



ROBERTO MILIORELLI

APLICAÇÕES DE INTEGRAIS: PROBABILIDADES

**LAVRAS – MG
2023**

ROBERTO MILIORELLI

APLICAÇÕES DE INTEGRAIS: PROBABILIDADES

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do
Curso de Licenciatura em Matemática,
para a obtenção do título de Licenciado.

Prof. Dr. Ricardo Edem Ferreira
Orientador

LAVRAS – MG
2023

ROBERTO MILIORELLI

APLICAÇÕES DE INTEGRAIS: PROBABILIDADES

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentada à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do
Curso de Licenciatura em Matemática,
para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADO em 14/02/2023.

Prof. Dr. Carlos Leal de Castro

Profª Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré – UFLA

Prof. Dr. Ricardo Edem Ferreira
Orientador

LAVRAS – MG
2023

*À minha irmã Helena Miliorelli que me deu força
e incentivo para que
eu chegasse até aqui.
Dedico*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** pelo presente da vida, por me sustentar e por permitir que eu chegasse até aqui.

Agradeço aos meus sobrinhos **Carlos, Joseane e Elenice** pelo apoio e incentivo que me deram para fazer o curso de Licenciatura em Matemática.

Ao meu pai **José**, que lutou todos os dias juntamente com minha mãe para que nossa família permanecesse unida e conseguisse conquistar coisas que para nossa realidade pareciam tão distantes. Amo você!

A minha irmã **Helena Miliorelli**, que descanse em paz, que sempre me apoiou e trouxe alegrias para os meus dias. Sinto sua falta todos os dias, sempre amarei você!

Ao meu orientador **Ricardo Edem**, por toda caminhada. Por me incentivar e direcionar no melhor caminho para conclusão do trabalho.

À banca deste trabalho composta pelo Prof. Dr. **Carlos Leal**, pela Prof.^a Dra. **Rita de Cássia** e pela professora da disciplina Prof.^a **Rosana Mendes** por terem aceitado fazer parte da construção do mesmo e pelas contribuições.

A todos os professores e professoras da ESAL e da UFLA que passaram por minha vida, me ensinaram e me inspiraram, mostrando que a educação pode nos libertar.

Aos meus amigos e amigas da universidade, em especial **Luiz Vinícius, Gabriela, e Patrícia** por me ajudar nas questões tecnológicas e uso de computador. Ao meu amigo **Anderson Felipe**, que também sempre me auxiliou em meus trabalhos.

À Universidade Federal de Lavras (**UFLA**), por me proporcionar tantas experiências em seus espaços de pesquisa, ensino e extensão.

Enfim, “Obrigado a todas as pessoas que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento como pessoa. Sou o resultado da confiança e da força de cada um de vocês” - Augusto Branco.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.”

São Francisco de Assis

RESUMO

O objetivo do trabalho é explorar as aplicações de Integrais para compreender melhor o seu uso no cálculo de áreas e aplicação à Probabilidade. Como problema da pesquisa apresenta a seguinte questão: Como o cálculo integral pode ser usado para resolver os problemas apresentados? A pesquisa propõe resolver problemas das áreas mencionadas, observando como se dá a aplicação, observando conceitos de função densidade e fenômenos aleatórios para distribuição normal. A procura dos conteúdos matemáticos que resolvam os assuntos mencionados, buscando refletir sobre as metodologias para resolver os exercícios. Pode-se notar que as resoluções nos mostram como a matemática resolve os problemas matemáticos probabilísticos.

Palavras-chave: Cálculo de Integrais. Resolução de problemas. Probabilidade. Matemática. Integral.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	9
2 OBJETIVO E/OU QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO	11
3 JUSTIFICATIVA	12
4 REFERENCIAL TEÓRICO	13
4.1 Breve contexto histórico.....	13
4.2 O ensino de Probabilidade e sua aplicação	14
5.1 Como planejamos?.....	16
5.2 Constituição dos exercícios	16
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	17
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	18

1 INTRODUÇÃO

A temática deste trabalho está voltada à aplicação integral na resolução de problemas. A ideia básica reside na solução de problemas aplicados ao cálculo de área e Probabilidade.

Delimitando o foco da pesquisa, dando importância a Física e a Matemática. Situando o tema dentro da área de Licenciatura em Matemática. Resolvendo exercícios do Livro Cálculo volume 1 – James Stewart.

Foi utilizado o conceito de variáveis aleatórias contínuas apresentando uma função densidade de probabilidade.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

O estudo da probabilidade provem do matemático francês Blaise Pascal. Em 1654, ele foi consultado sobre a razão porque era desfavorável apostar no aparecimento de um duplo seis ao menos uma vez em 24 jogadas de dois dados. Ele responde, portanto, a questão calculando a probabilidade de um duplo seis: $\frac{1}{36}$.

Inicialmente, a probabilidade estabelecia espaços amostrais com números finitos de resultados, como o número de maneiras que dois dados podem ser jogados. Juntamente com o cálculo, a teoria da probabilidade passa a analisar problemas em que há um número finito de resultados. Dessa forma, os estudos se dividiram em Probabilidade discreta e probabilidade contínua.

