



GABRIEL ALVARENGA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

LAVRAS – MG

2022

GABRIEL ALVARENGA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

Prof. Dr. Osnel Broche Cristo

Orientador

LAVRAS – MG

2022

GABRIEL ALVARENGA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADA em 16 de agosto de 2022.

Prof. Dr. Fernando Lourenço UFLA
Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves UFLA
Prof. Dr. Marlon Pimenta Fonseca UFLA



Documento assinado digitalmente

OSNEL BROCHE CRISTO

Data: 12/09/2022 22:51:36-0300

Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Osnel Broche Cristo
Orientador

LAVRAS – MG
2022

RESUMO

As Transformações de Möbius são funções de variáveis complexas que formam um grupo, denotado por \mathcal{M} , com a composição e possuem diversas propriedades interessantes, como, por exemplo, a preservação de ângulos entre curvas e a transformação de retas e circunferências em retas ou circunferências. Além disso, as Transformações de Möbius resultam da composição de Transformações Afins e da Transformação Recíproca, que, por sua vez, é uma composição da inversão na circunferência unitária e da Reflexão no eixo real. Nesse sentido, este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo detalhado de como Transformações Afins, Reflexões e Inversões agem sobre os pontos do plano complexo estendido, possibilitando uma melhor compreensão do comportamento gráfico e das propriedades geométricas da Transformação de Möbius. Feito isso, demonstraremos dois resultados importantes: o Teorema Fundamental das Transformações de Möbius e o Princípio da Simetria, que afirmam, respectivamente, que toda Transformação de \mathcal{M} é unicamente determinada pela imagem de três pontos e preservam simetrias.

Palavras-chave: Transformação de Möbius. Transformações Afins. Transformação Recíproca. Teorema Fundamental das Transformações de Möbius. Princípio da Simetria.

ABSTRACT

The Möbius Transformations are functions of complex variables that form a group, denoted by \mathcal{M} , with the composition and have several interesting properties, such as, for example, the preservation of angles between curves and the transformation of lines and circles into lines or circles. Furthermore, the Möbius Transformations result from the composition of Affine Transformations and the Reciprocal Transformation, which, in turn, is a composition of the inversion in the unit circle and the Reflection in the real axis. In this sense, this work aims to present a detailed study of how Affine Transformations, Reflections and Inversions act on points in the extended complex plane, enabling a better understanding of the graphic behavior and geometric properties of the Möbius Transformation. Having done that, we will demonstrate two important results: the Fundamental Theorem of Möbius Transformations and the Principle of Symmetry, which state, respectively, that every Transformation of \mathcal{M} is uniquely determined by the image of three points and preserves symmetries.

Keywords: Möbius transformation. Affine Transformations. Reciprocal Transformation. Fundamental Theorem of Möbius Transformations. Principle of Symmetry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Imagem da circunferência unitária pela Transformação Afim $T(z) = 3z + 2i$.	15
Figura 2.2 – Ângulo entre duas curvas, γ_1 e γ_2 , em z_0 .	16
Figura 2.3 – Ângulo entre os vetores v_1 e v_2 , onde $\theta = \text{Arg}(z_1 - z_0) = \text{Arg}(v_1)$ e $\psi = \text{Arg}(z_2 - z_0) = \text{Arg}(v_2)$.	17
Figura 2.4 – Imagem do domínio $A : \text{Im}(z) > 0$ pela Transformação Afim $T(z) = 2z + 4 - i$.	18
Figura 2.5 – Imagem de pontos do plano complexo através da Translação $T(z) = z + b$.	20
Figura 2.6 – Imagem do triângulo S pela Translação $T(z) = z + (3 + 2i)$.	21
Figura 2.7 – Imagem de um ponto z do plano complexo sob a ação de uma rotação $O(z) = z (\cos(\psi + \theta) + i \sin(\psi + \theta))$ com $\theta > 0$.	23
Figura 2.8 – Imagem do Retângulo X pela Rotação $O(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.	24
Figura 2.9 – Trajeto de um ponto $z \in \mathbb{C}$ por meio da Transformação composta $R_{z_0} = T^{-1} \circ O \circ T$.	25
Figura 2.10 – Imagem de pontos do plano complexo através da Homotetia $H(z) = kz$, com $k > 1$.	26
Figura 2.11 – Imagem de um quadrado Q pela Homotetia $H(z) = 2z$.	28
Figura 2.12 – Imagem de um ponto z do plano complexo por uma Transformação Afim $T(z) = (T_1 \circ H \circ O)(z)$.	30
Figura 2.13 – Imagem da circunferência C pela Transformação $T(z) = (T_1 \circ H \circ R)(z)$, onde $C' = R(C)$, $C'' = H(C')$ e $T(C) = T_1(C'')$.	31
Figura 3.1 – Translação por b como uma composição de Reflexões em relação a retas paralelas L_1 e L_2 .	38
Figura 3.2 – Imagens do eixo real (em vermelho) e da reta $\text{Im}(z) = 1$ (em azul) pela Transformação $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.	43
Figura 3.3 – Imagens dos pontos z_1 e z_2 por meio da Função Recíproca.	47
Figura 3.4 – Imagens de pontos pertencentes à circunferência unitária e ao eixo real através da função $T(z) = (g \circ f)(z) = \frac{1}{z}$.	48
Figura 3.5 – Gráfico do Domínio $D = \{z \in \mathbb{C}^+; \text{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^+; \text{Im}(z) \geq 1\}$.	50
Figura 3.6 – Gráfico da imagem do Domínio $D = \{z \in \mathbb{C}^+; \text{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^+; \text{Im}(z) \geq 1\}$ pela Transformação Recíproca.	51
Figura 3.7 – Imagens de polígonos regulares pela Transformação Recíproca $T(z) = \frac{1}{z}$.	52

Figura 4.1 – Imagem da reta real sob a ação da Transformação de Möbius $T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = (z - i)/(z + i)$	67
Figura 4.2 – Imagem do eixo imaginário sob a ação de $T(z) = (z - i)/(z + i)$	68
Figura 4.3 – Imagem do disco D sob a Transformação de Möbius $T(z) = z/(2z - 8)$	69
Figura 4.4 – Diagrama da construção de uma Transformação de Möbius que leva $z_i \mapsto w_i$ para $i = 1, 2, 3$, passando por $0, 1$ e ∞	72
Figura 4.5 – Processo de obtenção da expressão para o quociente $(T(z) - T(w))/(T(x) - T(y))$, em que T é uma Transformação de Möbius, utilizando o wxMaxima.	77
Figura 4.6 – Uma pentágono X e uma estrela Y no plano complexo	81
Figura 4.7 – Imagem do pentágono X e da estrela Y pela por $T(z) = \frac{z - i}{z + i}$	82
Figura A.1 – Projeção estereográfica.	84
Figura A.2 – Projeção estereográfica de S^2 em \mathbb{C}^+ vista por um corte transversal.	86
Figura A.3 – Imagem de duas retas paralelas pela inversa da projeção estereográfica.	88
Figura A.4 – Imagem de duas retas concorrentes pela inversa da projeção estereográfica.	88
Figura A.5 – Os ângulos de interseção de duas circunferências C_1 e C_2 em P e Q possuem sinais opostos.	89
Figura B.1 – Gráfico da reta $(3 + i)z + (3 - i)\bar{z} - 4 = 0$	91
Figura B.2 – Construção de uma circunferência passando por três pontos não colineares.	93
Figura B.3 – Simetria com respeito à reta L	94
Figura B.4 – Se dois pontos estão em um mesmo semiplano determinado por uma reta L , não é possível traçar um segmento que intercepte L ligando-os.	95
Figura B.5 – Triângulos retângulos Δzwa e Δwz^*a	96
Figura B.6 – Simetria com respeito a uma circunferência.	98
Figura B.7 – Circunferências ortogonais.	99
Figura B.8 – Simetria de z e z^* com respeito a reta L'	100
Figura B.9 – z e z^* são pontos simétricos com respeito à circunferência C centrada em a e de raio R	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	TRANSFORMAÇÕES AFINS	10
2.1	A forma geral de uma Transformação Afim e suas propriedades	10
2.2	Translação	19
2.3	Rotação	22
2.4	Rotação em torno de um ponto qualquer	24
2.5	Homotetia	26
2.6	Homotetia em relação a um ponto qualquer	28
2.7	O comportamento gráfico de uma Transformação Afim	28
2.8	Transformações Afins no plano complexo estendido	31
3	INVERSÕES	34
3.1	Reflexão	34
3.2	Inversão	39
3.3	Transformação Recíproca	46
4	TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS	53
4.1	A Transformação de Möbius	53
4.2	O grupo de Möbius	56
4.3	Representação matricial	59
4.4	Propriedades	64
4.5	O Teorema Fundamental	69
4.6	O Princípio da Simetria	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
A	PLANO COMPLEXO ESTENDIDO E PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA	84
A.1	Projeção estereográfica	84
A.2	Propriedades da projeção estereográfica	87
B	RETAS E CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO COMPLEXO	90
B.1	A reta no plano complexo	90
B.2	A circunferência no plano complexo	91
B.3	A equação conjunta de retas e circunferências	92
B.4	Simetria com respeito a uma reta	93

B.5 Simetria com respeito a uma circunferência	98
---	-----------

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como principal objetivo a realização de um estudo detalhado das Transformações de Möbius, de seu comportamento gráfico e de suas propriedades no plano complexo estendido. Tais Transformações são funções de variáveis complexas e portanto assumiremos que o leitor possui alguma familiaridade com as propriedades elementares dos números complexos e não as abordaremos neste texto.

Veremos que sempre é possível escrevermos uma Transformação de Möbius como uma composição de Transformações Afins e da Transformação Recíproca, que, por sua vez, é uma composição da Inversão na circunferência unitária e da Reflexão no eixo real. Portanto, para alcançarmos o objetivo principal, estudaremos as Transformações Afins, as Reflexões e as Inversões. Deste modo, o trabalho foi dividido em três capítulos e dois anexos que dão suporte à teoria desenvolvida ao longo dos capítulos.

No capítulo 2, iniciaremos pela apresentação da forma geral de uma Transformação Afim e demonstraremos que estas transformações preservam retas, circunferências, ângulos entre curvas e em alguns casos, distâncias entre pontos. Além disso, mostraremos que o conjunto de todas as Transformações Afins, $Aff(\mathbb{C})$, possui estrutura de grupo com a composição de funções. Em seguida, através de exemplos, analisaremos como cada um dos casos particulares da Transformação Afim age sobre o plano complexo, o que nos dará uma melhor ideia do comportamento do caso geral. Por fim, realizaremos a extensão de algumas propriedades para o plano complexo estendido.

O capítulo 3 visa o estudo das propriedades da Transformação Recíproca. Como mencionamos anteriormente, tal Transformação pode ser entendida como uma composição da Inversão na circunferência unitária e da Reflexão no eixo real. Assim, definiremos as formas gerais da Reflexão e da Inversão no plano complexo estendido. Verificaremos, que Reflexões preservam retas, circunferências e distâncias, porém apesar de ângulos também serem preservados, suas orientações são invertidas. Mostraremos, que, por outro lado, Inversões preservam ângulos e invertem sua orientação, mas transformam retas e circunferências em retas ou circunferências. Ademais, veremos como Reflexões e Inversões se relacionam com os casos particulares da Transformação Afim.

Com base nos estudos realizados nos capítulos 2 e 3, o capítulo 4 será dedicado ao estudo das Transformações de Möbius. Iniciaremos pela sua definição no plano complexo estendido,

em seguida, demonstraremos que o conjunto \mathcal{M} de todas as Transformações de Möbius possui estrutura de grupo com a composição de funções e construiremos um homomorfismo entre \mathcal{M} e o grupo $GL(2, \mathbb{C})$ das matrizes complexas invertíveis de ordem 2. Posteriormente, exibiremos como as Transformações de Möbius podem ser escritas como uma composição de Transformações Afins e da Transformação Recíproca e as propriedades que decorrem desta composição. Além disso, demonstraremos o Teorema Fundamental das Transformações de Möbius e finalizaremos o trabalho com a definição da Razão Cruzada e com a demonstração de alguns resultados que culminam no Princípio da Simetria.

No anexo A, apresentamos a construção da projeção estereográfica relacionando-a com o plano complexo estendido e listamos algumas de suas propriedades.

Por fim, no anexo B deduzimos equações para retas e circunferências no plano complexo, apresentamos uma equação conjunta capaz de descrever ambas e finalizamos com algumas caracterizações de simetrias com respeito a retas e circunferências.

Ressaltamos que funções complexas $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ não possuem representação gráfica como estamos habituados para o caso das funções reais, pois o gráfico de T é "equivalente" a um subconjunto do \mathbb{R}^4 . Para contornarmos este problema, no decorrer do trabalho utilizaremos o conceito de mapeamento complexo¹, onde representamos um conjunto de pontos em um plano e a imagem deste conjunto por uma Transformação em um segundo plano. Em certos momentos, optamos por representar um conjunto de pontos e sua imagem em um mesmo plano.

¹ Para mais detalhes sobre mapeamentos complexos, ver Sousa (2021) capítulo 3 página 60.

2 TRANSFORMAÇÕES AFINS

Neste capítulo inicial, voltaremos nossa atenção para o estudo das Transformações Afins e seus casos particulares. Para este capítulo, usaremos Sousa (2021) e Hitchman (2009) como referências. Em sua dissertação, Sousa (2021) faz uma análise dos casos particulares e finaliza com a forma geral. Aqui optamos pelo caminho inverso, pois as propriedades demonstradas para o caso geral, valem automaticamente para os casos particulares.

Antes de iniciarmos nosso estudo, faz-se necessário darmos uma definição para Transformação. De acordo com Hitchman (2009, p. 29), uma Transformação é dada pela definição a seguir:

Definição 2.0.1. Uma função $T : A \rightarrow B$ é uma transformação se $A = B$ e se T é uma bijeção.

Portanto, ao falarmos de Transformações, estamos falando de funções bijetoras de um conjunto em si mesmo, no nosso caso, o conjunto dos números complexos.

À luz da definição acima, temos que as Transformações possuem todas as propriedades das funções bijetoras. Com isso, temos que, por exemplo, a composição de duas Transformações é uma Transformação e que toda Transformação possui uma Transformação inversa.

2.1 A forma geral de uma Transformação Afim e suas propriedades

Definição 2.1.1. Chamamos de Função Afim a função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T(z) = az + b, \tag{2.1}$$

com a e b constantes complexas tal que $a \neq 0$.

Primeiramente, podemos notar que a função complexa T que acabamos de definir é análoga à função bijetora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$, que também leva o nome de função afim. O caso complexo da Função Afim também é bijetora e portanto uma Transformação de \mathbb{C} .

Proposição 2.1.2. A Função Afim definida em (2.1.1) é uma Transformação do plano complexo.

Demonstração. Seja $T(z) = az + b$ uma função afim complexa, então

1. T é injetora:

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $T(z_1) = T(z_2)$, assim

$$az_1 + b = az_2 + b$$

$$az_1 = az_2$$

$$z_1 = z_2.$$

2. T é sobrejetora:

Para provar a sobrejetividade, basta mostrarmos que todo $w \in \mathbb{C}$, existe algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = w$. Como $a \neq 0$, dado um w qualquer, tome $z = \frac{w-b}{a}$, assim

$$T(z) = T\left(\frac{w-b}{a}\right) = a\frac{w-b}{a} + b = w - b + b = w.$$

Portanto, T é uma bijeção em \mathbb{C} . ■

Observe que na demonstração da proposição anterior, encontramos uma candidata a inversa de $T(z) = az + b$: a função $z = \frac{w-b}{a}$.

Se T é uma função bijetora, então existe uma única função bijetora T^{-1} de forma que $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{C}}$ e $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{C}}$, onde $I_{\mathbb{C}}$ é a função identidade do plano complexo. Observe que a primeira condição já foi verificada na demonstração da Proposição (2.1.2), logo basta verificarmos a segunda.

Se $T^{-1}(w) = \frac{w-b}{a}$, então

$$T^{-1}(T(z)) = \frac{1}{a}(T(z) - b) = \frac{1}{a}(az + b - b) = z = I_{\mathbb{C}}(z).$$

Deste modo, conclui-se que T^{-1} é a inversa de T .

A função $T^{-1}(w) = \frac{w-b}{a}$ é claramente uma Transformação Afim, pois $1/a$ e $-a/b$ são números complexos e $1/a \neq 0$.

Proposição 2.1.3. *O conjunto das Transformações Afins, denotado por $Aff(\mathbb{C})$, forma um grupo com a composição de funções.*

Demonstração. Temos que a composição de funções é uma operação associativa. O elemento neutro da composição, isto é, a função identidade do plano complexo $I_{\mathbb{C}}(z) = z$ é uma Transformação Afim com $a = 1$ e $b = 0$. Além disso, vimos que para toda Transformação $T \in \text{Aff}(\mathbb{C})$ existe uma inversa $T^{-1} \in \text{Aff}(\mathbb{C})$ tal que $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{C}}$ e $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{C}}$.

Precisamos então apenas mostrar que $\text{Aff}(\mathbb{C})$ é fechado para a composição de funções. Para isso considere $T_1, T_2 \in \text{Aff}(\mathbb{C})$, então $T_1(z) = a_1z + b_1$ e $T_2(z) = a_2z + b_2$ com a_1 e a_2 não nulos. Logo

$$(T_1 \circ T_2)(z) = T_1(T_2(z)) = a_1(a_2z + b_2) + b_1 = (a_1a_2)z + (a_1b_2 + b_1).$$

Portanto, $(T_1 \circ T_2) \in \text{Aff}(\mathbb{C})$, pois $(a_1a_2) \neq 0$ e $(a_1b_2 + b_1) \in \mathbb{C}$. ■

Para entendermos o comportamento gráfico de uma Transformação Afim, precisamos entender o que acontece com os pontos do plano complexo ao aplicarmos alguma Transformação de $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Mas antes, precisamos conhecer algumas de suas propriedades. Iniciaremos determinando se a Transformação Afim possui algum ponto fixo.

Definição 2.1.4. Um ponto fixo de uma Transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = z$.

Pela definição (2.1.4), para encontramos o ponto fixo de $T(z) = az + b$, basta resolvermos para z a equação $az + b = z$. Deste modo, chegamos que o ponto fixo de T é dado por

$$z = \frac{b}{1-a}. \tag{2.2}$$

Logo, a Transformação Afim T possui um único ponto fixo em \mathbb{C} , desde que $a \neq 1$.

Uma propriedade extremamente importante das Transformações de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ é a preservação de retas e circunferências do plano complexo. Em outras palavras, se L é uma reta, C uma circunferência e T uma Transformação Afim, então $T(L)$ e $T(C)$ serão respectivamente uma reta e uma circunferência¹.

Proposição 2.1.5. Se $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma Transformação Afim, então

1. T leva retas em retas;

¹ Para mais detalhes sobre retas e circunferências no plano complexo, ver anexo B.

2. T leva circunferências em circunferências.

Demonstração. Seja $T(z) = az + b$, então

1. Uma reta L no plano complexo é dada pelo conjunto

$$L = \{z \in \mathbb{C} ; \alpha z + \overline{\alpha z} + d = 0\},$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$ e $d \in \mathbb{R}$.

Temos que o conjunto $T(L) = \{w \in \mathbb{C} ; w = T(z), z \in L\}$ é a imagem de L por T , assim se $w \in T(L)$, então $w = az + b$, o que implica que $z = \frac{w-b}{a}$. Mas $z \in L$, logo podemos substituir seu valor na equação de L , o que nos leva a

$$\alpha \frac{w-b}{a} + \overline{\left(\alpha \frac{w-b}{a}\right)} + d = 0.$$

Manipulando a equação de forma conveniente, chegamos à equação

$$\frac{\alpha}{a} w + \overline{\left(\frac{\alpha}{a}\right)} \overline{w} - \frac{\alpha b}{a} - \overline{\left(\frac{\alpha b}{a}\right)} + d = 0.$$

Sabe-se que para qualquer número complexo z_0 , tem-se que $(z_0 + \overline{z_0}) \in \mathbb{R}$, logo, $d - \left(\frac{\alpha b}{a} + \overline{\left(\frac{\alpha b}{a}\right)}\right)$ é um número real e $\alpha/a \in \mathbb{C}$. Portanto todos os pontos $w \in T(L)$ satisfazem a equação de uma reta, ou seja, $T(L)$ é uma reta.

2. Uma circunferência C no plano complexo é dada pelo conjunto

$$C = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| = r\},$$

com $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga à demonstração do item (1) se tomarmos um $w \in T(C)$, e substituirmos o valor de z na equação de C , chegamos em

$$\left| \frac{w-b}{a} - z_0 \right| = r.$$

Novamente, realizando uma manipulação algébrica adequada, chegamos à equação

$$|w - (b + az_0)| = |a|r.$$

Temos que $(b + az_0) \in \mathbb{C}$ e $|a|r \in \mathbb{R}$. Portanto, todos os pontos $w \in T(C)$ satisfazem a equação de uma circunferência, isto é, $T(C)$ é uma circunferência. ■

Da demonstração da proposição (2.1.5) surgem duas expressões úteis para encontrarmos e construirmos imagens de retas e circunferências através da Transformação afim $T(z) = az + b$:

1. Seja $L = \{z \in \mathbb{C} ; \alpha z + \overline{\alpha z} + d = 0\}$ uma reta, então

$$T(L) = \left\{ w \in \mathbb{C} ; \frac{\alpha}{a}w + \overline{\left(\frac{\alpha}{a}\right)}\overline{w} - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha b}{a}\right) + d = 0 \right\}; \quad (2.3)$$

2. Seja $C = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| = r\}$ uma circunferência, então

$$T(C) = \{w \in \mathbb{C} ; |w - (b + az_0)| = |a|r\}. \quad (2.4)$$

Vejam os em um exemplo uma aplicação da Proposição (2.1.5).

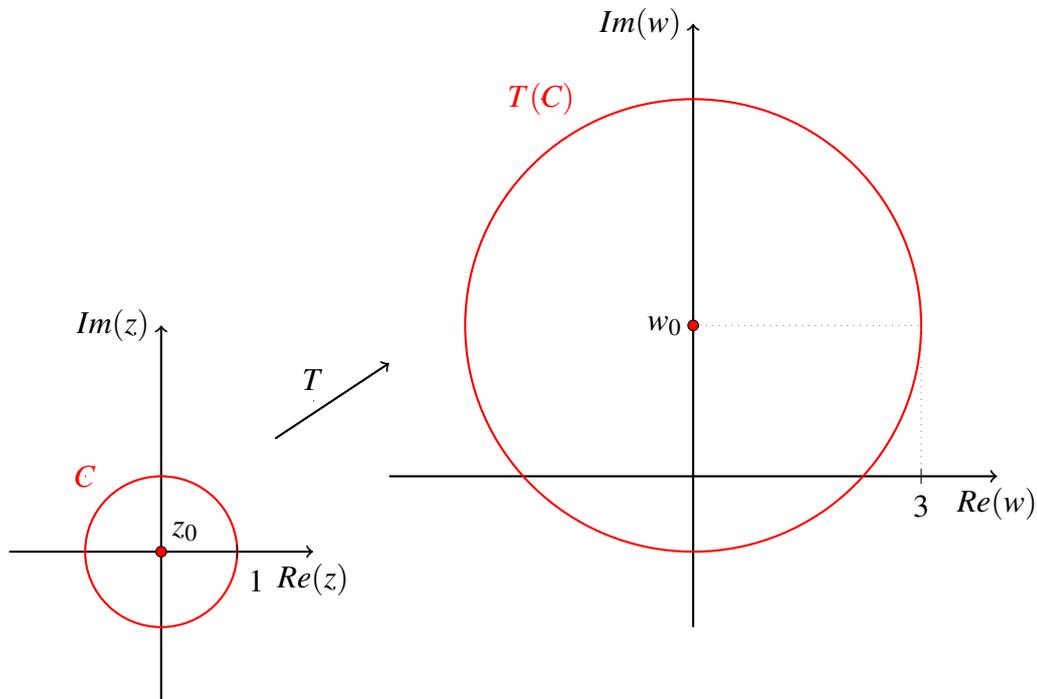
Exemplo 2.1.6. Determine a imagem da circunferência $C = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ pela Transformação $T(z) = 3z + 2i$.

Note que T é uma Transformação afim com $a = 3$ e $b = 2i$ e C é a circunferência centrada em $z_0 = 0$ e de raio $r = 1$. Assim, por (2.4), a imagem de C por T é a circunferência $T(C)$ dada pela equação

$$|w - (2i + 3 \cdot 0)| = |3| \cdot 1 \implies |w - 2i| = 3,$$

ou seja, a circunferência centrada em $w_0 = 2i$ e de raio igual a 3 (FIGURA 2.1).

Figura 2.1 – Imagem da circunferência unitária pela Transformação Afim $T(z) = 3z + 2i$.



Fonte: Próprio autor (2022).

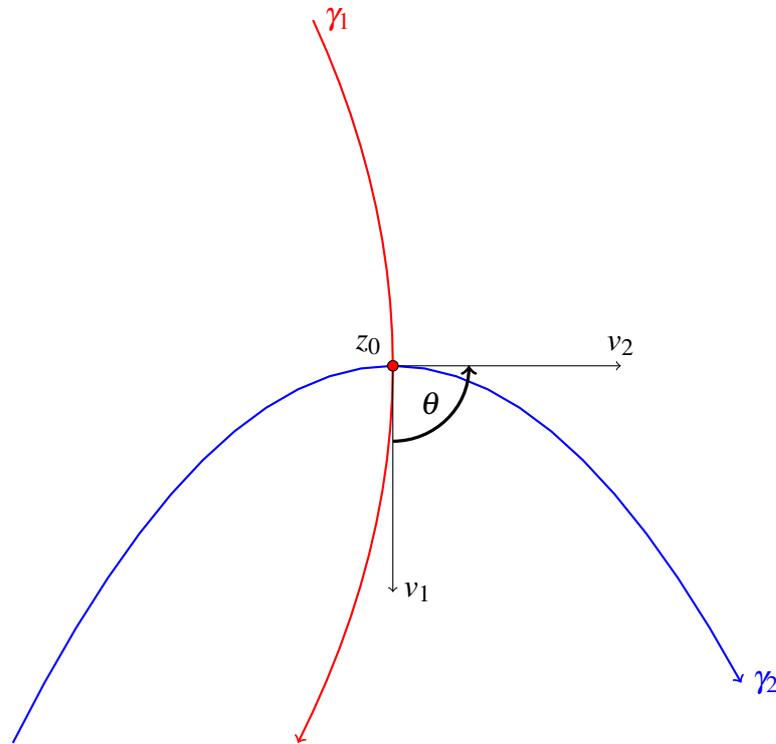
A próxima propriedade diz respeito à preservação de ângulos. As Transformações Afins preservam a magnitude e a orientação de ângulos entre duas curvas que se interceptam em determinado ponto. Funções que preservam a magnitude de ângulos entre curvas recebem o nome de **Funções Conformes**. De acordo com Alencar e Rabello (2019, p. 163), o ângulo entre duas curvas é medido de acordo com a definição a seguir:

Definição 2.1.7. Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas suaves com interseção num ponto z_0 . O ângulo entre γ_1 e γ_2 em z_0 é o ângulo θ entre os vetores v_1 e v_2 tangentes, respectivamente, a γ_1 e γ_2 em z_0 , θ medido no sentido anti-horário de v_1 para v_2 (FIGURA 2.2).

