



MARIA VITÓRIA NEVES

**CÁLCULO FRACIONÁRIO:
UMA APLICAÇÃO DO MODELO DE LOTKA-VOLTERRA**

LAVRAS

2022

MARIA VITÓRIA NEVES

**CÁLCULO FRACIONÁRIO:
UMA APLICAÇÃO DO MODELO DE LOTKA-VOLTERRA**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

Profa. Dra. Ana Cláudia Pereira
Orientadora

**LAVRAS
2022**

RESUMO

Este trabalho trata-se do estudo do Cálculo Fracionário que, embora tenha início no século XVII, somente a partir da década de setenta, com a revolução tecnológica, passou a ter maior visibilidade. Após o estudo do Cálculo Fracionário passa-se para o estudo da função de Mittag-Leffler, algumas de suas generalizações, e a transformada de Laplace dessas funções, com o intuito de aplicar os resultados estudados para analisar a versão fracionária de um sistema de Lotka-Volterra.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário, Lotka-Volterra, Equações Diferenciais Fracionárias

LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 – Funções de Mittag-Leffler	25
Figura 5.2 – Função de Mittag-Leffler $E_{2,3/2}(-z^2)$, $z \in \mathbb{R}$	26
Figura 5.3 – Função de Mittag-Leffler $E_2(z^2)$, $z \in \mathbb{R}$	26
Figura 5.4 – Função de Mittag-Leffler $E_{2,2}(z^2)$, $z \in \mathbb{R}$	26
Figura 5.5 – Função $E_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha})$, $z \in \mathbb{R}$	27
Figura 5.6 – Função $E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha})$	27
Figura 7.1 – Curvas de nível do modelo de Lotka-Volterra	36
Figura 7.2 – Cobra píton (<i>Python bivittatus</i>) encontrada no DF	38
Figura 7.3 – Regiões Administrativas do Distrito Federal	39
Figura 7.4 – Lobo-guará (<i>Chrysocyon brachyurus</i>)	41
Figura 7.5 – Soluções do sistema fracionário	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Número de cobras após reprodução	43
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	CONCEITOS PRELIMINARES	7
2.1	Função Gama	7
2.2	Função Beta	7
2.3	Função de Gel'fand-Shilov	8
2.4	Funções seccionalmente contínuas	8
2.5	Produto de Convolução	8
3	INTEGRAL FRACIONÁRIA	9
3.1	Integral de ordem não inteira	9
3.2	Integrais de Riemann-Liouville	10
3.3	Integrais fracionárias de Liouville	12
4	DERIVADA FRACIONÁRIA	14
4.1	Formulação de Riemann-Liouville	14
4.2	Derivadas Fracionárias de Liouville	18
4.3	Derivada Fracionária de Caputo	19
5	FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER	24
5.1	Funções de Mittag-Leffler	24
5.1.1	Exemplos	25
6	TRANSFORMADA DE LAPLACE	28
6.1	Transformada de Laplace inversa	30
6.2	Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler	32
7	APLICAÇÃO	35
7.1	O sistema de Lotka-Volterra clássico	35
7.2	Sistema de Lotka-Volterra fracionário	36
7.3	Aplicação do sistema de Lotka-Volterra	38
7.3.1	Região do Gama	38
7.3.2	Cobra píton	39
7.3.3	Lobo-guará	40
7.3.4	Determinação dos parâmetros	41
8	Considerações finais	45
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47

1 INTRODUÇÃO

Em 1695, o Cálculo Fracionário foi pela primeira vez mencionado, através de uma troca de correspondências entre L' Hôpital e Leibniz. Em uma destas correspondências, Leibniz formulou uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem, em princípio arbitrária. Prontamente, L' Hôpital devolveu a pergunta para Leibniz, questionando-o no caso em que a ordem da derivada fosse meio, ou seja, qual deveria ser a interpretação, na notação de Leibniz $d^{1/2}y/dx^{1/2}$, para a derivada de ordem $n = 1/2$.

Desde então vários pesquisadores contribuíram no assunto, como Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix, Fourier e outros. Porém, mesmo com tantos estudos muitos cientistas não acreditavam na aplicabilidade do Cálculo Fracionário, sendo considerado por muito tempo como uma área abstrata. Somente a partir da década de setenta, com a revolução tecnológica, este assunto passou a ter maior visibilidade e com isso vários campos passaram a ser considerados ambientes propícios para a utilização do Cálculo Fracionário, tais como a Reologia, Biologia quantitativa, Eletroquímica, Difusão, Teoria de transporte, Probabilidade, Estatística, Teoria do Potencial e Elasticidade.

Neste trabalho, estuda-se o Cálculo Fracionário, tomando o livro texto (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), onde o conceito de integral fracionária é obtido generalizando a fórmula das integrais iteradas. O conceito de integral fracionária desempenha um papel importante na definição do conceito de derivada fracionária, que é definida posteriormente. Com relação às derivadas fracionárias, concentra-se nas formulações conforme propostas por Riemann-Liouville e Caputo. Para a resolução de uma equação diferencial fracionária, é adotada a derivada de Caputo, para evitar o fato que a derivada proposta por Riemann-Liouville de uma função constante não é zero.

Em seguida, é feito um estudo sobre as funções de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros e seus casos particulares e, posteriormente sobre a transformada de Laplace, como uma ferramenta poderosa visando a resolução de problemas envolvendo uma equação diferencial fracionária.

Para esta finalidade, foi estudado alguns modelos de equações diferenciais, conforme proposto por (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) e foi escolhido o modelo de Lotka-Volterra para uma abordagem mais aprofundada.

O modelo de Lotka-Volterra é composto por um par de equações diferenciais ordinárias não lineares que modela a interação entre duas espécies, um predador e a sua presa. Neste

trabalho, considera-se como predador a cobra píton birmanesa, que foi solta por engano na região do Gama no Distrito Federal e após estudar sobre suas possíveis presas, foi escolhido o lobo-guará. Após estabelecido as populações, foram determinados os parâmetros do sistema de Lotka-Volterra.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentam-se as definições das funções Gama, Beta, Gel'fand-Shilov, seccionalmente contínuas e do produto de convolução, além de algumas propriedades que serão utilizadas ao longo do trabalho.

2.1 Função Gama

A função Gama é definida a partir de uma integral imprópria. Uma vez que

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt, \forall n \in \mathbb{N}$$

segue que a função Gama é a generalização do fatorial, onde substitui-se o $n \in \mathbb{N}$ por um número complexo, $z \in \mathbb{C}$, com $Re(z) > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Propriedades:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \text{ se } n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Função Beta

A função Beta, denotada por $B(z, \xi)$, é definida para $z, \xi \in \mathbb{C}$ com $Re(z) > 0$, $Re(\xi) > 0$, a partir da integral

$$B(z, \xi) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\xi-1} dt.$$

Uma importante relação entre a função Gama e a função Beta, é dada por

$$B(\xi, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)}.$$

Cabe observar que $B(\xi, z) = B(z, \xi)$.

2.3 Função de Gel'fand-Shilov

Sejam $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. Define-se a função de Gel'fand-Shilov como

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\nu(t) := \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

2.4 Funções seccionalmente contínuas

Uma função é chamada de seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ de modo que

1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$.
2. Os limites laterais quando t tende aos extremos de cada subintervalo existem.

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se for contínua aí exceto por um número finito de descontinuidades do tipo salto. Se f for seccionalmente contínua em $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo $\beta > \alpha$, então dizemos que f é seccionalmente contínua para $t \geq \alpha$.

2.5 Produto de Convolução

Sejam f e g funções integráveis para as quais o produto é também uma função integrável. Definimos a convolução de f e g , (ou produto de convolução), denotada por $f * g$, como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

3 INTEGRAL FRACIONÁRIA

Neste capítulo, define-se as integrais de ordens arbitrárias, onde a formalização da integração é tratada antes da derivação.

Apesar das definições e resultados apresentados neste trabalho serem válidos para ordem complexa, no que segue considera-se apenas ordem real.

3.1 Integral de ordem não inteira

Antes de introduzir o conceito de integral de ordem não inteira, mostra-se que uma integral de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$, de uma função $f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$, pode ser vista como um produto de convolução de Laplace entre f e a função de Gel'fand-Shilov de ordem n .

Definição 3.1.1. Define-se a integral de ordem inteira, chamada de integral iterada, agindo na função f como

$$If(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1.$$

Desta forma, iterando, obtém-se

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 \\ I^3 f(t) &= I[I^2 f(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1. \end{aligned}$$

Sendo assim, a integral de ordem n pode ser definida a partir da expressão

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_3 dt_2 dt_1.$$

Teorema 3.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ e f uma função seccionalmente contínua, então

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau$$

onde $*$ denota o produto de convolução de Laplace.