Desde os tempos de Pascal, as aplicações da probabilidade foram se desenvolvendo, nos campos diversos como administração, controle de qualidade, telefonia, psicologia e biologia.

Em muitas aplicações de probabilidade, deve-se considerar uma variável aleatória cuja imagem é um intervalo da reta real. Logo, a variável aleatória é chamada de contínua. Para definir a probabilidade de um evento que envolve uma variável contínua, não basta contar o número de maneiras como o evento pode ocorrer (como no caso de uma variável discreta). Precisa-se definir, portanto, uma função f chamada função de densidade de probabilidade.

A definição se baseia em uma função f de uma variável aleatória contínua X cuja imagem é o intervalo $[a, b]$. A função é uma função densidade de probabilidade sendo não-negativa e contínua no intervalo $[a, b]$ e se

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

A probabilidade de x estar no intervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Se f é uma função densidade de probabilidade para uma variável aleatória contínua X em um intervalo $[a, b]$, então a média de X é:

$$\mu = \int_a^b xf(x)dx$$

Podemos ainda considerar a função de densidade de probabilidade mais utilizada, a função de densidade de probabilidade normal, dado por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, -\infty < x < \infty$$

O valor esperado dessa função é μ e seu desvio padrão é o σ .

2 OBJETIVO E/OU QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Investigar algumas aplicações do Cálculo de Integral na definição de Probabilidade.

O Objetivo Geral deste trabalho se baseia na compreensão do cálculo integral, e como ele pode ser aplicado em algumas áreas do conhecimento.

Objetivos Específicos se dá através de revisão teórica, resolução dos exercícios, utilizando o livro Cálculo Volume 1 – James Stewart.

3 JUSTIFICATIVA

Como justificativa se idealiza do cálculo de probabilidade de Blaise Pascal (1623-1662) e usei o método categórico dedutivo (uso do raciocínio). A relevância dos estudos nos permite analisar como se dá as aplicações dos Cálculos, nas variadas áreas da sociedade. Os alunos, ao terem contato com o trabalho, poderão tirar proveito das informações apresentadas.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo trataremos de aspectos do contexto histórico dos trabalhos com probabilidades. Daremos início abordando a ideia de Cálculo, posteriormente falaremos a respeito da probabilidade e a aplicação no ensino de Matemática e em diversas áreas.

4.1 Breve contexto histórico

O Cálculo é um ramo da matemática que estuda taxas de variação de grandezas e a acumulação de quantidades. Esse ramo da matemática está fundamentado em um conjunto de três operadores: limite, derivada e integral. É usado em problemas que possam ser modelados matematicamente à procura de uma solução ótima, sendo utilizado nas ciências físicas e matemáticas, na engenharia, economia, biologia, probabilidade e em outras áreas.

O cálculo integral surgiu muito antes que o cálculo diferencial.

A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

Eves (2004) aponta que os primeiros problemas da história do cálculo tinham relação com o cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Piehowiak, (2011, p. 191) expressa o problema da área como: “dada uma função f contínua e não negativa em um intervalo $[a, b]$, qual a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x ?”

Ele ainda afirma que a atribuição da definição de integral que é utilizada atualmente é do alemão Bernhard Riemann (1826- 1866), de modo que o cálculo das integrais parciais – onde há um intervalo delimitado e sua área é encontrada pela soma das divisões desse intervalo em espaços menores – conhecido como “integral de Riemann”.

A teoria da probabilidade surge como ramo na Matemática em meados do século XV, apesar de antes desse período já ser considerado ciências. Suas raízes surgem principalmente nos jogos e apostas. Pascal e Fermat são associados a teoria da probabilidade diante de suas correspondências que eram trocadas em que falavam do objetivo de se obter soluções dos problemas de jogos de azar propostos em 1653.

A probabilidade além de ter suas raízes na solução de problemas de jogos, também eram consideradas no processamento de dados estatísticos. Os problemas estatísticos mais importantes abordando o pensamento probabilístico originam-se de amostras.

4.2 O ensino de Probabilidade e sua aplicação

A palavra probabilidade está presente no nosso cotidiano. Ao levantar pela manhã e olhar para o céu nublado, concluímos que há grande probabilidade de chuva. Uma mulher ao descobrir gravidez, a família “aposta” qual será o sexo do bebê. Um estudante de vestibular, ao escolher a universidade e o curso que pretende fazer, pode estimar suas chances de conseguir a tão sonhada vaga. Quando jogamos na loteria, sabemos que, mesmo que pequena, existe uma chance de que o nosso bilhete seja premiado e até fazemos planos caso acertemos os números sorteados. Um médico, conhecendo certo medicamento, seus efeitos e probabilidade de o paciente ter uma melhora, saberá se deve ou não indicar.

Dessa maneira, fazemos previsões ao longo do dia e compreendemos que podemos atribuir um número que quantifica a chance de algo vir a acontecer.

