral***. Sua representação geométrica é uma família infinita de curvas, chamadas de ***curvas integrais***, que satifazem a expressão (3.2) e estão associadas a um valor particular de c_0. Quando $c_0 = 0$, temos a solução de equilíbrio $y = \frac{b}{a}$. Para a condição inicial $y(0) = y_0$, $c_0 = y_0 - \frac{b}{a}$. Logo, a solução do problema de valor inicial para (3.2) será

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a}\right] e^{at}.$$

Assim, satisfazer uma condição inicial nada mais é do que identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado, como o ponto $(0, y_0)$ do exemplo.

Tendo sido apresentados esses conceitos iniciais, daremos continuidade às definições relacionadas às equações diferenciais.

3.1 Classificação das Equações Diferenciais

Quando a função desconhecida depende de uma única variável independente, ou seja, a expressão da equação diferencial possui apenas derivadas simples, será denominada ***equação diferencial ordinária*** (***EDO***). Por exemplo

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t),$$

que descreve a carga $Q(t)$ em um capacitor em um circuito com capacitância C, resistência R, indutância L e submetido a uma tensão $E(t)$. Já quando a função depende de várias variáveis independentes, com sua expressão apresentando derivadas parciais, será denominada ***equação diferencial parcial*** (***EDP***). Por exemplo

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

com a^2 uma constante física, conhecida como equação de onda e utilizada em problemas relacionados ao movimento ondulatório em sólidos ou fluidos. Nela, a variável dependente u depende de duas variáveis independentes, x e t.

No que diz respeito ao número de funções desconhecidas, se existirem duas ou mais funções a serem determinadas teremos um ***sistema de equações diferenciais***. Por exemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy, \end{cases}$$

que constituem as equações de Lotka-Volterra, ou predador-presa, importantes em modelagem ecológica. Nelas, $x(t)$ e $y(t)$ representam as populações das espécies presa e predadora, respectivamente, e as constantes a, α, c e γ assumem valores baseados em observações empíricas e dependem das espécies analisadas.

Em relação à ***ordem***, a equação diferencial será classificada de acordo com a derivada de maior ordem que aparece na equação. Por exemplo

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{3.4}$$

consiste em uma EDO de terceira ordem, com $y = y(t)$. De maneira geral, a equação

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.5}$$

é uma EDO de ordem n.

Com relação à linearidade de equações diferenciais, elas podem ser classificadas em ***equações lineares*** e ***equações não lineares***. A equação (3.5) é uma ***equação diferencial linear*** se F é uma função linear das variáveis y, y', ..., $y^{(n)}$. Por exemplo, a equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0,$$

que é satisfeita pelo ângulo θ que um pêndulo de comprimento L oscilando faz com a direção vertical, é uma EDO não linear devido ao termo $\operatorname{sen}\theta$, da mesma forma que (3.4), devido à expressão yy'. As EDP's são classificadas de forma análoga.

No que se refere às soluções das equações diferenciais, uma ***solução*** da equação

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

que consiste em uma forma de escrever a equação (3.5) com o intuito de evitar ambiguidades, no intervalo $\alpha < t < \beta$, é uma função $y = \phi(t)$ tal que $\phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(n)}(t)$ existem e satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)), \ \forall \ t \text{ com } \alpha < t < \beta.$$

Logo, para verificar se uma determinada função é uma possível solução para a equação diferencial, basta substituir a função e suas derivadas na expressão da equação analisada e constatar se a mesma é ou não satisfeita.

Visto que iremos, neste trabalho, analisar como as simetrias de Lie auxiliam na resolução de EDO's de primeira ordem, restringiremos nossa abordagem a conceitos relacionados às mesmas.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Nesta seção discutiremos brevemente sobre os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y), \tag{3.6}$$

em que f é uma função dada que depende de duas variáveis, t e y, visto não existir método geral para resolvê-las em termos de funções elementares para uma função arbitrária f. Como já mencionado, para que uma função diferenciável qualquer $y = \phi(t)$ caracterize uma solução para (3.6), ela deverá satisfazer essa equação para todo t em algum intervalo.

Dentre as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, abordaremos as equações lineares, as equações separáveis e as equações exatas, além de algumas condições que nos permitem analisar a existência e a unicidade de soluções. Para maiores detalhes, consultar Boyce e DiPrima (2015).

3.2.1 Equações Lineares

As equações lineares de primeira ordem são equações (3.6) em que a função f depende linearmente da variável dependente y. Dentre elas, temos equações do tipo

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \tag{3.7}$$

em que os coeficientes a e b são constantes dadas.

A equação linear de primeira ordem geral

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{3.8}$$

na qual os coeficientes a e b foram substituídos pelas funções arbitrárias $p(t)$ e $g(t)$ da variável independente t, está representada na forma padrão. Algumas vezes poderá ser encontrada também na forma

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{3.9}$$

em que $P(t)$, $Q(t)$ e $G(t)$ são funções dadas. Para $P(t) \neq 0$, (3.8) poderá ser obtida de (3.9) dividindo a última por $P(t)$.

Em algumas circunstâncias (3.8) poderá ser resolvida por integração direta, quando a expressão à esquerda do sinal de igualdade for uma combinação linear de $\frac{dy}{dt}$ e y semelhante à obtida na regra para a derivada de um produto no cálculo. Quando isso não for possível, poderemos determinar uma função $\mu(t)$ que, ao ser multiplicada a (3.8), a transformará em uma equação que é imediatamente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada de ***fator integrante***.

Considerando a equação (3.8) e multiplicando-a pelo fator integrante $\mu(t)$, teremos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \tag{3.10}$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade em (3.10) deverá satisfazer a derivada do produto $\mu(t)y$, ou seja,

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y,$$

na qual

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t). \tag{3.11}$$

Logo, (3.10) torna-se

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)g(t)$$

que, ao ser integrada em ambos os lados em relação a t, resultará em

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$.

Para resolvermos (3.11), faremos

$$\frac{\frac{d\mu(t)}{dt}}{\mu(t)} = p(t),$$

que é equivalente a

$$\frac{d\ln|\mu(t)|}{dt} = p(t).$$

Integrando-a em relação a t, obteremos

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + c, \tag{3.12}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Aplicando a exponencial em ambos os lados de (3.12), encontraremos

$$|\mu(t)| = e^{\int p(t)dt + c}.$$

Assim,

$$\mu(t) = \pm e^c e^{\int p(t)dt}.$$

Tomando a constante $\pm e^c = 1$, o fator integrante será

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

e a solução de (3.8) será dada por

$$y = \frac{1}{e^{\int p(t)dt}}\left[\int e^{\int p(t)dt} g(t)dt + c\right], \tag{3.13}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Em alguns casos, a integral presente em (3.13) pode ser calculada em termos de funções elementares. Quando isso não for possível, a solução geral da equação (3.8) será

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right],$$

em que a variável de integração foi denotada por s para distingui-la da variável independente t e t_0 foi escolhido de forma conveniente para representar o limite inferior de integração.

3.2.2 Equações Separáveis

Quando a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.14}$$

não é linear, não existe um método específico que se aplica a resolução de todas elas. Assim, iremos nos deter aqui a equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por integração direta.

Primeiramente, iremos colocar (3.14) na forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.15}$$

Note que isso sempre é possível, pois basta definirmos $M(x,y) = -f(x,y)$ e $N(x,y) = 1$.

Quando M só depender de x e N só depender de y, (3.15) ficará da forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.16}$$

Tal equação é classificada como ***separável***, porque, se descrita na forma diferencial

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{3.17}$$

as parcelas envolvendo cada variável podem ser colocadas em lados opostos do sinal de igualdade e bastará integrar as funções M e N para que seja resolvida. Essa forma, além de ser mais simétrica, ainda tende a diminuir a diferença entre as variáveis dependente e independente.

Para resolver (3.15), consideraremos as funções H_1 e H_2, duas primitivas quaisquer de M e N, respectivamente. Então,

$$\frac{d}{dx}H_1(x) = M(x), \qquad \frac{d}{dy}H_2(y) = N(y)$$

e (3.16) ficará

$$\frac{d}{dx}H_1(x) + \frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.18}$$

Considerando y como função de x, pela regra da cadeia, teremos

$$\frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y).$$

Logo, podemos reescrever (3.18) como

$$\frac{d}{dx}\left(H_1(x) + H_2(y)\right) = 0. \tag{3.19}$$

Integrando (3.19) em relação a x, obteremos

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{3.20}$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaça (3.20) será uma solução, dada de forma implícita, de (3.16). Na prática, (3.20) é obtida, geralmente, integrando-se o primeiro termo de (3.17) em relação a x e o segundo em relação a y.

A equação (3.16) com a condição inicial

$$y(x_0) = y_0$$

constituem um PVI. Para resolvê-lo, basta determinarmos o valor apropriado para a constante c em (3.20), substituindo os valores $x = x_0$ e $y = y_0$, que resultará em

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0).$$

Reescrevendo (3.20) com esse valor de c e observando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(s)ds \quad \text{e} \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(s)ds,$$

obteremos

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0. \tag{3.21}$$

A equação (3.21) constitui uma representação implícita da solução da equação (3.16) que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$. Para obtermos a solução na forma explícita, algo que nem sempre é possível analiticamente, basta resolvermos (3.21) para y como função de x.

3.2.3 Equações Exatas

Seja a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.22}$$

Supondo que possamos identificar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{3.23}$$

e também que $\psi(x,y) = c$ defina $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x, então

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi(x,\phi(x)).$$

Logo, por (3.22),

$$\frac{d}{dx}\psi(x,\phi(x)) = 0. \tag{3.24}$$

Assim, (3.22) é classificada como uma equação diferencial exata e suas soluções, que também satisfazem (3.24), são obtidas implicitamente por

$$\psi(x,y) = c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

Quando não pudermos identificar tão facilmente se uma dada equação diferencial é exata, podemos recorrer ao teorema:

Teorema 2. *Suponha que as funções M, N,* $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ *sejam contínuas em uma região retangular R:* $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. *Então*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{3.25}$$

em cada ponto de R. Ou seja, existe uma função $\psi(x,y)$ *que satisfaz*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

se, e somente se, M e N satisfizer (3.25).

O teorema 2 não será demonstrado, podendo Boyce e DiPrima (2015) ser consultado para maiores esclarecimentos a respeito do mesmo.

Para determinarmos a função $\psi(x,y)$, basta tomarmos uma das equações (3.23), por exemplo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

e integrarmos em relação a x. Logo, obteremos

$$\psi(x,y) = Q(x,y) + h(y), \tag{3.26}$$

na qual $Q(x,y) = \int M(s,y)ds$. Como $\psi(x,y)$ satisfaz

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y),$$

temos

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + \frac{dh(y)}{dy} = N(x,y). \tag{3.27}$$

Simplificando e integrando (3.27) em relação a y obteremos h e, consequentemente, determinaremos $\psi(x,y)$.