Demonstração: Prova-se o teorema por indução em n . Para $n = 1$ tem-se

$$If(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau = \phi_1(t) * f(t),$$

lembrando que $\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$.

Para concluir basta mostrar que se $(I^n f)(t) = \phi_n(t) * f(t)$, então vale a igualdade $(I^{n+1} f)(t) = \phi_{n+1}(t) * f(t)$. Por hipótese indutiva tem-se

$$(I^{n+1} f)(t) = I[I^n f(t)] = I[\phi_n(t) * f(t)] = \int_0^t \phi_n(u) * f(u) du = \int_0^t \left[\int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \right] du.$$

Trocando a ordem de integração obtém-se

$$(I^{n+1} f)(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} du \right] f(\tau) d\tau.$$

Calculando a integral pode-se escrever

$$(I^{n+1} f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau) d\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t),$$

que é justamente o resultado desejado. ■

Definição 3.1.2. Com a relação obtida no Teorema 3.1.1 generaliza-se a ordem da integral para $\alpha > 0$, através da expressão

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau.$$

3.2 Integrais de Riemann-Liouville

Nesta seção apresentam-se as integrais fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, em intervalo limitado, bem como algumas propriedades.

Definição 3.2.1. Seja $J = [a, b]$ com $-\infty < a < b < \infty$. As integrais de ordem arbitrária $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville são definidas por

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a \quad (3.1)$$

e

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b \quad (3.2)$$

Estas integrais são chamadas integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente.

Assim como ocorre com a integração de ordem inteira, a integração de ordem arbitrária, no sentido de Riemann-Liouville, também transforma funções potências em funções potências.

Exemplo 3.2.1. Se $\beta > 0$, então

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (3.3)$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}. \quad (3.4)$$

Proposição 3.2.1. Sejam α, β números reais positivos e f uma função real seccionalmente contínua em $[a, b]$. Então

$$(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta}f)(x) \quad e \quad (I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}f)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta}f)(x) \quad (3.5)$$

são satisfeitas para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Pela definição tem-se

$$(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(I_{a+}^{\beta}f(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{1-\beta}} \right] dt$$

Mudando a ordem de integração e fazendo a mudança de variável $u = \frac{t-s}{x-s}$ obtém-se

$$(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} dud s$$

onde a integral à direita é justamente a definição da função Beta $B(\beta, \alpha)$, ou seja,

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f)(x) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(s)(x-s)^{(\alpha+\beta)-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(s)(x-s)^{(\alpha+\beta)-1} ds \\ &= (I_{a+}^{\alpha+\beta}f)(x) \end{aligned}$$

A demonstração para a integral à direita se dá de maneira análoga. ■

A proposição a seguir é uma regra para integração fracionária por partes.

Proposição 3.2.2. Sejam $\alpha > 0$ e $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas. Então

$$\int_a^b \varphi(x) (I_{a+}^\alpha \psi)(x) dx = \int_a^b (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) \psi(x) dx. \quad (3.6)$$

Demonstração:

$$\int_a^b \varphi(x) (I_{a+}^\alpha \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt dx$$

Trocando a ordem de integração e reescrevendo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) (I_{a+}^\alpha \psi)(x) dx &= \int_a^b \psi(t) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \varphi(x) (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &= \int_a^b (I_{b-}^\alpha \varphi)(t) \psi(t) dt \end{aligned}$$

que é justamente o resultado desejado. ■

3.3 Integrais fracionárias de Liouville

A seguir apresentam-se as definições de integral fracionária de Liouville para funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e também para funções seccionalmente contínuas em \mathbb{R} . As definições são extensões naturais da definição da integral fracionária de Riemann-Liouville para funções seccionalmente contínuas em um intervalo limitado $[a, b]$.

Definição 3.3.1. Sejam f uma função real seccionalmente contínua no intervalo $[0, +\infty[$ e $x > 0$. As integrais fracionárias de Liouville de ordem $\alpha > 0$ de f , são definidas por

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (3.7)$$

e

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (3.8)$$

e são chamadas de integrais fracionárias de Liouville à esquerda e à direita, respectivamente.

Exemplo 3.3.1. Seja $\alpha > 0$.

(a) Se $\beta > 0$, então

$$(I_{0+}^\alpha t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} x^{\beta + \alpha - 1} \quad (3.9)$$

(b) Se $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha + \beta < 1$, então

$$(I_{-}^{\alpha} t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (3.10)$$

(c) Se $\lambda > 0$, então

$$(I_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x} \quad (3.11)$$

Teorema 3.3.1. Sejam $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Se f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, então

$$(I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad e \quad (I_{-}^{\alpha} I_{-}^{\beta} f)(x) = (I_{-}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (3.12)$$

para $x \geq 0$.

Proposição 3.3.1. Seja $\alpha > 0$, então a relação

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) (I_{0+}^{\alpha} \psi)(x) dx = \int_0^{\infty} \psi(x) (I_{-}^{\alpha} \varphi)(x) dx \quad (3.13)$$

é válida para funções φ e ψ seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$.

A seguir apresentam-se as definições das integrais fracionárias de Liouville para funções seccionalmente contínuas em \mathbb{R} .

Definição 3.3.2. As integrais fracionárias de Liouville, semelhante as no semieixo tem a forma

$$(I_{+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (3.14)$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad (3.15)$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

Como nos casos de f seccionalmente contínua em $[a, b]$ e $[0, +\infty[$ temos a regra de integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (I_{+}^{\alpha} \psi)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (I_{-}^{\alpha} \varphi)(x) \psi(x) dx.$$

4 DERIVADA FRACIONÁRIA

Existem várias definições de derivada fracionária. Neste capítulo apresenta-se duas delas: a derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo.

4.1 Formulação de Riemann-Liouville

A derivada de ordem arbitrária em um intervalo limitado, proposta por Riemann-Liouville, é dada a partir da definição de integral de Riemann-Liouville, e considerando o fato de a derivação ser operação inversa à esquerda da integração, no cálculo de ordem inteira.

Definição 4.1.1. As derivadas de ordem $\alpha > 0$, de Riemann-Liouville, em um intervalo limitado $[a, b]$, são definidas por

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a \quad (4.1)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b \quad (4.2)$$

onde $n = [\alpha] + 1$ e $[\alpha]$ significa a parte inteira de α .

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(D_{a+}^0y)(x) = (D_{b-}^0y)(x) = y(x), \quad (D_{a+}^ny)(x) = y^{(n)}(x) \quad e \quad (D_{b-}^ny)(x) = (-1)^ny^{(n)}(x) \quad (4.3)$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada usual de y de ordem n .

Em particular, para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad x > a, \quad (4.4)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \quad x < b. \quad (4.5)$$

Exemplo 4.1.1. Sejam α e β números reais positivos.

$$(a) \quad (D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

$$(b) (D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$$

Demonstração:

(a) Por definição

$$(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x).$$

Pelo Exemplo 3.2.1, substituindo α por $n - \alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)} (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} \end{aligned}$$

A partir do seguinte resultado

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta-\alpha+n-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

que pode ser provado usando indução, tem-se

$$(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$$

(b) Como

$$(D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x)$$

Segue do Exemplo 3.2.1, substituindo α por $n - \alpha$, que

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (b-x)^{\beta+\alpha-1} \end{aligned}$$

A partir do seguinte resultado

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^n (b-x)^{\beta+\alpha-1} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$$

que pode ser provado usando indução, tem-se

$$(D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad \blacksquare$$

Em particular, se $\beta = 1$, então as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville da função constante $f(x) = 1$ são

$$(D_{a+}^{\alpha} 1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (D_{b-}^{\alpha} 1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (4.6)$$

para $0 < \alpha < 1$, e, portanto, a derivada no sentido de Riemann-Liouville da função constante $f(x) = 1$ não é zero.

Por outro lado, para $j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$, obtém-se

$$(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j})(x) = 0 \quad e \quad (D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\alpha-j})(x) = 0.$$

A partir desse resultado, tem-se

Corolário 4.1.1. Sejam $\alpha > 0$ e $n = [\alpha] + 1$.

(a) A igualdade $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0$ é válida se, e somente se,

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

sendo c_j constantes reais arbitrárias, $j = 1, \dots, n$.