Os vetores tangentes - mencionados na Definição (2.1.7) - podem ser substituídos por retas tangentes sem que haja prejuízos. Então, para determinarmos o ângulo entre duas curvas em algum ponto z_0 , basta determinarmos o ângulo entre as retas tangentes a estas curvas em z_0 . Portanto, para demonstrar que uma Transformação é conforme, é suficiente mostrar que ela preserva o ângulo entre retas ou vetores.

Consideramos um ângulo orientado no sentido anti-horário como positivo e o caso contrário como negativo. No decorrer do texto, quando uma Transformação for conforme e inverter

Figura 2.2 – Ângulo entre duas curvas, γ_1 e γ_2 , em z_0 .



Fonte: Próprio autor (2022).

a orientação de um ângulo, será indicada a inversão da orientação. Caso uma transformação for conforme e preservar a orientação dos ângulos, diremos simplesmente que ela é conforme.

Um exemplo de Transformações conformes, que invertem a orientação dos ângulos entre curvas, são as reflexões em relação a planos² do \mathbb{R}^n . Para uma demonstração deste fato, ver Beardon (1995, p. 25).

Proposição 2.1.8. *Transformações Afins são conformes em \mathbb{C} .*

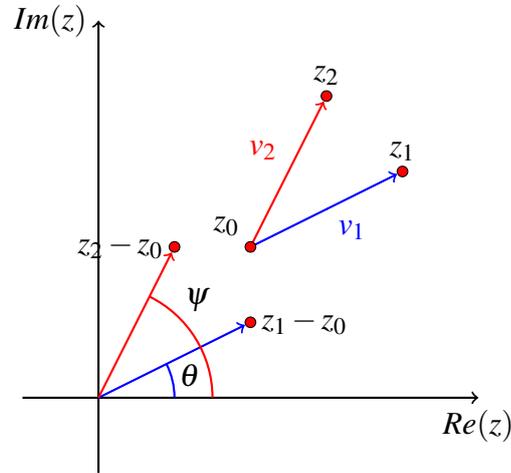
Demonstração. Para demonstrar este resultado, demonstraremos que Transformações Afins preservam ângulos entre vetores com origem em algum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

Sejam $T(z) = az + b$ uma Transformação Afim e $v_1 = z_1 - z_0$, $v_2 = z_2 - z_0$ vetores com origem em z_0 . Observe na Figura 2.3, que o ângulo entre v_1 e v_2 é dado por

$$\text{Arg}(v_2) - \text{Arg}(v_1) = \arg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right).$$

² Por planos entendemos o subconjunto do \mathbb{R}^n dado por $P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n; (x \cdot a) = t\}$, onde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$.

Figura 2.3 – Ângulo entre os vetores v_1 e v_2 , onde $\theta = \text{Arg}(z_1 - z_0) = \text{Arg}(v_1)$ e $\psi = \text{Arg}(z_2 - z_0) = \text{Arg}(v_2)$.



Próprio autor (2022).

Como T preserva retas, então os vetores $T(v_1)$ e $T(v_2)$ serão dados respectivamente por $T(z_1) - T(z_0)$ e $T(z_2) - T(z_0)$. Assim, o ângulo entre $T(v_1)$ e $T(v_2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{T(v_2)}{T(v_1)}\right) &= \arg\left(\frac{T(z_2) - T(z_0)}{T(z_1) - T(z_0)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{az_2 + b - az_0 - b}{az_1 + b - az_0 - b}\right) \\ &= \arg\left(\frac{a(z_2 - z_0)}{a(z_1 - z_0)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) = \arg\left(\frac{v_2}{v_1}\right). \end{aligned}$$

Portanto, T é conforme em \mathbb{C} . ■

Uma propriedade interessante das funções conformes é a seguinte:

Proposição 2.1.9. *Sejam $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função conforme e $B \subset \mathbb{C}$ tal que $\partial B = \partial F(A)$. Se para algum ponto $z_0 \in A$, tem-se que $F(z_0) \in B$, então $F(A) = B$.*

Esta proposição nos diz que para determinarmos a imagem de uma região A por uma função conforme F , basta determinarmos a imagem da fronteira de A e a imagem de um ponto pertencente a A . A demonstração desta proposição foge do escopo deste trabalho e, portanto não a faremos aqui. O leitor interessado pode encontrar uma demonstração na obra de Marsden e Hoffman (1999, p. 321).

No exemplo a seguir, utilizamos a proposição (2.1.9) para encontrarmos a imagem de um semiplano do plano complexo.

Exemplo 2.1.10. Encontre a imagem do semiplano $A = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ pela Transformação Afim $T(z) = 2z + (4 - i)$.

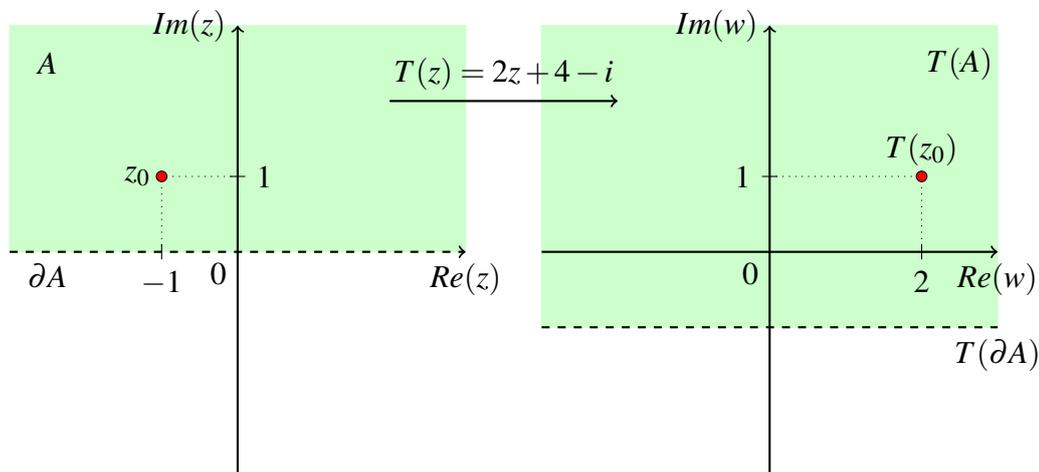
Repare que o conjunto A é composto por todos os números complexos acima do eixo real. Assim o eixo real será a fronteira de A e o denotaremos por ∂A . Como T é uma Transformação Afim, a imagem de ∂A por T , $T(\partial A)$, será uma reta, veja a Proposição (2.1.5) (1).

Para encontrarmos a reta $T(\partial A)$, basta calcularmos a imagem de dois pontos pertencentes à reta ∂A . Escolhendo os pontos 0 e 1, temos que

$$T(0) = 2 \cdot 0 + 4 - i = 4 - i \quad T(1) = 2 \cdot 1 + 4 - i = 6 - i.$$

Assim, $T(\partial A)$ é a reta dada pelos pontos w tais que $\text{Im}(w) = -1$.

Figura 2.4 – Imagem do domínio $A : \text{Im}(z) > 0$ pela Transformação Afim $T(z) = 2z + 4 - i$.



Próprio autor (2022).

Como T é uma Transformação conforme, pela proposição (2.1.9), a imagem do semiplano A por T , $T(A)$, ou será os pontos acima ou os pontos abaixo da reta $\text{Im}(w) = -1$. Para determinarmos qual é o caso, basta tomarmos um ponto $z_0 \in A$ e calcularmos sua imagem. Escolhendo $z_0 = -1 + i$, chegamos que $T(-1 + i) = 2(-1 + i) + 4 - i = 2 + i$, que é um ponto de

$Im(w) > -1$ (FIGURA 2.4). Assim, pela proposição (2.1.9),

$$T(A) = \{w \in \mathbb{C}; Im(w) > -1\}.$$

A última propriedade das Transformações Afins que veremos nesta seção é referente à preservação de distâncias.

Definição 2.1.11. Uma Isometria Euclidiana é uma Transformação $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$|F(z) - F(w)| = |z - w|, \quad (2.5)$$

para quaisquer pontos $z, w \in \mathbb{C}$.

Em outros termos, a definição anterior nos diz que a Transformação F preserva a distância euclidiana entre dois pontos.

Proposição 2.1.12. *Seja $T(z) = az + b$ uma Transformação Afim, então T é uma Isometria Euclidiana se, e somente se, $|a| = 1$.*

Demonstração. Este resultado é facilmente demonstrado observando que se $T(z) = az + b$, então temos que

$$|T(z) - T(w)| = |az + b - aw - b| = |a||z - w|.$$

■

Em conclusão, temos que Transformações Afins preservam retas, circunferências, ângulos e, em alguns casos, distâncias. Partindo dessas propriedades, podemos começar a estudar o seu comportamento gráfico. Iniciaremos este estudo, nas próximas seções, com análise de alguns casos particulares da Transformação $T(z) = az + b$.

Ressaltamos aqui, que todas as propriedades demonstradas para a forma geral da Transformação Afim são válidas para seus casos particulares.

2.2 Translação

Quando em uma Transformação $T(z) = az + b$, tivermos que $a = 1$ e $b \neq 0$, temos o primeiro caso particular:

Definição 2.2.1. Chamamos de Translação a Transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T(z) = z + b, \quad (2.6)$$

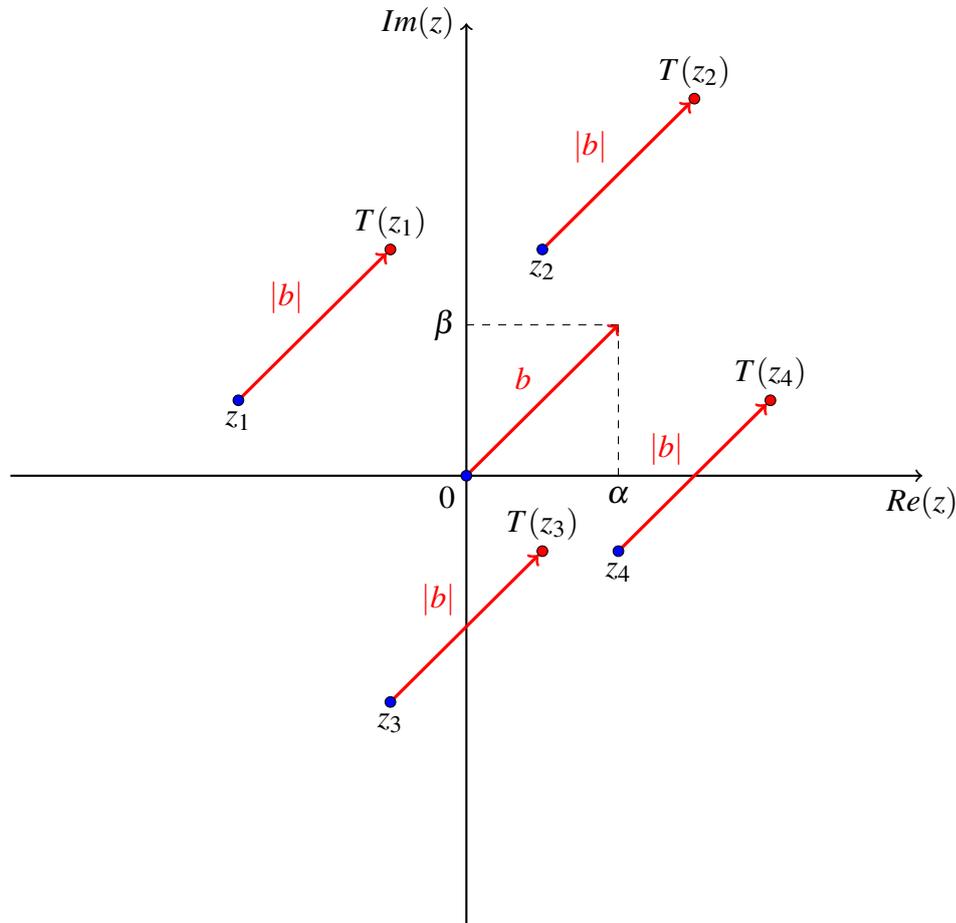
tal que b é uma constante complexa não nula.

Se escrevermos $z = x + yi$ e $b = \alpha + \beta i$, com $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então temos que

$$T(z) = (x + yi) + (\alpha + \beta i) = (x + \alpha) + (y + \beta)i.$$

Além disso, temos que $|T(z) - z| = |b|$. Isso nos mostra que a Translação T , como o próprio nome já sugere, provoca um deslocamento dos pontos do plano complexo na direção do vetor b por uma distância de $|b|$ unidades (FIGURA 2.5).

Figura 2.5 – Imagem de pontos do plano complexo através da Translação $T(z) = z + b$.



Próprio autor (2022).

Também é possível notar, na figura acima, que a origem do plano complexo é levada ao ponto b , pois $T(0) = 0 + b = b$. Por esse motivo, alguns textos chamam a Transformação $T(z) = z + b$ de Translação de b . Neste trabalho iremos chamá-la simplesmente de Translação.

Exemplo 2.2.2. Encontre a imagem do triângulo S de vértices dados pelos pontos $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2$ pela Translação $T(z) = z + (3 + 2i)$.

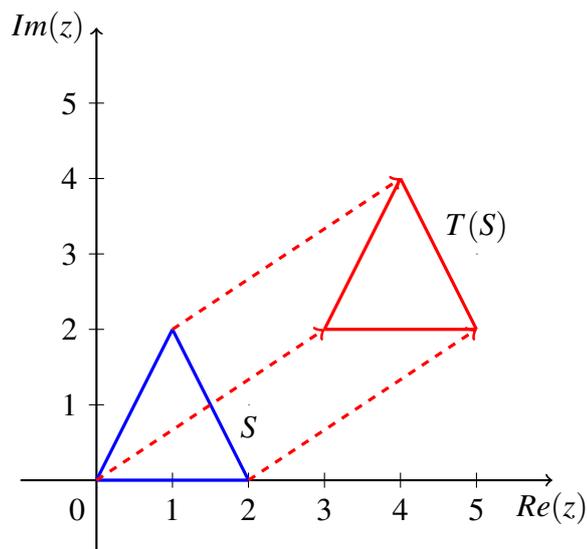
Como já bem sabemos, toda Transformação Afim leva retas em retas, assim, os segmentos de reta que compõem os lados dos triângulos serão levadas em segmentos de reta. Isto acontece pois T é uma bijeção. Logo, para determinarmos a imagem do triângulo S , basta determinarmos as imagens dos vértices e traçarmos os segmentos ligando-os. Assim temos que

$$T(z_1) = 0 + (3 + 2i) = (3 + 2i), \quad T(z_2) = (1 + 2i) + (3 + 2i) = 4 + 4i,$$

$$T(z_3) = 2 + (3 + 2i) = 5 + 2i.$$

Logo, a imagem $T(S)$ do triângulo S é o triângulo de vértices $(3 + 2i)$, $(4 + 4i)$ e $(5 + 2i)$ e pode ser vista na Figura 2.6 abaixo:

Figura 2.6 – Imagem do triângulo S pela Translação $T(z) = z + (3 + 2i)$.



Próprio autor (2022).

A Figura 2.5 sugere que uma Translação não possui pontos fixos em \mathbb{C} . De fato, se fizermos $z + b = z$, chegaremos em $b = 0$, contrariando a Definição (2.2.1).

Uma outra característica da Translação é que ela é uma Isometria euclidiana, pois $a = 1$ e portanto $|a| = 1$.

A partir da Figura 2.6 do exemplo (2.2.2) e das propriedades de preservação de retas, circunferências, ângulos e distâncias da Translação, podemos concluir que Transformações do tipo $T(z) = z + b$ não alteram a forma e nem a área de figuras geométricas, apenas as deslocam pelo plano complexo.

2.3 Rotação

O segundo caso particular de $T(z) = az + b$ acontece quando $|a| = 1$ e $b = 0$:

Definição 2.3.1. Chamamos de Rotação a função $O : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$O(z) = az, \quad (2.7)$$

onde a é uma constante complexa tal que $|a| = 1$.

Observe que se reescrevermos z e a em suas respectivas formas polares, teremos que $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$ e $a = |a|(\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $\psi = \text{Arg}(z)$ e $\theta = \text{Arg}(a)$. Assim, temos que

$$O(z) = |z|(\cos(\psi + \theta) + i \sin(\psi + \theta)).$$

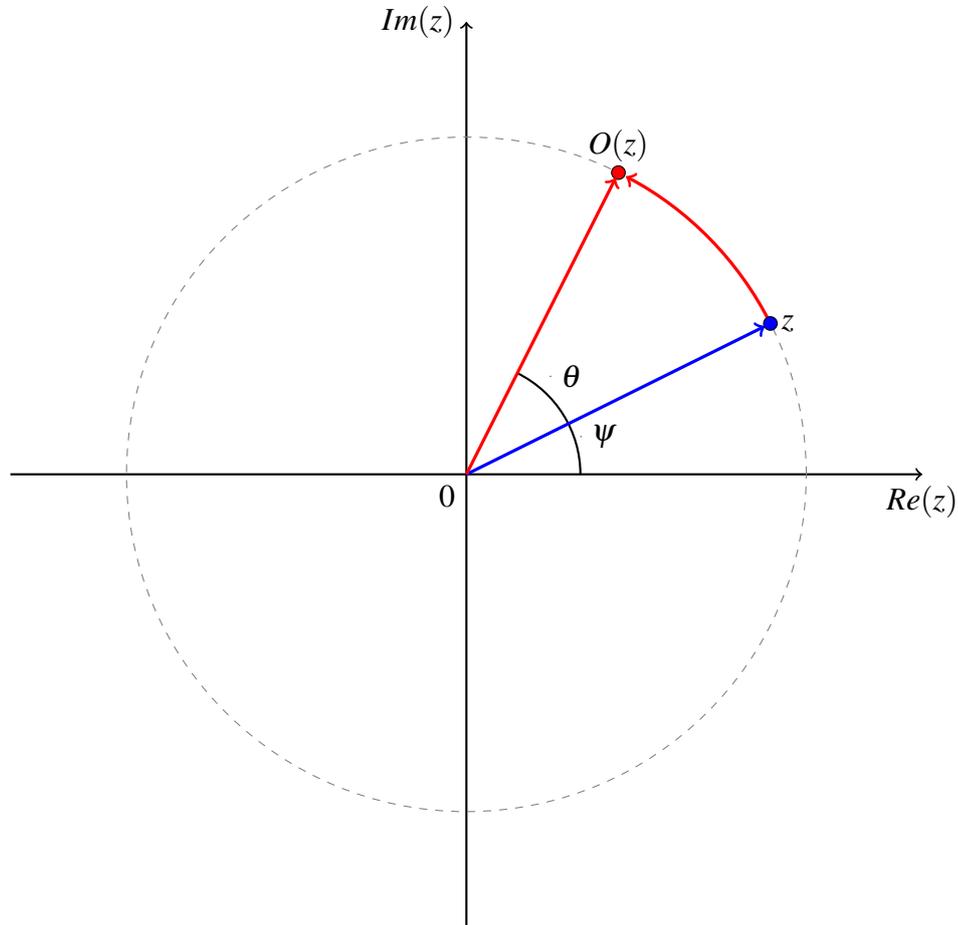
Analisando a expressão acima, podemos perceber que $|O(z)| = |z|$ e $\arg(O(z)) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(a)$. Logo, é possível concluir que a Rotação O preserva o valor absoluto de todo ponto z do plano complexo e realiza uma rotação de θ radianos ao longo da circunferência centrada na origem e de raio $|z|$ (FIGURA 2.7). Assim, a função O é também chamada de rotação em relação à origem.

Se $\theta > 0$, O rotaciona os pontos do plano complexo no sentido anti-horário e se $\theta < 0$, os pontos são rotacionados no sentido horário.

Como a Rotação O é uma função completamente relacionada à ângulos, é mais conveniente denotá-la pela forma exponencial:

$$O(z) = e^{i\theta} z. \quad (2.8)$$

Figura 2.7 – Imagem de um ponto z do plano complexo sob a ação de uma rotação $O(z) = |z|(\cos(\psi + \theta) + i \sin(\psi + \theta))$ com $\theta > 0$.



Próprio autor (2022).

Exemplo 2.3.2. Encontre a imagem do retângulo X de vértices $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = 4 + 3i$ e $z_4 = 1 + 3i$ pela Rotação $O(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

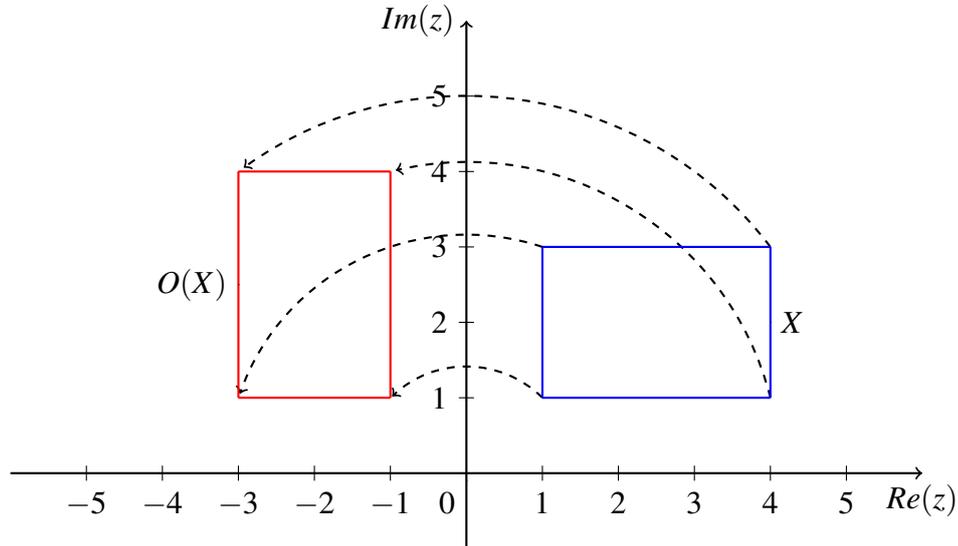
Primeiramente, note que $O(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$. Como a Rotação é uma Transformação Afim, ela preserva retas, deste modo, como no exemplo (2.2.2), basta determinarmos as imagens dos vértices do retângulo e depois traçarmos segmentos ligando-os. As imagens dos vértices são:

$$O(1 + i) = i(1 + i) = -1 + i, \quad O(4 + i) = i(4 + i) = -1 + 4i,$$

$$O(4 + 3i) = i(4 + 3i) = -3 + 4i, \quad O(1 + 3i) = i(1 + 3i) = -3 + i.$$

Assim, a imagem $O(X)$ do retângulo X é o retângulo de vértices $-1 + i$, $-1 + 4i$, $-3 + 4i$ e $-3 + i$ como na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Imagem do Retângulo X pela Rotação $O(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.



Próprio autor (2022).

As Rotações em relação à origem possuem apenas $z = 0$ como ponto fixo, pois esta é a única solução da equação $z = O(z) = az$. Além do mais, Rotações também são Isometrias Euclidianas, pois por definição $|a| = 1$.

Portanto, assim como no caso das Translações, Rotações são Conformes, Isometrias Euclidianas e preservam retas e circunferências. Deste modo, como foi possível observarmos no exemplo (2.3.2), Transformações do tipo $O(z) = e^{i\theta}z$ também não alteram a forma e nem a área de figuras geométricas.

2.4 Rotação em torno de um ponto qualquer

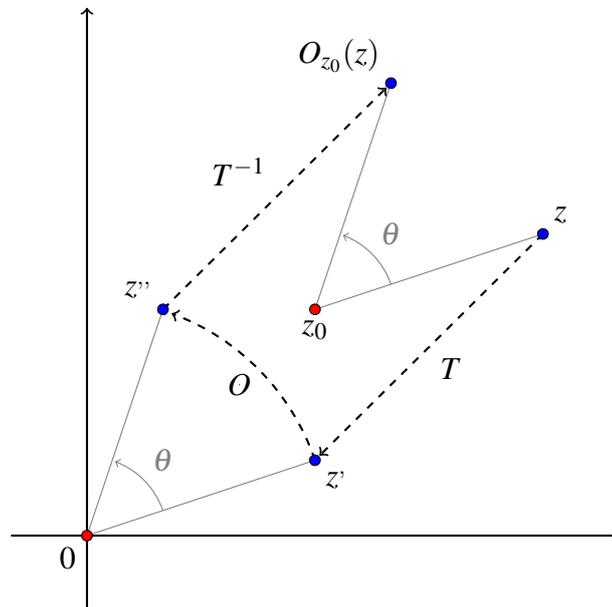
Como estudamos na seção anterior, a Transformação $O(z) = e^{i\theta}z$ rotaciona os pontos do plano complexo em torno da origem. Mas seria possível fazermos uma rotação de θ radianos dos pontos de \mathbb{C} em torno de algum ponto z_0 diferente da origem?

A resposta é sim e realizar tal rotação é mais simples do que aparenta ser. Podemos conseguir tal feito recorrendo à composição de Transformações.

Considere um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, então para realizarmos a rotação de um ponto z por θ radianos em torno de z_0 , utilizamos a seguinte sequência de Transformações:

1. Primeiro aplicamos a Translação $T(z) = z - z_0$ levando $z_0 \mapsto 0$ e $z \mapsto z' = z - z_0$;
2. Em seguida, aplicamos a Rotação $O(z') = e^{i\theta}z'$, fixando o ponto 0 e levando $z' \mapsto z'' = e^{i\theta}z'$;
3. Por fim, aplicamos a Translação $T^{-1}(z'') = z'' + z_0$, levando $0 \mapsto z_0$ e $z'' \mapsto R_{z_0}(z) = z'' + z_0$.