3.3 Existência e Unicidade de Soluções

Para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares, as questões sobre a existência ou não de soluções para um problema de valor inicial e, se caso existirem, se são únicas ou não, são respondidas pelo teorema fundamental:

Teorema 3. *Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto I:* $\alpha < t < \beta$ *contendo o ponto* $t = t_0$*, então existe uma única função* $y = \phi(t)$ *que satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0,$$

em que y_0 *é um valor inicial arbitrário dado.*

Vale ressaltar que o teorema 3 garante tanto a *existência*, quanto a *unicidade* da solução do problema de valor inicial. Ele afirma que a solução existe em qualquer intervalo I, contendo o ponto inicial t_0, no qual os coeficientes $p(t)$ e $g(t)$ são contínuos. Caso um deles seja descontínuo em certos pontos, a solução pode ser descontínua ou deixar de existir.

No que diz respeito às equações diferenciais de primeira ordem não lineares, as questões pontuadas anteriormente são esclarecidas pelo teorema geral:

Teorema 4. *Suponha que as funções* f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas em algum retângulo* $\alpha < t < \beta$*,* $\gamma < y < \delta$ *contendo o ponto* (t_0, y_0)*. Então, em algum intervalo* $t_0 - h < t < t_0 + h$ *contido em* $\alpha < t < \beta$*, existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Vale ressaltar que as condições estabelecidas pelo teorema 4 são suficientes, mas não necessárias, para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$. A existência de uma solução, mas não sua unicidade, pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f.

Analisando do ponto de vista geométrico, uma consequência das condições impostas pelos teoremas 3 e 4 é a de que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar, pois, se isso ocorresse, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente no ponto de interseção, contrariando as conclusões dos teoremas.

Ambos os teoremas não foram demonstrados, podendo Boyce e DiPrima (2015) ser consultado para maiores esclarecimentos a respeito dos mesmos.

4 GRUPOS DE LIE

Daremos ênfase, baseados em Barata (2022), aos grupos de Lie matriciais apresentando conceitos relacionados aos mesmos, dentre eles aspectos algébricos e topológicos de grupos de matrizes.

4.1 Topologias

Uma coleção τ de subconjuntos de X, ou seja, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, é dita ser uma *topologia* em X se satisfizer:

i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;

ii) Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

iii) Se I é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$, $\forall\, \lambda \in I$, então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ também é um elemento de τ.

Assim, um conjunto X dotado de uma topologia τ é dito ser um *espaço topológico*. Em outras palavras, um espaço topológico é um par $(X,\ \tau)$ no qual $X \neq \emptyset$ e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma topologia em X.

Um espaço topológico X dotado de uma topologia τ é dito possuir a *propriedade de Hausdorff* se, para quaisquer pontos distintos $x, y \in X$, existirem dois abertos $A_x, A_y \in \tau$ tais que $x \in A_x$ e $y \in A_y$, mas $A_x \cap A_y = \emptyset$. Um espaço topológico que possui essa propriedade é dito ser um *espaço Hausdorff* ou do *tipo Hausdorff*.

Para mais esclarecimentos, consultar Barata (2022, cap. 27) e Barata (2022, cap. 30).

4.2 Variedades Diferenciáveis

Definição 13. *Uma variedade diferenciável real de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff segundo-contável V dotado de uma família de abertos $\mathcal{F} = \{U_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$, com Λ consistindo em um conjunto de índices usados para rotular os elementos de $\mathcal{F}$, possuindo as seguintes propriedades:*

i) $V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$;

ii) Para cada $U_\alpha \in \mathcal{F}$ existe um conjunto aberto C_α de $\mathbb{R}^n$ e uma bijeção contínua com inversa contínua $\phi_\alpha : U_\alpha \to C_\alpha$;

iii) $\forall\, U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{F}$, *com* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *a função*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \phi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right),$$

denominada de função de transição, é infinitamente diferenciável como função de (um subconjunto de) $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^n$.

Uma *variedade analítica* complexa de dimensão n é definida de forma análoga, bastando substituir $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ e, na definição 13 *iii)*, a condição de diferenciabilidade infinita por analiticidade.

Variedade, que teve o conceito inspirado na noção de superfície em conjuntos como $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, não se restringe a conjuntos de pontos, como o são as superfícies de $\mathbb{R}^n$, podendo ser também conjuntos de outros tipos de objetos, como funções, curvas, vetores, matrizes, etc. A ideia intuitiva básica em torno de seu conceito é que a mesma representa uma coleção contínua de objetos que podem ser rotulados por sistemas de coordenadas de tal forma que possamos, ao menos localmente, manipular essas coordenadas de modo (infinitamente) diferenciável, como se pode fazer em $\mathbb{R}^n$. Para maiores detalhes, consultar Barata (2022, cap. 22).

4.2.1 Grupos Topológicos

Seja G um grupo. Para cada $g \in G$ podemos definir as funções $\lambda_g : G \to G,\ \rho_g : G \to G$ e $inv : G \to G$ por $\lambda_g(h) := gh,\ \ \rho_g(h) := hg$, que representam a multiplicação à esquerda e à direita por g, respectivamente, e $inv(h) := h^{-1}$.

Definição 14. *Um grupo G é dito ser um grupo topológico em relação a uma topologia* τ *definida em G se, nessa topologia, a função inv e todas as funções* λ_g *e* ρ_g *forem contínuas.*

Mais precisamente, um grupo topológico é formado por um grupo G e uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de G, $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(G)$, satisfazendo as condições que definem um *espaço topológico*:

i) $\emptyset \in \mathfrak{B}$ e $G \in \mathfrak{B}$;

ii) Se $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ e $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, então $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathfrak{B}$;

iii) Se I é um conjunto arbitrário de índices e $\mathcal{A}_\lambda \in \mathfrak{B},\ \forall\, \lambda \in I$, então $\bigcup_{\lambda \in I} \mathcal{A}_\lambda$ também é um elemento de $\mathfrak{B}$, de forma que, $\forall\, \mathcal{O} \in \mathfrak{B}$, as imagens inversas $inv^{-1}(\mathcal{O})$, $\lambda_g^{-1}(\mathcal{O})$ e $\rho_g^{-1}(\mathcal{O})$, $\forall\, g \in G$, são igualmente elementos de $\mathfrak{B}$.

Os elementos de $\mathfrak{B}$ são os conjuntos abertos de G. Um conjunto $\mathcal{F} \subset G$ é dito ser *fechado* se seu complementar $G \backslash \mathcal{F}$ for aberto.

Faremos uma breve apresentação de alguns conceitos relacionados a *grupos topológicos*, com o intuito de auxiliar na compreensão de outros que serão abordados no decorrer do capítulo.

Seja G um grupo topológico. Para $U \subset G$ e $g \in G$, definimos

$$gU := \{x \in G \mid x = gu \text{ para algum } u \in U\}$$

e

$$Ug := \{x \in G \mid x = ug \text{ para algum } u \in U\}.$$

Grupos Topológicos Conexos e Desconexos

Um grupo topológico H é dito ser *desconexo* se for a união disjunta de dois conjuntos A e B, ambos não vazios e simultaneamente abertos e fechados. Ou seja,

$$H = A \cup B, \quad \text{com } A \cap B = \emptyset \text{ e } A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset,$$

onde A e B são abertos e fechados. Um grupo topológico H é dito ser *conexo* se não for desconexo.

Sejam H um grupo topológico e $G \subset H$ um subgrupo de H. Dizemos que G é um *subgrupo topologicamente aberto* de H (ou simplesmente *subgrupo aberto* de H) se G for um subconjunto aberto de H. De forma análoga, dizemos que G é um *subgrupo topologicamente fechado* de H (ou simplesmente *subgrupo fechado* de H) se G for um subconjunto fechado de H.

Nesse contexto:

Proposição 15. *Sejam H um grupo topológico e G um subgrupo aberto de H. Então, G é igualmente um subgrupo fechado de H.*

Demonstração: Seja $g' \in \overline{G}$, sendo $\overline{G}$ o fecho de G. Então, se $U_{g'}$ é qualquer aberto de H que contém g', tem-se $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$ (Barata, 2022, cap. 27, Proposição 27.8). Vamos escolher cuidadosamente um tal aberto $U_{g'}$. Seja U_e um aberto de H que contém a identidade. Como G é aberto, $V = U_e \cap G$ é igualmente aberto. Escolhemos $U_{g'} = g'V := \{\, x \in H \mid x = g'v \text{ para algum } v \in V \,\}$. Então, como $U_{g'} \cap G \neq \emptyset$ existe algum elemento $g \in G$ que é também elemento de $U_{g'}$, ou seja, $g = g'v$ para algum elemento $v \in V$. Mas isso implica que $g' = gv^{-1}$. Agora, $v \in V = U_e \cap G \subset G$ e, portanto, $g' \in G$ por ser o produto de dois elementos de G, que é um grupo. ■

Proposição 16. *Sejam H um grupo topológico conexo e G um subgrupo aberto de H. Então, $G = H$.*

Proposição 17. *Sejam H um grupo topológico conexo e U um aberto de H que contém a identidade e que seja tal que, $\forall\, u \in U$, tem-se $u^{-1} \in U$. Então,*

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde $U^1 := U$ e $U^n := \{\ x \in H \ \mid \ x = u_n \ \dots \ u_1, \ \ com \ \ u_i \in U \ \ e \ \ i = 1, \dots, n\}$ para $n > 1$.

Informalmente, a proposição 17 afirma que se H é um grupo topológico conexo, então qualquer aberto U que contém a identidade *gera* o grupo H, ou seja, todo elemento de H pode ser escrito como o produto finito de elementos de U. Vale notar que, como a identidade e é um elemento de U, decorre da proposição 17 que $U^{n-1} \subset U^n, \ \forall \ n \geq 1$.

Seja H um grupo topológico. Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{A}_\lambda \subset H$, $\lambda \in \Lambda$, é um *recobrimento* de H se

$$H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda.$$

Um grupo topológico é dito ser *compacto* se possuir a seguinte propriedade: para todo recobrimento $\mathcal{A}_\lambda \subset H$, $\lambda \in \Lambda$, de H existir uma quantidade finita $\mathcal{A}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{A}_{\lambda_n}$ de conjuntos abertos que também é um recobrimento de H:

$$H = \mathcal{A}_{\lambda_1} \cup \ \dots \ \cup \mathcal{A}_{\lambda_n}.$$

Assim:

Proposição 18. *Seja H um grupo topológico conexo e compacto e seja U um aberto de H que contém a identidade e que seja tal que $\forall\, u \in U$ tem-se $u^{-1} \in U$. Então, existe um n tal que*

$$H = U^n,$$

ou seja, todo elemento de H é obtido por um produto de no máximo n elementos de U.

Para maiores detalhes a respeito tanto das proposições anteriores, quanto de suas demonstrações, consultar Barata (2022, cap. 22).

Continuidade Uniforme de Funções em Grupos Topológicos

Seja G um grupo topológico. Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ é dita ser uniformemente contínua se, para cada $\varepsilon > 0$, existir uma vizinhança aberta V_ε do elemento neutro de G tal que $|f(g) - f(h)| \leq \varepsilon$ sempre que $g, h \in V_\varepsilon$.