(b) A igualdade $(D_{b-}^{\alpha} y)(x) = 0$ é válida se, e somente se,

$$y(x) = \sum_{j=1}^n d_j (b-x)^{\alpha-j},$$

sendo d_j constantes reais arbitrárias, $j = 1, \dots, n$.

Lema 4.1.1. Sejam $\alpha > 0$ e $n = [\alpha] + 1$. Se $y \in AC^n[a, b]$, funções absolutamente contínuas no intervalo, então as derivadas fracionárias $D_{a+}^{\alpha} y$ e $D_{b-}^{\alpha} y$ existem em quase todos os pontos em $[a, b]$ e podem ser representadas, respectivamente, nas formas

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (4.7)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \quad (4.8)$$

Lema 4.1.2. Se f é seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$, então as seguintes igualdades

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad e \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad (4.9)$$

são asseguradas em $[a, b]$.

Demonstração: Utilizando a definição da derivada e calculando na função $(I_{a+}^{\alpha} f)(x)$, tem-se

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = D^n (I_{a+}^{n-\alpha} (I_{a+}^{\alpha} f)(x)) = D^n I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = D^n I_{a+}^n f(x) = f(x)$$

onde $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$ e I^n denotam a derivada e a integral, respectivamente, do cálculo de ordem inteira. ■

Observação 4.1.1. Para derivadas de ordem inteira tem-se

$$D^m D^n = D^{m+n} \quad e \quad D^m D^n = D^n D^m \quad (4.10)$$

para $m, n = 0, 1, 2, \dots$ e $D = \frac{d}{dx}$.

Para ordem fracionária, em geral, não vale a comutatividade. De fato, tomando $m = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $f(x) = 1$ tem-se

$$D^{1/2} D^1(1) = D^{1/2}(0) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{0}{(x-t)^{1/2}} dt = 0$$

mas,

$$D^1 D^{1/2}(1) = D^1 \frac{(x-a)^{-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} D^1 (x-a)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{-1}{2} (x-a)^{-3/2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}(x-a)^3}$$

A propriedade aditiva é apresentada abaixo:

Propriedade 4.1.1. Sejam $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$, tem-se

(a) Se as derivadas de ordens arbitrárias $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ e $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ existem então

$$(D^m D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x). \quad (4.11)$$

(b) Se as derivadas de ordens arbitrárias $(D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ e $(D_{b-}^{\alpha+m}y)(x)$ existem então

$$(D^m D_{b-}^{\alpha}y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m}y)(x). \quad (4.12)$$

4.2 Derivadas Fracionárias de Liouville

A seguir fornece-se a definição das derivadas de ordem α de uma função y , no sentido de Liouville, no semieixo positivo $[0, +\infty[$.

Definição 4.2.1. Sejam $x > 0$ e n o menor inteiro maior que $\alpha > 0$. As derivadas de Liouville de ordem α da função y , são definidas por

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (4.13)$$

e

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad (4.14)$$

respectivamente.

As expressões para $D_{0+}^{\alpha}y$ e $D_{-}^{\alpha}y$ em (4.13) e (4.14) são chamadas de derivadas de ordem α de Liouville no semieixo \mathbb{R}_+ , à esquerda e à direita, respectivamente.

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$D_{0+}^0y = D_{-}^0y = y; \quad D_{0+}^ny = y^{(n)} \quad e \quad D_{-}^ny = (-1)^ny^{(n)},$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada usual de y de ordem n .

Exemplo 4.2.1. (a) Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então

$$(D_{0+}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha-1}, \quad x > 0 \quad (4.15)$$

(b) Se $\alpha + \beta - [\alpha] < 1$, então

$$(D_{-}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta-\alpha-1}, \quad x > 0. \quad (4.16)$$

(c) Se $\lambda > 0$, então

$$(D_{-}^{\alpha}e^{-\lambda t})(x) = \lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}. \quad (4.17)$$

Demonstração:

(c)

$$(D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{\alpha-n} e^{-\lambda t})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^\infty \frac{e^{-\lambda t} dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

Fazendo a mudança de variável $w = t - x$, tem-se

$$\begin{aligned} (D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(w+x)} dw}{(w)^{\alpha-n+1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda w} (w)^{(n-\alpha)-1} dw. \end{aligned}$$

Utilizando a definição da função gama

$$\begin{aligned} (D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\lambda^{(n-\alpha)}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^{(n-\alpha)}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\lambda x} \\ &= \frac{1}{\lambda^{(n-\alpha)}} (-1)^n (-\lambda)^n e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^{(n)} \lambda^{(-\alpha)}} \lambda^n e^{-\lambda x} = \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

que é justamente o resultado esperado. ■

Proposição 4.2.1. A relação

$$\int_0^\infty f(x) (D_{0+}^\alpha g)(x) dx = \int_0^\infty g(x) (D_-^\alpha f)(x) dx$$

é válida para funções f e g seccionalmente contínuas.

4.3 Derivada Fracionária de Caputo

Para evitar o fato da derivada de uma constante não ser nula e de outras condições fisicamente não interpretáveis, Caputo propôs uma nova definição para a derivada de ordem arbitrária, baseada na definição de Riemann-Liouville, entretanto, com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação.

Apresenta-se a seguir as definições e propriedades das derivadas de Caputo de ordem arbitrária.

Definição 4.3.1. Sejam y uma função real seccionalmente contínua no intervalo limitado $[a, b]$ e $D_{a+}^\alpha y$ e $D_{b-}^\alpha y$ as derivadas de Riemann-Liouville de ordem arbitrária $\alpha > 0$. As derivadas fracionárias de Caputo, ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$, de ordem $\alpha > 0$ da função y são definidas via derivada

de Riemann-Liouville por

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(D_{a+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (4.18)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \left(D_{b-}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (4.19)$$

respectivamente, onde $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$, e $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}$.

Estas derivadas são chamadas derivadas fracionárias no sentido de Caputo de ordem α à esquerda e à direita, respectivamente.

Em particular, quando $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha [y(t) - y(a)])(x),$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha [y(t) - y(b)])(x).$$

Se $\alpha \notin \mathbb{N}$ e y é uma função tal que as derivadas de Caputo de ordem arbitrária ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ com $\alpha > 0$ existem junto com as derivadas de Riemann-Liouville de ordem arbitrária $D_{a+}^\alpha y$ e $D_{b-}^\alpha y$, então

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad n = [\alpha] + 1$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b-x)^{k-\alpha} \quad n = [\alpha] + 1.$$

Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então as derivadas de Caputo de ordem arbitrária coincidem com as derivadas de Riemann-Liouville fracionárias nos seguintes casos:

$${}^C D_{a+}^\alpha y = D_{a+}^\alpha y,$$

se $y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$, com $n = [\alpha] + 1$, e

$${}^C D_{b-}^\alpha y = D_{b-}^\alpha y,$$

se $y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0$ com $n = [\alpha] + 1$.

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ e a derivada usual $y^{(n)}$ de ordem n existe, então ${}^C D_{a+}^\alpha y$ coincide com $y^{(n)}$, enquanto ${}^C D_{b-}^\alpha y$ coincide com $y^{(n)}$, a menos de um fator multiplicativo constante $(-1)^n$:

$${}^C D_{a+}^\alpha y = y^{(n)} \quad e \quad {}^C D_{b-}^\alpha y = (-1)^n y^{(n)} \quad (4.20)$$

Teorema 4.3.1. Sejam $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$, ou $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}$. Se $y \in AC^n[a, b]$, então as derivadas fracionárias no sentido de Caputo ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ existem em quase todos os pontos de $[a, b]$.

(a) Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ são definidas por

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} = (I_{a+}^{n - \alpha} D^n y)(x). \quad (4.21)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} = (-1)^n (I_{b-}^{n - \alpha} D^n y)(x). \quad (4.22)$$

(b) Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ são representadas pela (4.20). Em particular,

$${}^C D_{a+}^0 y = {}^C D_{b-}^0 y = y. \quad (4.23)$$

Teorema 4.3.2. Sejam $\alpha > 0$, n dado como no Teorema 4.3.1 e $y \in C^n[a, b]$. Então as derivadas fracionárias no sentido de Caputo ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ são contínuas em $[a, b]$.

(a) Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ são representadas pelas expressões (4.21) e (4.22), respectivamente. Além disso,

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(a) = ({}^C D_{b-}^\alpha y)(b) = 0.$$

(b) Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então ${}^C D_{a+}^\alpha y$ e ${}^C D_{b-}^\alpha y$ têm representações dadas em (4.20). Em particular, as relações em (4.23) são válidas.