Figura 2.9 – Trajeto de um ponto $z \in \mathbb{C}$ por meio da Transformação composta $R_{z_0} = T^{-1} \circ O \circ T$.



Próprio autor (2022).

Pela conformidade das Translações, o ângulo de rotação é preservado entre os passos (2) e (3). Consequentemente, como pode-se ver na Figura 2.9, temos uma Rotação de θ radianos em torno de z_0 .

Para obtermos uma expressão algébrica para esta Rotação, basta desenvolvermos a composição $O_{z_0} = T^{-1} \circ O \circ T$, o que nos leva a

$$O_{z_0}(z) = T^{-1}(O(T(z))) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0. \quad (2.9)$$

Se fizermos a substituição $z_0 = 0$ na equação (2.9), chegamos na expressão para a Rotação em torno da origem.

Como O_{z_0} é uma composição de Translações e de uma Rotação, O_{z_0} possui todas as propriedades da Transformação Afim³.

2.5 Homotetia

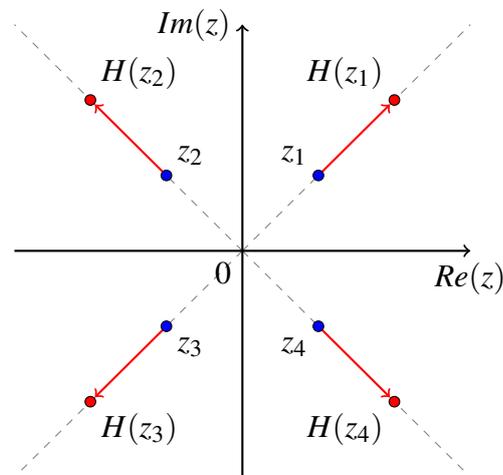
Se fizermos $b = 0$ e $a = k \in \mathbb{R}_+$ em uma Transformação Afim $T(z) = az + b$, chegamos ao último caso particular:

Definição 2.5.1. Chamamos de Homotetia a Transformação $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H(z) = kz, \quad (2.10)$$

onde k é uma constante real positiva.

Figura 2.10 – Imagem de pontos do plano complexo através da Homotetia $H(z) = kz$, com $k > 1$.



Próprio autor (2022).

Observe que, se tomarmos o valor absoluto da Transformação H definida acima, temos o seguinte resultado:

$$|H(z)| = |kz| = |k||z| = k|z|.$$

A partir desta expressão, podemos concluir que se $k > 1$, a imagem de um ponto z pela função H tem o seu valor absoluto k vezes maior do que o valor absoluto de z , isto é, H distancia

³ É fácil perceber que se n Transformações T_1, \dots, T_n preservam retas e circunferências, a composição $T_1 \circ \dots \circ T_n$ também preserva. O mesmo vale para preservação de ângulos e distâncias.

os pontos do plano da origem (FIGURA 2.10). Por outro lado, se $0 < k < 1$, $|H(z)|$ torna-se inversamente proporcional a $|z|$, ou seja, H aproxima os pontos da origem.

Note também, que a única mudança provocada por uma Homotetia nos pontos do plano complexos é a alteração de seus valores absolutos. Deste modo, um ponto z e sua imagem $H(z)$ estão sempre na mesma reta passando pela origem. Em outros termos, temos que $\text{Arg}(H(z)) = \text{Arg}(z)$. Uma outra interpretação é que uma Homotetia expande ou contrai um ponto z a partir da origem.

Exemplo 2.5.2. Calcule a área da imagem do quadrado Q de vértices $0, 2, 2 + 2i$ e $2i$ pela Homotetia $H(z) = 2z$.

Primeiramente precisamos encontrar a figura $H(Q)$. Como já vimos em exemplos anteriores, para encontrarmos a imagem de segmentos de retas por uma Transformação Afim, basta encontrarmos as imagens de seus extremos, e depois traçarmos segmentos ligando-os. Assim:

$$H(0) = 2 \cdot 0 = 0, \quad H(2) = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$H(2 + 2i) = 2(2 + 2i) = 4 + 4i, \quad H(2i) = 2 \cdot 2i = 4i.$$

Ligando os pontos com segmentos, conclui-se que $H(Q)$ é o quadrado de vértices $0, 4, 4 + 4i$ e $4i$ (FIGURA 2.11). Logo sua área é dada por $|4 - 0|^2 = 4^2 = 16$.

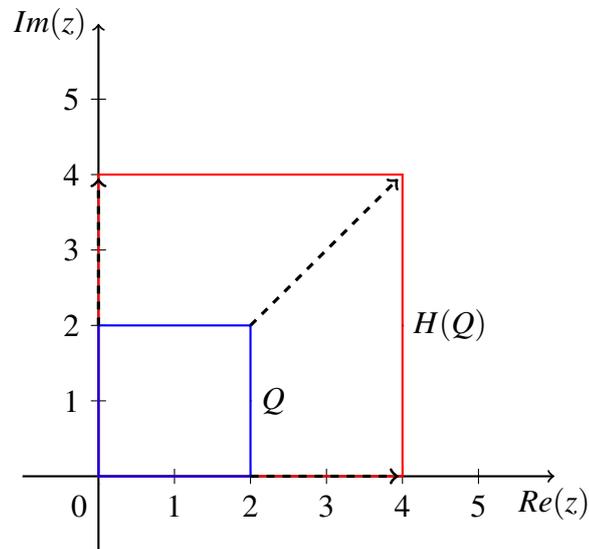
No exemplo (2.5.2) que acabamos de resolver, a Homotetia $H(z) = 2z$ manteve a origem fixa. Isto acontece para qualquer que seja a Homotetia $H(z) = kz$, e como no caso das Rotações, $z = 0$ é o único ponto fixo das Homotetias em \mathbb{C} .

Podemos perceber na Figura 2.11 que o quadrado teve um aumento em sua área. Isto acontece porque Homotetias não são Isometrias Euclidianas, visto que $|k| = k \neq 0$. Em geral, Homotetias causam um aumento linear de k unidades nos lados de figuras geométricas. De fato, suponha que uma figura possua algum lado medindo $|z - w|$, então o lado de sua imagem por H irá medir $|kz - kw| = k|z - w|$.

Portanto, Homotetias são Transformações Conformes que preservam retas e circunferências e por consequência, preservam figuras geométricas, porém causam uma distorção de k^2 unidades em suas áreas⁴.

⁴ Este fato pode ser demonstrado observando que, devido às Proposições (2.1.8) e (2.1.12), uma figura X e sua imagem $H(X)$ por uma Homotetia são figuras semelhantes.

Figura 2.11 – Imagem de um quadrado Q pela Homotetia $H(z) = 2z$.



Próprio autor (2022).

2.6 Homotetia em relação a um ponto qualquer

De modo completamente análogo como fizemos com a Rotação, podemos encontrar uma expressão algébrica para uma Homotetia H_{z_0} a partir de um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ qualquer. A única mudança que precisamos fazer na composição de Transformações é substituir a Rotação $R(z) = e^{i\theta}z$ pela Homotetia $H(z) = kz$. Com isso chegamos na seguinte Transformação:

$$H_{z_0}(z) = k(z - z_0) + z_0, \quad (2.11)$$

onde $k > 0$.

2.7 O comportamento gráfico de uma Transformação Afim

Agora que já estamos familiarizados com os comportamentos da Translação, da Rotação e da Homotetia, finalmente estamos em condições de entender como o plano complexo muda sob a ação de uma Transformação da forma $T(z) = az + b$. Porém, para isso, precisamos de um último passo: sermos capazes de visualizarmos o caso geral de uma Transformação Afim como uma composição de seus casos particulares.

Proposição 2.7.1. *A Transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma Transformação Afim se, e somente se, T é uma composição de uma Rotação, uma Homotetia e uma Translação.*

Demonstração. Seja $T(z) = az + b$ uma Transformação afim. Observe, que podemos escrever $a = |a| \frac{a}{|a|}$, pois $a \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} T(z) &= |a| \frac{a}{|a|} z + b \\ &= T_1(H(O(z))), \end{aligned}$$

onde $O(z) = \frac{a}{|a|}z$, $H(z) = |a|z$ e $T_1(z) = z + b$.

Note que $\frac{a}{|a|}$ é uma constante complexa de módulo igual a um, assim O é uma Rotação. Como $|a|$ é um número real positivo, H é uma Homotetia. Por fim, T_1 é claramente uma Translação.

Por outro lado, sejam $T_1(z) = z + b$, $H(z) = kz$ e $O(z) = az$, uma Translação, uma Homotetia e uma Rotação, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} T_1(H(O(z))) &= T_1(H(az)) \\ &= T_1((ka)z) \\ &= (ka)z + b. \end{aligned}$$

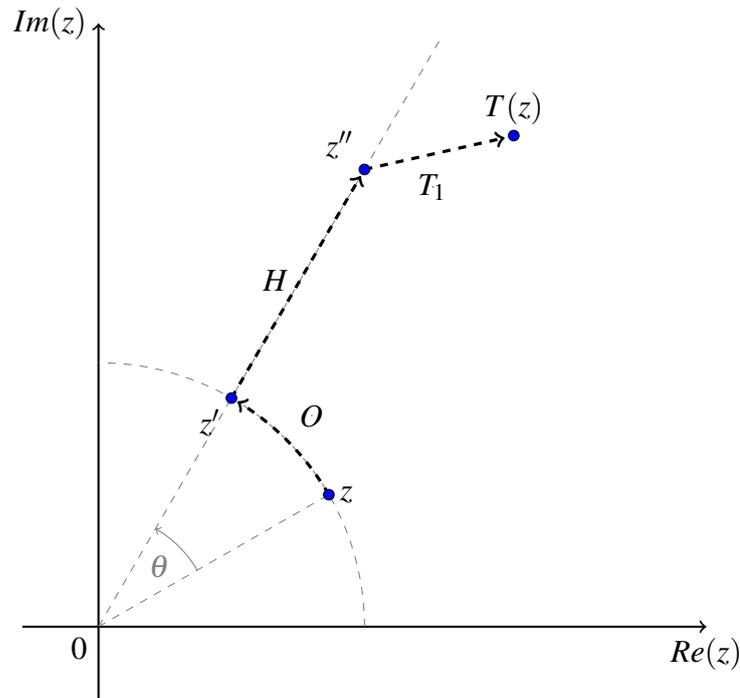
Como ka e b são números complexos e $ka \neq 0$, $T_1 \circ H \circ O$ é uma Transformação Afim. ■

Com base na Proposição (2.7.1), podemos afirmar que ao aplicarmos uma Transformação $T(z) = az + b$ em um dado ponto do plano complexo, temos o seguinte movimento (FIGURA 2.12):

1. z é rotacionado por um ângulo θ em torno da origem pela Transformação $O(z) = \frac{a}{|a|}z$, sendo levado até um ponto $z' = R(z)$;
2. z' sofre uma expansão ou contração de $|a|$ unidades por meio da Transformação $H(z) = |a|z$, sendo levado até um ponto $z'' = H(z')$;

3. z'' sofre uma Translação na direção do vetor b pela Transformação $T_1(z) = z + b$, sendo levado até um ponto $T(z) = T_1(z'')$.

Figura 2.12 – Imagem de um ponto z do plano complexo por uma Transformação Afim $T(z) = (T_1 \circ H \circ O)(z)$.



Próprio autor (2022).

Ilustraremos essa sequência de Transformações com um exemplo.

Exemplo 2.7.2. Encontre as Transformações T_1 , H e O que compõem a Transformação Afim $T(z) = -2iz + (1 + i)$, e determine a imagem da circunferência $C = \{z \in \mathbb{C} ; |z - 2i| = 1\}$ pela Transformação $T(z) = (T_1 \circ H \circ O)(z)$.

Vimos na Proposição (2.7.1) que

$$T(z) = az + b \Rightarrow O(z) = \frac{a}{|a|}z, H(z) = |a|z \text{ e } T(z) = z + b,$$

Assim, temos que

$$O(z) = -iz, \quad H(z) = 2z \quad \text{e} \quad T(z) = z + 1 + i.$$

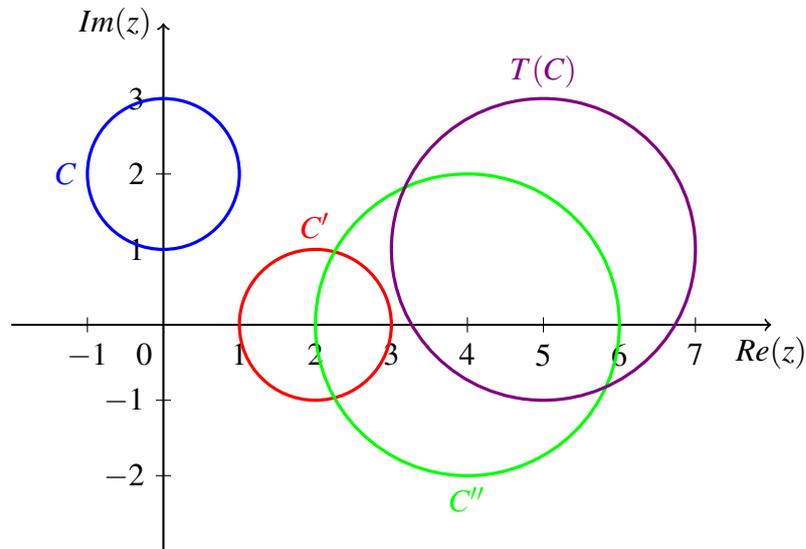
Sejam $O(C) = C'$, $H(C') = C''$ e $T_1(C'') = T(C)$. Como Transformações Afins preservam circunferências, C' , C'' e $T(C)$ são todas circunferências e ao utilizarmos sucessivamente a equação

de (2.4), temos que

$$\begin{aligned} C' &= \{z' \in \mathbb{C}; |z' - 2| = 1\} \\ C'' &= \{z'' \in \mathbb{C}; |z'' - 4| = 2\} \\ T(C) &= \{w \in \mathbb{C}; |w - (5 + i)| = 2\}. \end{aligned}$$

Ou seja, C' é a circunferência centrada em 2 e de raio 1, C'' é a circunferência centrada em 4 e de raio 2 e $T(C)$ a circunferência centrada em $5 + i$ e de raio 2, como na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Imagem da circunferência C pela Transformação $T(z) = (T_1 \circ H \circ R)(z)$, onde $C' = R(C)$, $C'' = H(C')$ e $T(C) = T_1(C'')$.



Próprio autor (2022).

Como uma composição da Rotação $O(z) = \frac{a}{|a|}z$, da Homotetia $H(z) = |a|z$ e da Translação $T(z) = z + b$, a Transformação afim $T(z) = az + b$ herda as propriedades dessas transformações. Como visualizamos no exemplo (2.7.2) e na Figura 2.13, a Rotação e a Translação presentes em T preservam a forma e a área de figuras geométricas, enquanto a Homotetia preserva a forma e causa uma alteração em suas áreas.

2.8 Transformações Afins no plano complexo estendido

O plano complexo estendido será o conjunto com o qual trabalharemos de agora em diante. Todas as Transformações que estudaremos terão \mathbb{C}^+ como domínio e contra-domínio.

Portanto, faz-se necessário estendermos a definição e as propriedades das Transformações afins para este novo conjunto. Mas antes, precisamos de uma definição.

Para entendermos o conceito de plano complexo estendido, é necessário entendermos o que é o ponto no infinito. Para isso, considere a função complexa $T(z) = \frac{1}{z}$. A função T está bem definida em todos os pontos de \mathbb{C} exceto por $z = 0$, pois neste ponto temos uma divisão indeterminada. Porém é possível contornarmos esta indeterminação se adicionarmos um ponto "extra" ao plano complexo.

Observe que $|T(z)| = \frac{1}{|z|}$. Isto significa que à medida que $|z| \rightarrow 0$, $|T(z)| \rightarrow +\infty$, ou seja, se z está muito próximo da origem, $T(z)$ está muito distante. Por outro lado, se $|z| \rightarrow +\infty$, $|T(z)| \rightarrow 0$, isto é, quando o valor absoluto de z torna-se muito grande, sua imagem por T torna-se muito próxima da origem.

Deste modo, se considerarmos ∞ como um ponto de valor absoluto extremamente grande e que se encontra na direção de qualquer que seja o vetor escolhido de \mathbb{C} , podemos definir $T(0) = \infty$ e $T(\infty) = 0$.

Estas observações motivam definição a seguir:

Definição 2.8.1. Chama-se Plano complexo estendido conjunto \mathbb{C}^+ dado por

$$\mathbb{C}^+ = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

onde ∞ é chamado de ponto no infinito.

Por convenção, assume-se que o ponto ∞ pertence a toda reta pertencentes a \mathbb{C}^+ .

No plano complexo estendido estão definidas todas as operações usuais de \mathbb{C} além das operações para o ponto no infinito fornecidas pela próxima definição.

Definição 2.8.2. São definidas em \mathbb{C}^+ as seguintes operações para o ponto no infinito:

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z + \infty = \infty$ e $\frac{z}{\infty} = 0$;
2. Para todo $z \in \mathbb{C}/\{0\}$, $z \cdot \infty = \infty$ e $\frac{z}{0} = \infty$;
3. $\infty + \infty = \infty$ e $\infty \cdot \infty = \infty$.

Quaisquer operações com o ponto no infinito não fornecidas na definição (2.8.2) são formas indeterminadas e portanto devem ser desconsideradas.

No Anexo A desenvolvemos uma justificativa geométrica para a adição do ponto no infinito ao plano complexo através da projeção estereográfica.

Proposição 2.8.3. *Toda Transformação Afim fixa o ponto no infinito.*

Demonstração. Seja $T(z) = az + b$, utilizando as operações definidas para ∞ em (2.8.2) é imediato que $T(\infty) = \infty$. ■

Portanto, se T é uma Transformação Afim, então $T(\infty) = \infty$. Isso nos garante que as Transformações Afins são bijeções em \mathbb{C}^+ .

Pela Proposição (2.8.3), temos que os casos particulares da Transformação Afim fixam os seguintes pontos em \mathbb{C}^+ :

- Translações $T(z) = z + b$ fixam apenas o ponto ∞ ;
- Rotações $R(z) = e^{i\theta}z$ fixam os pontos 0 e ∞ ;
- Homotetias $H(z) = kz$ fixam os pontos 0 e ∞ .

As Proposições (2.1.5) e (2.1.12), que dizem respeito respectivamente à preservação de circunferências (e retas) e à preservação de distâncias, se estendem naturalmente para \mathbb{C}^+ . Como definimos no começo desta seção, o ponto ∞ pertence a todas as retas de \mathbb{C}^+ . Assim, se L é uma reta, $T(L)$ continua sendo uma reta pois $T(\infty) = \infty$. Como uma circunferência é composta apenas por pontos de \mathbb{C} , nada muda. Em relação à preservação de distâncias, basta observar que $|T(z) - T(\infty)| = \infty = |z - \infty|$.

Proposição 2.8.4. *Transformações Afins são conformes em \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Já demonstramos na proposição (2.1.8) que T é conforme em todos os pontos de \mathbb{C} , basta então mostrarmos que T preserva ângulos entre curvas em ∞ .

Para isso, suponha que θ seja o ângulo entre duas retas L_1 e L_2 em algum ponto z_0 . Então, o ângulo de interseção entre L_1 e L_2 em ∞ é igual a $-\theta$. Mas por hipótese, T é Afim (preserva retas) e conforme em \mathbb{C} , logo o ângulo de interseção entre as retas $T(L_1)$ e $T(L_2)$ em $T(z_0)$ é θ e conseqüentemente $-\theta$ será o ângulo entre $T(L_1)$ e $T(L_2)$ em ∞ . ■

A demonstração da proposição anterior é baseada nas deduções realizadas ao longo da Seção 2 do Anexo A.

3 INVERSÕES

Dedicaremos este capítulo ao estudo das chamadas Inversões. A Transformação Recíproca é um componente fundamental das Transformações de Möbius, portanto é preciso conhecermos seu comportamento e algumas de suas propriedades.

Para falarmos de inversões, nos apoiaremos nos conceitos de simetria abordados nas Seções 4 e 5 do Anexo B e nos livros de Hitchman (2009) e Zill (2003).

Nas seções 1 e 2 deste capítulo, veremos as definições e propriedades das Reflexões e das Inversões e finalizaremos pelo estudo da Transformação Recíproca na seção 3.

3.1 Reflexão

Discutimos na seção (B.4) a simetria com respeito a uma reta L qualquer e chegamos à uma expressão para o ponto simétrico z^* . Nesta seção passaremos a enxergar a simetria com respeito a retas como uma Transformação do plano complexo estendido.

Definição 3.1.1. Chamamos de Reflexão, com respeito à reta L , a função complexa dada por

$$R_L(z) = z^*, \quad (3.1)$$

onde $L = \{z \in \mathbb{C} ; \alpha z + \overline{\alpha z} + d = 0\}$ e z^* é o ponto simétrico de z com respeito a L .

Pela definição (3.1.1), uma Reflexão se comporta graficamente como uma simetria com respeito a uma reta, isto é, cada ponto do plano complexo é levado ao seu simétrico em relação à reta L pela função R_L . Por isso, chamamos L de **Reta de Reflexão**.

De acordo com o Teorema (B.4.3), a Reflexão pode ser escrita como

$$R_L(z) = -\frac{\overline{\alpha z} + d}{\alpha}, \quad (3.2)$$

ou pela forma mais simples

$$R_L(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \beta. \quad (3.3)$$

Pelo Teorema (B.4.2), temos que $|z - w| = |R_L(z) - w|$ para todo $w \in L$. Assim, ao passo em que z se aproxima da reta L , $R_L(z)$ também se aproxima de L . Deste modo, z vai se tornando

cada vez mais próximo de $R_L(z)$. Do mesmo modo, se z se afasta de L , indo para o ponto no infinito, então $R_L(z)$ também vai para o ponto no infinito.

Logo, podemos definir $R_L(z) = z$ se $z \in L$ e $R_L(\infty) = \infty$. Isto nos mostra que R_L está bem definida para todos os pontos de \mathbb{C}^+ e que R_L fixa todos os pontos da reta de reflexão L , incluindo o ponto no infinito.

Proposição 3.1.2. *A função R_L dada na definição (3.1.1) é uma Transformação de \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Observe que a função R_L restrita a L é a função identidade e portanto é bijetora. Temos também que se $z = \infty$, então $R_L(z) = \infty$. Suponha então que $z \notin L$ e $z \neq \infty$.

1. R_L é injetiva:

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $R_L(z_1) = R_L(z_2)$, então segue que

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{\alpha z_1} + d}{\alpha} &= -\frac{\overline{\alpha z_2} + d}{\alpha} \\ \overline{\alpha z_1} + d &= \overline{\alpha z_2} + d \\ \overline{z_1} &= \overline{z_2} \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

2. R_L é sobrejetiva:

Para provar a sobrejetividade, basta mostrarmos que para todo $w \in \mathbb{C}$ existe um $z \in \mathbb{C}$ tal que $R_L(z) = w$. Dado um $w \in \mathbb{C}$, tome $z = -\frac{\overline{\alpha w} + d}{\alpha}$, assim

$$\begin{aligned} R_L(z) &= r_L\left(\frac{-\overline{\alpha w} - d}{\alpha}\right) \\ &= -\frac{\overline{\alpha}\left(\frac{-\overline{\alpha w} - d}{\alpha}\right)}{\alpha} - \frac{d}{\alpha} \\ &= -\frac{\overline{\alpha}\left(\frac{-\alpha w - d}{\overline{\alpha}}\right)}{\alpha} - \frac{d}{\alpha} \\ &= w + \frac{d}{\alpha} - \frac{d}{\alpha} = w. \end{aligned}$$

■

Daqui em diante, para simplificarmos a escrita, denotaremos uma reflexão simplesmente por R . Vejamos agora algumas de suas propriedades.

Proposição 3.1.3. *Seja R uma Reflexão. Então valem as seguintes propriedades:*

1. R leva retas em retas;
2. R leva circunferências em circunferências;
3. R é uma isometria euclidiana;
4. R é conforme e inverte a orientação de ângulos entre curvas em \mathbb{C}^+ .

Antes de demonstrarmos a Proposição (3.1.3), observe que uma Reflexão $R(z) = e^{i\theta}\bar{z} + \beta$ pode ser escrita como a composição $R(z) = (T \circ O \circ R_1)(z)$, onde $R_1(z) = \bar{z}$ é a reflexão no eixo real (ou função conjugado), $O(z) = e^{i\theta}z$ é uma rotação em torno da origem e $T(z) = z + \beta$ uma Translação:

$$z \xrightarrow{R_1} \bar{z} \xrightarrow{O} e^{i\theta}\bar{z} \xrightarrow{T} e^{i\theta}\bar{z} + \beta.$$

Demonstração. As demonstrações dos itens (1), (2) e (3) são feitas de forma análoga ao já demonstrados para o caso das Transformações Afins nas Proposições (2.1.5) e (2.1.12) e se estendem do mesmo modo para \mathbb{C}^+ . Demonstraremos aqui o item (4).

Como $R(z) = e^{i\theta}\bar{z} + \beta$ é uma composição da Reflexão em relação ao eixo real e de Transformações afins (que são conformes em \mathbb{C}^+), basta mostrarmos que $R_1(z) = \bar{z}$ é conforme e inverte a orientação de ângulos entre curvas.

Para demonstrarmos este fato, vamos recorrer à projeção estereográfica¹. Vejamos como os pontos z e sua imagem $R_1(z) = \bar{z}$ se diferenciam quando são levados na esfera S^2 . Seja $\psi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ a projeção estereográfica, logo

$$\psi^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\bar{z}) &= \left(\frac{2\operatorname{Re}(\bar{z})}{|\bar{z}|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(\bar{z})}{|\bar{z}|^2 + 1}, \frac{|\bar{z}|^2 - 1}{|\bar{z}|^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, -\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

¹ A construção da projeção estereográfica e suas propriedades podem ser encontradas no Anexo A.