Logo:

Proposição 19. *Seja G um grupo topológico. Seja $f_1 : G \to \mathbb{C}$ uma função uniformemente contínua e seja $f_2 : G \to G$ uma função contínua com $f_2(e) = e$. Então, a função composta $f_1 \circ f_2 : G \to \mathbb{C}$ é uma função uniformemente contínua.*

A proposição 19 não será demonstrada. Para maiores detalhes consultar Barata (2022, cap. 22).

4.3 Grupos de Lie

Um grupo topológico que, enquanto espaço topológico, seja uma variedade real diferenciável (ou complexa analítica) é dito ser um *grupo de Lie* real (ou complexo) se as operações de multiplicação à direita e inversão forem infinitamente diferenciáveis (ou analíticas).

4.3.1 Grupos de Lie Matriciais

Iniciaremos nossa abordagem sobre os grupos de Lie matriciais analisando o grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o conjunto de todas as matrizes inversíveis de ordem $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, também denominado de *grupo linear real* ou *complexo de grau n*, respectivamente. Para facilitar nosso estudo, sempre que nos referirmos a $\mathbb{K}$, no decorrer do presente capítulo, estaremos considerando o conjunto $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, especificando quando algo se aplicar a apenas um deles.

A topologia métrica de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, o conjunto de todas as matrizes de ordem $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, pode ser introduzida naturalmente em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, visto que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, definindo, para $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, a métrica $d(A,B) = \|A - B\|$, sendo $\|\cdot\|$ a norma operatorial de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Assumiremos, sem demonstrar, que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é um conjunto aberto e denso de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ e que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ é um subconjunto fechado de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, sendo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ o grupo especial constituído pelos elementos $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ tal que $\det(A) = 1$. Para maiores detalhes, consultar Barata (2022, cap. 22).

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é um grupo de Lie pelo fato de ser tanto um grupo topológico, pois o produto e a inversão de matrizes em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ são operações contínuas, quanto uma variedade analítica, pois o produto e a inversão são analíticos. Sua dimensão é n^2.

No que se refere a $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, que, pelo fato de ser um subconjunto fechado de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, também será classificado como um grupo de Lie devido ao teorema:

Teorema 5. *Se H é um subgrupo topologicamente fechado de $GL(n, \mathbb{K})$ (na topologia métrica induzida de $GL(n, \mathbb{K})$), então H é também um grupo de Lie (na topologia métrica induzida de $GL(n, \mathbb{K})$).*

O teorema 5 não será demonstrado, podendo Barata (2022, cap. 22) ser consultado para maiores detalhes.

4.3.2 Grupos Associados a Formas Bilineares e Sesquilineares

Para os grupos de invariância de formas bilineares e sesquilineares definidas em espaços vetoriais de dimensão finita, os grupos $\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$ e $\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$, que mantêm invariantes, respectivamente, a forma bilinear real $\omega_A(u,v) := \langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}}$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, e a forma sesquilinear $\omega_A(u,v) := \langle u, Av\rangle_{\mathbb{C}}$, com $u, v \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, assim como para seus subgrupos, considerados especiais, de matrizes com determinante igual a um, sendo denotados por $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$ e $\mathrm{S}\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$, respectivamente, vale:

Proposição 20. *Os grupos $\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$, $\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$, $S\Omega(\mathbb{R}^n, \omega_A)$ e $S\Omega(\mathbb{C}^n, \omega_A)$, com $\det(A) \neq 0$ e que mantêm invariantes as formas bilineares e sesquilineares definidas por A, são subgrupos topologicamente fechados de $GL(n, \mathbb{K})$ e, portanto (pelo torema 5), são grupos de Lie.*

A proposição 20 não será demonstrada. Para maiores detalhes, consultar Barata (2022, cap.22).

Apresentaremos exemplos de alguns grupos relevantes que mantêm invariantes as formas bilineares e sesquilineares:

Grupos Ortogonais

i) **Os grupos O**(n) **e SO**(n): quando tivermos $\omega_A(u,v) := \langle u,\ v\rangle_{\mathbb{R}}$, no qual $A = \mathbb{1}$, o grupo $\Omega(\mathbb{R}^n,\ \omega_A)$ será denotado por $\mathrm{O}(n)$, o grupo das matrizes ditas ortogonais de ordem $n \times n$, dado por

$$\mathrm{O}(n) := \{\, M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ \ M^{-1} = M^T \,\}.$$

Se $M \in \mathrm{O}(n)$, tem-se que $MM^T = \mathbb{1}$. Daí, $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(MM^T) = \det(M)\det(M^T) = (\det(M))^2$. Logo, para $M \in \mathrm{O}(n)$, vale $\det(M) = \pm 1$.

O grupo $\mathrm{O}(n)$ possui um subgrupo

$$\mathrm{SO}(n) := \{\, M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ \ M^{-1} = M^T \text{ e } \det(M) = 1 \,\},$$

denominado *grupo ortogonal especial*.

Os grupos $\mathrm{SO}(n)$ são generalizações de rotações do espaço tridimensional para o espaço n-dimensional.

ii) **Os grupos O**$(p,\ n)$ **e SO**$(p,\ n)$: quando tivermos $\omega(u,v) = \langle u,\ \eta(p,\ n)v\rangle_{\mathbb{R}}$, considerando $\mathbb{R}^{p+n}$ com $p, n \in \mathbb{N}_0$, sendo $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos números naturais incluindo o zero, no qual $\eta(p,\ n)$ é a matriz diagonal

$$\eta(p,\ n) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

com p elementos $+1$ e n elementos -1, o grupo $\Omega(\mathbb{R}^{p+n},\ \omega)$ será denotado por $\mathrm{O}(p,\ n)$ com

$$\mathrm{O}(p,\ n) := \{\, M \in \mathrm{GL}(p+n,\ \mathbb{R}),\ \ M^{-1} = \eta(p,\ n)M^T\,\eta(p,\ n) \,\}.$$

Se $M \in \mathrm{O}(p,\ n)$, tem-se que $M\,\eta(p,\ n)M^T\,\eta(p,\ n) = \mathbb{1}$. Daí,

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det\big(M\,\eta(p,\ n)M^T\,\eta(p,\ n)\big) = \det(M)\det(M^T)\ (\det(\eta(p,\ n)))^2 = (\det(M))^2.$$

Logo, para $M \in \mathrm{O}(p,n)$, vale $\det(M) = \pm 1$.

O grupo $\mathrm{O}(p,n)$ possui um subgrupo

$$\mathrm{SO}(p,n) := \{\, M \in \mathrm{GL}(\,p+n,\mathbb{R}),\;\; M^{-1} = \eta(p,n) M^T \,\eta(p,n) \text{ e } \det(M) = 1\,\}.$$

iii) **Os grupos ortogonais complexos:** sejam o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ e a forma bilinear em $\mathbb{C}^n$: $\omega(u,v) = \langle u,\, v\rangle_{\mathbb{R}} = u_1 v_1 + \,\ldots\, + u_n v_n$, para vetores $u = (\,u_1,\,\ldots\,,u_n\,), v = (\,v_1,\,\ldots\,,v_n\,) \in \mathbb{C}^n$. O grupo ortogonal complexo, denotado por $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, é o grupo das matrizes *complexas* que mantêm essa forma bilinear invariante:

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n,\mathbb{C}) \;&:=\; \{\, M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\;\; \omega(Mu,Mv) = \omega(u,v),\;\; \forall\, u,v \in \mathbb{C}^n\,\} \\ &=\; \{\, M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\;\; M^T = M^{-1}\}. \end{aligned}$$

Se $M \in \mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, então $\det(M) = \pm 1$. Daí, podemos definir o subgrupo de $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$

$$\mathrm{SO}(n,\,\mathbb{C}) := \{\, M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\;\; M^T = M^{-1} \text{ e } \det(M) = 1\,\},$$

denominado de *grupo ortogonal especial complexo*.

Grupos Unitários

i) **Os grupos $\mathbf{U}(n)$ e $\mathbf{SU}(n)$**: considerando $\mathbb{C}^n$ e ω_A a forma sesquilinear associada a $A = \mathbb{1}$, ou seja, $\omega_A(u,v) = \langle u,\, v\rangle_{\mathbb{C}}$, o grupo $\Omega(\,\mathbb{C}^n,\,\omega_A)$ será denotado por $\mathrm{U}(n)$, o grupo das matrizes ditas unitárias de ordem $n \times n$, dado por

$$\mathrm{U}(n) := \{\, U \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{C}),\;\; U^{-1} = U^*\,\},$$

sendo $U^* = \overline{U^T}$ a matriz adjunta de U, que corresponde a matriz conjugada da matriz transposta de U. Seus elementos são definidos por $(U^*)_{ij} = \overline{U_{ji}}$.

Se $U \in \mathrm{U}(n)$, tem-se que $UU^* = \mathbb{1}$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 = \det(\mathbb{1}) = \det(UU^*) = \det(U)\,\det(U^*) = \det(U)\,\det\left(\overline{U^T}\right) = \\ \det(U)\,\overline{\det(U^T)} = \det(U)\,\overline{\det(U)} = |\det(U)|^2. \end{aligned}$$

Logo, para $U \in \mathrm{U}(n)$, vale $|\det(U)| = 1$.

O grupo $\mathrm{U}(n)$ possui um subgrupo

$$\mathrm{SU}(n) := \{\, U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ \ U^{-1} = U^* \text{ e } \det(U) = 1 \,\},$$

denominado *grupo unitário especial*.

ii) **Os grupos U**$(p,\,n)$ **e SU**$(p,\,n)$: quando tivermos $\omega(u,v) = \langle u,\ \eta(p,\,n)v\rangle_{\mathbb{C}}$, considerando $\mathbb{C}^{p+n}$, com $p,n \in \mathbb{N}_0$, e $\eta(p,\,n)$ a matriz diagonal definida na expressão (4.1), o grupo $\Omega(\mathbb{C}^{p+n},\,\omega)$ será denotado por $\mathrm{U}(p,\,n)$ com

$$\mathrm{U}(p,\,n) := \{\, U \in \mathrm{GL}(p+n,\ \mathbb{C}),\ \ U^{-1} = \eta(p,\,n)U^*\,\eta(p,\,n) \,\}.$$

Se $U \in \mathrm{U}(p,\,n)$, tem-se que $U\,\eta(p,\,n)U^*\,\eta(p,\,n) = \mathbb{1}$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 = \det(\mathbb{1}) = \det\left(U\,\eta(p,\,n)U^*\,\eta(p,\,n)\right) = \\ \det(U)\det(U^*)\ (\det(\eta(p,\,n)))^2 = \det(U)\ \det\left(\overline{U^T}\right) = \\ \det(U)\ \overline{\det(U^T)} = \det(U)\ \overline{\det(U)} = |\det(U)|^2. \end{aligned}$$

Logo, para $U \in \mathrm{U}(p,\,n)$, vale $|\det(U)| = 1$.