Exemplo 4.3.1. Sejam $\alpha > 0$ e n dado como no Teorema 4.3.1, as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha (t - a)^{\beta - 1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \beta > n, \\ ({}^C D_{b-}^\alpha (b - t)^{\beta - 1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - x)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \beta > n, \\ ({}^C D_{a+}^\alpha (t - a)^k)(x) &= 0 \quad e \quad ({}^C D_{b-}^\alpha (t - a)^k)(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

com $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Em particular, pode-se escrever

$$({}^C D_{a+}^\alpha 1)(x) = 0 \quad e \quad ({}^C D_{b-}^\alpha 1)(x) = 0. \quad (4.25)$$

Observação 4.3.3. Diferentemente do que ocorre com a derivada de Riemann-Liouville, a derivada de Caputo da função constante é a função identicamente nula.

Lema 4.3.1. Sejam y seccionalmente contínua em $[a, b]$ e $\alpha > 0$. Tem-se

$${}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y = y \quad e \quad {}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha y = y. \quad (4.26)$$

Lema 4.3.2. Seja $n = [\alpha] + 1$, se $\alpha \notin \mathbb{N}$, ou $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}$. Se $y \in AC^n[a, b]$, então

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

e

$$(I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k.$$

Em particular, se $0 < \alpha < 1$,

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - y(a) \quad e \quad (I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = y(x) - y(b).$$

Definição 4.3.2. As derivadas de ordem arbitrária no sentido de Caputo para funções definidas no semieixo positivo $[0, +\infty[$, são definidas por

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}, \quad x > 0 \quad (4.27)$$

e

$$({}^C D_{-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1-n}}, \quad x > 0. \quad (4.28)$$

Definição 4.3.3. As derivadas de ordem arbitrária no sentido de Caputo, em \mathbb{R} , são definidas por

$$({}^C D_{+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.29)$$

e

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1-n}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

Para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ define-se as derivadas de Caputo $({}^C D_{0+}^n y)(x)$, $({}^C D_-^n y)(x)$, $({}^C D_+^n y)(x)$, por

$$({}^C D_{0+}^n y)(x) = y^{(n)}(x), \quad ({}^C D_-^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

e

$$({}^C D_-^n y)(x) = y^{(n)}(x), \quad ({}^C D_+^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.3.4. As derivadas de Caputo têm propriedades análogas às de Liouville, quando observadas suas restrições.

Exemplo 4.3.2. Se $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$, tem-se

$$({}^C D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}$$

e

$$({}^C D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x}.$$

Demonstração: Considerando que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

tem-se,

$$({}^C D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\lambda^n e^{\lambda t} dt}{(t-x)^{\alpha+1-n}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lambda^n \int_{-\infty}^x e^{\lambda t} (x-t)^{n-\alpha-1} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $w = x - t$, tem-se

$$\begin{aligned} ({}^C D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lambda^n \int_0^\infty e^{\lambda(x-w)} (w)^{n-\alpha-1} dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lambda^n e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda w} w^{n-\alpha-1} dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lambda^n e^{\lambda x} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\lambda^{n-\alpha}} = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \end{aligned}$$

que é justamente o resultado esperado.

A demonstração à esquerda se dá de maneira análoga. ■

5 FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

A função de Mittag-Leffler, nomeada por muitos estudiosos como a rainha das funções especiais, é uma generalização fracionária da função exponencial.

Assim como a função exponencial tem papel fundamental na resolução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, e de ordem inteira, a função de Mittag-Leffler surge, em muitos casos, na solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

5.1 Funções de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler foi definida em 1903, pelo matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927). Trata-se de uma função complexa com dependência de um parâmetro. A partir de 1905, generalizações da função de Mittag-Leffler foram introduzidas na literatura, considerando funções de mais de um parâmetro.

Definição 5.1.1. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$. A função de Mittag-Leffler de parâmetro α , é dada por

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.1)$$

Para $\alpha = 1$, recupera-se a função exponencial, isto é,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

e por isso, $E_{\alpha}(z)$ pode ser interpretada como uma generalização fracionária da função exponencial.

Definição 5.1.2. A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é uma função complexa dada por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (5.2)$$

onde os parâmetros α e β são complexos com $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$.

Esta função generaliza a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, visto que $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

Definição 5.1.3. A generalização da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, é uma função complexa dada por

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (5.3)$$

definida para $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ e $Re(\rho) > 0$, sendo $(\rho)_k$ o símbolo de Pochhammer, definido como

$$(\rho)_0 = 1, \quad (\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho + k)}{\Gamma(\rho)} = \rho(\rho + 1)\dots(\rho + k - 1).$$

Note que $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$.

Observação 5.1.1. Existem outras generalizações da função de Mittag-Leffler além das que foram aqui apresentadas.

5.1.1 Exemplos

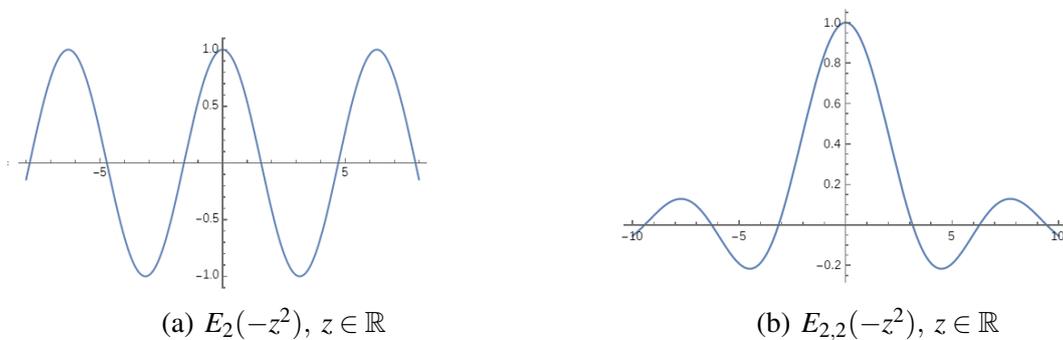
Exemplo 5.1.1. (a)

$$E_2(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \quad (5.4)$$

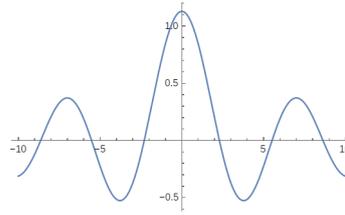
(b)

$$z E_{2,2}(-z^2) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z \quad (5.5)$$

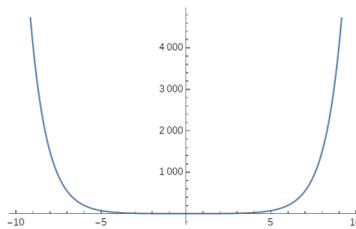
Figura 5.1 – Funções de Mittag-Leffler



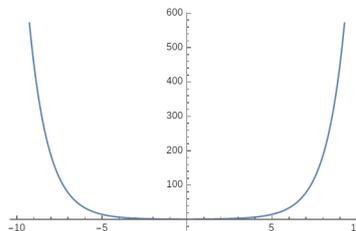
Observação 5.1.2. A figura 5.2 é o gráfico da função $E_{2,3/2}(-z^2)$. Observe a semelhança com os gráficos anteriores.

Figura 5.2 – Função de Mittag-Leffler $E_{2,3/2}(-z^2)$, $z \in \mathbb{R}$ **Exemplo 5.1.2.**

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z, \quad z \in \mathbb{R}$$

Figura 5.3 – Função de Mittag-Leffler $E_2(z^2)$, $z \in \mathbb{R}$ **Exemplo 5.1.3.**

$$z E_{2,2}(z^2) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh z, \quad z \in \mathbb{R}$$

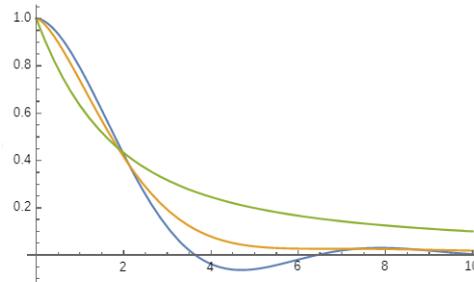
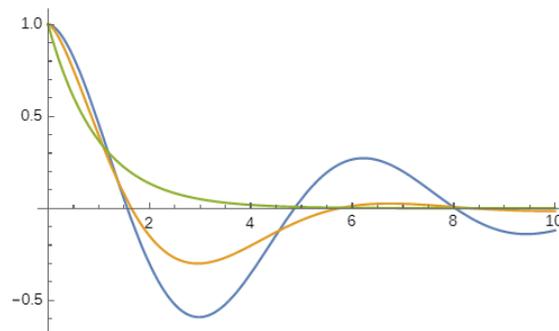
Figura 5.4 – Função de Mittag-Leffler $E_{2,2}(z^2)$, $z \in \mathbb{R}$ 

Exemplo 5.1.4. As chamadas funções seno e cosseno fracionários, Sc_α e Cs_α , também podem ser escritas em termos da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

$$Sc_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+2)} = z E_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha}),$$

e

$$Cs_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(2-\alpha)k}}{\Gamma((2-\alpha)k+1)} = zE_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha}),$$

com $0 < \alpha < 1$.Figura 5.5 – Função $E_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha})$, $z \in \mathbb{R}$ Para valores de α iguais a $1/4$ (azul), $1/2$ (laranja) e 1 (verde).Figura 5.6 – Função $E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha})$ Para valores de α iguais a $1/4$ (azul), $1/2$ (laranja) e 1 (verde).