Podemos concluir que $\psi^{-1}(\bar{z})$ é a reflexão de $\psi^{-1}(z)$ com respeito ao plano² $t = 0$ do \mathbb{R}^3 . Seja $\Phi : S^2 \rightarrow S^2$ tal reflexão, então podemos reescrever $R_1(z)$ como a composição

$$R_1 = \psi \circ \Phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+.$$

Temos pela Proposição (A.2.1), que a projeção estereográfica e sua inversa são conformes. Além disso, temos que Φ é uma reflexão do \mathbb{R}^3 e como bem sabemos, reflexões no \mathbb{R}^3 são conformes e invertem a orientação de ângulos³. Portanto $R_1(z)$ é conforme e inverte a orientação de ângulos entre curvas. ■

Uma consequência direta do item (4) da Proposição (3.1.3) é que se uma Reflexão preserva a magnitude e altera a orientação de um ângulo entre curvas, então se compormos duas reflexões preservaremos a magnitude e a orientação.

Corolário 3.1.4. *Toda composição de um número par de Reflexões é conforme.*

Encerramos esta seção com dois resultados que fornecem uma relação entre reflexões e Transformações Afins.

Proposição 3.1.5. *Uma Transformação $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é uma Translação se, e somente se, é uma composição de Reflexões com respeito a duas retas paralelas (FIGURA 3.1).*

Demonstração. Seja $T(z) = z + b$ uma Translação. Observe que podemos reescrever b como $b = (e^{i\theta} e^{-i\theta}) \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$, então

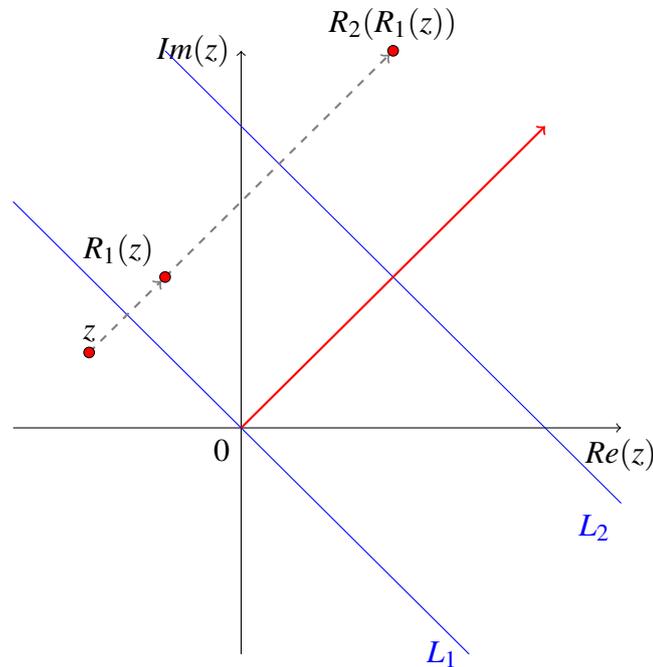
$$\begin{aligned} T(z) &= (e^{i\theta} e^{-i\theta})z + (e^{i\theta} e^{-i\theta}) \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &= e^{i\theta} \left(e^{-i\theta} z + e^{-i\theta} \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} \\ &= e^{i\theta} \left(\overline{e^{i\theta} \bar{z} + e^{i\theta} \frac{\bar{b}}{2}} \right) + \frac{b}{2} \\ &= R_2(R_1(z)), \end{aligned}$$

com $R_2(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \frac{b}{2}$ e $R_1(z) = e^{i\theta} \bar{z} + e^{i\theta} \frac{\bar{b}}{2}$.

² Aqui consideramos um sistema de coordenadas (s, t, u) .

³ Ver Capítulo 2, Seção 1

Figura 3.1 – Translação por b como uma composição de Reflexões em relação a retas paralelas L_1 e L_2 .



Próprio autor (2022).

Logo, T é uma composição de reflexões R_1 sobre uma reta L_1 e R_2 sobre uma reta L_2 . Como ambas as reflexões possuem o mesmo ângulo θ , então L_1 é paralela à L_2 .

Por outro lado, sejam $R_1(z) = e^{i\theta}\bar{z} + \beta_1$ e $R_2(z) = e^{i\theta}\bar{z} + \beta_2$ reflexões com respeito a duas retas paralelas L_1 e L_2 não coincidentes. Logo,

$$R_1(R_2(z)) = e^{i\theta}\overline{R_2(z)} + \beta_1 = e^{i\theta}\overline{(e^{i\theta}\bar{z} + \beta_2)} + \beta_1 = e^{i\theta}e^{-i\theta}z + \overline{\beta_2} + \beta_1 = z + (\overline{\beta_2} + \beta_1).$$

Como L_1 e L_2 são paralelas e não coincidentes, se L_1 passa pela origem, L_2 não passará, o que implica que $\beta_1 = 0$ e $\overline{\beta_2} \neq 0$. O contrário também é válido. Isto mostra que $\overline{\beta_2} + \beta_1 \neq 0$ e consequentemente $R_1(R_2(z))$ é uma Translação. ■

Proposição 3.1.6. *Toda Rotação de \mathbb{C}^+ em torno de um ponto z_0 é uma composição de Reflexões com respeito a duas retas concorrentes em z_0 .*

Demonstração. Vamos demonstrar para o caso em que z_0 é a origem. O caso em que $z_0 \neq 0$ segue imediatamente do fato de que uma Rotação em torno de z_0 é uma composição de Translações e de uma Rotação na origem e estas Transformações preservam retas, circunferências, distâncias e ângulos.

Seja $O(z) = e^{i\theta}z$ uma rotação em torno da origem. Se escrevermos $\theta = (\theta + \psi) - \psi$, então

$$\begin{aligned} O(z) &= e^{((\theta+\psi)-\psi)i}z \\ &= e^{i(\theta+\psi)}e^{-i\psi}z \\ &= e^{i(\theta+\psi)}\overline{(e^{i\psi}\bar{z})} \\ &= R_1(R_2(z)), \end{aligned}$$

com $R_1(z) = e^{i(\theta+\psi)}\bar{z} + 0$ e $R_2(z) = e^{i\psi}\bar{z} + 0$.

Logo O é uma composição de Reflexões R_1 sobre uma reta L_1 e R_2 sobre uma reta L_2 . Das expressões de R_1 e R_2 , podemos inferir que ambas as retas cortam o eixo imaginário na origem, portanto L_1 e L_2 se interceptam em $z_0 = 0$.

Por outro lado, sejam $R_1(z) = e^{i\theta}\bar{z}$ e $R_2(z) = e^{i\psi}\bar{z}$ reflexões com respeito a duas retas L_1 e L_2 que se interceptam em $z_0 = 0$. Logo,

$$R_1(R_2(z)) = e^{i\theta}\overline{R_2(z)} = e^{i\theta}\overline{e^{i\psi}\bar{z}} = e^{i\theta}e^{-i\psi}z = e^{i(\theta-\psi)}z.$$

Como $|e^{i(\theta-\psi)}| = 1$, $R_1(R_2(z))$ é uma Rotação em torno da origem. ■

3.2 Inversão

Para desenvolvermos a teoria desta seção, utilizaremos resultados da seção (B.5).

Definição 3.2.1. Chamamos de Inversão, com respeito à circunferência C , a função complexa dada por

$$I_C(z) = z^*, \tag{3.4}$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$ e z^* é o ponto simétrico de z com respeito a C .

Pela definição (3.1.1), o comportamento gráfico de uma Inversão com respeito a uma circunferência é exatamente o mesmo da simetria com respeito a circunferências, ou seja, a função I_C leva cada ponto do plano complexo em seu simétrico com respeito a C . Por esse motivo, chamamos C de **Circunferência de Inversão**.

Do Teorema (B.5.4), vem que

$$I_C(z) = a + \frac{r^2}{z-a}. \quad (3.5)$$

Observe que temos um ponto de indeterminação em $z = a$, logo para estendermos a definição da função I_C para o plano complexo estendido, precisamos entender o que acontece quando $z \rightarrow a$ e $z \rightarrow \infty$.

Para isso, podemos tomar o módulo de ambos os lados da expressão $I_C(z) - a = \frac{r^2}{z-a}$. Assim, chegaremos à expressão

$$|I_C(z) - a| = \frac{r^2}{|z-a|}, \quad (3.6)$$

que nos fornece a distância entre o ponto $I_C(z)$ e o centro de C .

Deste modo, é possível observarmos que à medida em que z se aproxima de a , $I_C(z)$ torna-se cada vez mais distante de a . Por outro lado, à medida em que z se afasta de a , z^* torna-se cada vez mais próximo de a . Logo temos que

$$I_C(z) = \begin{cases} a + \frac{r^2}{z-a}, & \text{se } z \neq a \text{ e } z \neq \infty \\ a, & \text{se } z = \infty \\ \infty, & \text{se } z = a \end{cases}. \quad (3.7)$$

Ainda utilizando a expressão (3.6), podemos analisar o comportamento de $I_C(z)$ em relação à circunferência de inversão. Vejamos então algumas possíveis situações:

1. Se z está no exterior de C , então $|z-a| > r$. Logo existe um número real $\alpha > 1$ tal que $|z-a| = \alpha r$. Assim temos que

$$|I_C(z) - a| = \frac{r^2}{\alpha r} = \frac{r}{\alpha} \implies |I_C(z) - a| < r.$$

Portanto $I_C(z)$ está no interior de C .

2. Se z está no interior de C , então $|z-a| < r$. Logo existe um número real $0 < \beta < 1$ tal que $|z-a| = \beta r$. Assim temos que

$$|I_C(z) - a| = \frac{r^2}{\beta r} = \frac{r}{\beta} \implies |I_C(z) - a| > r.$$

Portanto $I_C(z)$ está no exterior de C .

3. Se $z \in C$, então $|z - a| = r$. Assim temos que

$$|I_C(z) - a| = \frac{r^2}{r} = r.$$

Como z e z^* estão na mesma semirreta com origem no centro de C , então $z = I_C(z)$, ou seja I_C fixa todos os pontos da circunferência de inversão C .

Proposição 3.2.2. *A função I_C dada na definição (3.2.1) é uma Transformação de \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. A demonstração desta proposição é feita de maneira completamente análoga à demonstração da proposição (3.1.2). ■

Para simplificarmos a notação, de agora em diante, denotaremos a inversão simplesmente por I .

Diferentemente das Reflexões e das Transformações Afins, as Inversões nem sempre preservam retas e circunferências. Existem situações em que retas são transformadas em circunferências e circunferências são transformadas em retas. A proposição a seguir especifica em quais situações isto acontece.

Proposição 3.2.3. *Inversões levam retas e circunferências em retas ou circunferências. Em particular, se a reta ou circunferência passar pelo centro da circunferência de inversão, sua imagem será uma reta; caso contrário, sua imagem será uma circunferência.*

Mais uma vez, antes de demonstrarmos a Proposição (3.2.3), é conveniente repararmos que uma Inversão com respeito a uma circunferência C centrada em a e de raio r pode ser entendida como a Transformação composta $I(z) = (T_2 \circ H \circ I_1 \circ T_1)(z)$, onde $T_1(z) = z - a$ e $T_2(z) = z + a$ são Translações e $H(z) = r^2 z$ é uma Homotetia e $I_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ é a inversão em relação à circunferência unitária:

$$z \xrightarrow{T_1} z - a \xrightarrow{I_1} \frac{1}{\bar{z - a}} \xrightarrow{H} \frac{r^2}{\bar{z - a}} \xrightarrow{T_2} \frac{r^2}{\bar{z - a}} + a.$$

Vamos à demonstração.

Demonstração. Como $I(z)$ é uma composição da inversão em relação à circunferência unitária e Transformações Afins (que preservam retas e circunferências), basta mostrarmos que $I_1(z)$ leva retas e circunferências em circunferências ou retas, e caso geral seguirá de imediato.

Seja C uma circunferência ou uma reta. Então C pode ser descrita pela equação⁴

$$cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0,$$

onde $c, d \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 > cd$ e z variando em \mathbb{C} .

Temos que $I_1(C) = \{w \in \mathbb{C} ; w = i_1(z) \text{ e } z \in C\}$ é a imagem de C através de I_1 , assim se $w \in I_1(C)$, então $w = \frac{1}{\bar{z}}$, o que implica que $z = \frac{1}{\bar{w}}$. Mas $z \in C$, logo podemos substituir seu valor na equação de C e realizando algumas manipulações algébricas chegamos em

$$\frac{c}{w\bar{w}} + \frac{\alpha}{\bar{w}} + \frac{\bar{\alpha}}{w} + d = 0.$$

Podemos multiplicar a equação acima por $w\bar{w}$, e teremos que a equação de $I_1(C)$ é dada por

$$dw\bar{w} + \alpha w + \bar{\alpha}\bar{w} + c = 0.$$

Como $|\alpha|^2 > cd = dc$, segue que a equação obtida descreve uma reta ou uma circunferência.

Agora observe, que se C passa pela origem (centro da circunferência de inversão de $I_1(z)$), então $d = 0$ e a equação de $I_1(C)$ se reduz a uma equação de reta. Caso contrário, $I_1(C)$ é uma circunferência. ■

Uma outra forma de demonstrar a parte final da Proposição é observando que se C passa pela origem, então $I_1(0) = \infty$ pertence à $I_1(C)$ e, portanto a imagem de C por I_1 só pode ser uma reta.

Na demonstração da Proposição (3.2.3), acabamos por encontrar uma ferramenta muito útil para determinarmos imagens de circunferências e retas por meio da Inversão em relação à circunferência unitária $I_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$: uma expressão que nos fornece diretamente a equação da imagem de uma reta ou circunferência C .

⁴ Ver Proposição (B.3.1) no Anexo B.

Seja $C = \{z \in \mathbb{C}; cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0\}$ uma reta ou circunferência, então

$$I_1(C) = \{w \in \mathbb{C}; dw\bar{w} + \alpha w + \bar{\alpha}\bar{w} + c = 0\}. \quad (3.8)$$

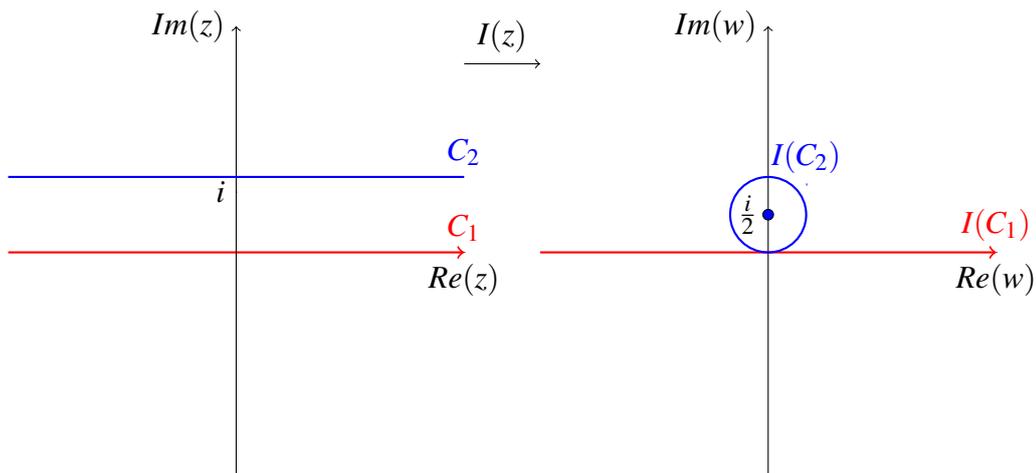
Vamos agora utilizar o resultado anterior para encontrarmos as imagens de duas retas sobre a ação da inversão com respeito à circunferência unitária.

Exemplo 3.2.4. Encontre a imagem do eixo real e da reta dada pelos pontos tais que $Im(z) = 1$ através da inversão com respeito à circunferência unitária.

Como já vimos, a Inversão com respeito à circunferência unitária é dada pela Transformação $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Seja C_1 a reta real. No plano Real, a reta real é dada por $y = 0$, logo temos que $\alpha = -\frac{i}{2}$, assim C_1 é descrita pela equação $-\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = 0$. Neste caso $c = 0$ e $d = 0$. Assim, C_1 passa pela origem e pela Proposição (3.2.3) e por (3.8), $I(C_1)$ é uma reta cuja equação é dada por $-\frac{i}{2}w + \frac{i}{2}\bar{w} = 0$. Ou seja, $I(C_1)$ é o próprio eixo real.

Figura 3.2 – Imagens do eixo real (em vermelho) e da reta $Im(z) = 1$ (em azul) pela Transformação $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.



Fonte: Próprio autor (2022).

Seja C_2 a reta que passa pelos pontos tais que $Im(z) = 1$. Então C_2 é equivalente à reta $y = 1$ no \mathbb{R}^2 . Logo, temos que $\alpha = -i/2$, $c = 0$ e $d = -1$. Assim, C_2 não passa pela origem e pela Proposição (3.2.3) e por (3.8), $I(C_2)$ é uma circunferência com equação $-w\bar{w} - \frac{i}{2}w + \frac{i}{2}\bar{w} =$

0. Podemos mexer mais um pouco na equação de $I(C_2)$ para descobrirmos qual o seu gráfico. Multiplicando a equação por -1 e somando $-i^2/4$ de ambos os lado, chegamos em

$$\begin{aligned} w\bar{w} + \frac{i}{2}w - \frac{i}{2}\bar{w} - \frac{i^2}{4} &= -\frac{i^2}{4} \\ \left(w - \frac{i}{2}\right) \overline{\left(w - \frac{i}{2}\right)} &= \frac{1}{4} \\ \left|w - \frac{i}{2}\right| &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $I(C_2)$ é a circunferência centrada em $w = -i/2$ e de raio $r = 1/2$ (FIGURA 3.2).

Ao trabalharmos com Transformações de Möbius, consideraremos retas e circunferências como elementos de um mesmo conjunto. Neste caso, faria sentido considerarmos Reflexões e Inversões como um mesmo tipo de Transformação. Mas, para isso precisamos encontrar alguma propriedade em comum entre elas.

Vimos na Proposição anterior que as Inversões nem sempre preservam retas e circunferências, mas sempre as levam em algum desses dois objetos. Então, Inversões diferem um pouco de Reflexões neste ponto.

É fácil verificar que Inversões não são isometrias Euclidianas, ou seja, não preservam distâncias. De fato, se tomarmos a Inversão em relação à circunferência unitária, temos que

$$|I(1) - I(2)| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \neq 1 = |1 - 2|.$$

Na verdade, a única propriedade que é totalmente compartilhada entre Reflexões e Inversões é a preservação de ângulos entre curvas.

Proposição 3.2.5. *Inversões são conformes e invertem a orientação de ângulos entre curvas em \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Como já observamos, uma Inversão é a composição das Transformações $T_1(z) = z - a$, $I_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $H(z) = r^2z$ e $T_2(z) = z + a$. Sabemos que T_1 , H e T_2 são conformes, logo basta mostrar que I_1 é conforme e inverte a orientação de ângulos.

Para demonstrarmos este fato, iremos recorrer novamente à projeção estereográfica⁵. Assim como fizemos na demonstração do item (4) da proposição (3.1.3), vamos analisar como

⁵ Veja Anexo A

os pontos z e sua imagem $I_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, se diferenciam quando são levados na esfera S^2 . Seja $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ a projeção estereográfica, logo

$$\psi^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

e conseqüentemente, após um longo processo de cálculos elementares (que omitiremos aqui), descobrimos que

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, -\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Concluimos então que os pontos $\psi^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ e $\psi^{-1}(z)$ são simétricos em relação ao plano que intercepta o equador da esfera. Em outras palavras, $\psi^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ é a reflexão de $\psi^{-1}(z)$ em relação ao plano equatorial. Seja $\Theta : S^2 \rightarrow S^2$ tal reflexão. Podemos reescrever i_1 como a composição

$$I_1 = \psi \circ \Theta \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+.$$

Temos que a projeção estereográfica e sua inversa são conformes. Além disso, Θ é uma reflexão do \mathbb{R}^3 , assim Θ é conforme e inverte a orientação de ângulos. Portanto, $I_1(z)$ é conforme e inverte a orientação de ângulos entre curvas. ■

A Proposição (3.2.5) é completamente análoga ao item (4) da Proposição (3.2.3). Logo, Reflexões e Inversões formam um conjunto de Transformações conformes que invertem a orientação de ângulos em \mathbb{C}^+ . Portanto, de agora em diante, não faremos mais distinção entre Reflexões e Inversões. Chamaremos ambas de Inversões.

Como consequência da Proposição (3.2.5) e do item (4) da Proposição (3.1.3), temos o seguinte Corolário:

Corolário 3.2.6. *Toda composição de um número par de Inversões é conforme.*

Justifica-se tal fato do mesmo modo como foi justificado o Corolário (3.1.4). Vale ressaltar que como consideramos Reflexões como Inversões, vale observar a seguinte situação:

Considere a composição $I_1 \circ I_2 \circ \dots \circ I_n$, onde n é um número par. Qualquer uma das Transformações I_j ($j = 1, 2, \dots, n$) poderia ser tanto uma Reflexão quanto uma Inversão que pelo Corolário (3.2.6), a composição seria conforme.

Na seção anterior, vimos que tanto Translações quanto Rotações são compostas de Inversões com respeito a retas. Nesta seção veremos que a Homotetia também pode ser escrita como uma composição de Inversões.

Proposição 3.2.7. *Uma Transformação $H : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é uma Homotetia se, e somente se, é uma composição de Inversões com respeito a duas circunferências concêntricas na origem.*

Demonstração. Seja $H(z) = kz$ uma Homotetia. Como $k > 0$, podemos reescreve-lo como $k = \frac{(\sqrt{ak})^2}{(\sqrt{a})^2}$, com $a > 0$. Assim

$$H(z) = \frac{(\sqrt{ak})^2}{(\sqrt{a})^2} z = \frac{(\sqrt{ak})^2}{(\sqrt{a})^2} \frac{z}{z} = \frac{(\sqrt{ak})^2}{\left(\frac{(\sqrt{a})^2}{\bar{z}}\right)} = I_2(I_1(z)),$$

onde $I_1(z) = \frac{(\sqrt{a})^2}{\bar{z}}$ e $I_2(z) = \frac{(\sqrt{ak})^2}{\bar{z}}$.

Logo, H é uma composição de Inversões I_1 em relação à uma circunferência C_1 e I_2 em relação à uma circunferência C_2 . Das expressões de I_1 e I_2 , conclui-se que C_1 e C_2 estão centradas na origem, portanto são concêntricas.

Por outro lado, sejam $I_1(z) = \frac{r_1}{\bar{z}}$ e $I_2(z) = \frac{r_2}{\bar{z}}$ inversões com respeito a circunferências concêntricas na origem de raios R_1 e R_2 . Logo,

$$I_1(I_2(z)) = \frac{r_1}{I_2(z)} = \frac{r_1}{\left(\frac{r_2}{\bar{z}}\right)} = \frac{r_1}{r_2} z.$$

Como r_1/r_2 é um número real positivo, $I_1(I_2(z))$ é uma Homotetia. ■

3.3 Transformação Recíproca

Finalizamos este capítulo fazendo um estudo da última Transformação necessária para entendermos o comportamento das Transformações de Möbius, as Transformações Recíprocas.

Definição 3.3.1. Chamamos de Função Recíproca a função $T : \mathbb{C}/\{0\} \rightarrow \mathbb{C}/\{0\}$ dada por

$$T(z) = \frac{1}{z}.$$

Observe que T está bem definida para todos os pontos de \mathbb{C} exceto por $z = 0$. Podemos facilmente estender a definição de T para todos os pontos de \mathbb{C}^+ utilizando as operações definidas para o ponto no infinito:

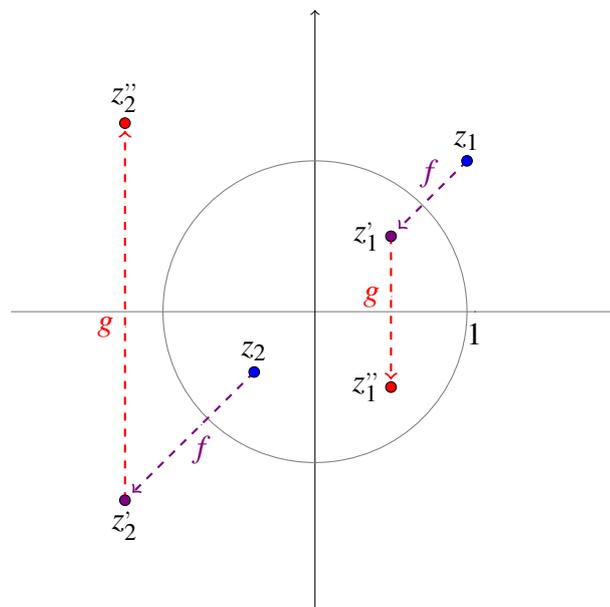
$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

Assim, como uma função do plano complexo estendido, T é dada por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{se } z \neq 0 \text{ e } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = 0 \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}.$$

Para entendermos o comportamento gráfico da Função Recíproca, podemos utilizar uma estratégia que já utilizamos antes: tentar enxergá-la como uma composição de funções que já conhecemos. Pois bem, note que $T(z) = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, ou seja, $T(z) = g(f(z))$, onde $g(z) = \bar{z}$ é a Inversão em relação ao eixo real e $f(z) = \frac{1}{z}$ é a Inversão com respeito à circunferência unitária. Isto nos leva à seguinte proposição:

Figura 3.3 – Imagens dos pontos z_1 e z_2 por meio da Função Recíproca.