O grupo $\mathrm{U}(p,\,n)$ possui um subgrupo

$$\mathrm{SU}(p,\,n) := \{\, U \in \mathrm{GL}(\,p+n, \mathbb{C}),\ \ U^{-1} = \eta(p,\,n)U^*\,\eta(p,\,n) \text{ e } \det(U) = 1 \,\}.$$

Grupos Simpléticos

Grupos simpléticos são grupos que mantêm invariantes *formas simpléticas*, ou seja, formas bilineares alternantes (ou antissimétricas) e não degeneradas. Assim, uma forma simplética é uma forma bilinear para a qual $\omega(u,v) = -\omega(v,\,u)$, $\forall\, u,v \in \mathcal{E}$, com $\mathcal{E}$ um espaço vetorial sobre os reais ou sobre os complexos, de modo que se $\omega(u,v) = 0$, $\forall\, v \in \mathcal{E}$, então $u = 0$.

Para $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{2n}$ ou $\mathbb{C}^{2n}$, toda forma simplética ω é da forma

$$\omega(u,v) = \langle u,\ Av\rangle_{\mathbb{R}}$$

onde A é uma matriz $(2n)\times(2n)$ antissimétrica, $A^T = -A$, e inversível, $\det(A)\neq 0$.

Dentre as matrizes que possuem essas características, destacam-se as seguintes

$$J_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

nas quais $\mathbb{1}$ e 0 são a matriz identidade e a matriz identicamente nula de ordem $n\times n$, respectivamente. As matrizes (4.2) são antissimétricas, $J_{2n}^T = -J_{2n}$, e inversíveis, $J_{2n}^{-1} = -J_{2n}$, sendo ainda $\det(J_{2n}) = 1$. Dessa forma, as matrizes J_{2n} definem formas simpléticas em $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{C}^{2n}$.

Assim, especificamos os grupos

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) := \{\, A\in \mathrm{GL}(\,2n,\mathbb{R}),\ A^T J_{2n} A = J_{2n}\,\}$$

e

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) := \{\, A\in \mathrm{GL}(\,2n,\mathbb{C}),\ A^T J_{2n} A = J_{2n}\,\},$$

com $n\in\mathbb{N}$, como os grupos compostos pelas matrizes inversíveis de $\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{C})$, respectivamente, que matém invariante a forma simplética $\omega(u,v) := \langle u,\, J_{2n}\, v\rangle_{\mathbb{R}}$ definida em $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{C}^{2n}$. Os grupos $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ são denominados de *grupo simplético real* e *grupo simplético complexo*, sendo seus elementos denominados de *matrizes simpléticas* reais ou complexas. Ambos recebem também a denominação de *grupos simpléticos não compactos*, para distinguirem-se de certos grupos compactos.

Vale ressaltar que,

i) Pelo fato de $\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R})$ ser um subespaço real de $\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) < \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$;

ii) Se $A\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K})$, então $A^T\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K})$ e $\overline{A}\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K})$, pois J_{2n} é uma matriz real, consequentemente, $A^*\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K})$;

iii) A condição $A^T J_{2n} A = J_{2n}$, com $A^*\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, implica $(\det(A))^2 = 1$ e, portanto, $\det(A) = \pm 1$. Porém, apenas $\det(A) = 1$ é admissível em grupos simpléticos;

iv) O fato que $\det(A) = 1$, $\forall\, A\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, significa que $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) < \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$. Quando $n = 1$, vale $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$. No caso $n\geq 2$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ é um subgrupo próprio de $\mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$.

Para mais detalhes a respeito dos *grupos simpléticos real* e *complexo*, consultar Barata (2022, cap. 21).

4.4 Subgrupos Uniparamétricos e seus Geradores Infinitesimais

Antes de apresentarmos o conceito de *subgrupo uniparamétrico*, vamos enunciar uma definição mais geral:

Definição 15. *Um grupo é denominado de grupo contínuo de r-parâmetros quando todos os seus elementos dependem de parâmetros reais t_λ, no qual $\lambda = 1, \ldots, r$.*

Para matrizes, os *subgrupos uniparamétricos*, importantes na teoria dos grupos de Lie, são definidos como:

Definição 16. *Um subgrupo uniparamétrico de $GL(n, \mathbb{K})$ é um homomorfismo contínuo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ em $GL(n, \mathbb{K})$. Em outras palavras, é uma função que a cada t real associa continuamente um matriz inversível $\gamma(t)$ de modo que*

$$\gamma(t)\,\gamma(t') = \gamma(t + t')$$

$\forall\, t, t' \in \mathbb{R}$. Assim, tem-se $\gamma(0) = \mathbb{1}$.

A relevância dos mesmos reside na seguinte proposição:

Proposição 21. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ um subgrupo uniparamétrico contínuo. Então, existe uma matriz $M \in Mat(n, \mathbb{K})$, univocamente definida, tal que $\gamma(t) = e^{tM}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Esse fato, em particular, mostra que γ é real-analítica (e, portanto, diferenciável) e que $M = \gamma'(0)$. A matriz M é dita ser o gerador infinitesimal do subgrupo uniparamétrico γ.*

Para mais detalhes a respeito da proposição 21, que não será demonstrada, consultar Barata (2022, cap. 22).

Definição 17. *A proposição 21 afirma que todo subgrupo uniparamétrico contínuo de $GL(n, \mathbb{K})$ é da forma e^{tM} para alguma matriz $M \in Mat(n, \mathbb{K})$. Essa matriz M é denominada de gerador infinitesimal do subgrupo uniparamétrico em questão.*

Definindo o produto $[A, B] = AB - BA$, para $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ e AB o produto usual de matrizes, o denominamos de *comutador* de A e B. Logo, temos:

Teorema 6. *Os geradores infinitesimais* $\{M_l\}$*, com* $l = 1, \ldots, r$*, de qualquer grupo de Lie, satisfazem as relações*

$$\left[M_\alpha, M_\beta\right] = C^{\gamma}_{\alpha\beta} M_\gamma,$$

com $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$*, no qual* $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *são chamadas as constantes de estrutura do grupo de Lie.*

Sobre as *constantes de estrutura*, temos:

Teorema 7. *As constantes de estrutura de um grupo satisfazem à seguinte relação*

$$C^{\mu}_{\rho\sigma} C^{\nu}_{\mu\zeta} + C^{\mu}_{\sigma\zeta} C^{\nu}_{\mu\rho} + C^{\mu}_{\zeta\rho} C^{\nu}_{\mu\sigma} = 0,$$

com $\rho, \sigma, \nu, \mu, \zeta = 1, 2, \ldots, r$*.*

Os teoremas 6 e 7 não serão demonstrados. Para mais detalhes, consultar Bassalo e Cattani (2008, p. 82) e Bassalo e Cattani (2008, p. 85), respectivamente.

5 GRUPOS DE LIE E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Levando em consideração tudo que foi exposto até o presente momento, neste capítulo iremos, baseados em Pinto, Silva e Santos (2019)[1], apresentar um método que consiste basicamente em, através de uma mudança de coordenadas, determinar, de um modo mais prático, a solução de equações diferenciais por meio de simetrias. Esse método integra uma teoria, apresentada pelo matemático norueguês *Sophus Lie*, que se assemelha ao que Abel e Galois fizeram para equações algébricas, ao desenvolverem uma estratégia para classificá-las e resolvê-las utilizando teoria de grupos, que, além de unificar os demais procedimentos existentes para a resolução de equações diferenciais, ainda os estende.

5.1 Simetrias

Conforme o exemplo *vii)*, apresentado no capítulo 2, podemos compreender como simetria de um objeto geométrico a transformação cuja ação mantém o objeto aparentemente inalterado. Quando essa transformação levar cada ponto em si mesmo, será denominada de *simetria trivial*.

As simetrias de objetos geométricos se submetem a certas restrições. Denotando por Γ uma simetria de um objeto geométrico, Γ^{-1} caracterizará a sua inversa que, além de ser única, é, por si só, uma simetria; e $\Gamma \circ \Gamma^{-1}$, a função composta de Γ com Γ^{-1}, irá manter o objeto inalterado.

São propriedades de uma simetria:

i) preserva a estrutura do objeto;

ii) é um difeomorfismo (C^{∞}), ou seja, uma aplicação diferenciável suave com inversa também diferenciável;

iii) é uma transformação que mapeia o objeto em si mesmo (*Condição de simetria*).

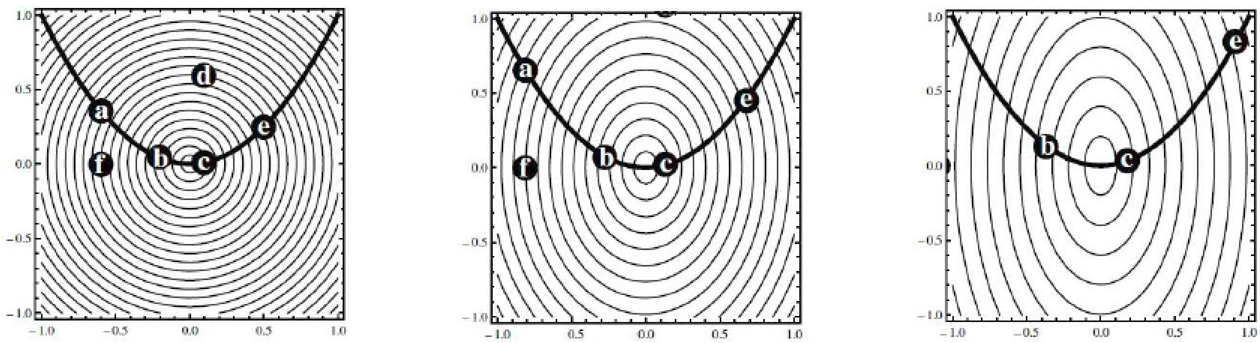
Já para equações algébricas, analisando o gráfico de $f(x) = x^2$, podemos notar que ele é simétrico em relação à reflexão em torno do eixo y, o gráfico de $g(x) = x^3$, por sua vez, é

[1] Produzido pela tradução livre e adaptação das obras de HYDON, Peter E. Symmetry Methods for Diferential Equations: A Beginner's Guide, Cambridge University Press, 2000; STARRETT, John. Solving Diferential Equations by Symmetry Groups, The American Mathematical Monthly, 114(9), 2007, p. 778-792 e YAP, Shirley Llamado. Diferential Equations – Not Just a Bag of Tricks!, Mathematics Magazine, 83(1), 2010, p. 3-14.

simétrico em relação à origem e o de $h(x) = \text{sen}(x)$ é simétrico em relação a uma translação horizontal de 2π. Nestes casos, as transformações do plano (reflexões e translações) são exemplos de simetrias que levam o gráfico das funções em si mesmo. Em geral, dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma simetria de f é uma aplicação contínua do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que leva o gráfico de f em si mesmo e possui uma inversa contínua. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma simetria de f é uma transformação definida em $\mathbb{R}^3$ que associa a qualquer ponto (x,y,z), com $x,y,z \in \mathbb{R}$, satisfazendo $z = f(x,y)$, um outro ponto de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a mesma equação, e assim por diante.