6 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta para obter solução de uma equação diferencial de ordem inteira ou fracionária. Em linhas gerais, a transformada de Laplace transforma a equação diferencial ordinária em uma equação algébrica; resolve-se essa equação algébrica e, através da transformada inversa de Laplace, recupera-se a solução da equação diferencial ordinária.

Definição 6.0.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A transformada de Laplace bilateral de f , denotada por $\mathcal{L}[f] = F$, é uma função complexa definida pela integral imprópria

$$\mathcal{L}[f](s) \equiv F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (6.1)$$

sendo $s \in \mathbb{C}$ de tal forma que a integral imprópria convirja.

Exemplo 6.0.1. Considere a função $f_1(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$, sendo $u(t)$ a função degrau unitário, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Tem-se,

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-at} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a}$$

com $\text{Re}(s) > -a$.

Definição 6.0.2. A transformada de Laplace unilateral, ou simplesmente transformada de Laplace, da função f é dada por

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (6.2)$$

onde $s \in \mathbb{C}$ é o parâmetro da transformada.

A fim de definir a região de convergência para esta transformada, define-se função admissível.

Definição 6.0.3. Uma função real f , definida para $t \geq 0$, é dita de ordem exponencial se existem constantes reais $M > 0$, t_0 e $a \in \mathbb{R}$, tais que

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \text{para todo } t > t_0$$

ou, equivalentemente, se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-at}| = 0.$$

Definição 6.0.4. Uma função f é dita limitada, se existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$, para todo t no domínio de f . Assim, se f é limitada, dado $a > 0$, tem-se

$$e^{-at}|f(t)| \leq M, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

pois $|e^{-at}| \leq 1$. Logo, toda função limitada é de ordem exponencial.

Definição 6.0.5. Uma função de ordem exponencial e seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, é dita admissível.

Uma vez definida uma função admissível, pode-se inferir sobre a existência da Transformada de Laplace de uma função f .

Teorema 6.0.1. Se uma função f , definida para $t \geq 0$, é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial, então existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\mathcal{L}[f](s)$ existe para $s > a$.

Pode-se provar que a transformada de Laplace é um operador linear, ou seja, se F e G são as transformadas de Laplace das funções f e g , respectivamente, e a e b são constantes, tem-se

$$\mathcal{L}[af + bg](s) = aF(s) + bG(s).$$

No restante do texto utiliza-se a Transformada de Laplace unilateral com parâmetro real s , e sempre que não for feita menção contrária, as funções serão consideradas admissíveis.

Exemplo 6.0.2. Se $f(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então para $a > 0$ e $t \geq 0$, e usando a regra de l'Hôpital n vezes, mostra-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at}t^n = 0$$

assim f é de ordem exponencial. $\mathcal{L}[f](s)$ existe e é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

com $s > 0$.

Outra importante propriedade da Transformada de Laplace, essencial para resolver equações diferenciais, é dada pelo próximo teorema. Tal propriedade relaciona a transformada de Laplace da derivada de f com a transformada de f .

Teorema 6.0.2. Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja derivada de ordem n é seccionalmente contínua e de modo que existam constantes $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq Me^{bt}, \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| \leq Me^{bt}, \dots, \left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) \right| \leq Me^{bt},$$

para todo $t > t_0$. Então, para $s > b$, tem-se

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f \right] (s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j \left[\left(\frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}} \right) \Big|_{t=a} f(t) \right].$$

6.1 Transformada de Laplace inversa

Definição 6.1.1. A transformada de Laplace inversa, é dada pela expressão

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} e^{st} F(s) ds, \quad (6.3)$$

onde $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ e i é unidade imaginária.

Exemplo 6.1.1. Seja $1 \leq \alpha \leq 2$. Calcule a transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right].$$

Através da fórmula de inversão pode-se escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} e^{st} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} ds$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{e^{st}}{s} \frac{ds}{1 + 1/s^\alpha}.$$

Utilizando a série geométrica e suas propriedades obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{e^{st}}{s^{k\alpha+1}} ds = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{k\alpha+1}} \right]$$

e pelo Exemplo 6.0.2 tem-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(-t^\alpha).$$

Em particular,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = E_1(-t) = e^{-t}, \quad e \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] = E_2(-t^2) = \cos t$$

relativo aos dois extremos do intervalo, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, respectivamente.

Exemplo 6.1.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Para determinar a soma

$$S(x, n) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} E_{n,k}(x^n),$$

aplica-se a Transformada de Laplace, obtendo

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{k-1} E_{n,k}(x^n) dx.$$

Utilizando-se a definição da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^n)^j}{\Gamma(nj+k)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx} x^{k-1+nj}}{\Gamma(nj+k)} dx. \end{aligned}$$

Introduzindo-se a mudança de variáveis $sx = t$, obtém-se

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{-nj-k}}{\Gamma(nj+k)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1+nj} dt.$$

Assim,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{-(nj+k)}}{\Gamma(nj+k)} \cdot \Gamma(nj+k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} s^{-nj} \cdot s^{-k}$$

E portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \sum_{k=1}^n s^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} s^{-nj}.$$

Logo,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \frac{s^n}{s^n - 1} \cdot \frac{s^n - 1}{s^n(s-1)}, \quad \text{para } |s^n| > 1.$$

Após simplificação resulta em

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} S(x, n) dx = \frac{1}{s-1}.$$

Visto que o segundo membro não depende de n pode-se escrever,

$$\mathcal{L}[S(x)](s) = \frac{1}{s-1}.$$

e portanto, tem-se

$$S(x) = e^x,$$

resultado este que mostra ser a soma independente do valor de n . Então, pode-se escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} E_{n,k}(x^n) \right] = e^x.$$

6.2 Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler

Nesta seção calcula-se a transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler com 1, 2 e 3 parâmetros.

Inicialmente note que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{zt} dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (6.4)$$

Tomando a k -ésima derivada em relação a z obtém-se

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^k e^{zt} dt = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}} \quad |z| < 1.$$

Fazendo $z = a - s + 1$ na equação anterior tem-se a transformada de Laplace da função $t^k e^{at}$, ou seja,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^k e^{at} dt = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}, \quad s > a.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a^k)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k + \beta - 1}dt.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável tem-se pela definição da função Gama,

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{s^{\alpha k + \beta}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\pm a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 \mp a/s^\alpha} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}.$$

Derivando ambos os lados k vezes em relação a a e utilizando a regra da cadeia

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)\} = \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (6.5)$$

na qual $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \frac{\partial^k}{\partial z^k}E_{\alpha,\beta}(z)$.

Agora note que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k + \beta - 1} \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)! \Gamma(\alpha n + \beta)} (at^\alpha)^{n-k} dt \\ &= \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)! \Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{a^{n-k}}{s^{\alpha n + \beta}} \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha k + \beta - 1} du \\ &= \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!} \frac{a^{n-k}}{s^{\alpha n}} \\ &= \frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n = \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}$$

e portanto

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n = \frac{s^{\alpha(k+1)}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}.$$

Fazendo $k+1 = \rho$ tem-se

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\rho)_n}{n!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n = \frac{s^{\alpha\rho}}{(s^\alpha - a)^\rho}. \quad (6.6)$$

Com o uso da (6.6) tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(at^{\alpha})\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{(at^{\alpha})^n}{n!} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{(p)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha n + \beta}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha n + \beta - 1} du \\
 &= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} \left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^n \\
 &= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{s^{\alpha\rho}}{(s^{\alpha} - a)^{\rho}},
 \end{aligned}$$

Em geral,

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\pm at^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha\rho - \beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{\rho}},$$

e a transformada inversa pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha\rho - \beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}} \right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\pm \lambda t^{\alpha}), \quad (6.7)$$

com $s > 0$ e $\beta > 0$.