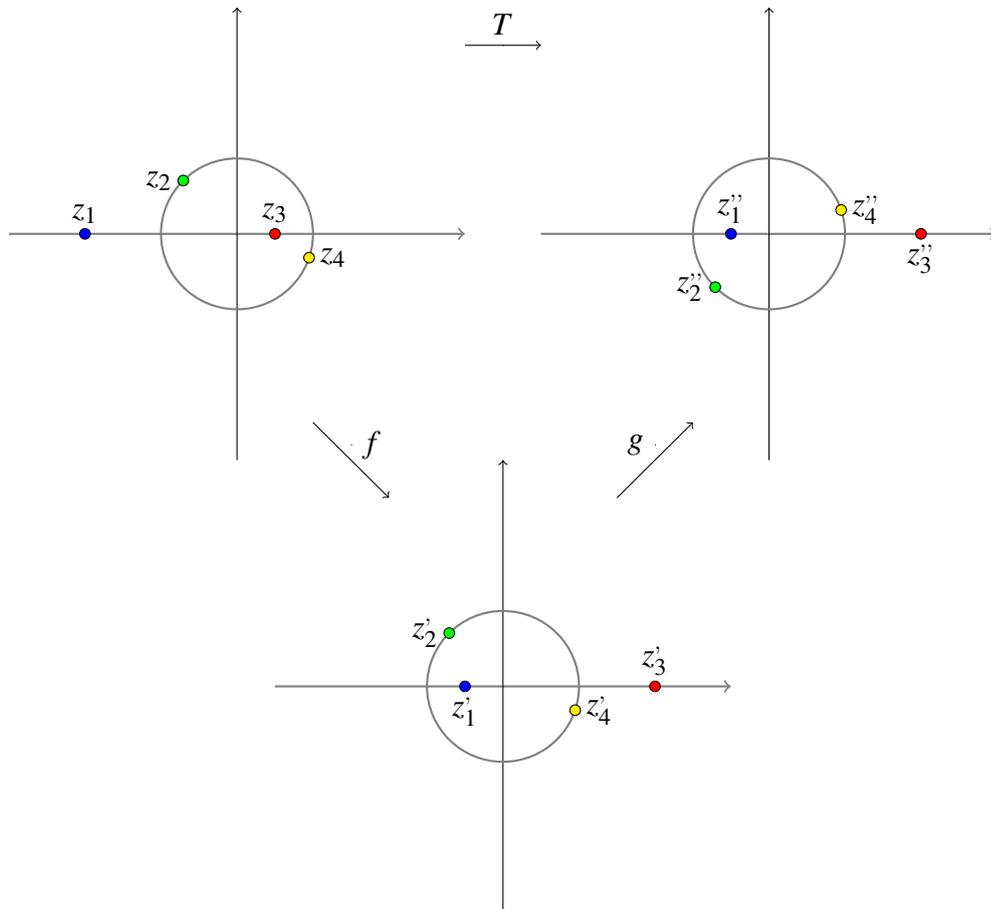
Fonte: Próprio autor (2022).

Proposição 3.3.2. *Uma função $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é a Função Recíproca se, e somente se, é a composição das Inversões com respeito à circunferência unitária e com respeito à reta real respectivamente.*

Pela Proposição (3.3.2) e como podemos observar na Figura 3.3, em virtude da inversão f , pontos que estão fora da circunferência unitária são levados em pontos dentro e pontos que estão dentro são levados em pontos que estão de fora. E devido à inversão g , pontos abaixo do eixo real são levados para cima e vice-versa.

Figura 3.4 – Imagens de pontos pertencentes à circunferência unitária e ao eixo real através da função

$$T(z) = (g \circ f)(z) = \frac{1}{z}.$$



Fonte: Próprio autor (2022).

A Figura 3.4 ilustra como a função $T(z) = \frac{1}{z}$ leva pontos da circunferência unitária em pontos da circunferência unitária e pontos pertencentes ao eixo real em pontos do eixo real.

De fato, sejam C a circunferência unitária e L o eixo real. Como já discutimos, T é a composição da Inversão em C e da Inversão em L . A Transformação $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ fixa todos os pontos de C e se $z \in L$ é imediato que $f(z) \in L$.

Por sua vez, a Transformação $g(z) = \bar{z}$ fixa todos os pontos de L e se $z \in C$, então $|g(z)| = |\bar{z}| = |z| = 1$, logo $z \in C$.

Deste modo, podemos concluir que a Função recíproca fixa a reta real e a circunferência unitária, mas não fixa cada ponto destes conjuntos individualmente.

No exemplo a seguir encontramos os pontos fixos da Função Recíproca.

Exemplo 3.3.3. Determine os pontos fixos da função $T(z) = \frac{1}{z}$.

Para determinarmos os pontos fixos de T , podemos calcular a equação $T(z) = z$, ou podemos pensar da seguinte forma: Sabemos que $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ fixa todos os números reais e que $g(z) = \bar{z}$ fixa todos os pontos com valor absoluto igual a 1, logo basta encontrarmos os números reais cujo módulo é igual a 1, isto é $z = 1$ e $z = -1$.

Listamos agora em forma de Teorema algumas das propriedades da Função Recíproca que são herdadas das Inversões que a compõe.

Proposição 3.3.4. *Seja $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ a Função Recíproca. Valem as seguintes propriedades:*

1. T é uma Transformação de \mathbb{C}^+ .
2. Se C é uma reta ou uma circunferência, então $T(C)$ é uma reta ou uma circunferência. Em particular, se C passa pela origem, então $T(C)$ é uma reta. Caso contrário, $T(C)$ é uma circunferência.
3. T é conforme em \mathbb{C}^+ .

Demonstração. O item (1) é demonstrado observando que T é uma composição de duas bijeções. O item (2) segue diretamente da demonstração da Proposição (3.2.3). Finalmente, para demonstrar o item (3), basta observar que T é uma composição de um número par de Inversões. ■

Uma equação para a imagem de uma reta ou circunferência C pela Transformação Recíproca é dada pela próxima proposição:

Proposição 3.3.5. Se $T(z) = \frac{1}{z}$ é a Transformação Recíproca e $C = \{z \in \mathbb{C}; cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0\}$ é uma reta ou circunferência, então

$$T(C) = \{w \in \mathbb{C}; dw\bar{w} + \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} + c = 0\}.$$

Demonstração. A equação para $T(C)$ é obtida aplicando a inversão em relação à reta real aos pontos da equação em (3.8). ■

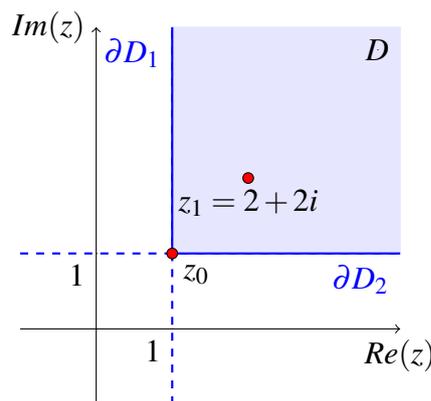
Veamos agora um exemplo retirado de Zill (2003, p. 108).

Exemplo 3.3.6. Determine a imagem da Região $D = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ pela Transformação Recíproca.

Seja $T(z) = \frac{1}{z}$ a Transformação Recíproca. Pela Proposição (2.1.9), para encontrarmos a imagem de um domínio, basta encontrarmos a imagem de sua fronteira e a imagem de um ponto pertencente ao domínio.

Se considerarmos $D_1 = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Re}(z) \geq 1\}$ e $D_2 = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$, então as fronteiras de D_1 e D_2 serão, respectivamente, as retas $\partial D_1 = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Re}(z) = 1\}$ e $\partial D_2 = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Im}(z) = 1\}$.

Figura 3.5 – Gráfico do Domínio $D = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$.



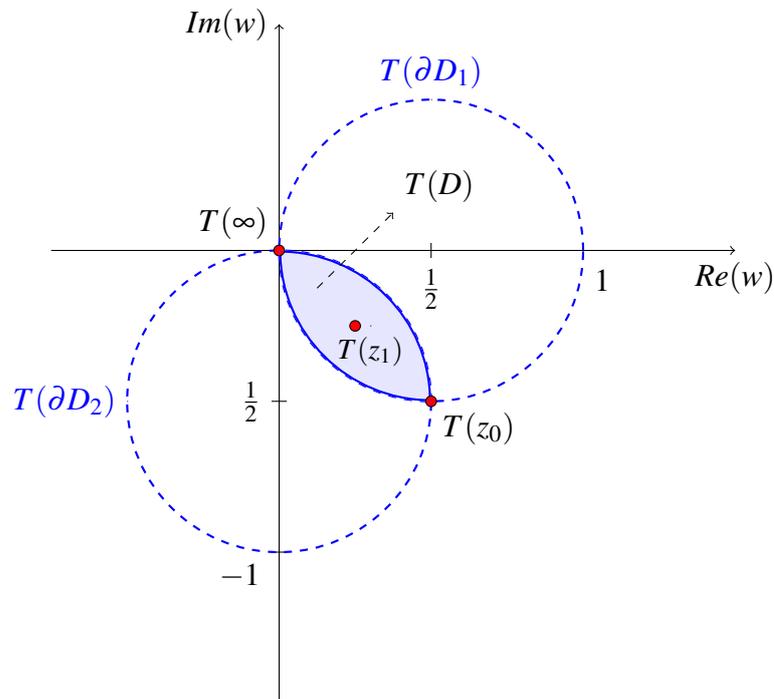
Fonte: Próprio autor (2022).

Observe na Figura 3.5 que ∂D_1 e ∂D_2 se interceptam em $z_0 = 1 + i$, logo a fronteira de D é dada pelas semirretas com origem em z_0 e contidas em ∂D_1 e ∂D_2 . Portanto, basta encontrarmos $T(\partial D_1)$ e $T(\partial D_2)$ e considerarmos apenas os pontos das imagens entre $T(z_0)$ e $T(\infty)$.

A reta ∂D_1 é dada pela equação $-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} + 1 = 0$. Neste caso, temos que $\alpha = -\frac{1}{2}$, $d = 1$ e $c = 0$. Logo, ∂D_1 não passa pela origem e pelo item (4) da Proposição (3.3.4) e pela Proposição (3.3.5), $T(\partial D_1)$ é a circunferência de equação $w\bar{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\bar{w} = 0$. Somando $\frac{1}{4}$ a ambos os lados da equação, chegamos que $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, a reta ∂D_2 é dada pela equação $\frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} + 1 = 0$. Com justificativas idênticas às que usamos para $T(\partial D_1)$, conclui-se que $T(\partial D_2)$ é a circunferência de equação $\left|w + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Figura 3.6 – Gráfico da imagem do Domínio $D = \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Re}(z) \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C}^+; \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ pela Transformação Recíproca.



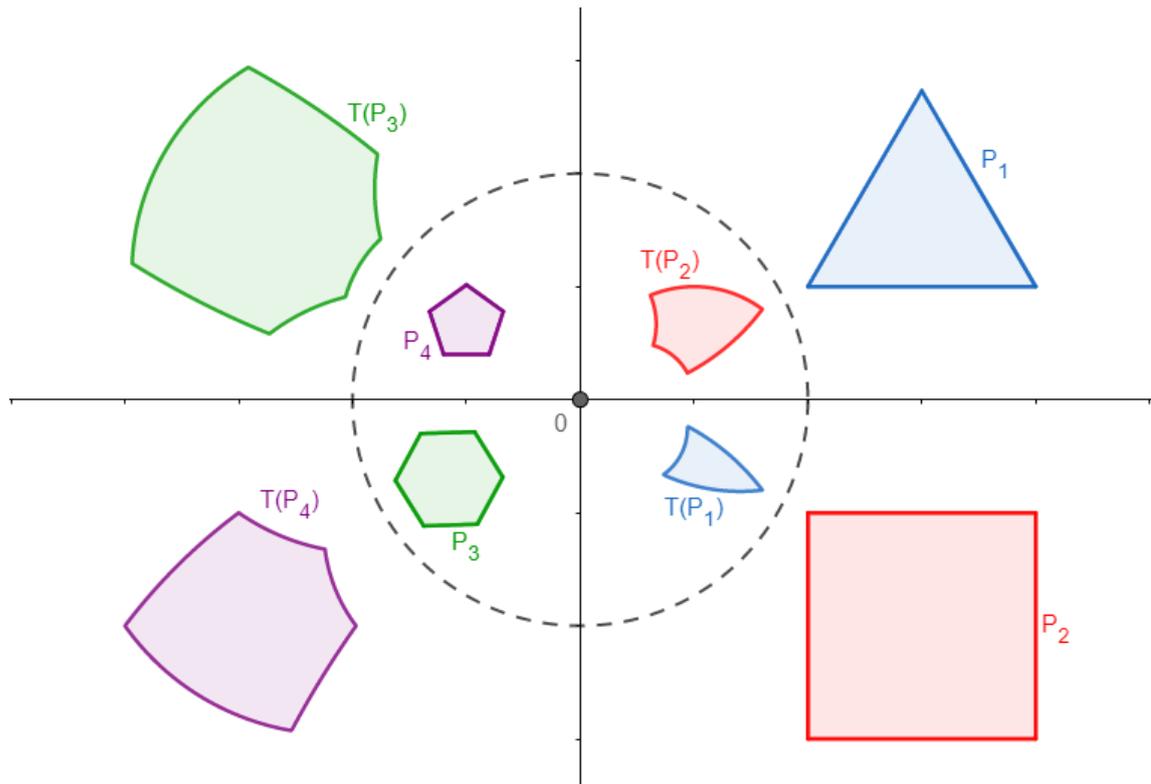
Fonte: Próprio autor (2022).

Assim, a imagem da fronteira de D são os arcos das $T(\partial D_1)$ e $T(\partial D_2)$ circunferências entre $T(z_0) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ e $T(\infty) = 0$. Tomando o ponto $z_1 = 2 + 2i$ em D , temos que $T(z_1) = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$. Portanto, a imagem de D por T (FIGURA 3.6) é o conjunto

$$T(D) = \left\{ w \in \mathbb{C}^+; \left| w - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ w \in \mathbb{C}^+; \left| w + \frac{i}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Finalizamos o capítulo com um exemplo visual de como a Transformação Recíproca distorce formas geométricas. Na Figura 3.7, utilizamos o software online gratuito Geogebra⁶ para construirmos as imagens de alguns polígonos através da Transformação Recíproca.

Figura 3.7 – Imagens de polígonos regulares pela Transformação Recíproca $T(z) = \frac{1}{z}$.



Fonte: Próprio autor (2022).

⁶ O Geogebra online pode ser acessado no link: <https://www.geogebra.org/calculator>.

4 TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Neste capítulo, daremos início ao estudo das Transformações de Möbius, também conhecidas como Transformações Lineares Fracionárias. Para isto, utilizaremos como referências principais as obras de Hitchman (2009) e Beardon (1995).

As três seções iniciais serão dedicadas respectivamente à definição das Transformações de Möbius no plano complexo estendido, à demonstração de que o conjunto \mathcal{M} de todas as Transformações de Möbius possui estrutura de grupo e a construção de um homomorfismo de grupos entre \mathcal{M} e o grupo das matrizes complexas invertíveis de ordem 2.

Na seção 4 veremos como as Transformações de Möbius podem ser escritas como uma composição de casos particulares da Transformação Afim e da Transformação Recíproca e também as propriedades que são consequências dessa composição.

Nas seções 5 e 6 veremos, respectivamente, resultados que nos auxiliarão nas demonstrações do Teorema Fundamental das Transformações de Möbius e do Princípio da Simetria.

4.1 A Transformação de Möbius

Definição 4.1.1. Chamamos de Transformação de Möbius a função complexa dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.1)$$

onde a, b, c e d são constantes complexas tais que $ad - bc \neq 0$.

À condição $ad - bc \neq 0$ estabelecida na definição anterior, damos o nome de **Determinante da Transformação**. Mais adiante veremos o porquê da necessidade do Determinante ser não nulo.

Quando em uma Transformação de Möbius T , tivermos $a \neq 0$ e $c = 0$, ela assumirá a forma de uma Transformação Afim dada por $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Nesse caso, como já vimos no Capítulo 2, T está definida em todo o plano complexo estendido.

No caso em que $c \neq 0$, observe que T está bem definida em todos os pontos de \mathbb{C} exceto por $z = -d/c$, pois neste ponto o denominador seria igual a zero. Assim, para definirmos uma Transformação de Möbius em \mathbb{C}^+ , utilizaremos as operações com o ponto no infinito fornecidas

pela Definição (2.8.2) e veremos o que acontece com os pontos $-d/c$ e ∞ se aplicarmos a função T .

Na primeira situação temos que

$$T(-d/c) = \frac{a(-d/c) + b}{c(-d/c) + d} = \frac{(-ad/c) + b}{0} = \infty.$$

Já no segundo caso, teríamos um problema ao substituirmos diretamente z por ∞ . Chegaríamos em na divisão ∞/∞ , uma operação que não está definida para o ponto no infinito. Para contornar tal problema, basta observarmos que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

e portanto

$$T(\infty) = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a + 0}{c + 0} = \frac{a}{c}.$$

Observando as expressões acima torna-se bastante razoável definirmos $T(-d/c) = \infty$ e $T(\infty) = a/c$. A partir destas considerações, podemos definir uma Transformação de Möbius T no plano complexo estendido do seguinte modo:

Se $a \neq 0$ e $c = 0$, T é uma Transformação Afim.

Se $c \neq 0$,

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{se } z \neq \infty \text{ e } z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{se } z = \infty \\ \infty & \text{se } z = -\frac{d}{c} \end{cases}. \quad (4.2)$$

No Capítulo 2 estudamos em detalhes as Transformações Afins, portanto neste capítulo estaremos interessados no caso em que $c \neq 0$.

Note que quando $a = d = 0$ e $b = c = 1$, a Transformação de Möbius assume a forma da Transformação $T(z) = \frac{1}{z}$ e $ad - bc = -1$. Logo as Transformações Afins e a Transformação Recíproca são casos particulares das Transformações de Möbius.

Até o momento, viemos chamando a função T da Definição (4.1.1) deliberadamente de Transformação. Porém, vimos nos capítulos anteriores que uma função é uma Transformação apenas se esta for bijetora. Portanto, veremos agora que as Transformações de Möbius são de

fato Transformações. O fato de o determinante de T ser não nulo garante que toda Transformação de Möbius é uma bijeção do plano complexo estendido em si mesmo.

Proposição 4.1.2. *A função definida em (4.2) é uma transformação de \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Seja T uma Transformação de Möbius, então

- T é injetora:

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+$ tais que $T(z_1) = T(z_2)$. Então

$$\begin{aligned}\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd &= acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd \\ z_1(ad - bc) &= z_2(ad - bc).\end{aligned}$$

Como $ad - bc \neq 0$, temos que $z_1 = z_2$. Logo T é injetora.

- Sobrejetora:

Seja $w \in \mathbb{C}^+$, precisamos encontrar $z \in \mathbb{C}^+$ tal que $T(z) = w$. Se $w = \infty$ ou $w = a/c$, por definição temos que os valores procurados de z são respectivamente $z = -d/c$ ou $z = \infty$. Suponha então que $w \neq \infty$ e $w \neq a/c$. Como $ad - bc \neq 0$, temos que a e c não se anulam simultaneamente, assim

$$\begin{aligned}\frac{az + b}{cz + d} &= w \\ az + b &= czw + dw \\ z(-cw + a) &= dw - b \\ z &= \frac{dw - b}{-cw + a}.\end{aligned}$$

Logo T é sobrejetora. ■

Devido à bijetividade, toda Transformação de Möbius $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ possui uma Transformação inversa. A função

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad (4.3)$$

encontrada durante a demonstração do teorema anterior, é uma forte candidata. Veremos na próxima seção que tal Transformação é de fato a Transformação inversa de T .

4.2 O grupo de Möbius

Mostraremos, nesta seção, que o conjunto de todas as Transformações de Möbius, que denotaremos por \mathcal{M} , possui estrutura de grupo com respeito à composição de funções. Para isso, precisamos mostrar que:

1. \mathcal{M} é fechado para a composição de funções;
2. Existe um elemento I em \mathcal{M} tal que $I \circ T = T \circ I = T, \forall T \in \mathcal{M}$;
3. $\forall T \in \mathcal{M}$, existe T' tal que $T' \circ T = T \circ T' = I$.

Primeiramente, suponha que T e S são Transformações de Möbius dadas por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad e \quad S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}.$$

Ao efetuarmos composição $T \circ S$, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} T(S(z)) &= [aS(z) + b] \cdot [cS(z) + d]^{-1} \\ &= \left[a \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'} \right) + b \right] \cdot \left[c \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'} \right) + d \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{aa'z + ab' + b(c'z + d')}{c'z + d'} \right] \cdot \left[\frac{ca'z + cb' + d(c'z + d')}{c'z + d'} \right]^{-1} \\ &= \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{ca'z + cb' + dc'z + dd'} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}. \end{aligned}$$

Através de algumas manipulações algébricas e simplificações podemos concluir que $(aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') = (ad - bc)(a'd' - b'c')$. Como T e S são ambas Transformações de Möbius, temos que $(ad - bc) \neq 0$ e $(a'd' - b'c') \neq 0$. Logo, segue que a composição $T \circ S$ de duas Transformações de Möbius dada por

$$(T \circ S)(z) = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \quad (4.4)$$

é também uma Transformação de Möbius.

Podemos facilmente verificar que $T \circ S$ está bem definida no plano complexo estendido. Para isso chamemos de $\alpha = aa' + bc'$, $\beta = ab' + bd'$, $\gamma = ca' + dc'$ e $\delta = cb' + dd'$. Logo de (4.4) temos que $(T \circ S)(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ e da definição de Transformação de Möbius em \mathbb{C}^+ vem que $(T \circ S)(\infty) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $(T \circ S)\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty$.

Por outro lado, a imagem de ∞ por S é o ponto $\frac{a'}{c'}$. Se aplicarmos T a esse ponto obtemos como imagem o ponto $\frac{aa' + bc'}{ca' + dc'} = \frac{\alpha}{\beta}$. Logo $T(S(\infty)) = \frac{\alpha}{\beta}$. De modo completamente análogo, podemos concluir que $T(S(-\delta/\gamma)) = \infty$.

Como bem sabemos, a composição de funções é uma operação associativa, consequentemente a composição de Transformações de Möbius também é associativa.

Note também, que o elemento neutro da composição de funções, a função identidade definida por $I_{\mathbb{C}^+}(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^+$, é uma Transformação de Möbius com $a = d = 1$ e $b = c = 0$.

Por fim, vimos anteriormente que toda Transformação de Möbius é bijetora. Então, se T é uma Transformação de Möbius, existe uma única função T^{-1} tal que $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{C}^+}$ e $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{C}^+}$. Vejamos agora, que a nossa candidata a inversa em (4.3) satisfaz tais condições. Para isso considere

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{e} \quad T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Utilizando a fórmula para composição de Transformações de Möbius obtida em (4.4), temos que

$$(T \circ T^{-1})(w) = \frac{(ad + b(-c))w + (a(-b) + ba)}{(cd + d(-c))w + (c(-b) + da)} = \frac{(ad - bc)w}{ad - bc} = w = I_{\mathbb{C}^+}(w)$$

e

$$(T^{-1} \circ T)(z) = \frac{(da + (-b)c)z + (db + (-d)b)}{(-ca + ac)z + (-cb + ad)} = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = z = I_{\mathbb{C}^+}(z).$$

Verifica-se que T^{-1} é também uma Transformação de Möbius observando que $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$.

Assim como fizemos com o caso da composição, mostraremos agora que T^{-1} está bem definida em \mathbb{C}^+ . Veja que $T^{-1}(\infty) = -d/c$ e que $T^{-1}(a/c) = \infty$, o que mostra que T^{-1} continua agindo como inversa de T no plano complexo estendido.

Com todas essas observações é possível concluir que o conjunto das Transformações de Möbius forma um grupo com a composição de funções.

Proposição 4.2.1. *O conjunto das Transformações de Möbius, denotado por \mathcal{M} , forma um grupo com a composição de funções.*

Note, que durante o processo de verificação de que \mathcal{M} é um grupo, encontramos na expressão (4.4) uma fórmula para determinarmos a composição de duas Transformações de Möbius. Além disso, confirmamos que a inversa é de fato dada pela expressão (4.3) que encontramos na seção anterior. Encerramos esta seção com exemplos de aplicações das duas expressões.

Exemplo 4.2.2. Dadas as Transformações de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ e $S(z) = \frac{iz+(2+i)}{2z+(1+i)}$, determine a Transformação composta $S \circ T$.

Observe que neste exemplo, queremos a composição $S \circ T$, então de S vem que $a = i$, $b = 2 + i$, $c = 2$ e $d = 1 + i$, e de T vem que $a' = 1$, $b' = -i$, $c' = 1$, $d' = i$. Portanto, pela expressão (4.4) temos que

$$\begin{aligned} (S \circ T)(z) &= \frac{(i \cdot 1 + (2+i) \cdot 1)z + (i \cdot (-i) + (2+i) \cdot i)}{(2 \cdot 1 + (1+i) \cdot 1)z + (2 \cdot (-i) + (1+i) \cdot i)} \\ &= \frac{(i+2+i)z + (-i^2 + 2i + i^2)}{(2+1+i)z + (-2i + i + i^2)} \\ &= \frac{2(1+i)z + 2i}{(3+i)z - (1+i)}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.3. Encontre a Transformação Inversa da Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z}{iz-4i}$.

Neste exemplo, temos $a = 1$, $b = 0$, $c = i$ e $d = -4i$. Logo, pela expressão (4.3), a inversa de T é dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{-4iz - 0}{-iz + 1} = \frac{4iz}{iz - 1}.$$

Vale ressaltar, que como Transformações Afins são casos particulares das Transformações de Möbius, $Aff(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}$ e como vimos, $Aff(\mathbb{C})$ é um grupo com a composição de funções, o que nos mostra que $Aff(\mathbb{C})$ é um subgrupo de \mathcal{M} .

4.3 Representação matricial

Nesta seção, mostraremos que toda Transformação de Möbius pode ser representada por uma matriz complexa de ordem 2.

Considere o grupo $GL(2, \mathbb{C})$ das matrizes complexas 2×2 invertíveis. Nesta seção, veremos que é possível representarmos qualquer Transformação de Möbius utilizando algum elemento de $GL(2, \mathbb{C})$.

Para isso, considere uma matriz qualquer $A \in GL(2, \mathbb{C})$. Temos que A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Como o determinante é não nulo, podemos fazer corresponder a cada matriz A , uma Transformação de Möbius em \mathcal{M} que denotaremos por T_A , de forma que

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Deste modo, podemos definir uma aplicação $\phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

ou em outros termos, $\phi(A) = T_A(z)$. Assim, podemos dizer que A é uma representação matricial de T_A .

Observe, que ϕ é uma aplicação sobrejetora, pois dada qualquer $T \in \mathcal{M}$ é possível encontrar uma matriz $A \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que $\phi(A) = T$. Com efeito, se $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, então $ad - bc \neq 0$, logo existe uma matriz invertível $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e, portanto

$$\phi(A) = T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = T(z).$$

O fato de ϕ ser sobrejetora, nos garante que toda Transformação de Möbius possui ao menos uma representação matricial.

Por outro lado, ϕ não é injetora, pois dadas matrizes complexas invertíveis $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, onde λ é um número complexo não nulo qualquer, temos que

$$\phi(Y) = T_Y(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d} = T_X(z) = \phi(X).$$

Podemos concluir, então, que toda matriz $Y = \lambda X$ é uma representação matricial de $T_X(z)$. Como λ é um número complexo arbitrário, temos que cada Transformação de Möbius em \mathcal{M} possui infinitas representações matriciais.