Considerando a transformação $\Gamma_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $\Gamma_\varepsilon(x,y) = (\varepsilon x, \varepsilon^2 y)$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}$, temos que Γ_ε é uma simetria de $y = x^2$, pois se (a,b) é um ponto no gráfico, temos que $\varepsilon^2 b = \varepsilon^2 a^2 = (\varepsilon a)^2$, mostrando que $\Gamma_\varepsilon(a,b) = (\varepsilon a, \varepsilon^2 b)$ também pertence ao gráfico. A Figura 5.1 ilustra o comportamento desta simetria para valores específicos de ε. Se ε representar o tempo, as letras e as curvas na Figura 5.1 permitem-nos acompanhar o movimento de pontos do plano sob a ação dessas simetrias em vários instantes de tempo.

Figura 5.1 – Ação da simetria $\Gamma_\varepsilon(x,y) = (\varepsilon x, \varepsilon^2 y)$



(a) $\varepsilon = 0$ (b) $\varepsilon = 0,3$ (c) $\varepsilon = 0,6$

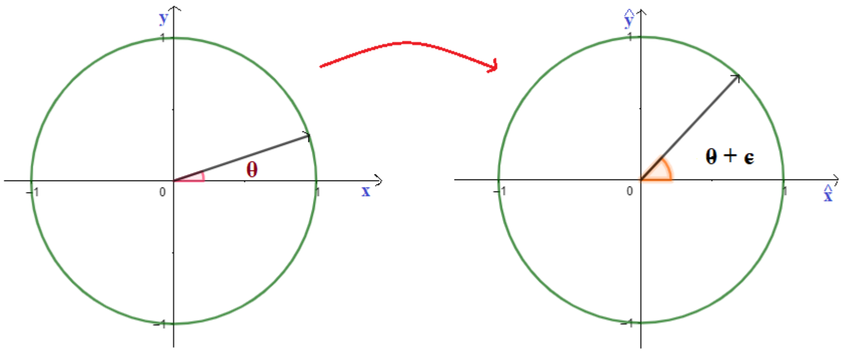
Fonte: Pinto, Silva e Santos (2019, p. 71).

Diferentemente do triângulo equilátero, que admite uma quantidade finita de simetrias, como visto no exemplo *vii)* capítulo 2, existem objetos que admitem um conjunto infinito das mesmas. Um exemplo é a simetria do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ dada por $\Gamma_\varepsilon : (x,\ y) \mapsto (\widehat{x},\ \widehat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\,\text{sen}\,\varepsilon,\ x\,\text{sen}\,\varepsilon + y\cos\varepsilon)$, com $\varepsilon \in (-\pi,\ \pi]$, ilustrada na Figura 5.2.

Reescrevendo-a em termos de coordenadas polares, teremos $\Gamma_\varepsilon : (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta) \mapsto (\cos(\theta + \varepsilon),\ \text{sen}(\theta+\varepsilon))$. A transformação é uma rotação por ε em torno do centro do círculo. Ela preserva a estrutura do círculo e é suave e invertível, com a inversa sendo dada por $\Gamma_{-\varepsilon}$.

O conjunto infinito de simetrias Γ_ε é um exemplo de grupo de Lie a 1-parâmetro, uma classe de simetrias que permite a construção de soluções exatas de muitas equações diferenciais.

Figura 5.2 – Rotação do círculo unitário



Fonte: Da autora (2023).

5.1.1 Simetrias de Equações Diferenciais

No que se refere às equações diferenciais, queremos que as simetrias preservem suas soluções.

Considerando a EDO

$$\frac{dy}{dx} = 0, \tag{5.1}$$

o conjunto de todas as suas soluções é constituído por retas paralelas ao eixo x, ou seja $y(x) = c$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$, que cobrem o plano xy, como ilustrado na Figura 5.3. Logo, qualquer simetria de (5.1) deverá, obrigatoriamente, levar uma solução particular em uma outra. Portanto, pela propriedade *iii)*, o conjunto das soluções no plano xy deve ser indistinguível de sua imagem no plano $\widehat{xy}$. Assim, deveremos ter

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = 0 \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

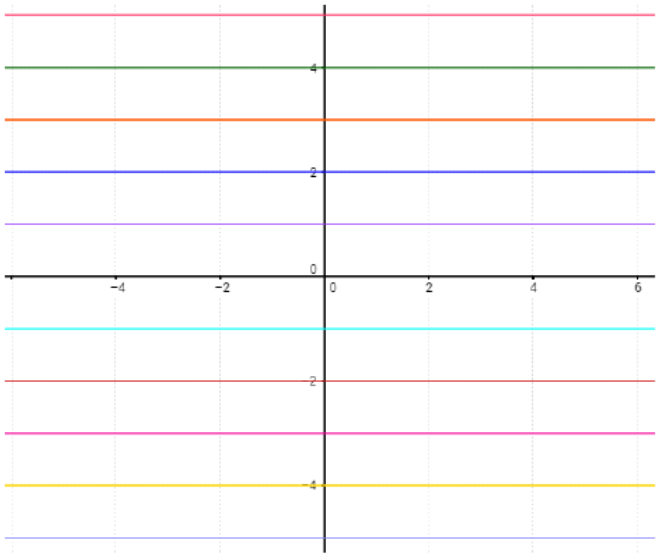
São exemplos de simetrias para (5.1):

i) *simetria de escalas*: para um número real ε qualquer, a aplicação

$$\Gamma_\varepsilon : (x,\, y) \mapsto (\widehat{x},\, \widehat{y}) = (x,\, e^{\varepsilon} y) \tag{5.2}$$

leva retas horizontais em outras retas semelhantes. Qualquer uma destas transformações, com $\varepsilon \neq 0$, pode aumentar ou diminuir a distância entre as retas, mas não altera sua inclinação. No plano $\widehat{xy}$ as retas permanecem paralelas ao eixo $\widehat{x}$, de modo que o conjunto de soluções é preservado.

Figura 5.3 – Algumas soluções de $y' = 0$



Fonte: Pinto, Silva e Santos (2019, p. 72).

ii) *translações*: que podem ser tanto na direção do eixo x, quanto do eixo y, sendo a primeira definida por

$$\Gamma_{\varepsilon} : (x,\ y) \mapsto (\widehat{x},\ \widehat{y}) = (x + \varepsilon,\ y) \tag{5.3}$$

e a segunda por

$$\Gamma_{\varepsilon} : (x,\ y) \mapsto (\widehat{x},\ \widehat{y}) = (x,\ y + \varepsilon). \tag{5.4}$$

Logo, dada uma EDO de primeira ordem, pretendemos encontrar um método geral para determinar um sistema de coordenadas no qual a equação torna-se separável e possa ser resolvida por integração direta.

Grupos de Lie

Descrevendo, de uma maneira mais formal, o que foi discutido a respeito de grupos de Lie no capítulo anterior, apresentamos a seguinte definição:

Definição 18. *Um conjunto G de transformações* Γ_{ε} *em* $\mathbb{R}^2$ *que dependem continuamente do parâmetro* ε*, onde* $\varepsilon \in \mathbb{R}$*, é um grupo a* 1*-parâmetro se*

i) Γ_{ε} *é uma bijeção;*

ii) $\Gamma_{\varepsilon} \circ \Gamma_{\delta} = \Gamma_{\varepsilon+\delta},\ \forall\ \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$*;*

iii) apenas para $\varepsilon = 0$*, temos* $\Gamma_{\varepsilon} = I$ *(identidade);*

iv) para cada ε, apenas para $\delta = -\varepsilon$, tem-se $\Gamma_\varepsilon \circ \Gamma_\delta = \Gamma_0 = I$.

Considerando a EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \tag{5.5}$$

e um grupo G de transformações a 1-parâmetro Γ_ε

$$(\widehat{x}, \widehat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = \mathcal{F}(x, y, \varepsilon), \tag{5.6}$$

temos:

Definição 19. *Um grupo G de transformações a* 1*-parâmetro (5.6) é um grupo de simetrias da equação diferencial (5.5) se o conjunto de soluções de (5.5) é invariante sob a ação do grupo G. Isto é, cada elemento de G permuta o conjunto de soluções de (5.5).*

Se G é um grupo de simetrias de (5.5) e $\mathcal{F}$ em (5.6) é infinitamente diferenciável com respeito a x e y e analítica com respeito a ε, então G é um grupo de Lie a 1-parâmetro (ou transformação pontual de Lie). Seus elementos são denominados de *simetrias de Lie*.

Como exemplo, temos a aplicação (5.2) que consiste em uma simetria, para cada ε fixo, para (5.1) e satisfaz todas as propriedades de grupos de simetria de Lie. As demonstrações, que não serão apresentadas, podem ser consultadas em Pinto, Silva e Santos (2019, p. 74).

5.1.2 Condição de Simetria

Seja $y(x)$ uma solução da EDO de primeira ordem (5.5). Uma simetria para esta equação leva a solução $y(x)$ a uma outra solução $\widehat{y}(\widehat{x})$, pois $(x, y) \mapsto (\widehat{x}, \widehat{y})$. Logo, $\widehat{y}(\widehat{x})$ também é solução de

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \omega(\widehat{x}, \widehat{y}). \tag{5.7}$$

Vamos analisar como $\dfrac{dy}{dx}$ se relaciona com $\dfrac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}}$.

Temos que

$$\widehat{x} = \widehat{x}(x, y) \quad \text{e} \quad \widehat{y} = \widehat{y}(x, y(x)) \tag{5.8}$$

e também

$$\widehat{y} = \widehat{y}(\widehat{x}) \quad \text{e} \quad \widehat{y} = \widehat{y}(\widehat{x}(x, y(x))). \tag{5.9}$$

Da segunda igualdade de (5.8), teremos

$$\frac{\partial \widehat{y}}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial \widehat{y}}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{d\widehat{y}}{dx} \tag{5.10}$$

e, da segunda igualdade de (5.9),

$$\frac{d\widehat{y}}{dx}=\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}}\left[\frac{\partial \widehat{x}}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial \widehat{x}}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]. \tag{5.11}$$

Igualando (5.10) e (5.11), obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{y}}{\partial x}+\frac{\partial \widehat{y}}{\partial y}\frac{dy}{dx} &= \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}}\left[\frac{\partial \widehat{x}}{\partial x}+\frac{\partial \widehat{x}}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]\\
\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} &= \frac{\dfrac{\partial \widehat{y}}{\partial x}+\dfrac{\partial \widehat{y}}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial \widehat{x}}{\partial x}+\dfrac{\partial \widehat{x}}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}=\frac{D_x\,\widehat{y}}{D_x\,\widehat{x}},
\end{aligned}$$

sendo

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.12}$$

denominado de *operador derivada total*.