7 APLICAÇÃO

Após estudar integrais e derivadas no sentido fracionário, bem como as funções de Mittag-Leffler e a transformada de Laplace de tais funções, apresenta-se uma versão fracionária do sistema de Lotka-Volterra.

O sistema de Lotka-Volterra, também conhecido como sistema presa-predador, é um sistema de equações diferenciais que descreve a interação entre duas espécies: uma como presa e outra como predadora.

7.1 O sistema de Lotka-Volterra clássico

Para a definição matemática do modelo de Lotka-Volterra, considere $x(t)$ e $y(t)$ as populações de presas e predadores, respectivamente. Na ausência de predadores a população de presas cresce a uma taxa a . Na ausência de presas a população de predadores decresce a uma taxa c . O número de encontros entre presa e predador é proporcional ao produto das duas populações. Os encontros fazem com que a população de predadores cresça a uma taxa d e a de presas diminua a uma taxa b , sendo a , b , c e d constantes reais e positivas.

Nestas condições o sistema associado ao problema presa-predador é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - xd). \end{cases} \quad (7.1)$$

O sistema (7.1) possui dois pontos de equilíbrio, ou seja, duas soluções que não variam com o tempo, a saber $P(0,0)$ e $Q\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

O ponto $P(0,0)$ representa ausência total de presas e predadores. Para analisar o ponto $Q\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ considera-se a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Calcula-se J em $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ e obtém-se o sistema linear em que $u = x - \frac{c}{d}$ e $v = y - \frac{a}{b}$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Os autovalores são

$$r = \pm i\sqrt{ca}.$$

Para encontrar as trajetórias do sistema linear divide-se a segunda equação pela primeira,

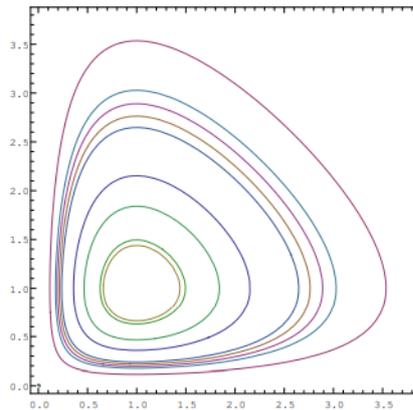
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yc - xd}{xa - yb}, \quad (7.2)$$

e obtém-se

$$f(x,y) = c \ln x - xd + a \ln y - by = k, \quad (7.3)$$

onde k é a constante de integração. As trajetórias definidas pelo sistema são as curvas de nível da função $f(x,y)$. Na figura 7.1 apresenta-se algumas trajetórias para diferentes condições iniciais, com $a = b = c = d = 1$.

Figura 7.1 – Curvas de nível do modelo de Lotka-Volterra



Fonte: Calvino Paulo Capoco, 2018

7.2 Sistema de Lotka-Volterra fracionário

Segundo (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) utilizar derivadas fracionárias no modelo matemático minimiza os efeitos das restrições advindas ao considerar ordem inteira.

Nesta seção considera-se a versão fracionária do modelo de Lotka-Volterra, com derivadas fracionárias tomadas no sentido de Caputo.

Considera-se o sistema

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ D_t^\beta y(t) \equiv \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} y(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

com $0 < \alpha, \beta \leq 1$, e a, b, c e d constantes positivas. Como na versão clássica $x(t)$ denota o número de presas e $y(t)$ o número de predadores, no instante t . Numa situação real α, β, a, b, c e d devem ser determinados experimentalmente.

Começa-se com as seguintes mudanças de variáveis

$$x(t) = u(t) + \frac{c}{d} \quad e \quad y(t) = v(t) + \frac{a}{b}. \quad (7.5)$$

O sistema linearizado correspondente é dado por

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = -\frac{bc}{d}v(t), \\ D_t^\beta v(t) = -\frac{ad}{b}u(t). \end{cases} \quad (7.6)$$

Para resolver o sistema fracionário linearizado toma-se a transformada de Laplace nas duas equações, de onde obtém-se

$$F(s) = u(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} - v(0) \frac{bc}{d} \frac{s^{\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac}$$

e

$$G(s) = v(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} - u(0) \frac{ad}{b} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac}$$

onde $u(0)$ e $v(0)$ denotam, respectivamente, as populações iniciais de presa e predador, e

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[u(t)] \quad e \quad G(s) \equiv \mathcal{L}[v(t)].$$

Introduzindo a notação $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$ e tomando a transformada de Laplace inversa obtém-se a solução

$$u(t) = u_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) - v_0 \frac{bc}{d} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-act^{\alpha+\beta}) \quad (7.7)$$

e

$$v(t) = v_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) + u_0 \frac{ad}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-act^{\alpha+\beta}). \quad (7.8)$$

7.3 Aplicação do sistema de Lotka-Volterra

No dia 6 de abril de 2022, uma píton birmanesa foi solta por engano na região do Gama, no Distrito Federal, gerando uma grande repercussão devido ao fato de que poderia causar um desequilíbrio ambiental, pois a cobra não tem predadores no Brasil. Após 3 dias de buscas a cobra foi encontrada e capturada (Figura 7.2).

Figura 7.2 – Cobra píton encontrada no DF



Fonte: TV Globo/Reprodução

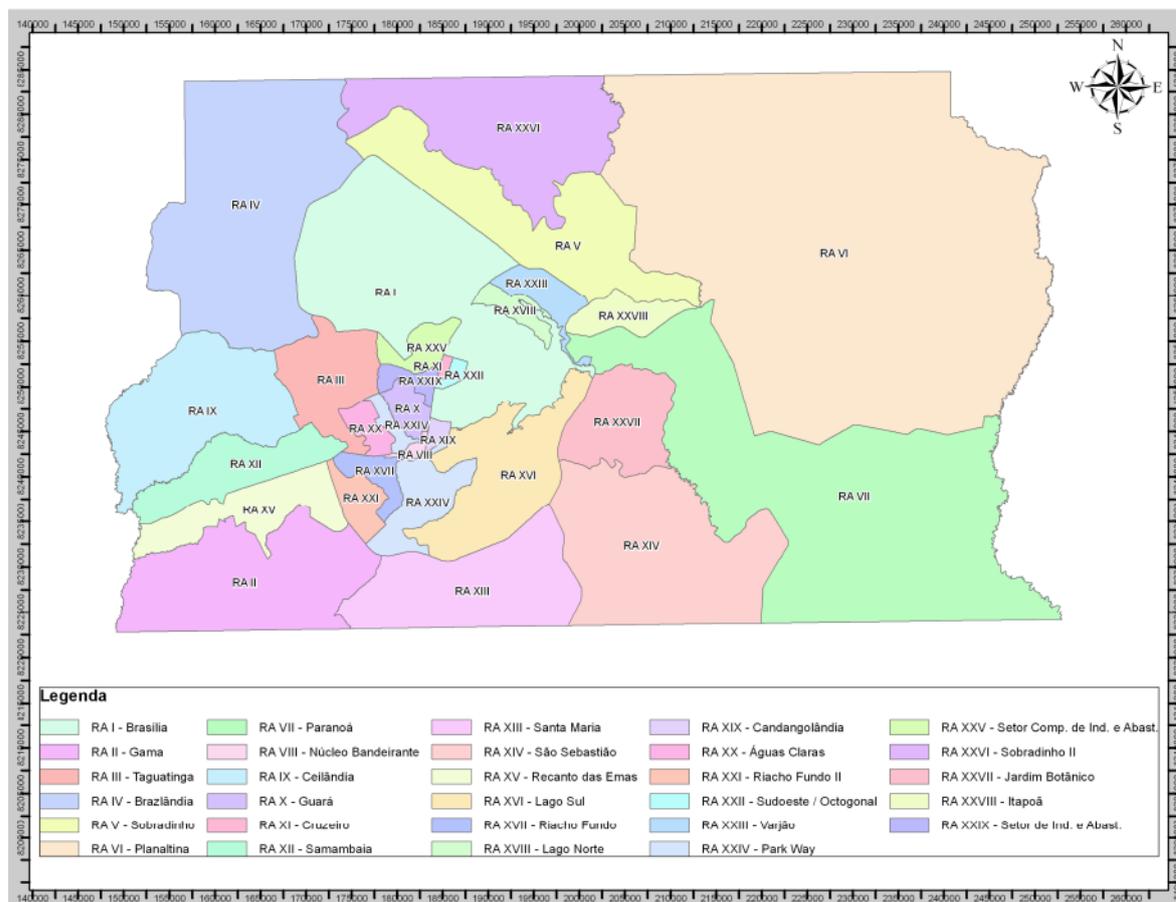
Nesta seção aplica-se o modelo de Lotka-Volterra considerando o que poderia acontecer com uma espécie de presa, caso a cobra não fosse encontrada. Dentre as possíveis presas, o lobo-guará foi escolhido para estudo neste trabalho. No primeiro momento fez-se um estudo sobre a região do Gama, a cobra píton, o lobo-guará e depois a determinação dos parâmetros no modelo de Lotka-Volterra.