Considere agora duas matrizes, A e B pertencentes à $GL(2, \mathbb{C})$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Recordando da Álgebra Linear que o produto de A por B é dado por

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix},$$

e da fórmula (4.4) que deduzimos para a composição de Transformações de Möbius na seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} \phi(AB) &= T_{AB}(z) \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\ &= T_A(T_B(z)) \\ &= T_A \circ T_B, \end{aligned}$$

o que nos mostra que a aplicação ϕ é um homomorfismo¹ de grupos e que o produto AB é uma representação matricial da composição $T_A \circ T_B$.

Além disso, o fato de ϕ ser um homomorfismo também garante que $\phi(A^{-1}) = T_A^{-1}$, isto é, a matriz inversa de A é a representação matricial da Transformação inversa de T_A .

Temos agora ferramentas alternativas para determinarmos a composição e inversa de quaisquer Transformações de Möbius. Em algumas situações, trabalhar com a representação matricial pode ser mais vantajoso, pois o produto de matrizes é uma operação mais simples do que a composição de Transformações. Vejamos um par de exemplos.

Exemplo 4.3.1. Dadas as Transformações de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ e $S(z) = \frac{iz+(2+i)}{2z+(1+i)}$, determine a Transformação composta $S \circ T$ utilizando representação matricial.

Como toda Transformação de Möbius possui uma representação matricial, podemos encontrar matrizes representantes para T e S . Sejam então $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}$ as respectivas representações de T e S . Para determinarmos a composta $S \circ T$, basta determinarmos a imagem do produto de B por A através de ϕ , ou seja $(S \circ T)(z) = \phi(BA)$.

O produto BA é dado por

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i+2+i & -i^2+(2+i)i \\ 2+1+i & -2i+(1+i)i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(1+i) & 2i \\ 3+i & -(1+i) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

logo

$$(S \circ T)(z) = \phi(BA) = \frac{2(1+i)z + 2i}{(3+i)z - (1+i)}.$$

Observe que, no exemplo anterior, utilizamos as mesmas Transformações do exemplo (4.2.2) e como era de se esperar, o resultado encontrado é exatamente o mesmo em ambos os exemplos.

¹ Para uma definição de homomorfismo de grupos, ver Domingues e Iezzi (2003, p. 162).

Exemplo 4.3.2. Encontre a Transformação Inversa da Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z}{iz - 4i}$.

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -4i \end{pmatrix}$ a representação matricial de T . Para encontrarmos a inversa de T ,

basta encontrarmos a imagem da matriz inversa de A através de ϕ , em outras palavras, $T^{-1}(z) = \phi(A^{-1})$.

Recordando que a matriz inversa pode ser calculada pela fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

temos que a matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{-4i} \begin{pmatrix} -4i & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{4} \end{pmatrix}.$$

Logo

$$T^{-1}(z) = \phi(A^{-1}) = \frac{z}{z/4 + i/4} = \frac{4z}{z+i}.$$

Note que se multiplicarmos o numerador e o denominador de T^{-1} por i , chegaremos ao mesmo resultado encontrado no exemplo (4.2.3), o qual encontramos a inversa da mesma Transformação T .

Sabe-se que se $f : G \rightarrow J$ é um homomorfismo de grupos quaisquer, o seu núcleo é constituído por todos os elementos de G que são levados ao elemento neutro de J por meio de f , isto é

$$N(f) = \{x \in G; f(x) = u\},$$

onde u é o elemento neutro de J .

No caso de $\phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$, temos que seu núcleo é dado por

$$N(\phi) = \{X \in GL(2, \mathbb{C}); \phi(X) = I_{\mathbb{C}^+}\}.$$

Observe que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N(\phi)$ se, e somente se, X satisfaz a igualdade $T_X(z) = z$,

que é equivalente a

$$\frac{az+b}{cz+d} = z, \tag{4.5}$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$cz^2 + (a - d)z + b = 0. \quad (4.6)$$

Como estamos procurando pela forma dos elementos de $N(\phi)$, devemos encontrar os valores das constantes complexas a , b , c e d que satisfazem a equação (4.6). Como (4.6) é válida para todo valor de $z \in \mathbb{C}^+$, podemos escolher quaisquer valores de z que nos sejam convenientes e substituímos na equação. Tomando $z = 1$, $z = -1$ e $z = 0$ chegamos ao sistema de equações

$$\begin{cases} c + a - d + b = 0 \\ c - a + d + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} .$$

Somando a primeira e a segunda equação e substituindo o valor de b , chegamos que $c = 0$. Depois, ao substituímos os valores de b e c na primeira equação, chegamos em $a = d$.

Logo, $X \in N(\phi)$ se, e somente se $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, com $a \neq 0$, pois em uma Transformação de Möbius, a e c não podem ser simultaneamente nulos. Portanto

$$N(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \neq 0 \right\}.$$

Segue do fato de ϕ ser um homomorfismo que $N(\phi)$ é um subgrupo normal de $GL(2, \mathbb{C})$ e portanto podemos definir o grupo quociente $GL(2, \mathbb{C})/N(\phi) = \{A \cdot N(\phi); A \in GL(2, \mathbb{C})\}^2$.

Portanto, segue pelo Teorema do Homomorfismo³, que o grupo \mathcal{M} é isomorfo ao grupo quociente $GL(2, \mathbb{C})/N(\phi)$. Isto prova que cada Transformação de Möbius T_A determina a matriz A e todas as matrizes λA , com λ um número complexo não nulo.

Se, ao longo das construções realizadas nesta seção, substituímos $GL(2, \mathbb{C})$ pelo grupo $SL(2, \mathbb{C})$ das matrizes complexas invertíveis 2×2 e de determinante igual a um, teríamos que cada Transformação de Möbius T_A determinaria apenas duas matrizes: A e $-A$. Basta observar que $N(\phi) \cap SL(2, \mathbb{C}) = \{I, -I\}$, onde I é a matriz identidade.

² Ver Domingues e Iezzi (2003, p. 196), Lema 1.

³ Ver Domingues e Iezzi (2003, p. 197), Proposição 24.

4.4 Propriedades

Vimos, na primeira seção deste capítulo, que Transformações Afins e Inversões são casos particulares da Transformação de Möbius. Agora mostraremos que sempre é possível escrevermos uma Transformação de Möbius como uma composição destes casos particulares.

Proposição 4.4.1. *A Transformação $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é uma Transformação de Möbius se, e somente se, T é a composição $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, onde T_1 e T_4 são Translações, T_2 é a Transformação Recíproca e T_3 é uma Rotação e Homotetia.*

Demonstração. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma Transformação de Möbius. Como mencionamos, quando $c = 0$, T torna-se uma Transformação Afim e este caso foi demonstrado na Proposição (2.7.1). Suponha então que $c \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{caz+cb}{c(cz+d)} \\ &= \frac{caz+cb+ad-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{bc-ad+a(cz+d)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c} = T_4(T_3(T_2(T_1(z)))) \end{aligned}$$

onde $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$, $T_3(z) = \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)z$ e $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$. Temos que T_1 e T_4 são claramente Translações, T_2 é a Transformação recíproca e T_3 é uma composição entre uma Rotação e uma Homotetia.

Por outro lado, sejam $T_1(z) = z + \alpha$ e $T_4(z) = z + \beta$ Translações, $T_2(z) = 1/z$ e $T_3(z) = \gamma z$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ não nulos. Logo

$$T_4(T_3(T_2(T_1(z)))) = \frac{\gamma}{z+\alpha} + \beta = \frac{\beta z + (\beta\alpha + \gamma)}{z+\alpha}.$$

Temos, que $a = \beta$, $b = \beta\alpha + \gamma$, $c = 1$ e $d = \alpha$ e portanto $ad - bc = \beta\alpha - (\beta\alpha + \gamma) = \gamma \neq 0$ e portanto $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ é uma Transformação de Möbius. ■

Da demonstração da Proposição (4.4.1) retiramos que uma Transformação de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é a composição das seguintes Transformações:

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}; \quad (4.7a)$$

$$T_2(z) = \frac{1}{z}; \quad (4.7b)$$

$$T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z; \quad (4.7c)$$

$$T_4(z) = z + \frac{a}{c}. \quad (4.7d)$$

Ao considerarmos uma Transformação de Möbius como uma composição de Transformações mais simples, obtemos um método alternativo para determinarmos a Transformação inversa de uma dada Transformação de Möbius. Com efeito, considere a Transformação de Möbius T e as Transformações em (4.7), logo

$$T^{-1} = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1} \circ T_4^{-1}. \quad (4.8)$$

Podemos comparar o resultado deste método com a Transformação de Möbius inversa que obtemos no final a primeira seção deste capítulo. Para isso considere $T_1^{-1}(w) = w - d/c$, $T_2^{-1}(w) = 1/w$, $T_3^{-1}(w) = (c^2/(bc-ad))w$ e $T_4^{-1}(w) = w - a/c$. Se substituirmos essas Transformações na expressão (4.8) chegamos no seguinte resultado:

$$T^{-1}(z) = \frac{bc-ad}{c^2(z-a/c)} - \frac{d}{c} = \frac{bc-ad-cd(z-a/c)}{c^2(z-a/c)} = \frac{c(b-dz)}{c(cz-a)} = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

que é exatamente a Transformação de Möbius inversa que encontramos anteriormente.

Olhando para uma Transformação de Möbius como uma composição de seus casos particulares, também podemos entender o seu comportamento gráfico. Vejamos um exemplo do que acontece com o eixo real ao aplicarmos sobre ele uma certa Transformação de Möbius.

Exemplo 4.4.2. Determine a imagem do eixo real pela Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Seja C a reta real. Primeiramente, vamos determinar as transformações que compõem T . Observe, que $d/c = i$, $(ad - bc)/c^2 = -2i$ e $a/c = 1$. Logo as Transformações de (4.7) ficam da seguinte forma:

$$T_1(z) = z + i, \quad T_2(z) = 1/z,$$

$$T_3(z) = -2iz, \quad T_4(z) = z + 1.$$

T_1 é uma Translação com $T_1(0) = i$ e $T_1(1) = 1 + i$, logo T_1 leva a reta C na reta $T_1(C) = C'$ passando por i e $1 + i$.

Como já vimos no exemplo (3.3.6), C' é a reta de equação $\frac{i}{2}z' - \frac{i}{2}\bar{z}' + 1 = 0$ e é levada por T_2 na circunferência $T_2(C') = C'' : \left| z'' + \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

As Transformações T_3 e T_4 são Afins e Aplicando sucessivamente a expressão em 2.4, temos que C'' é levada por T_3 na circunferência $T_3(C'') = C''' : |z''' + 1| = 1$ e C''' é levada por T_4 na circunferência $T_4(C''') = T(C) : |w| = 1$.

Portanto, a imagem do eixo real por T é a circunferência centrada na origem e de raio igual a um (FIGURA 4.1).

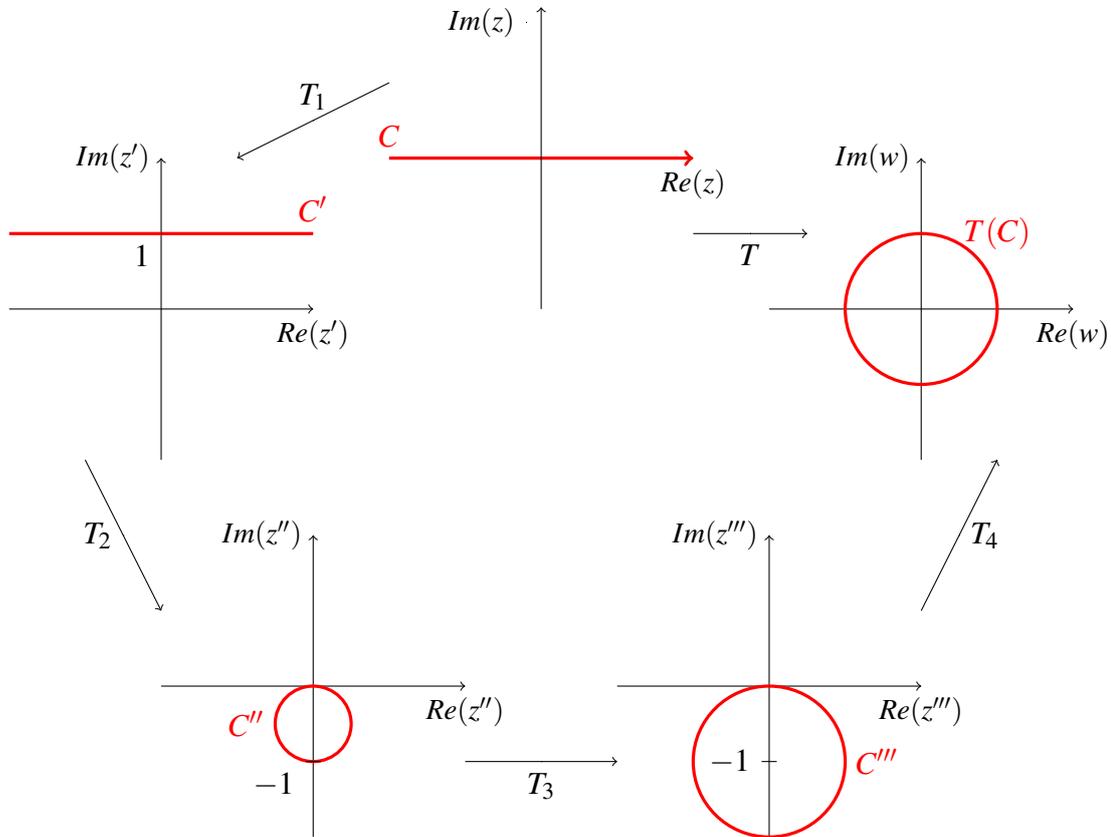
Como as Transformações de Möbius são compostas por algumas Transformações afins e pela Transformação Recíproca, elas irão compartilhar algumas de suas características. Como vimos no Capítulo 2, Transformações Afins preservam retas e circunferências. Já no Capítulo 3, vimos que no caso da Transformação Recíproca, retas e circunferências que passam pela origem são levadas em retas e as que não passam são levadas em circunferências.

Como foi possível observar no exemplo (4.4.2) e na Figura 4.1, em uma Transformação de Möbius, a Transformação Recíproca presente na composição é quem irá determinar quais serão as imagens de retas e circunferências.

A partir da ideia de composição de Transformações, demonstramos as Proposições (4.4.3) e (4.4.5) a seguir.

Proposição 4.4.3. *Se C é uma circunferência ou uma reta no plano complexo estendido e T uma Transformação de Möbius, então a imagem de C através de T é uma circunferência ou uma reta. Em particular, se $-d/c \in C$, a imagem de C através de T será uma reta, caso contrário a imagem de C será uma circunferência.*

Figura 4.1 – Imagem da reta real sob a ação da Transformação de Möbius $T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = (z - i)/(z + i)$.



Fonte: Próprio autor (2022).

Demonstração. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Pela Proposição (4.4.1), $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, onde $T_1(z) = z + d/c$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$, $T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ e $T_4(z) = z + a/c$.

Suponhamos que C seja uma circunferência ou uma reta e que C' seja a imagem de C por T_1 . Se $-d/c \in C$ então $T_1(-d/c) = 0 \in C'$ e portanto pelo item (2) da Proposição (3.3.4), a imagem de C' por T_2 é uma reta. Se $-d/c \notin C$, então $T_1(z) \neq 0$ para todo $z \in C$. Deste modo, $0 \notin C'$ e novamente pelo item (2) da Proposição (3.3.4), a imagem de C' por T_2 é uma circunferência. Como T_3 e T_4 são Transformações Afins, temos que se $-d/c \in C$, $T(C)$ é uma reta, caso contrário $T(C)$ é uma circunferência. ■

Com este resultado em mãos, podemos determinar diretamente a imagem de qualquer circunferência ou reta por uma Transformação de Möbius T . Não há mais necessidade de analisarmos cada uma das Transformações elementares que compõem T . Vejamos um exemplo.

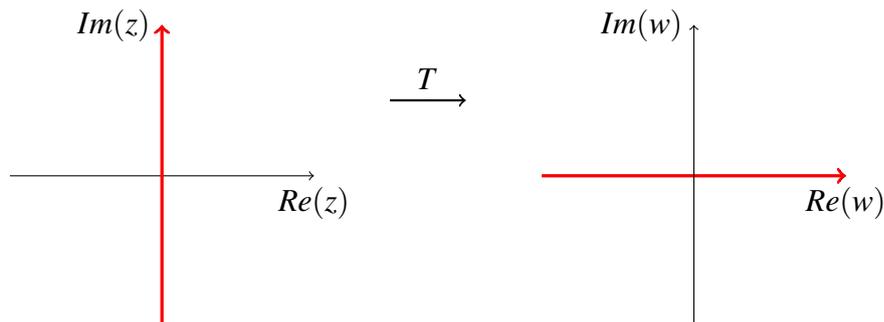
Exemplo 4.4.4. Determine a imagem do eixo imaginário pela Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Primeiramente observe que $-d/c = -i$ pertence ao eixo imaginário. Portanto, pela Proposição (4.4.3), a imagem do eixo imaginário através de T é uma reta. Para determinarmos exatamente qual é a reta, basta calcularmos a imagem de dois pontos do eixo imaginário por T :

$$T(0) = -1 \quad T(i) = 0.$$

Portanto, a imagem do eixo imaginário por T é a reta passando por -1 e 0 , ou seja o eixo real (FIGURA 4.2).

Figura 4.2 – Imagem do eixo imaginário sob a ação de $T(z) = (z-i)/(z+i)$.



Fonte: Próprio autor (2022).

Proposição 4.4.5. Transformações de Möbius são conformes em \mathbb{C}^+ .

Demonstração. O resultado segue do fato das Transformações de Möbius serem uma composição de Transformações conformes. ■

O exemplo a seguir é uma aplicação das Proposições (4.4.3), (4.4.5) e (2.1.9).

Exemplo 4.4.6. Determine a imagem do círculo $D = \{z \in \mathbb{C}^+; |z-2| < 2\}$ pela Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z}{2z-8}$.

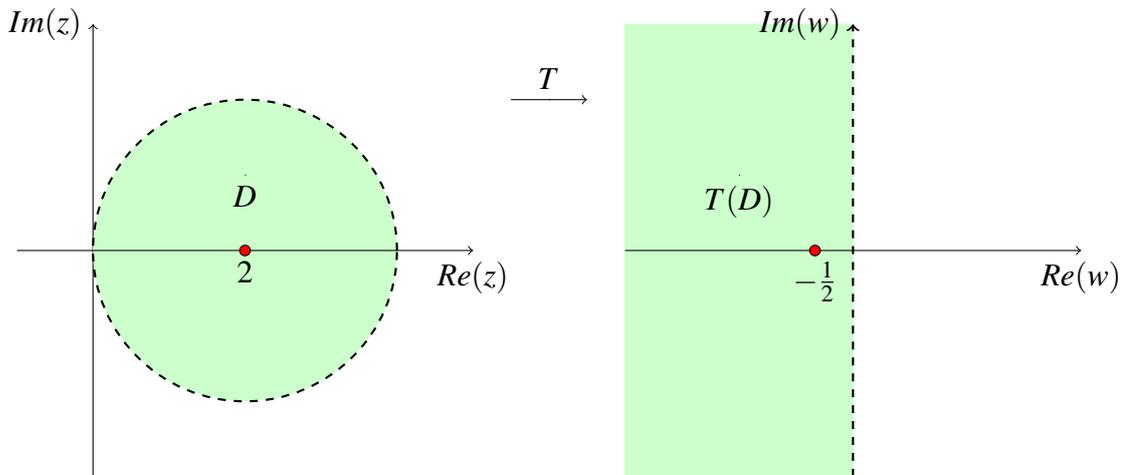
Temos que a fronteira de D é a circunferência $\partial D : |z-2| = 2$. Temos que $T(\partial D)$ é uma reta, pois $-d/c = 8/2 = 4 \in \partial D$. Para determinarmos a reta $T(\partial D)$ tomemos dois pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 2(1+i)$ pertencentes a ∂D e calculamos suas imagens:

$$T(z_1) = \frac{0}{2 \cdot 0 - 8} = 0 \quad T(z_2) = \frac{2(1+i)}{2 \cdot 2(1+i) - 8} = -\frac{i}{2},$$

Logo $T(\partial D)$ é o eixo imaginário.

Para sabermos se D é mapeado no plano à esquerda ou no plano à direita do eixo imaginário, calculamos a imagem de um ponto pertencente ao interior de D . Tomando o ponto $z_0 = 2$, temos que $T(2) = -1/2$. Como $-1/2$ pertence a $Re(w) < 0$, segue que D é levado por T no plano à esquerda do eixo imaginário, isto é, $T(D) = \{w \in \mathbb{C}^+; Re(w) < 0\}$ (FIGURA 4.3).

Figura 4.3 – Imagem do disco D sob a Transformação de Möbius $T(z) = z/(2z - 8)$.



Fonte: Próprio autor (2022).

4.5 O Teorema Fundamental

No exemplo (4.4.4), vimos que a Transformação de Möbius $T(z) = (z - i)/(z + i)$ leva o eixo imaginário no eixo real. Mas e se quisermos levar o eixo real no eixo imaginário? Seria possível encontrarmos uma Transformação de Möbius capaz de realizar tal feito? A resposta é sim. Se T leva o eixo imaginário no eixo real, basta encontrarmos uma Transformação que faz o caminho contrário. Tal Transformação é a Transformação inversa de T dada por $T^{-1}(z) = (-iz - i)/(z - 1)$.

Podemos generalizar nosso raciocínio e mostrar que dadas quaisquer circunferências (ou retas) C_1 e C_2 é possível construirmos uma Transformação de Möbius T tal que $T(C_1) = C_2$. Devido à Proposição (B.3.2) do Anexo B, isso torna-se uma consequência de mostrar que sempre existe uma Transformação de Möbius que mapeia quaisquer três pontos z_1, z_2 e z_3 de \mathbb{C}^+ em quaisquer três pontos w_1, w_2 e w_3 de \mathbb{C}^+ .

Isso é precisamente o que afirma o Teorema Fundamental das Transformações de Möbius. Porém antes de enuncia-lo, precisamos de alguns resultados importantes que nos auxiliarão em sua demonstração. O primeiro deles é uma caracterização das Transformações de Möbius através de Inversões.

Proposição 4.5.1. *Uma Transformação $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é uma Transformação de Möbius se, e somente se, T é uma composição de um número par de Inversões.*

A demonstração da Proposição (4.5.1) é um tanto quanto longa, portanto não iremos demonstra-lo neste texto. O leitor interessado na demonstração poderá encontra-la em Hitchman (2009, p. 56-57).

Unindo a Proposição (4.5.1) e o Corolário (3.2.6), temos uma segunda via de justificar que Transformações de Möbius são conformes.

O segundo resultado fala sobre os pontos fixos de uma Transformação de Möbius. Como já vimos anteriormente, os pontos fixos de uma transformação T , são todos os pontos $z \in \mathbb{C}^+$ tais que $T(z) = z$.

Proposição 4.5.2. *Se $T : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ é uma Transformação de Möbius, então T fixa 1, 2 ou todos os pontos de \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Para encontrarmos os pontos fixos de uma Transformação de Möbius $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, basta resolvermos a equação

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

em função de z , o que nos leva à equação quadrática:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (4.9)$$

Temos então três casos à considerar.

1. Se $c \neq 0$, então a equação (4.9) acima possui 1 ou 2 soluções⁴ e consequentemente T possui 1 ou 2 pontos fixos. A saber, os pontos fixos neste caso são:

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

⁴ Equações do segundo grau sempre possuem soluções no conjunto dos números complexos.

Se o discriminante for diferente de zero, temos dois pontos fixos distintos, caso contrário temos apenas um.

2. Se $c = 0$ e $a \neq d$, então a Transformação de Möbius T é uma Transformação Linear e como sabemos, Transformações Lineares fixam $z = \infty$. A equação (4.9) se reduz a $(d - a)z - b = 0$ que tem como solução $z = b/(d - a) \neq \infty$. Logo, também temos 2 pontos fixos neste caso.
3. Se $c = 0$ e $a = d$, a equação (4.9) reduz-se para $-b = 0$, logo $b = 0$ e T assume a forma $T(z) = (az + 0)/(0z + a) = z$, ou seja T é a Transformação identidade e portanto fixa todos os pontos de \mathbb{C}^+ .

■

Com esses dois resultados em mãos, podemos finalmente enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental das Transformações de Möbius.

Teorema 4.5.3 (Teorema Fundamental das Transformações de Möbius). *Existe uma única Transformação de Möbius que leva quaisquer três pontos distintos de \mathbb{C}^+ em quaisquer três pontos distintos de \mathbb{C}^+ .*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^+$ pontos distintos entre si e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^+$ pontos também distintos entre si. Mostraremos que existe uma única Transformação de Möbius, que mapeia $z_i \mapsto w_i$, para $i = 1, 2, 3$. Para isso, primeiro mostraremos que existe uma Transformação que leva z_1 em 0, z_2 em 1 e z_3 em ∞ . Considerando $z_3 \neq \infty$, construiremos tal transformação seguindo alguns passos:

- Passo 1: Aplicamos a Translação $z \mapsto z - z_3$. Deste modo, z_3 é levado em 0 enquanto z_1 e z_2 são levados, respectivamente, em pontos z'_1 e z'_2 .
- Passo 2: Aplicamos a Transformação Recíproca $z \mapsto 1/z$. Assim 0 é levado no ponto ∞ e z'_1 e z'_2 são levados, respectivamente, em pontos z''_1 e z''_2 .
- Passo 3: Aplicamos a Translação $z \mapsto z - z''_2$. Desta forma, z''_2 é levado em 0, z''_1 é levado em algum ponto z'''_1 e ∞ é mantido fixo.

- Passo 4: Aplicamos uma composição de Rotação e Homotetia de forma que z_1''' seja levado em 1. Os pontos 0 e ∞ são mantidos fixos por esta Transformação.