Reescrevendo (5.7) utilizando (5.12), obteremos

$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}}=\frac{D_x\,\widehat{y}}{D_x\,\widehat{x}}=\frac{\dfrac{\partial \widehat{y}}{\partial x}+\dfrac{dy}{dx}\dfrac{\partial \widehat{y}}{\partial y}}{\dfrac{\partial \widehat{x}}{\partial x}+\dfrac{dy}{dx}\dfrac{\partial \widehat{x}}{\partial y}}=\frac{\widehat{y}_x+\dfrac{dy}{dx}\widehat{y}_y}{\widehat{x}_x+\dfrac{dy}{dx}\widehat{x}_y}=\omega(\widehat{x},\,\widehat{y}). \tag{5.13}$$

Um grupo de transformações será uma simetria quando a EDO, escrita nas coordenadas $\widehat{x}\widehat{y}$, não tem sua forma alterada. Ou seja,

$$\omega(\widehat{x},\,\widehat{y})=\frac{\widehat{y}_x+\omega(x,\,y)\widehat{y}_y}{\widehat{x}_x+\omega(x,\,y)\widehat{x}_y}. \tag{5.14}$$

Quando isso ocorre, dizemos que a equação diferencial é *invariante*.

Exemplos, nos quais a condição de simetria foi utilizada para encontrar uma simetria para uma EDO dada, poderão ser consultados em Pinto, Silva e Santos (2019, p. 74-76).

É difícil, geralmente, calcular simetrias de uma EDO através da condição de simetria (5.14) devido à sua não linearidade. Entretanto, através de uma expansão por série de Taylor, é possível linearizá-la e construir uma simetria.

5.1.3 Utilizando Simetrias para Determinar a Solução de EDO's

Iremos apresentar o método de solução de EDO's por meio de simetrias de translação e como uma simetria qualquer poderá ser convertida numa simetria de translação.

Toda EDO que possua simetria da forma

$$(\widehat{x},\, \widehat{y}) = (x,\, y+\varepsilon)$$

pode ser resolvida utilizando técnicas de integração. A condição de simetria (5.14), para todo ε em alguma vizinhança de 0, se reduz a

$$\omega(x,\, y) = \omega(\widehat{x},\, \widehat{y}) = \omega(x,\, y+\varepsilon). \tag{5.15}$$

Derivando o lado esquerdo de (5.15) em relação a ε, com $\varepsilon = 0$, teremos

$$\frac{d}{d\varepsilon}\omega(x,\, y) = 0.$$

Já para o lado direito, utilizando a regra da cadeia para derivar $\omega(x,\, y+\varepsilon)$ em relação a ε, teremos

$$\frac{d}{d\varepsilon}\omega(x,\, y+\varepsilon) = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Assim,

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0.$$

Logo, o lado direito da EDO original é uma função apenas de x

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x).$$

Portanto,

$$y(x) = \int \omega(x)\, dx + c,$$

mostrando que qualquer equação diferencial com simetria de translação na direção de y é separável.

Órbitas

Sejam um ponto particular $(x_0,\, y_0)$ em $\mathbb{R}^2$ e a ação de um grupo de Lie Γ_ε. Quando ε varia, o ponto $(\widehat{x}_0,\, \widehat{y}_0) = \Gamma_\varepsilon(x_0,\, y_0)$ move-se sobre o plano traçando uma curva contínua denominada de **órbita** de $(x_0,\, y_0)$ sob o grupo, ou somente órbita do grupo. Se um grupo de Lie é uma simetria para a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \omega(x,\, y)$, então uma órbita do grupo forma um caminho contínuo transversal às curvas de soluções da equação diferencial.

A órbita descrita por um ponto $(x_0,\, y_0)$ em uma solução poderá vir a ser uma das coordenadas em um sistema de coordenadas no qual a equação diferencial torna-se fácil de ser integrada.

Definição 20. *O conjunto de pontos* $\{\, \Gamma_\varepsilon(x,\, y) \mid a < \varepsilon < b \,\}$ *traça uma curva no plano chamada órbita de* Γ_ε*. As coordenadas dos pontos sobre uma órbita através de* $(x,\, y)$ *são dadas por*

$$(\widehat{x},\, \widehat{y}) = (\widehat{x}(x,\, y;\, \varepsilon),\, \widehat{y}(x,\, y;\, \varepsilon)), \qquad com \quad \varepsilon \in (a,\, b),$$

de modo que

$$(\widehat{x}(x,\, y;\, 0),\, \widehat{y}(x,\, y;\, 0)) = (x,\, y).$$

Considerando cada ponto sobre o plano uma molécula de um fluido deslocando-se ao longo de uma trajetória definida por Γ_ε, a órbita pode ser comparada a um *fluxo*.

Vetor Tangente

Supondo que $y'(x) = \omega(x,\, y)$ seja invariante sob algum grupo de Lie a 1-parâmetro, que não seja necessariamente uma translação, é possível realizar uma mudança de variáveis $(x,\, y) \mapsto (r,\, s)$, definida em algum domínio do $\mathbb{R}^2$, para o qual $y'(x) = \omega(x,\, y)$ é invariante sob translações na direção s.

Definição 21. *As tangentes à órbita em um ponto* $(\widehat{x},\, \widehat{y})$ *qualquer são descritas por um vetor tangente, cuja abscissa e ordenada são denotadas por*

$$\xi\,(\widehat{x},\, \widehat{y}) = \frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon} \qquad e \qquad \eta\,(\widehat{x},\, \widehat{y}) = \frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon},$$

respectivamente.

No ponto $(x,\, y)$, temos $\varepsilon = 0$. Portanto,

$$(\xi\,(x,\, y),\; \eta\,(x,\, y)) = \left(\left.\frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\; \left.\frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right).$$

As coordenadas do vetor tangente, $\xi\,(x,\, y)$ e $\eta\,(x,\, y)$, podem ser utilizadas tanto para encontrar um sistema de coordenadas simplificado, quanto, em alguns casos, para encontrar uma curva de soluções sem o uso de diferentes coordenadas. Uma solução da equação diferencial é classificada como *invariante* sempre que for mapeada em si mesma sob a ação de uma simetria, conforme a variação de ε. Consequentemente, a órbita através de um ponto invariante coincide com a própria curva solução a que ele pertence. Neste caso, a derivada no ponto $(x,\, y)$ terá a mesma direção do vetor tangente e teremos

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x,\, y) = \frac{\eta\,(x,\, y)}{\xi\,(x,\, y)}.$$

Através da *equação característica Q*

$$Q(x,\, y,\, y') = \eta\,(x,\, y) - y'\,\xi\,(x,\, y),$$

obtemos a *equação característica reduzida*

$$\tilde{Q}(x,\, y) = \eta\,(x,\, y) - \omega(x,\, y)\;\xi\,(x,\, y),$$

visto que $y' = \dfrac{dy}{dx} = \omega(x,\, y)$.

Caso tenhamos $\tilde{Q}(x,\, y) = 0$ para uma dada simetria, a curva solução da equação diferencial é invariante sob tal simetria.

5.1.4 Coordenadas Canônicas

Quando não for possível converter uma simetria arbitrária de uma equação diferencial em uma simetria de translação — que, geometricamente, significa transformar as órbitas da simetria em órbitas da simetria de translação $(x,\, y) \mapsto (x,\, y+\varepsilon)$ — podemos utilizar uma mudança no sistema de coordenadas, de coordenadas cartesianas para coordenadas canônicas, e encontrar as coordenadas canônicas $(r\,(x,\, y),\; s\,(x,\, y))$ nas quais a equação diferencial torna-se separável. Nessas coordenadas, a equação diferencial será da forma $\dfrac{ds}{dr} = f(r)$ ou $\dfrac{ds}{dr} = f(s)$. Analisaremos o primeiro caso, $\dfrac{ds}{dr} = f(r)$, no qual, nas novas coordenadas, haverá uma simetria $\Gamma_\varepsilon(r,\, s) \mapsto (\widehat{r},\, \widehat{s}) = (r,\, s+\varepsilon)$ que equivale a translações na direção s.

O vetor tangente no ponto $(r,\, s)$ será

$$\left(\frac{d\widehat{r}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},\ \frac{d\widehat{s}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \right) = (0,\ 1). \tag{5.16}$$

Aplicando a regra da cadeia nas componentes de (5.16), teremos

$$\frac{d\widehat{r}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \widehat{r}}{\partial x}\, \frac{dx}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \widehat{r}}{\partial y}\, \frac{dy}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial r}{\partial x}\,\xi(x,\, y) + \frac{\partial r}{\partial y}\,\eta(x,\, y) = 0 \tag{5.17}$$

e

$$\frac{d\widehat{s}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \widehat{s}}{\partial x}\, \frac{dx}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \widehat{s}}{\partial y}\, \frac{dy}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial s}{\partial x}\,\xi(x,\, y) + \frac{\partial s}{\partial y}\,\eta(x,\, y) = 1. \tag{5.18}$$

Isto é,

$$r_x\,\xi(x,\, y) + r_y\,\eta(x,\, y) = 0 \tag{5.19}$$

e

$$s_x\,\xi(x,\, y) + s_y\,\eta(x,\, y) = 1. \tag{5.20}$$

As equações (5.19) e (5.20) são EDP's lineares de primeira ordem para $r = r(x,\, y)$ e $s = s(x,\, y)$, que podem ser resolvidas pelo *método das características*.

Sejam as equações

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,\, y)}{\xi(x,\, y)} \tag{5.21}$$

e

$$\frac{dx}{\xi(x,\, y)} = \frac{dy}{\eta(x,\, y)} = ds, \tag{5.22}$$

deduzidas a partir das *equações características*. Para mais detalhes, consultar Pinto, Silva e Santos (2019, p. 83). Considerando a função $r = r(x,\, y) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, e $y = y(x)$ uma solução de (5.21), teremos

$$0 = \frac{dr}{dx} = r_x + \frac{\eta}{\xi}\, r_y.$$

Assim, basta resolvermos (5.21) para determinarmos r.

Encontraremos s através da equação (5.22)

$$ds = \frac{dy}{\eta(x,\, y)} = \frac{dx}{\xi(x,\, y)},$$

que resultará em

$$s = \int \frac{dy}{\eta(x,\, y)} = \int \frac{dx}{\xi(x,\, y)}.$$

Quando $\xi(x,\, y) = 0$, tomaremos $r = x$ e $s = \displaystyle\int \frac{dy}{\eta(x,\, y)}$.

Uma vez que os vetores tangentes e o sistema de coordenadas canônicas, obtido com o auxílio dos primeiros, foram determinados, simetrias poderão ser reconstruídas a partir das coordenadas canônicas. Inicialmente, calcularemos as coordenadas canônicas $r(x,\, y)$ e $s(x,\, y)$ para x e y a fim de obtermos

$$x = f(r,\, s) \quad \text{e} \quad y = g(r,\, s).$$

Logo, $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ são

$$\widehat{x} = f(\widehat{r},\, \widehat{s}) = f(r(x,\, y),\, s(x,\, y) + \varepsilon)$$

e

$$\widehat{y} = g(\widehat{r},\, \widehat{s}) = g(r(x,\, y),\, s(x,\, y) + \varepsilon).$$

O objetivo é reescrever a equação diferencial em termos das novas coordenadas r e s para, em seguida, expressar sua solução nas coordenadas originais. De forma análoga a que foi feita para obter a equação (5.14), encontraremos que

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \omega(x,\, y)\, s_y}{r_x + \omega(x,\, y)\, r_y}. \tag{5.23}$$

Esta operação resultará em uma equação $\dfrac{ds}{dr}$ escrita em termos de x e y. Para expressarmo-la em termos de r e s será necessário escrevermos x e y em termos de r e s e, em seguida, simplificarmos a equação. Assim, bastará resolvermos a mesma em coordenadas canônicas e concluirmos escrevendo a solução nas coordenadas originais xy.