7.3.1 Região do Gama

Gama é uma região administrativa do Distrito Federal, que foi criada em dezembro de 1960 para abrigar imigrantes que vieram construir Brasília, estima-se que antes mesmo de sua criação, já havia aproximadamente 1000 habitantes residindo em sua área, porém apenas em 1989 é que a cidade foi reconhecida como uma Região Administrativa do Distrito Federal.

A Região Administrativa ocupa uma área de 276,34 km² e tem 15,37 km² de área urbana, situada 30 km a sudoeste de Brasília, (Figura 7.3). Apresenta característica de formação predominantemente rural. Esse cenário tem origem na localização em terras de antigas fazendas do Estado de Goiás, sendo até hoje composta por diversos núcleos rurais e colônias agrícolas. No dia 6 de setembro de 1961, foi criado pelo Decreto n° 108, o Parque Municipal do Gama. Em 1982, uma parcela de 136 ha do Parque Municipal do Gama foi transformada no Parque

Figura 7.3 – Regiões Administrativas do Distrito Federal



Fonte: IBGE, 2007, adaptado por STCP.

Recreativo do Gama, por meio do Decreto Distrital nº 6.791 de 04 de junho. O restante da área passou para a administração da Fundação Zoobotânica do Distrito Federal. Com o decreto de criação do Parque Recreativo do Gama, a mesma deixou de ter caráter conservacionista, passando a ter objetivos de lazer e recreação.

O parque recreativo do Gama, também conhecido como Prainha, é cortado pelas corredeiras e cachoeiras do Ribeirão do Gama, e também é possível ver e ouvir espécies raras da fauna do cerrado da região, como lontras, raposas, lobos-guará e algumas espécies de veados (AMBIENTAL, 2018).

7.3.2 Cobra píton

Python bivittatus é uma espécie de cobra, também conhecida como píton birmanesa, que vive no sudeste e sudoeste asiático. Estas são cobras de cor escura com muitas manchas marrons com bordas pretas nas costas. São uma das cinco maiores cobras do mundo e podem atingir até 8 metros de comprimento. Devido ao seu grande tamanho, as pítons birmanesas adultas

têm poucos predadores naturais como o tigre e a cobra-real, sendo os jacarés e os humanos as exceções.

Como todas as cobras, a píton birmanesa é carnívora. Sua dieta consiste principalmente de aves e mamíferos, mas também inclui anfíbios e répteis. As pítons birmanesas matam as suas presas por constrição, ou seja elas se enrolam nas presas e começam a apertá-las até morrerem por asfixia. No geral, todo o processo digestivo, desde a ingestão de alimentos até a defecação, dura de 8 a 14 dias.

A reprodução sexuada é o modo predominante, porém de acordo com (GROOT; BRUINS; BREEUWER,) a *P. m. bivittatus* é capaz de se reproduzir assexuadamente em cativeiro. O modo de partenogênese nesta espécie, ao contrário das espécies de serpentes partenogênicas facultativas relatadas, é particularmente elegante, uma vez que os descendentes são clones de sua mãe e nenhuma variação genética é perdida.

As pítons birmanesas geralmente são encontradas em pares apenas durante o acasalamento. Elas se reproduzem no início da primavera, com as fêmeas colocando de 12 a 36 ovos em março ou abril. A fêmea permanecerá com os ovos até a eclosão, envolvendo-os e contraindo seus músculos de forma a elevar a temperatura ambiente ao redor dos ovos em vários graus. A incubação geralmente dura cerca de 60-80 dias. Esta espécie normalmente começa a se reproduzir aos 3-4 anos de idade e tem expectativa de vida de 35 anos.

7.3.3 Lobo-guará

O lobo-guará (*Chrysocyon brachyurus*) é um canídeo endêmico da América do Sul, habitante em campos, pastagens e nos Cerrados da América do Sul, oeste dos Pampas do Peru, sul do Paraguai, partes da Argentina e Uruguai e no centro-oeste brasileiro. Vive em lugares com muita vegetação natural, especialmente campos próximos à baixadas, com capoeirões ou matas arbustivas, evitando locais próximos a habitações humanas. No Brasil, a maior população de lobos-guará está no Cerrado, com cerca de 14 mil indivíduos. A região do Cerrado está localizada basicamente no Planalto Central do Brasil e ocupa mais de 2000000 km^2 , o que representa 23 % do território brasileiro (SANO; ALMEIDA, 1998).

Atualmente o animal encontra-se em estado de “quase ameaçado” de acordo a *International Union for Conservation of Nature* (IUCN, 2015) e “vulnerável” de acordo com a Lista Nacional das Espécies da Fauna Brasileira Ameaçadas de Extinção (MMA, 2003).

Figura 7.4 – Lobo-guará (*Chrysocyon brachyurus*)



Fonte: Correio Braziliense 02/08/2020

A estação reprodutiva ocorre de março a julho. Nos primeiros meses, março e abril, os machos procuram por parceiras no estro seguindo pistas de cheiro e vocalizando em sequências (DIETZ, 1984; RODRIGUES, 2002). Uma vez formado o par, permanecem juntos até o nascimento e cuidado dos filhotes, sendo o período de gestação de 65 dias e o pico de nascimento dos filhotes em junho (CARVALHO; VASCONCELLOS, 1995), sendo que uma ninhada pode variar entre um e cinco filhotes, com uma média de dois (FLETCHALL, 1995). Apesar de um grupo ser composto apenas pelo casal, costumam defender territórios relativamente grandes, variando de 4 a 104,9 km^2 (RODRIGUES, 2002) com pouca ou nenhuma tolerância de outro lobo ou casal vizinho (DIETZ, 1987). Contudo, uma fêmea de outro território pode transitar em ambos territórios e, ocasionalmente, acasalar com o macho já pareado, contribuindo para a variabilidade genética (JÁCOMO et al., 2009). Os jovens lobos-guará começam a se reproduzir, com um ano as fêmeas e com dois anos os machos e possuem expectativa de vida de 15 anos.

7.3.4 Determinação dos parâmetros

Seja $x = x(t)$ a população de lobos-guará que vivem no Brasil no instante t . De acordo com (PAULA; DEMATTEO, 2015) em 2005 a população no Brasil era de 21.746 indivíduos e se considerados apenas os indivíduos maduros (≥ 2 anos de idade), o tamanho populacional era estimado em 15.849. Utiliza-se essa informação para determinar a taxa de crescimento da população de lobos na ausência do predador. No sistema (7.1) tal taxa é representada pelo parâmetro a . Para determinar a , utiliza-se o modelo de crescimento populacional de Malthus:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

cuja solução é dada por

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (7.9)$$

onde x_0 é a população inicial e a é a taxa de crescimento. Substituindo os valores apresentados em (PAULA; DEMATTEO, 2015) obtem-se

$$\ln\left(\frac{21746}{15849}\right) = 2a \quad (7.10)$$

$$a = 0,158. \quad (7.11)$$

Uma vez que não há dados suficientes para determinar os demais parâmetros, considera-se o que ocorre na Flórida, com a invasão por cobras píton birmanesa.

A análise dos demais parâmetros baseia-se no desequilíbrio ambiental observado no período de 2003 a 2011, na Flórida. De acordo com (WILLSON, 2017) a taxa de predação por píton, naquela região, é bem alta (aproximadamente 77% de mortalidade). Toma-se esse valor como referência, e considera-se a taxa de predação (representada pelo parâmetro b no sistema(7.1)) igual a 0,7. Os parâmetros c e d , no sistema (7.1) representam respectivamente, a taxa de decrescimento da população de predadores na ausência de alimento e a taxa de crescimento do predador.

Seja $y = y(t)$ a população de píton birmanesa que vive na natureza no Brasil, no instante t . Supondo que as cobras se alimentam apenas de lobos-guará, na ausência de presas a população de predadores decresce a uma taxa c .

Para determinar c , retorna-se ao caso que aconteceu na Flórida. De acordo com (CARD et al., 2018) as píton birmanesas invasoras são vulneráveis ao estresse pelo frio, resultando em uma taxa de mortalidade de até 90%.