Na Matemática, o cálculo da probabilidade é um ramo que estuda fenômenos aleatórios, ou seja, observações ou experimentos que, quando realizados não apresentam resultados imediatos.

Atualmente, o estudo do cálculo de probabilidade é importante devido a sua aplicação em diversas áreas, como estatística, economia, engenharia, física, química, sociologia, psicologia, entre outros ramos do conhecimento.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino (PCNs), “grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados dos acontecimentos” (Brasil, 1998, p.56), ou seja, o estudante pode compreender noções de acaso e incerteza, que se manifestam de maneira individual, explorando os conceitos por meio de “situações que nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos” (Brasil, 1998, p. 56). O estudante ao ter acesso ao material em que auxilia seus estudos, faz com que compreenda a chance de ocorrências de determinado experimento ou fenômeno aleatório. Além disso, o estudo do conhecimento aleatório probabilístico é importante devido à necessidade desse conhecimento nos mais diversos ramos da atividade humana.

Entretanto, sabendo da importância desse conteúdo como fundamento matemático, que garante a validade dos procedimentos de inferência estatística, muitos consideram o ensino decorativo, tedioso devido a sua abordagem em sala de aula reduzir-se a exercícios descontextualizados, sem significação. Lopes (2008) aponta que a aprendizagem desse conceito matemático se organiza de forma a contrapor a vivência e exploração de experimentos:

[...] opõe-se à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação, as quais podem limitar a visão matemática que o aluno poderá desenvolver, dificultando suas possibilidades de estabelecimento de estratégias para a resolução de problemas diversificados que lhe surgirão ao longo de sua vida (LOPES, 2008, p.63).

Assim, em virtude do atual quadro de ensino de probabilidade a fim de desenvolver uma proposta para o ensinamento desse conteúdo e sanar as dificuldades, foi trabalhado com exercícios aplicados que abordam situações-problemas de modo a despertar o interesse por parte dos estudantes e aprimorar seus conhecimentos, sendo um material útil para consultas e pesquisas.

5 PROCESSOS METODOLOGICOS

Neste capítulo iremos tratar sobre o desenvolvimento da metodologia utilizada para nossa pesquisa de abordagem qualitativa. Iniciamos descrevendo o planejamento dos exercícios propostos, os conceitos a serem trabalhados e discussões com orientador.

5.1 Como planejamos?

Se tratando de um trabalho em que visa auxiliar estudantes na compreensão de cálculo de integrais, aplicados em algumas áreas, abordando o conceito de Probabilidade, foi proposto um material com exercícios de aplicação. Dessa maneira, buscamos desenvolver exercícios que prezassem pelas diversas possibilidades de resolução.

Aconteceram algumas reuniões com o professor orientador para discutirmos a proposta que seria desenvolvida. Nos baseamos no Livro Cálculo volume 1 – James Stewart para desenvolvermos nossas sequências de exercícios, pois o autor trabalha os conceitos de Cálculo Integral, além disso, apresenta exercícios contextualizados.

5.2 Constituição dos exercícios

Os exercícios foram devidamente selecionados e resolvidos com indicações de referências para a pesquisa. À medida que cada etapa era finalizada, o professor orientador fazia as devidas correções e discussões, de maneira a orientar o estudante.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi fazer um estudo do conteúdo da Teoria da Probabilidade, propondo exercícios de aplicação do cálculo de integrais na probabilidade. A intenção é apresentar aos estudantes que tiverem contato com o trabalho maneiras de resolução de exercícios que se apliquem a determinadas áreas.

Foi analisado alguns exercícios do livro Cálculo Volume 1 – James Stewart, sendo escolhidos aqueles em que se resolviam de maneiras diferentes, baseado em suas interpretações do conteúdo. Após o processo de análise e resolução dos exercícios, a proposta era fazer um material que pudesse ser acessível aos estudantes que fossem estudar o assunto, dando uma interpretação geral do assunto para os estudantes.

Pude perceber no decorrer do trabalho, que diversas áreas tem aplicado a probabilidade para resolver seus problemas específicos. Os conceitos de integral são presentes nas resoluções dos problemas, ampliando o conhecimento necessário para resolvê-los.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boletim Lavrense de Matemática - DMM/UFLA, 7ed.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. (1998) **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: Ministério do Meio Ambiente; Secretaria de Educação Fundamental.

Edwards, Bruce H. ; Larson, Ron. **Cálculo com aplicações**, 4ª ed. LTC. 2005 EVES,

Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

LARSON, Roland E. **Cálculo com Aplicações**, 4ª ed.

Lopes, C. E. (2008). **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Cad. CEDES, Campinas, v. 28, n. 74, 57-73, Apr. 2008.

PIHOWIAK, Ruy. **Cálculo diferencial e integral**. Indaial: Uniasselvi, 2011. QUINTELLA,

Ary. **Matemática para o Terceiro Ano Colegial** 12a. ed. 1965

STEWART, James. **Cálculo**, volume I, Cengage Learning, 2013.

Swokowski, Earl Willian. **Cálculo com geometria analítica**, 2ª ed. São Paulo: Makron Book, 1994