5.1.5 Condição de Simetria Linearizada

Encontrar uma simetria para uma dada equação diferencial, que satisfaça a condição de simetria definida por (5.14), através da qual $(x,\, y) \mapsto (\widehat{x},\, \widehat{y})$, não consiste em uma tarefa fácil. Resolvendo (5.14) para $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$, é possível determinar as componentes $\xi\,(x,\,y)$ e $\eta\,(x,\,y)$ do vetor tangente e, por meio delas, as novas coordenadas. Entretanto, essa equação pode ser muito difícil de ser resolvida.

Para encontrar o vetor tangente $(\xi\,(x,\,y),\,\eta\,(x,\,y))$, podemos expandir $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ e $\omega\,(x,\,y)$ em série de Taylor, em torno do ponto $\varepsilon = 0$, obtendo

$$\widehat{x} = x + \xi\,(x,\,y)\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{5.24}$$

$$\widehat{y} = y + \eta\,(x,\,y)\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.25}$$

e

$$\omega\,(\widehat{x},\,\widehat{y}) = \omega\,(x,\,y) + \omega_x\,(x,\,y)\,\xi\,(x,\,y)\varepsilon + \omega_y\,(x,\,y)\,\eta\,(x,\,y)\,\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{5.26}$$

Desprezando os termos de ordem 2 e superior, obtemos as *linearizações* de $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ e $\omega\,(\widehat{x},\,\widehat{y})$.

Conhecidas essas linearizações, substituiremos suas respectivas derivadas em (5.14). De (5.24) e (5.25), temos

$$\widehat{x}_x = 1 + \varepsilon\,\xi_x, \quad \widehat{x}_y = \varepsilon\,\xi_y, \quad \widehat{y}_x = \varepsilon\,\eta_x \quad \text{e} \quad \widehat{y}_y = 1 + \varepsilon\,\eta_y.$$

Assim, a equação (5.14) poderá ser reescrita como

$$\omega\,(\widehat{x},\,\widehat{y}) = \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \frac{\omega + \varepsilon(\eta_x + \omega\eta_y)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \omega\xi_y)}.$$

Substituindo $\omega\,(\widehat{x},\,\widehat{y})$ por (5.26), desconsiderando os termos de ordem 2 ou mais e simplificando o máximo possível, teremos

$$\begin{aligned}
\omega + \varepsilon(\omega_x\,\xi + \omega_y\eta) &= \frac{\omega + \varepsilon(\eta_x + \omega\eta_y)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \omega\xi_y)} \\
(\omega + \varepsilon(\omega_x\,\xi + \omega_y\eta))(1 + \varepsilon(\xi_x + \omega\xi_y)) &= \omega + \varepsilon(\eta_x + \omega\eta_y) \\
\omega + \varepsilon(\omega_x\,\xi + \omega_y\eta) + \omega\varepsilon(\xi_x + \omega\xi_y) &= \omega + \varepsilon(\eta_x + \omega\eta_y) \\
\eta_x + \omega\eta_y &= \omega_x\xi + \omega_y\eta + \omega\xi_x + \omega^2\xi_y,
\end{aligned}$$

que nos dará

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\,\omega - \xi_y\,\omega^2 = \xi\,\omega_x + \eta\,\omega_y, \tag{5.27}$$

definida como a *condição de simetria linearizada*.

5.1.6 Geradores Infinitesimais de Simetrias

Supondo que uma EDO de primeira ordem possua um grupo de Lie a 1-parâmetro de simetrias, cujo vetor tangente em $(x,\ y)$ é $(\xi,\ \eta)$, o operador diferencial parcial

$$\mathbf{X} = \xi\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.28}$$

é denominado *gerador infinitesimal* do grupo de Lie. As equações (5.17) e (5.18), que definem as coordenadas canônicas, podem ser reescritas como

$$\mathbf{X}r = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{X}s = 1.$$

O termo "gerador" indica que repetidas aplicações das transformações geram uma transformação finita, que é uma maneira diferente de expressar o fato de que as integrais de $\mathbf{X}$ são o grupo de órbitas. O gerador de simetrias pode ser visto como os vetores tangentes às órbitas das expansões (5.3) e (5.4), sendo $(\widehat{x},\ \widehat{y})$ soluções do PVI

$$\frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon} = \xi(d\widehat{x},\ \widehat{y}) \quad \text{e} \quad \frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon} = \eta(d\widehat{x},\ \widehat{y}),$$

com $(\widehat{x},\ \widehat{y}) = (x,\ y)$ quando $\varepsilon = 0$. A solução para este PVI pode ser escrita como as séries de potências

$$\widehat{x} = e^{\varepsilon\mathbf{X}}\,x \quad \text{e} \quad \widehat{y} = e^{\varepsilon\mathbf{X}}\,y,$$

com

$$e^{\varepsilon\mathbf{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\,\mathbf{X}^n.$$

Logo, uma vez que $\mathbf{X}$ é conhecido, é possível calcular $(\widehat{x},\ \widehat{y})$, tal que as órbitas possam ser encontradas.

5.1.7 Exemplo de como Utilizar Simetrias para Determinar a Solução de EDO's

Antes de analisarmos alguns exemplos, com o intuito de mostrar como utilizar simetrias para determinar a solução de EDO's de primeira ordem, iremos apresentar uma classe de equações diferenciais denominadas de *equações de Ricatti*.

Conforme Hadad (20–?, p.1), a equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)\,y + R(x)\,y^2,$$

na qual $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são funções arbitrárias da variável independente x, é chamada de *equação de Ricatti*. Essas equações são relevantes em áreas como a física clássica, o cálculo variacional, a termodinâmica, a teoria quântica, dentre outras.

Exemplo

Considerando a equação de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \tag{5.29}$$

com $x \neq 0$, na qual $P(x) = -\dfrac{1}{x^3}$, $Q(x) = -\dfrac{2}{x}$ e $R(x) = x$, mostraremos que a transformação

$$(\widehat{x},\, \widehat{y}) = (e^{\varepsilon}x,\, e^{-2\varepsilon}y) \tag{5.30}$$

é um grupo de Lie de 1-parâmetro de simetrias de escala para (5.29).

Como já mencionado, um grupo de transformações será uma simetria quando a EDO, escrita nas coordenadas $\widehat{x}\widehat{y}$, não tiver sua forma alterada. Assim, calculando as derivadas parciais,

$$\widehat{x}_x = e^{\varepsilon}, \quad \widehat{x}_y = \widehat{y}_x = 0 \quad \text{e} \quad \widehat{y}_y = e^{-2\varepsilon},$$

e utilizando a equação (5.13), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{x}} = \frac{D_x\,\widehat{y}}{D_x\,\widehat{x}} = \frac{\widehat{y}_x + \dfrac{dy}{dx}\widehat{y}_y}{\widehat{x}_x + \dfrac{dy}{dx}\widehat{x}_y} &= \frac{0 + \left(xy^2 - \dfrac{2y}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)e^{-2\varepsilon}}{e^{\varepsilon} + \left(xy^2 - \dfrac{2y}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)0} \\
&= \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-3\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Agora, para $\omega(\widehat{x},\, \widehat{y})$, teremos

$$\begin{aligned}\omega(\widehat{x},\, \widehat{y}) = \widehat{x}\,\widehat{y}^2 - \frac{2\widehat{y}}{\widehat{x}} - \frac{1}{\widehat{x}^3} &= e^{\varepsilon} x\,(e^{-2\varepsilon} y)^2 - \frac{2e^{-2\varepsilon} y}{e^{\varepsilon} x} - \frac{1}{(e^{\varepsilon} x)^3} \\ &= e^{\varepsilon} x\, e^{-4\varepsilon} y^2 - \frac{2e^{-2\varepsilon} y}{e^{\varepsilon} x} - \frac{1}{e^{3\varepsilon} x^3} = e^{-3\varepsilon} x y^2 - \frac{2e^{-3\varepsilon} y}{x} - \frac{e^{-3\varepsilon}}{x^3} \\ &= \left(x y^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-3\varepsilon}.\end{aligned}$$

Logo, comprovamos a igualdade de ambos os lados e, portanto, a transformação é um grupo de Lie de 1-parâmetro de simetrias de escala para (5.29).

As exponenciais, presentes na definição desse grupo de Lie, se devem ao fato de consistir em simetria de escalas, na qual, para um número real ε qualquer, a aplicação (5.30) leva as curvas que compõem a solução da equação em outras curvas semelhantes. Essa transformação, com $\varepsilon \neq 0$, aumenta ou diminui a distância entre as curvas, mas não altera sua inclinação (suas retas tangentes), de modo que, no plano $\widehat{xy}$, o conjunto de soluções é preservado.

O vetor tangente será constituído pelas componentes

$$(\xi\,(x,\, y), \eta\,(x,\, y)) = \left(\left.\frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\ \left.\frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) = (x,\, -2y),$$

das quais obtemos a seguinte equação característica reduzida

$$\tilde{Q}(x,\, y) = \eta\,(x,\, y) - \omega(x,\, y)\,\xi\,(x,\, y) = -2y - \left(x y^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) x = -x^2 y^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Segue de $\tilde{Q}(x,\, y) = 0$ que as soluções invariantes de (5.29), sob a ação do grupo de simetrias (5.30), são

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

Portanto, a simetria (5.30) age *não trivialmente* para todas as soluções da equação (5.29), com exceção de $y = x^{-2}$ e $y = -x^{-2}$.

Para determinarmos as coordenadas canônicas $(r\,(x,\, y),\ s\,(x,\, y))$, nas quais a equação diferencial (5.29) se tornará separável, deveremos resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta\,(x,\, y)}{\xi\,(x,\, y)} = -\frac{2y}{x},$$

que é uma equação separável. Integrando ambas as partes, teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{2y}{x} \\
-\frac{1}{2y}\,dy &= \frac{1}{x}\,dx \\
-\frac{1}{2}\int y\,dy &= \int \frac{1}{x}\,dx \\
-\frac{1}{2}\ln|y| &= \ln|x| + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}, \\
e^{\ln|y|^{-\frac{1}{2}}} &= e^{\ln|x|+c}, \\
|y|^{-\frac{1}{2}} &= |x|\,e^{c}, \quad \text{para } e^{c} = c_1 \text{ com } c_1 \in \mathbb{R} \\
|y|^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{|x|c_1}, \quad \text{para } c_2 = c_1^{-2} \quad \text{com } c_2 \in \mathbb{R}, \\
y &= \pm\frac{1}{x^2 c_2} = \pm x^{-2} c_2.
\end{aligned}
$$

Tomando $c_3 = \pm c_2$, com $c_3 \in \mathbb{R}$, e isolando-o, encontraremos r

$$c_3 = r = \frac{y}{x^{-2}} = x^2 y.$$

Determinaremos s através da equação

$$s = \int \frac{dx}{\xi\,(x,\, y)} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|.$$

Logo,

$$(r,\, s) = (x^2 y,\, \ln|x|),$$

para $x \neq 0$, é uma solução.