Toma-se como referência essa informação e considera-se $c = 0,6$, uma vez que a cobra foi solta na região do Gama, DF, onde concentra-se a maior população de lobos-guará e onde o clima é bastante diferente do clima da Flórida.

Para a determinação do parâmetro d , considera-se as seguintes suposições:

1. A cobra irá se reproduzir assexuadamente após 7 anos, onde irá nascer 7 indivíduos .
2. Após a primeira ninhada, sobrevivem apenas 2 fêmeas e 2 machos, que irão se reproduzir com 4 anos.
3. Passado os 4 anos, de cada fêmea nascem 12 indivíduos, mas sobrevivem apenas 6.

Tabela 7.1 – Número de cobras após reprodução

Ano	Cobras (Reprodução)	Fêmeas	Machos	Total de Cobras
2022	1	1	0	1
2029	1 + 7	4	4	8
2033	2	2	2	4
2033	2x12=24	8	8	16
2034	2x12= 24	14	14	28
2035	2x12= 24	20	20	40
2036	2x12= 48	26	26	52
2037	(2 + 6) x 12 = 96	50	50	100
2038	(8 + 6) x 12 =168	92	92	184
2039	(14+6) x 12 = 240	152	152	304
2040	(20+6) x 12 = 312	230	230	460
2041	(26+24) x12= 600	380	380	760
2042	(50+42) x 12=1104	656	656	1312

Seja a população inicial de lobos igual a 14, pois as populações serão consideradas em milhares (ZILL et al., 2012), $a = 0,158$ e $t = 1$ encontra-se $x(1)$, utilizando a expressão

$$x'(t) = ax - bxy$$

onde desenvolvendo-se, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln(x(t)) &= a - by(t) \\ \int_0^1 \frac{d}{dt} \ln(x(t)) &= \int_0^1 (a - by(t)) dt. \\ \ln(x(1)) - \ln(x_0) &= a - by_m \\ \ln(x(1)) &= \ln(14) + 0,158 - 0,7 \cdot 0,142 \\ \ln(x(1)) &= 2,687 \\ x(1) &= 14,8449 \end{aligned}$$

sendo y_m o valor médio de y em $[0, 1]$.

Agora para encontrar a taxa d , utiliza-se a expressão

$$y' = -cy + dxy$$

desenvolvendo, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \ln(y(t)) &= -c + dx(t) \\
 \int_0^1 \frac{d}{dt} \ln(y(t)) &= \int_0^1 (-c + dx(t)) dt \\
 \ln(y(1)) - \ln(y(0)) &= -ct \Big|_0^1 + d \int_0^1 x(t) dt \\
 \ln(y(1)) - \ln(y(0)) &= -c + d \cdot 14,4224 \\
 \ln\left(\frac{0,184}{0,100}\right) + 0,6 &= 14,4224 \cdot d \\
 d &= 0,083
 \end{aligned}$$

onde a $\int_0^1 x(t) dt$ foi substituída pelo valor médio entre $x(0)$ e $x(1)$, e $y(0)$ e $y(1)$ foram considerados tomando os anos de 2037 e 2038 na Tabela 7.1.

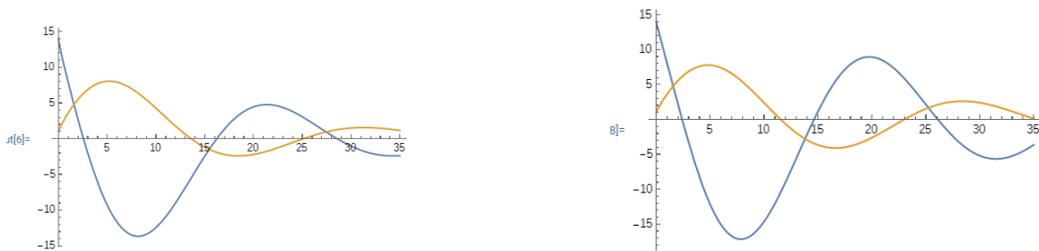
Agora com os parâmetros determinados, a solução do sistema é dada por

$$u(t) = u_0 E_{\alpha+\beta}(-0,0948t^{\alpha+\beta}) - v_0 \cdot 5,060 \cdot t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-0,0948t^{\alpha+\beta}) \quad (7.12)$$

e

$$v(t) = v_0 E_{\alpha+\beta}(-0,0948t^{\alpha+\beta}) + u_0 \cdot 0,0187t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-0,0948t^{\alpha+\beta}). \quad (7.13)$$

Figura 7.5 – Soluções do sistema fracionário



(a) Para valores de $\alpha = 0.8$ e $\beta = 0.9$.

(b) Para valores de $\alpha, \beta = 0.9$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para muitos autores é mais conveniente adotar a formulação da derivada fracionária de Caputo, pois diferentemente da formulação de Riemann-Liouville, a derivada de uma função constante é a função nula.

A maior dificuldade encontrada foi a obtenção de dados para determinar os parâmetros do sistema, devido ao fato da cobra não ser natural do Brasil, além de não encontrar dados sobre o lobo-guará específicos para a região Gama.

Outra dificuldade encontrada foi adaptar os resultados, uma vez que a literatura encontrada exigia conhecimento em Teoria da Medida, e não havia tempo hábil para estudar tal teoria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMBIENTAL, B. **Recreativo do Gama**. 2018. <https://www.ibram.df.gov.br/recreativo-do-gama/>. Acessado em : 15 de Agosto de 2022.
- BONNAR, J. **The Gamma Function**. 1º. ed. Danvers: TREASURE TROVE OF MATHEMATICS, 2017.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9º. ed. São Paulo: LTC, 2015.
- BRITO, H. C. d. **APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO PREDADOR-PRESA DE LOTKAVOLTERRA NO CONSUMO DO GÁS CARBÔNICO ATMOSFÉRICO POR ÁRVORES NA CIDADE DE IPATINGA/MG**. 156 p. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI, Teófilo Otoni, 2019.
- CALVINO, C. P. **Abordagens ao Modelo de Lotka-Volterra**. 86 p. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, Covilhã, 2018.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. d. **Cálculo Fracionário**. 1º. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- CARD, D. C. et al. Novel ecological and climatic conditions drive rapid adaptation in invasive florida burmese pythons. **Molecular Ecology**, v. 27, p. 2018, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/mec.14885>>.
- CARVALHO, C. T.; VASCONCELLOS, L. E. M. Disease, food and reproduction of the maned wolf - chrysocyon brachyurus (illiger) (carnivora, canidae) in southeast brazil. **Revista Brasileira de Zoologia**, v. 12, p. 627–640, 1995.
- DIETZ, J. M. Ecology and social organization of the maned wolf. **Smithsonian Contributions to Zoology**, p. 1–51, 1984.
- DIETZ, J. M. Grass roots of the maned wolf. **Natural History**, v. 96, n. 3, p. 52–58, 1987.
- FLETCHALL, N. B. Natural history, p.6-9. In: Fletchall,N.B.;Rodden, M.; Taylor S. (Eds), Husbandry Manual for the Maned Wolf Chrysocyon brachyurus. **John Ball Zoo**, v. 33, n. 2, p. 265–272, fev 1995.
- GROOT, T.; BRUINS, E.; BREEUWER, J. Molecular genetic evidence for parthenogenesis in the burmese python python molurus bivittatus. **Heredity**, p. 130–135. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/6800210\#citeas>>.
- JÁCOMO, A. T. D. A. et al. Home range and spatial organization of maned wolves in the brazilian grasslands. **Journal of Mammalogy**, v. 90, p. 150–157, 2009.
- PAULA, R. C.; DEMATTEO, K. Chrysocyon brachyurus (errata version published in 2016). **The IUCN Red List of Threatened Species**, 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.2305/IUCN.UK.2015-4.RLTS.T4819A82316878.en>>.
- RODRIGUES, F. H. G. **Biologia e Conservação do lobo-guará na Estação Ecológicade Águas Emendadas**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, SP, 2002.

SANO, S. M.; ALMEIDA, S. P. **Cerrado: ambiente e flora**. Brasília: Emprapa Cerrados, 1998.

WILLSON, J. D. Indirect effects of invasive burmese pythons on ecosystems in southern florida. **Journal of Applied Ecology**, v. 54, p. 1251–1258, 2017. Disponível em: <<https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/1365-2664.12844>>.

ZILL, D. G. et al. **Differential Equations with Boundary-Value Problems, Eighth Edition**. 1. ed. Boston: Richard Stratton, 2012.