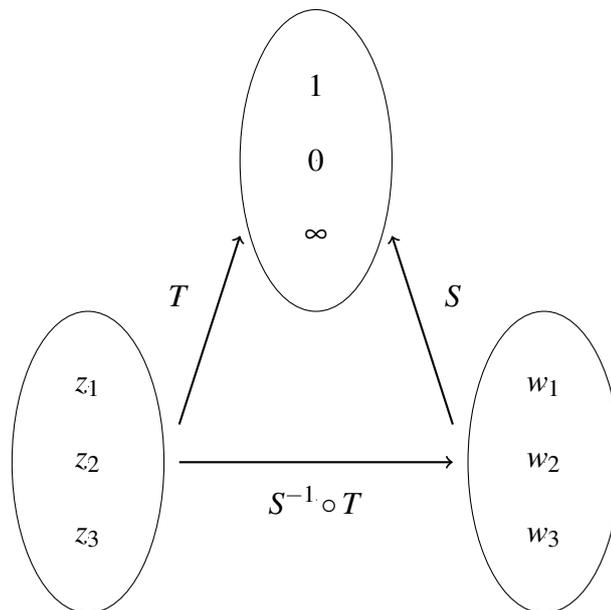
No caso em que $z_3 = \infty$, basta iniciarmos pelo terceiro passo.

Em ambos os casos, obtemos uma composição de um número par de Inversões, pois Translações, Rotações, Homotetias e a Transformação Recíproca são composições de duas Inversões cada. Portanto, pela Proposição (4.5.1), temos uma Transformação de Möbius levando quaisquer três pontos distintos em 1, 0 e ∞ . Chamemos de T tal Transformação de Möbius.

De modo análogo, podemos construir uma Transformação de Möbius S que leva $w_1 \mapsto 1$, $w_2 \mapsto 0$ e $w_3 \mapsto \infty$.

Logo, a composição $S^{-1} \circ T$ será uma Transformação de Möbius que mapeia $z_i \mapsto w_i$, para $i = 1, 2, 3$ (FIGURA 4.4).

Figura 4.4 – Diagrama da construção de uma Transformação de Möbius que leva $z_i \mapsto w_i$ para $i = 1, 2, 3$, passando por 0, 1 e ∞ .



Fonte: Próprio autor (2022).

Demonstraremos agora, a unicidade de tal Transformação de Möbius. Suponha que existam duas Transformações de Möbius, F e G , que levam $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$ e $z_3 \mapsto w_3$. Então, $F^{-1} \circ G$ é uma Transformação de Möbius tal que $F^{-1} \circ G(z_i) = z_i$, para $i = 1, 2, 3$. Ou seja z_1, z_2 e z_3 são fixados por $F^{-1} \circ G$. De acordo com a Proposição (4.5.2), $F^{-1} \circ G$ é a função

identidade, pois fixa mais de dois pontos. Logo $F^{-1} \circ G = I_{\mathbb{C}^+}$. Realizando a composição de F em ambos os lados da igualdade, chegamos em $G = F$. ■

O Teorema Fundamental das Transformações de Möbius nos afirma que toda Transformação em \mathcal{M} é unicamente determinada pela imagem de três pontos. Nesse sentido, o corolário seguinte é uma consequência direta do teorema anterior.

Corolário 4.5.4. *Sejam C_1 e C_2 circunferências (ou retas), existe uma Transformação de Möbius T que mapeia C_1 em C_2 , ou seja, $T(C_1) = C_2$.*

Demonstração. Já demonstramos que Transformações de Möbius mapeiam circunferências e retas em circunferências ou retas. Sabemos que toda circunferência (ou reta) é unicamente determinada pela imagem de três pontos (não colineares no caso da circunferência). Logo, basta tomarmos $z_1, z_2, z_3 \in C_1$ e $w_1, w_2, w_3 \in C_2$ e construirmos uma Transformação de Möbius T que mapeia $z_i \mapsto w_i$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, C_1 será mapeada em uma circunferência (ou reta) contendo w_i , como existe uma única circunferência (ou reta) passando por w_i , então esta é C_2 . Portanto $T(C_1) = C_2$. ■

4.6 O Princípio da Simetria

No decorrer da demonstração do Teorema (4.5.3), construímos através da composição de Inversões uma Transformação de Möbius que leva quaisquer três pontos distintos de \mathbb{C}^+ , digamos z_1, z_2 e z_3 , em $1, 0$ e ∞ respectivamente. Tal Transformação é definida através da **Razão Cruzada** e terá um papel fundamental na demonstração do Princípio da Simetria. Portanto, faz-se necessário deduzirmos uma descrição algébrica para esse caso especial de Transformação de Möbius.

Queremos descrever uma Transformação de Möbius T tal que $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ e $T(z_3) = \infty$ em que $z_i \neq \infty$. Para isso, considere $T(z) = (az + b)/(cz + d)$. Nesse caso, T deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 1; \quad (4.10a)$$

$$\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = 0; \quad (4.10b)$$

$$\frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \infty. \quad (4.10c)$$

Primeiramente, note que, de (4.10a) vem que

$$az_1 + b = cz_1 + d. \quad (4.11)$$

Para que a equação (4.10b) seja satisfeita, o numerador precisa ser igual a zero, logo temos que $b = -az_2$. E para satisfazer (4.10c), é necessário que $z_3 = -d/c$ e assim temos que $d = -cz_3$. Substituindo os valores de b e d em (4.11) chegamos em:

$$az_1 - az_2 = cz_1 - cz_3 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Note, que os pontos $a = z_1 - z_3$ e $c = z_1 - z_2$ satisfazem a igualdade. Deste modo, temos que $b = -z_2(z_1 - z_3)$ e $d = -z_3(z_1 - z_2)$. Portanto a Transformação de Möbius T que leva $z_1 \mapsto 1$, $z_2 \mapsto 0$ e $z_3 \mapsto \infty$ é dada por

$$T(z) = \frac{(z_1 - z_3)z - (z_1 - z_3)z_2}{(z_1 - z_2)z - (z_1 - z_2)z_3} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}. \quad (4.12)$$

Pela construção realizada na demonstração do Teorema Fundamental, está claro que T é uma Transformação de Möbius, mas podemos verificar observando que

$$\begin{aligned} ad - bc &= -(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)z_3 - [-(z_1 - z_3)z_2(z_1 - z_2)] \\ &= (z_1 - z_3)(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \neq 0, \end{aligned}$$

pois os pontos z_i são distintos entre si.

Além disso, é fácil perceber que se, em (4.12), substituirmos z por z_1 , z_2 e z_3 , chegaremos respectivamente em 1, 0 e ∞ .

Se algum dos três pontos for $z_i = \infty$, então a Transformação T em (4.12) se reduz a um dos casos abaixo:

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}, \quad \text{se } z_1 = \infty; \quad (4.13a)$$

$$T(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}, \quad \text{se } z_2 = \infty; \quad (4.13b)$$

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \quad \text{se } z_3 = \infty. \quad (4.13c)$$

Relembramos aqui que podemos interpretar T como a Transformação de Möbius que mapeia qualquer circunferência (ou reta) no eixo real.

Ao quociente encontrado na expressão (4.12) damos a seguinte definição:

Definição 4.6.1. Sejam z_0, z_1, z_2 e z_3 pontos distintos dois a dois em \mathbb{C}^+ . A expressão

$$[z_0, z_1; z_2, z_3] = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \quad (4.14)$$

é chamada de Razão Cruzada de z_0, z_1, z_2 e z_3 .

A Razão Cruzada em si não é uma Transformação, mas sim uma expressão que fornece um ponto do plano complexo estendido por meio de uma relação entre quatro outros pontos distintos. Mas se considerarmos $z_0 = z$ como uma variável e z_1, z_2 e z_3 distintos, então $T(z) = [z, z_1; z_2, z_3]$ é a Transformação de Möbius em (4.12) que leva $z \mapsto [z, z_1; z_2, z_3]$.

Ressaltamos também, que a ordem em que os pontos z_0, z_1, z_2 e z_3 aparecem dentro dos colchetes é importante. Em geral, uma mudança na ordem em que os pontos aparecem altera o resultado da Razão Cruzada. Por exemplo se $z_0 = 2, z_1 = 3, z_2 = 4$ e $z_3 = 5$, temos que $[z_0, z_1; z_2, z_3] = 4/3$ e $[z_1, z_0; z_2, z_3] = 3/4$.

Vejamos agora, um exemplo de como podemos utilizar a Razão Cruzada para determinarmos uma Transformação de Möbius.

Exemplo 4.6.2. Encontre a Transformação de Möbius que leva $0 \mapsto i, 2 \mapsto 1$ e $-i \mapsto 3$.

Sejam $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = -i, w_1 = i, w_2 = 1$ e $w_3 = 3$. Sejam $T(z) = [z, 0; 2, -i]$ e $S(w) = [w, i; 1, 3]$. Pelo Teorema (4.5.3), a Transformação de Möbius que mapeia $z_i \mapsto w_i$ é dada pela composta $F = S^{-1} \circ T$. Podemos determinar a transformação F por dois caminhos. O primeiro deles consiste em colocarmos T e S na forma padrão $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ e $S(w) = (a'w + b')/(c'w + d')$, em seguida, determinarmos a inversa de S utilizando a fórmula (4.3) e finalmente determinamos a composta $S^{-1} \circ T$ utilizando a expressão (4.4). O segundo

caminho consiste em observarmos que as expressões $S^{-1}(T(z)) = w$ e $T(z) = S(w)$ são equivalentes, pois S e T são bijeções. Se aplicarmos S a ambos os lados da primeira, chegamos na segunda e se aplicarmos S^{-1} a ambos os lados da segunda, chegamos na primeira. Portanto para encontrarmos F , iremos pelo segundo caminho que é mais simples. Primeiramente, igualamos as razões cruzadas $T(z)$ e $S(w)$:

$$\begin{aligned} [z, 0; 2, -i] &= [w, i; 1, 3] \\ \frac{(z-2)(0+i)}{(z+i)(0-2)} &= \frac{(w-1)(i-3)}{(w-3)(i-1)} \\ \frac{iz-2i}{-2z-2i} &= \frac{(i-3)w-(i-3)}{(i-1)w-3(i-1)}. \end{aligned}$$

Como $F(z) = S^{-1}(T(z)) = w$, basta resolvermos a equação em w para encontrarmos F , o que resulta em

$$F(z) = w = \frac{(9+i)z-4}{(7-i)z+4i}$$

que é a Transformação de Möbius que procurávamos.

Note que, no exemplo anterior chegamos a conclusão de que, para todo $z \in \mathbb{C}^+$, a razão cruzada de $z, 0, 2$ e $-i$ é igual a razão cruzada das imagens destes pontos através da Transformação de Möbius F , ou seja,

$$[z, 0; 2, -i] = [w, i; 1, 3] = [F(z), F(0); F(2), F(-i)].$$

Mostraremos na próxima Proposição, que a Razão Cruzada é invariante sobre a ação de qualquer Transformação de Möbius, isto é, a razão cruzada entre quaisquer quatro pontos distintos do plano complexo estendido é igual à razão cruzada das imagens destes pontos por uma Transformação de Möbius qualquer.

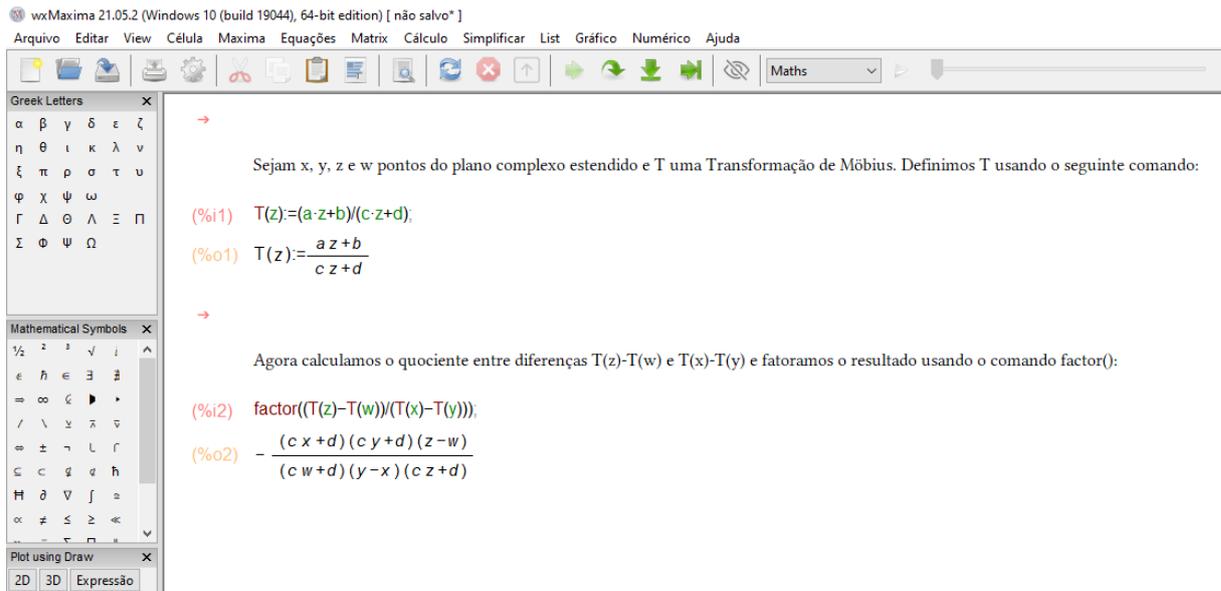
Proposição 4.6.3. *Sejam T uma Transformação de Möbius e $[z_0, z_1; z_2, z_3]$ uma razão cruzada. Então*

$$[T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)] = [z_0, z_1; z_2, z_3].$$

Demonstração. Tome uma Transformação de Möbius $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, então temos que

$$\begin{aligned} [T(z_0), T(z_1); T(z_2), T(z_3)] &= \frac{T(z_0) - T(z_2)}{T(z_0) - T(z_3)} \cdot \frac{T(z_1) - T(z_3)}{T(z_1) - T(z_2)} \\ &= \frac{(cz_0 + d)(cz_3 + d)(z_0 - z_2)}{(cz_0 + d)(cz_2 + d)(z_0 - z_3)} \cdot \frac{(cz_1 + d)(cz_2 + d)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \\ &= [z_0, z_1; z_2, z_3]. \end{aligned}$$

Figura 4.5 – Processo de obtenção da expressão para a o quociente $(T(z) - T(w))/(T(x) - T(y))$, em que T é uma Transformação de Möbius, utilizando o wxMaxima.



Fonte: Próprio autor (2022).

Uma justificativa para a segunda igualdade pode ser vista na Figura 4.5, onde obtemos o resultado utilizando o software wxMaxima. ■

Exemplo 4.6.4. Encontre a Transformação de Möbius que leva a circunferência $C_1 = \{z \in \mathbb{C}^+; |z| = 2\}$ na circunferência $C_2 = \{w \in \mathbb{C}^+; |w - i| = 1\}$.

Pelo corolário (4.5.4), basta tomarmos três pontos distintos em C_1 e construirmos uma Transformação de Möbius levando-os em três pontos distintos de C_2 . Tome então $2, -2, 2i \in C_1$ e $0, 1 + i, 2i \in C_2$ e construa uma Transformação de Möbius T , tal que $T(2) = 0$, $T(-2) = 1 + i$

e $T(2i) = 2i$. Pela Proposição (4.6.3) temos que $[z, 2; -2, 2i] = [T(z), T(2); T(-2), T(2i)]$, para qualquer $z \in \mathbb{C}^+$. Logo

$$\begin{aligned} [z, 2; -2, 2i] &= [T(z), 0; 1+i, 2i] \\ \frac{(z+2)(2-2i)}{(z-2i)(2+2)} &= \frac{(T(z)-1-i)(0-2i)}{(T(z)-2i)(0-1-i)} \end{aligned}$$

fazendo as devidas simplificações e isolando $T(z)$ chegamos em

$$T(z) = \frac{-4z+8}{-(2-4i)z+4},$$

que é a Transformação de Möbius que procurávamos.

Veremos agora dois resultados, envolvendo a Razão Cruzada, que nos auxiliarão na demonstração do Princípio da Simetria. O primeiro deles é uma igualdade que nos diz que o conjugado da Razão Cruzada é a Razão Cruzada dos conjugados:

Proposição 4.6.5. *Se $[z_0, z_1; z_2, z_3]$ é uma Razão Cruzada, então*

$$\overline{[z_0, z_1; z_2, z_3]} = [\bar{z}_0, \bar{z}_1; \bar{z}_2, \bar{z}_3]. \quad (4.15)$$

Demonstração. Essa igualdade pode ser facilmente demonstrada utilizando propriedades básicas do conjugado complexo:

$$\begin{aligned} \overline{[z_0, z_1; z_2, z_3]} &= \overline{\left(\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right)} \\ &= \overline{\left(\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \right)} \cdot \overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right)} \\ &= \frac{\overline{z_0 - z_2}}{\overline{z_0 - z_3}} \cdot \frac{\overline{z_1 - z_3}}{\overline{z_1 - z_2}} \\ &= \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_0 - \bar{z}_3} \cdot \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \\ &= [\bar{z}_0, \bar{z}_1; \bar{z}_2, \bar{z}_3]. \end{aligned}$$

■

A partir da Proposição (4.6.3) e da igualdade (4.15), podemos demonstrar o segundo resultado, um Teorema que fornece uma caracterização de Simetrias com respeito a retas e a circunferências através da Razão Cruzada.

Teorema 4.6.6. *Seja C uma circunferência ou uma reta e sejam $z_1, z_2, z_3 \in C$ pontos distintos de \mathbb{C}^+ . Então, para todo $z \in \mathbb{C}^+$, z e z^* são simétricos em relação à C se, e somente se,*

$$\overline{[z, z_1; z_2, z_3]} = [z^*, z_1; z_2, z_3]. \quad (4.16)$$

Demonstração. A demonstração será dividida em dois casos.

1. Suponha que C é uma circunferência de centro a e raio r . Então $C = \{z \in \mathbb{C}^+; |z - a| = r\}$. Tome $z_1, z_2, z_3 \in C$ distintos e considere z variando em \mathbb{C}^+ . Definimos então a Transformação de Möbius $T(z) = [z, z_1; z_2, z_3]$. Pelo Proposição (4.6.3), Razões Cruzadas são invariantes sob a ação de qualquer Transformação de Möbius, logo são invariantes sob a ação de $S_1(z) = z - a$. Assim, do lado esquerdo de (4.16) e da igualdade (4.15) vem que:

$$\begin{aligned} \overline{[z, z_1; z_2, z_3]} &= \overline{[z - a, z_1 - a; z_2 - a, z_3 - a]} \\ &= \overline{[z - a, z_1 - a; z_2 - a, z_3 - a]}. \end{aligned}$$

Observe que $z_i \in C$, então

$$|z_i - a| = r \Leftrightarrow (z_i - a)(\overline{z_i - a}) = r^2 \Leftrightarrow \overline{z_i - a} = r^2 / (z_i - a).$$

Substituindo $\overline{z_i - a}$ e em seguida utilizando, respectivamente as Transformações de Möbius $S_2(z) = r^2/z$ e $S_3(z) = z + a$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{[z - a, z_1 - a; z_2 - a, z_3 - a]} &= \overline{[z - a, \frac{r^2}{z_1 - a}; \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a}]} \\ &= \overline{[\frac{r^2}{z - a}, z_1 - a; z_2 - a, z_3 - a]} \\ &= \overline{[\frac{r^2}{z - a} + a, z_1; z_2, z_3]}. \end{aligned}$$

Por fim, substituindo $\overline{[z, z_1; z_2, z_3]}$ na equação (4.16) e observando a bijetividade de T chegamos em

$$\left[\frac{r^2}{z-a} + a, z_1; z_2, z_3\right] = [z^*, z_1; z_2, z_3] \Leftrightarrow T\left(\frac{r^2}{z-a} + a\right) = T(z^*) \Leftrightarrow \frac{r^2}{z-a} + a = z^*.$$

Portanto, pelo Teorema (B.5.4), z e z^* são simétricos em relação à circunferência C .

2. Suponha que C é uma reta. Então C pode ser descrita pela equação $\alpha z + \overline{\alpha z} + d = 0$. Tome $z_1, z_2, z_3 \in C$ distintos e considere z variando em \mathbb{C}^+ . Definimos então a Transformação de Möbius $T(z) = [z, z_1; z_2, z_3]$. Utilizando (4.15) e a Transformação de Möbius $S_1(z) = -\alpha z$ no lado esquerdo de (4.16), temos que

$$\begin{aligned} \overline{[z, z_1; z_2, z_3]} &= \overline{[-\alpha z, -\alpha z_1; -\alpha z_2, -\alpha z_3]} \\ &= \overline{[-\alpha z, -\alpha z_1; -\alpha z_2, -\alpha z_3]}. \end{aligned}$$

Note que $z_i \in C$, logo

$$\alpha z_i + \overline{\alpha z_i} + d = 0 \Leftrightarrow \alpha z_i + d = -\overline{\alpha z_i}.$$

Substituindo $-\overline{\alpha z_i}$ e em seguida utilizando, respectivamente, as Transformações de Möbius $S_2(z) = z - d$ e $S_3(z) = z/\alpha$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{[-\alpha z, -\alpha z_1; -\alpha z_2, -\alpha z_3]} &= \overline{[-\alpha z, \alpha z_1 + d; \alpha z_2 + d, \alpha z_3 + d]} \\ &= \overline{[-\alpha z - d, \alpha z_1; \alpha z_2, \alpha z_3]} \\ &= \left[\frac{-\alpha z - d}{\alpha}, z_1; z_2, z_3\right]. \end{aligned}$$

Por fim, substituindo $\overline{[z, z_1; z_2, z_3]}$ na equação (4.16) e observando a bijetividade de T chegamos em

$$\left[\frac{-\alpha z - d}{\alpha}, z_1; z_2, z_3\right] = [z^*, z_1; z_2, z_3] \Leftrightarrow T\left(\frac{-\alpha z - d}{\alpha}\right) = T(z^*) \Leftrightarrow \frac{-\alpha z - d}{\alpha} = z^*.$$

Portanto, pelo Teorema (B.4.2), z e z^* são simétricos em relação à reta C .

■

Finalmente, chegamos ao Princípio da Simetria. Este resultado nos diz que se T é uma Transformação de Möbius, e se dois pontos são simétricos em relação à uma circunferência (ou reta) C , então as imagens destes dois pontos por T serão simétricas com respeito à $T(C)$. Em outras palavras, temos que Transformações Möbius preservam Simetrias.

Teorema 4.6.7 (Princípio da Simetria). *Seja T uma Transformação de Möbius e C uma circunferência ou reta. Dois pontos z e z^* são simétricos em relação a C se, e somente se $T(z)$ e $T(z^*)$ são simétricos em relação à $T(C)$.*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in C$, então suas respectivas imagens por T , $T(z_1)$, $T(z_2)$ e $T(z_3)$ pertencem a $T(C)$. Pela Proposição (4.6.3), temos que

$$[T(z^*), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = [z^*, z_1; z_2, z_3]$$

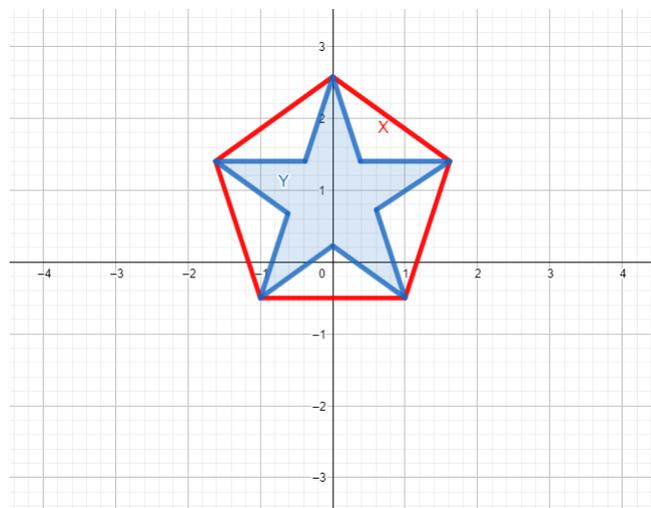
e

$$\overline{[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)]} = \overline{[z, z_1; z_2, z_3]}.$$

A equivalência segue imediatamente ao aplicarmos o Teorema (4.6.6).

■

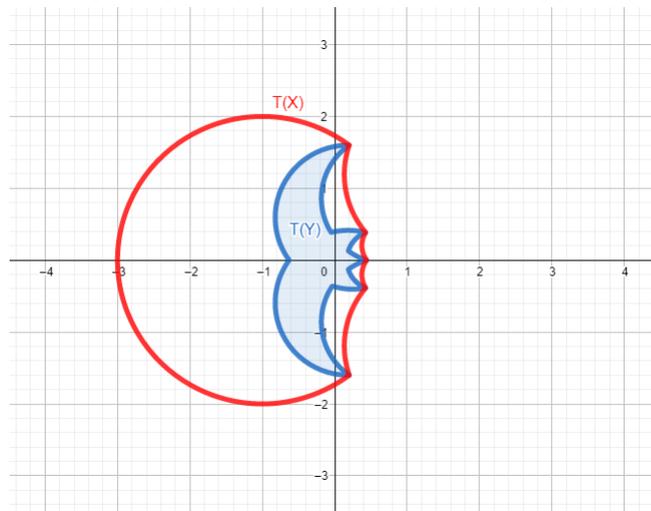
Figura 4.6 – Uma pentágono X e uma estrela Y no plano complexo



Fonte: Próprio autor (2022).

Utilizando o Geogebra, construímos duas figuras que ilustram o Princípio da Simetria. Observe na Figura 4.6 que o pentágono X e a estrela Y possuem o eixo imaginário como eixo de simetria. Como vimos no exemplo (4.4.4), o eixo imaginário é levado ao eixo real pela Transformação de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, portanto, pelo Teorema (4.6.7), o eixo real será o eixo de simetria de $T(X)$ e $T(Y)$ (FIGURA 4.7).

Figura 4.7 – Imagem do pentágono X e da estrela Y pela por $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$



Fonte: Próprio autor (2022).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, R. L.; RABELLO, T. N. **Uma Variável Complexa: Teoria e Aplicações**. São Paulo: edusp, 2019.

BEARDON, A. F. **The Geometry of Discrete Groups**. 2ª reimpressão. New York: Springer-Verlag, 1995.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

HITCHMAN, M. P. **Geometry with an introduction to cosmic topology**. [S.l.]: Jones & Bartlett Learning, 2009.

MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Basic Complex Analysis**. 3. ed. New York: W.H. Freeman, 1999.

OLSEN, J. The geometry of möbius transformations. **Rochester: University of Rochester**, 2010.