Calculando as seguintes derivadas parciais

$$r_x = 2xy, \quad r_y = x^2, \quad s_x = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad s_y = 0,$$

através da equação (5.23), teremos

$$\frac{ds}{dr}=\frac{s_x+\omega(x,\,y)\,s_y}{r_x+\omega(x,\,y)\,r_y} \;=\; \frac{\dfrac{1}{x}+\left(xy^2-\dfrac{2y}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)0}{2xy+\left(xy^2-\dfrac{2y}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)\,x^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{x}}{2xy+x^3y^2-2xy-\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{x}\,\left(\frac{x}{x^4y^2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x^4y^2-1}=\frac{1}{(x^2y)^2-1}.$$

Reescrevendo a expressão à direita nas coordenadas canônicas, obteremos

$$\frac{ds}{dr}=\frac{1}{(x^2y)^2-1}=\frac{1}{r^2-1},$$

que é uma EDO de primeira ordem separável. Resolvendo-a por integração direta

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{r^2-1}\,dr \\ \int ds &= \int \frac{1}{r^2-1}\,dr \end{aligned}$$

no qual, por meio de frações parciais $\dfrac{1}{r^2-1}=\dfrac{1}{2(r-1)}-\dfrac{1}{2(r+1)}$, teremos

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{1}{2(r-1)}\,dr+\int -\frac{1}{2(r+1)}\,dr \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{r-1}\,dr-\int \frac{1}{r+1}\,dr\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{u}\,du-\int \frac{1}{u_1}\,du_1\right), \quad \text{com} \;\; u(r)=r-1 \quad \text{e} \;\; u_1(r)=r+1, \\ &= \frac{1}{2}\,(\ln|u|-\ln|u_1|)+c, \qquad \text{com} \;\; c\in\mathbb{R}, \\ &= \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{r-1}{r+1}\right|+c. \end{aligned}$$

Agora que é conhecida a solução em coordenadas canônicas, poderemos expressá-la nas coordenadas originais. Para tal, deveremos substituir

$$(r,\,s)=(x^2y,\,\ln|x|)$$

que resultará em

$$
\begin{aligned}
\ln|x| &= \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{x^2y-1}{x^2y+1}\right| + c \\
e^{\ln|x|} &= e^{\ln\left|\frac{x^2y-1}{x^2y+1}\right|^{\frac{1}{2}}}\, e^{c} \\
|x| &= \left|\frac{x^2y-1}{x^2y+1}\right|^{\frac{1}{2}}\, e^{c} \\
x^2 &= \pm\frac{x^2y-1}{x^2y+1}\, e^{2c}, \quad \text{para} \;\; c_1 = \pm e^{2c}, \\
x^2\,(x^2y+1) &= (x^2y-1)\,c_1 \\
y\,(x^4 - x^2c_1) &= -x^2 - c_1 \\
y(x) &= \frac{x^2+c_1}{x^2c_1 - x^4},
\end{aligned}
$$

sendo $y(x)$ a solução geral de (5.29).

Vale ressaltar que, para $c_1 = 0$ e para $c_1 \to +\infty$, obtemos, respectivamente, as soluções $y = -\dfrac{1}{x^2}$ e $y = \dfrac{1}{x^2}$.

5.1.8 Simetrias e algumas Técnicas de Resolução de EDO's

Baseados em Pinto, Silva e Santos (2019), iremos relacionar algumas ideias apresentadas no capítulo 3, do presente trabalho, com a teoria de simetrias de Lie.

Fator Integrante

Dada uma EDO linear não homogênea de primeira ordem do tipo

$$
\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x), \tag{5.31}
$$

sua solução será, conforme mostrado na seção 3.2.1:

$$
y = e^{-\int_0^x p\,d\tau} \int e^{\int_0^x p\,d\tau} g(x)\,dx.
$$

O fator integrante $\mu = e^{\int_0^x p\,d\tau}$ surge naturalmente se resolvermos (5.31) explorando uma simetria comum no contexto de problemas lineares.

Seja a solução $y_h = e^{-\int_0^x p\, d\tau}$ da equação homogênea, equação na qual $g(x) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

A linearidade de (5.31) induz a uma simetria: o conjunto de transformações $\Gamma_\varepsilon : (x,\, y) \mapsto (\widehat{x},\, \widehat{y}) = (x,\, y(x) + \varepsilon\, y_h(x))$. Ou seja, se $y(x)$ é uma solução da EDO (5.31), então sua imagem sob Γ_ε, $y(x) + \varepsilon\, y_h(x)$, também será, pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[y(x) + \varepsilon\, y_h(x)] + p(x)\,[y(x) + \varepsilon\, y_h(x)] &= y'(x) + \varepsilon\, y_h'(x) + p(x)y(x) + p(x)\varepsilon\, y_h(x) \\
&= y'(x) + p(x)y(x) + \varepsilon\,[y_h'(x) + p(x)y_h(x)] \\
&= y'(x) + p(x)y(x) = g(x),
\end{aligned}$$

sendo que na penúltima passagem usamos o fato de que $y_h(x)$ é solução da EDO homogênea.

Encontrada uma simetria para (5.31), podemos determinar um novo sistema de coordenadas, as coordenadas canônicas, no qual essa equação se tornará separável.

As coordenadas do vetor tangente à órbita do grupo de simetrias são

$$\xi\,(x,\, y) = \left.\frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{e} \quad \eta\,(x,\, y) = \left.\frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon} = 0 = \left.\frac{d}{d\varepsilon}(y + \varepsilon\, y_h)\right|_{\varepsilon=0} = y_h,$$

e o seu gerador infinitesimal (5.28)

$$\mathbf{X} = \xi\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta\, \frac{\partial}{\partial y} = y_h\, \frac{\partial}{\partial y}.$$

Determinaremos as coordenadas canônicas $(r(x,\, y),\, s(x,\, y))$ utilizando as equações

$$\mathbf{X}r = y_h\, r_y = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{X}s = y_h\, s_y = 1.$$

As órbitas de Γ_ε são linhas verticais (pois $\xi\,(x,\, y) = 0$), assim $r = x$. Como $s_y = y_h(x)^{-1}$, temos $s(x,\, y) = y_h(x)^{-1}\, y$. Para 5.31, $\omega(x,\, y) = -p(x)y + g(x)$. No sistema de coordenadas $(r,\, s)$, (5.31) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dr} &= \frac{s_x + \omega(x,\, y)\, s_y}{r_x + \omega(x,\, y)\, r_y} = -\frac{y_h'\, y}{y_h^2} + \frac{-p(x)y + g(x)}{y_h} \\
&= -\frac{y(-p(x)\, y_h)}{y_h^2} + \frac{-p(x)y + g(x)}{y_h} = \frac{g(x)}{y_h(x)} = \frac{g(r)}{y_h(r)}.
\end{aligned}$$

Sua solução será

$$s(r) = \int \frac{g(r)}{y_h(r)}\, dr = \int \frac{g(r)}{e^{-\int_0^x p\, d\tau}}\, dr.$$

Reescrevendo-a nas variáveis originais, obteremos

$$y = e^{-\int_0^x p\, d\tau} \int e^{\int_0^x p\, d\tau} g(x)\, dx.$$

Equação Homogênea

Seja a EDO homogênea

$$\frac{dy}{dx} = p(x,\, y), \tag{5.32}$$

onde $p(x,\, y)$ é uma função homogênea de grau zero (dizemos que uma função $f(x,\, y)$ é homogênea de grau k quando $f(tx,\, ty) = t^k f(x,\, y)$, para $(x,\, y)$ pertencente ao domínio de f e $t > 0$). A homogeneidade de $p(x,\, y)$ e a linearidade do operador derivada sugerem o grupo de transformações

$$(\widehat{x},\, \widehat{y}) = (e^{\varepsilon} x,\, e^{\varepsilon} y)$$

como uma simetria para (5.32).

As coordenadas do vetor tangente à órbita desse grupo de simetrias são

$$\xi\,(x,\, y) = \left.\frac{d\widehat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = x \quad \text{e} \quad \eta\,(x,\, y) = \left.\frac{d\widehat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = y,$$

das quais obtemos o gerador infinitesimal

$$\mathbf{X} = \xi(x,\, y)\, \partial_x + \eta(x,\, y)\, \partial_y = x\, \partial_x + y\, \partial_y.$$

Para transformar para as coordenadas canônicas $(r(x,\, y),\, s(x,\, y))$, usamos as equações

$$\mathbf{X} r = x r_x + y r_y = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{X} s = x s_x + y s_y = 1.$$

Através do método das características, deduzimos que $r = \frac{y}{x}$. Admitindo que $s_y = 0$, temos que

$$r = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad s = \ln|x|$$

são coordenadas canônicas para (5.32).

Nas coordenadas $(r,\, s)$, (5.32) transforma-se na equação separável

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + p(x,\, y)\,\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{r}{x} + p(x \cdot 1,\, x \cdot \frac{1}{x})\,\frac{1}{x}} = \frac{1}{p(1,\, r) - r},$$

cuja solução será

$$s = \int \frac{1}{p(r) - r}\, dr + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$. Voltando às variáveis originais, obtemos a solução geral para (5.32).

6 CONCLUSÃO

A análise de conceitos presentes no estudo de Teoria de Grupos e de Equações Diferenciais, que nos auxiliaram na compreensão do que vem a ser um Grupo de Lie uniparamétrico e de que forma seus elementos, denominados de simetrias de Lie, contribuem para a resolução de EDO's de primeira ordem, permitiu que percebêssemos como duas áreas, muitas vezes consideradas dissociadas, podem se relacionar. As simetrias de Lie, além de contribuírem para a resolução de EDO's que, muitas vezes, não se enquadram nos tipos para os quais já existem métodos, também associam os mesmos que, aparentemente, se apresentam como distintos.

Sendo assim, esperamos que esse trabalho possa vir a incentivar muitos outros, pois, quanto mais explorada, a Matemática se apresenta como uma ciência de saberes inesgotáveis.

REFERÊNCIAS

BARATA, J. C. A. **Notas para Cursos de Física-Matemática**. São Paulo: [s.n.], 2022. 2554 p. Disponível em: <http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html>. Acesso em: 03 jan. 2022.

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Teoria de Grupos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. 286 p.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2015. 1040 p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. 368 p.

HADAD, Y. Group theoretical techniques in differential equations. [s.n.], [S.l.], p. 5. Disponível em: <https://www.math.arizona.edu/files/grad/workshops/integration/projects/GroupTheoreticalTechniques.pdf>. Acesso em: 10 out. 2022.

PINTO, A.; SILVA, A. L.; SANTOS, A. L. C. Grupos de lie e equações diferenciais ordinárias. **Cadernos do IME**, [s.n.], São Paulo, n. 13, p. 69–98, 02 jan. 2019. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/article/view/46995/31594>. Acesso em: 11 jan. 2023.