SOUSA, A. M. C. **O corpo dos Números Complexos Sob a Ótica Histórica, Prática e Didática**. 2021. 98.p. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal de Lavras, Lavras 2021. Disponível em:<http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/46156>. Acesso em: 07 jul. 2022.

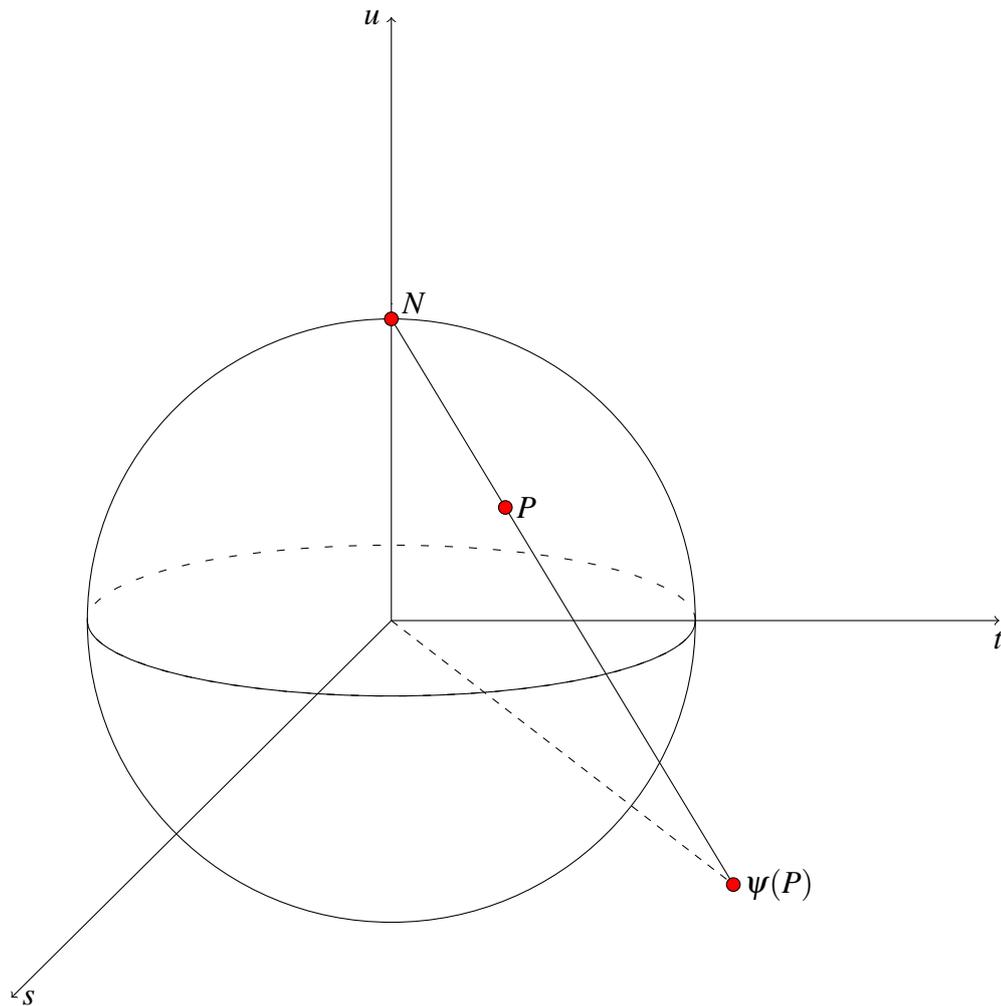
ZILL, D. G. **A first course in complex analysis with applications**. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers, 2003.

A PLANO COMPLEXO ESTENDIDO E PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

A.1 Projeção estereográfica

Vejam agora uma justificativa geométrica para a adição do ponto no infinito ao plano complexo.

Figura A.1 – Projeção estereográfica.



Fonte: Próprio autor (2022).

Considere a esfera unitária S^2 contida no \mathbb{R}^3 dada por

$$S^2 = \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3; s^2 + t^2 + u^2 = 1\}.$$

Indicamos o polo norte da esfera, isto é, o ponto $(0,0,1)$ por N e identificamos o plano complexo \mathbb{C} com o plano $u = 0$, passando pelo equador da esfera, de modo que a origem de \mathbb{C} coincida com o centro de S^2 .

Considere agora um ponto qualquer $P \in S^2$ tal que $P \neq N$. Considere também a única semirreta, qual denotaremos por \overrightarrow{NP} , com origem em N e passando por P . A semirreta \overrightarrow{NP} irá interceptar \mathbb{C} em um único ponto $z = x + yi$. Essa construção determina uma aplicação $\psi : S^2/\{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ que leva cada $P \in S^2/\{N\}$ em um único $z \in \mathbb{C}$. (FIGURA A.1).

À medida em que P se aproxima do ponto $N = (0,0,1)$, a interseção $\overrightarrow{NP} \cap \mathbb{C}$ vai se tornando cada vez mais distante da origem do plano complexo, pois o ângulo entre o eixo u e a semirreta \overrightarrow{NP} torna-se cada vez mais próximo de $\pi/2$. Em outros termos, $|\psi(P)| \rightarrow +\infty$, sempre que $P \rightarrow N$. Logo, é natural definirmos $\psi(N) = \infty$.

Definição A.1.1. Chamamos de projeção estereográfica a aplicação $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ dada por

$$\psi(P) = \begin{cases} z, & \text{se } P \neq N \\ \infty, & \text{se } P = N \end{cases},$$

onde $z \in \mathbb{C}$ é dado pela interseção $\overrightarrow{NP} \cap \mathbb{C}$.

Pelo modo como a função ψ foi construída e definida, ela faz corresponder cada ponto P de S^2 a um único $z \in \mathbb{C}^+$. Além disso, dado qualquer ponto $z \neq \infty$, podemos construir uma reta L passando por z e por N . A reta L irá interceptar S^2 em um único ponto $P \neq N$ e irá conter a semirreta \overrightarrow{NP} e logo $\psi(P) = z$ (FIGURA A.2). Se $z = \infty$, $\psi(N) = z$.

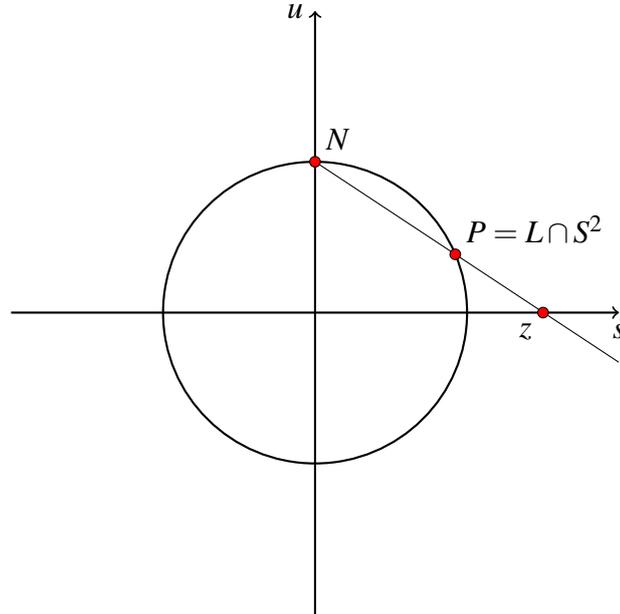
Isto faz de ψ uma aplicação bijetora e portanto existe uma aplicação inversa $\psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow S^2$, de modo que $\psi^{-1}(\infty) = N$.

Vejamos agora as expressões algébricas que fornecem as coordenadas para ambas as projeções ψ e ψ^{-1} no caso em que $P \neq N$ e $z \neq \infty$.

Proposição A.1.2. *Sejam $P \in S^2/\{N\}$ e $z \in \mathbb{C}$ dados por $P = (s, t, u)$ e $z = x + yi$. As coordenadas da projeção estereográfica $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ e de sua inversa $\psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow S^2$ são dadas por:*

$$\psi(P) = \frac{s}{1-u} + i \frac{t}{1-u} \tag{A.1}$$

Figura A.2 – Projção estereográfica de S^2 em \mathbb{C}^+ vista por um corte transversal.



Fonte: Próprio autor (2022).

e

$$\psi^{-1}(z) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (\text{A.2})$$

Diferentes justificativas para a Proposição (A.1.2) podem ser encontradas em Olsen (2010, p. 5), Alencar e Rabello (2019, p. 166-167) e Hitchman (2009, p. 53).

Com a expressão (A.1) da Proposição (A.1.2) podemos mostrar que pontos do hemisfério norte de S^2 são projetados no exterior da circunferência unitária de \mathbb{C}^+ e pontos do hemisfério sul são projetados em seu interior. Para isso, basta mostrarmos que $|\psi(P)| > 1$ para o primeiro caso e $|\psi(P)| < 1$ para o segundo.

Considere $P = (s, t, u) \in S^2$, então P é tal que $s^2 + t^2 = 1 - u^2$ e $\psi(p) = \frac{s}{1-u} + i \frac{t}{1-u}$.

Logo

$$|\psi(P)| = \sqrt{\frac{s^2 + t^2}{(1-u)^2}} = \sqrt{\frac{1-u^2}{(1-u)^2}} = \sqrt{\frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)^2}} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \quad (\text{A.3})$$

Se P pertence ao hemisfério norte de S^2 , então $0 < u \leq 1$. Logo $1-u < 1$ e $1+u > 1$, o que implica que $1+u > 1-u$. Portanto, de (A.3) vem $|\psi(P)| > 1$. Se $P = N$, é óbvio que $\psi(P)$ está fora da circunferência unitária.

Agora, se P pertence ao hemisfério sul de S^2 , então $-1 \leq u < 0$. Logo $1-u > 1$ e $1+u < 1$, o que nos mostra que $1-u > 1+u$. Neste caso, de (A.3) vem que $|\psi(P)| < 1$.

Se P pertence ao equador de S^2 , $P = (s, t, 0)$ e portanto de (A.3) vem que $|\psi(P)| = 1$ e conseqüentemente $\psi(P)$ pertence à circunferência unitária.

A.2 Propriedades da projeção estereográfica

Uma das utilidades da projeção estereográfica é podermos analisar o comportamento de Transformações no ponto no infinito. Por exemplo, ao trabalharmos com o conjunto \mathbb{C}^+ , através da projeção estereográfica é possível determinarmos se dada Transformação T é conforme em ∞ ou até mesmo em algum ponto de indeterminação de T em \mathbb{C} .

Vejamos então alguns resultados importantes que nos permitirão conduzir tal análise.

As demonstrações para as Proposições (A.2.1) e (A.2.3) que apresentaremos a seguir podem ser encontradas em Olsen (2010, p. 7-8).

Proposição A.2.1. *A aplicação $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ dada pela projeção estereográfica e sua inversa $\psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow S^2$ são conformes.*

Em outras palavras, a proposição anterior nos diz que se duas curvas, γ_1 e γ_2 , contidas na superfície da esfera S^2 se interceptam, em um ponto $P_0 \in S^2$, formando um ângulo θ , então suas imagens pela projeção estereográfica, $\psi(\gamma_1)$ e $\psi(\gamma_2)$, também se interceptarão em $\psi(P_0) \in \mathbb{C}^+$ formando um ângulo θ . O mesmo vale para o caminho contrário se utilizarmos ψ^{-1} .

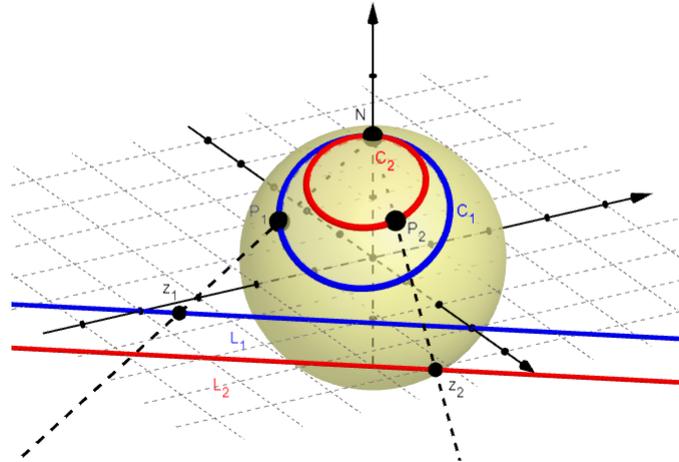
Definição A.2.2. O ângulo de interseção de duas curvas, γ_1 e γ_2 , no ponto ∞ em \mathbb{C}^+ é dado pelo ângulo de interseção das curvas $\psi^{-1}(\gamma_1)$ e $\psi^{-1}(\gamma_2)$ no ponto $N = (0, 0, 1)$ em S^2 .

Proposição A.2.3. *A projeção estereográfica aplica circunferências em circunferências e retas. Em particular se a circunferência passa pelo polo norte da esfera S^2 , sua imagem será uma reta, caso contrário será uma circunferência.*

Consideramos como uma circunferência em S^2 a curva resultante da interseção de qualquer plano bidimensional do \mathbb{R}^3 com a esfera S^2 .

Corolário A.2.4. *Se $\psi^{-1} : \mathbb{C}^+ \rightarrow S^2$ é a inversa da projeção estereográfica, então ψ^{-1} aplica retas em circunferências passando pelo ponto N e aplica circunferências em circunferências que não passam por N .*

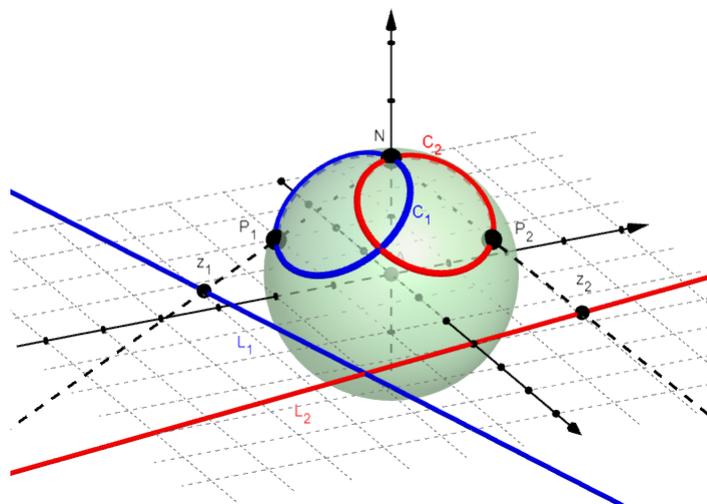
Figura A.3 – Imagem de duas retas paralelas pela inversa da projeção estereográfica.



Fonte: Próprio autor (2022).

Como já vimos, o ponto ∞ pertence a qualquer reta de \mathbb{C}^+ , logo mesmo que L_1 e L_2 sejam retas paralelas, elas se interceptam em ∞ . Pelo corolário (A.2.4), elas serão levadas, por ψ^{-1} , em circunferências $C_1 = \psi^{-1}(L_1)$ e $C_2 = \psi^{-1}(L_2)$ em S_2 que possuem $N = (0, 0, 1)$ como único ponto em comum (FIGURA A.3). Assim, as retas tangentes a C_1 e a C_2 coincidem, ou seja, o ângulo entre C_1 e C_2 é igual a zero. Portanto, pela Definição (A.2.2), podemos dizer que o ângulo entre L_1 e L_2 em ∞ é nulo.

Figura A.4 – Imagem de duas retas concorrentes pela inversa da projeção estereográfica.

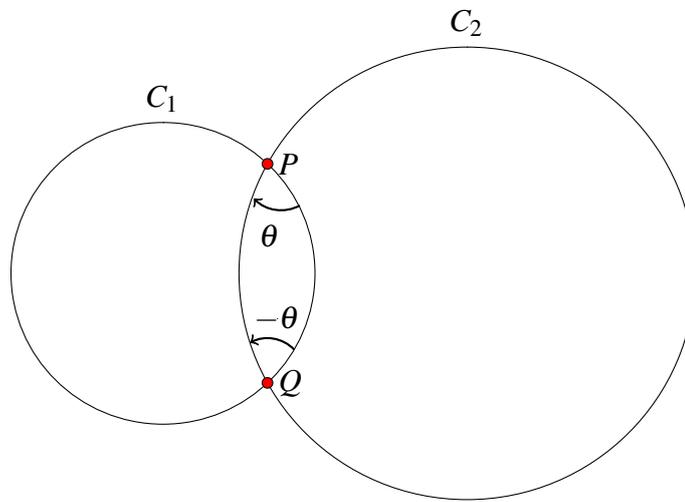


Fonte: Próprio autor (2022).

Por outro lado, vamos supor que L_1 e L_2 se interceptam em algum ponto $z_0 \neq \infty$, formando algum ângulo θ orientado de L_1 para L_2 . Então suas respectivas imagens por ψ^{-1} , $C_1 = \psi^{-1}(L_1)$ e $C_2 = \psi^{-1}(L_2)$, se interceptarão em $P_0 = \psi^{-1}(z_0)$ formando também um ângulo θ (FIGURA A.4).

Assim, o ângulo de interseção de C_1 e C_2 em N será $-\theta$ (ver Figura A.5, para uma justificativa).

Figura A.5 – Os ângulos de interseção de duas circunferências C_1 e C_2 em P e Q possuem sinais opostos.



Fonte: Próprio autor (2022).

Conseqüentemente, se θ é o ângulo entre as retas L_1 e L_2 no ponto z_0 , então $-\theta$ é o ângulo entre L_1 e L_2 em ∞ .

B RETAS E CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO COMPLEXO

B.1 A reta no plano complexo

Uma reta no plano cartesiano \mathbb{R}^2 é dada pelo conjunto $L' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; Ax + By + C = 0\}$, onde A , B e C são constantes reais.

Como o conjunto dos números complexos \mathbb{C} e o plano \mathbb{R}^2 são isomorfos, sempre é possível encontrarmos uma reta L em \mathbb{C} "equivalente" à reta L' . Para encontrarmos uma equação que descreva L , podemos partir da equação geral da reta no \mathbb{R}^2 .

Considere $z = x + yi$. Logo, $z + \bar{z} = 2x$ e $z - \bar{z} = 2yi$. Ao isolarmos x e y nas equações, obtemos

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (\text{B.1a})$$

e

$$y = -\frac{(z - \bar{z})i}{2}. \quad (\text{B.1b})$$

Substituindo os valores de x e y na equação geral da reta, chegamos em

$$Ax + By + C = \left(\frac{A - Bi}{2}\right)z + \left(\frac{A + Bi}{2}\right)\bar{z} + C.$$

Se chamarmos $\alpha = \frac{A - Bi}{2}$ e $C = d$, temos que a equação da reta no plano complexo é dada por

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + d = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $d \in \mathbb{R}$.

Definição B.1.1. Uma reta L é um subconjunto de \mathbb{C} dado por

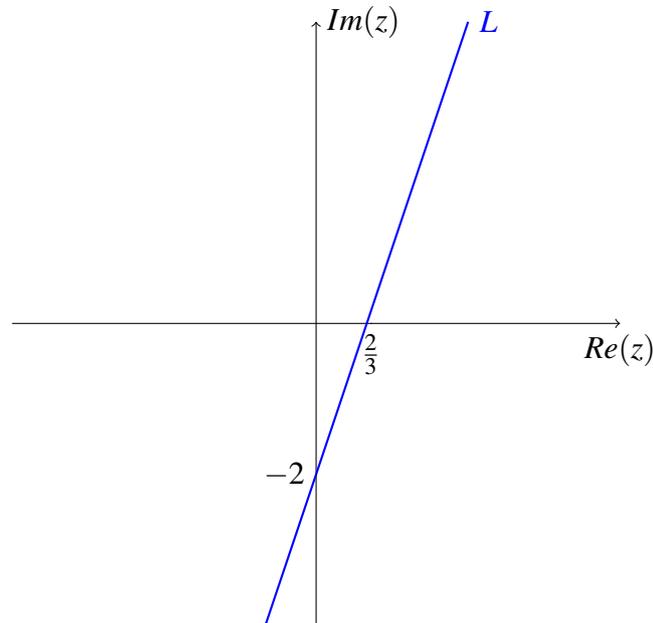
$$L = \{z \in \mathbb{C}; \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + d = 0\},$$

onde α é uma constante complexa e d uma constante real.

No plano complexo estendido, uma reta é dada pelo conjunto $L \cup \{\infty\}$.

A Figura B.1 a seguir mostra o gráfico da reta $L: (3 + i)z + (3 - i)\bar{z} - 4 = 0$ equivalente à reta L' de equação $3x - y - 2 = 0$.

Figura B.1 – Gráfico da reta $(3 + i)z + (3 - i)\bar{z} - 4 = 0$.



Fonte: Próprio autor (2022).

B.2 A circunferência no plano complexo

Uma circunferência no plano \mathbb{R}^2 é dada pelo conjunto $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$, onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é o centro da circunferência e $r > 0$ o seu raio.

Da mesma maneira como fizemos para as retas, queremos encontrar uma equação que descreva uma circunferência $C \subset \mathbb{C}$ centrada em $z_0 = x_0 + y_0i$ e de raio r . Partindo da equação de C' e considerando $z = x + yi$, temos que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$|(x - x_0) + (y - y_0)i|^2 = r^2$$

$$|x + yi - (x_0 + y_0i)|^2 = r^2$$

$$|z - z_0| = r.$$

Definição B.2.1. Uma circunferência é um subconjunto de \mathbb{C} dado por

$$C = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\},$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$ é o centro de C e $r \in \mathbb{R}$ é o seu raio.

B.3 A equação conjunta de retas e circunferências

Hitchman (2009, p. 41), define retas e circunferências como objetos de um mesmo conjunto e utiliza a palavra *cline*¹ para referir-se a estes entes geométricos. Se tentarmos inventar uma tradução em português para a palavra *Cline*, teríamos algo como "Creta". Optamos então por tratar retas e circunferências como elementos de um mesmo conjunto, porém iremos chama-las pelos seus respectivos nomes.

A proposição a seguir nos fornece uma equação capaz de descrever retas e circunferências simultaneamente no plano complexo.

Proposição B.3.1. *Toda circunferência ou reta de \mathbb{C}^+ pode ser descrita por uma equação da forma*

$$cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c, d \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$, a equação descreve uma reta. Se $c \neq 0$ e $|\alpha|^2 > cd$, a equação descreve uma circunferência centrada em z_0 e de raio r , com

$$z_0 = \left(-\frac{\text{Re}(\alpha)}{c}, \frac{\text{Im}(\alpha)}{c} \right) \quad e \quad r = \sqrt{\frac{|\alpha|^2 - cd}{c}}.$$

Os detalhes envolvendo a dedução da equação na proposição anterior podem ser encontrados em Hitchman (2009, p.41).

A equação conjunta de retas e circunferências será de grande utilidade na demonstração de alguns resultados envolvendo Inversões.

Finalizamos esta seção com um resultado que será de grande utilidade futuramente no texto.

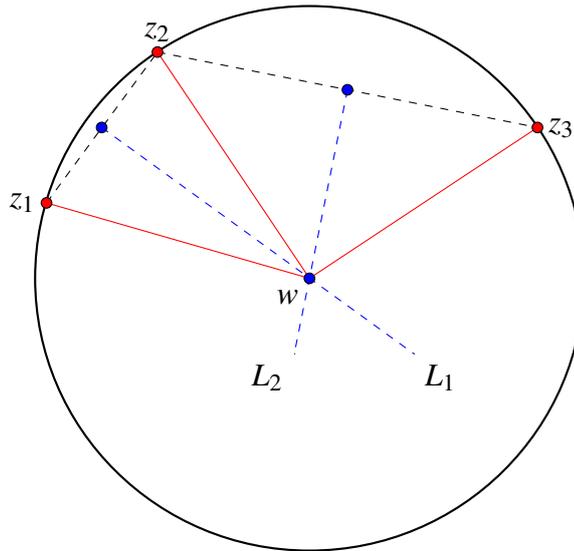
Proposição B.3.2. *Existe uma única reta ou circunferência passando por quaisquer três pontos distintos do plano complexo.*

Demonstração. Suponha que $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ são pontos distintos. Se z_3 estiver na reta definida por z_1 e z_2 , então não há o que demonstrar. Suponha então que z_3 não seja colinear a z_1 e z_2 .

¹ O nome *cline* é uma junção das palavras *Circle* e *Line*, que em inglês significam, respectivamente, *Circunferência* e *Reta*.

Podemos construir uma reta L_1 perpendicular ao segmento $\overline{z_1 z_2}$ passando pelo seu ponto médio e uma reta L_2 perpendicular ao segmento $\overline{z_2 z_3}$ também passando pelo seu ponto médio. L_1 e L_2 se interceptarão em um ponto w (FIGURA B.2).

Figura B.2 – Construção de uma circunferência passando por três pontos não colineares.



Fonte: Próprio autor (2022).

Assim, por congruência de triângulos, temos que os segmentos $\overline{wz_1}$, $\overline{wz_2}$ e $\overline{wz_3}$ possuem a mesma medida e portanto é possível traçar uma circunferência centrada em w e passando por z_1 , z_2 e z_3 (FIGURA B.2). A unicidade segue do fato de que circunferências são unicamente determinadas por um centro e um raio. ■

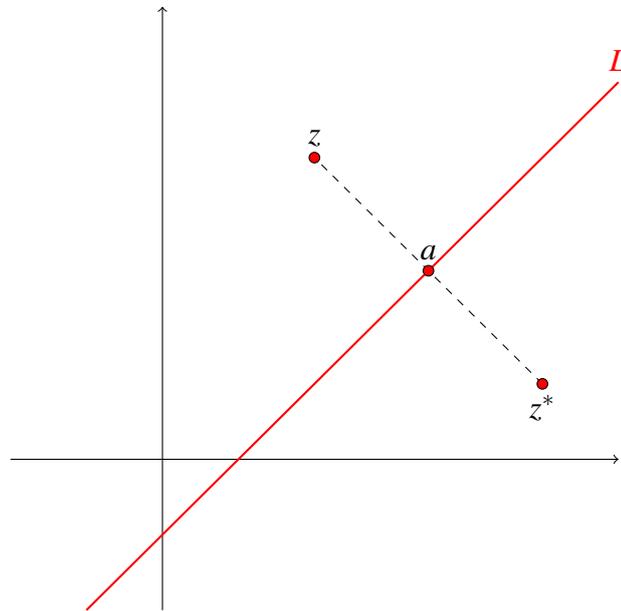
B.4 Simetria com respeito a uma reta

A definição a seguir foi retirada de Alencar e Rabello (2019, p. 175).

Definição B.4.1. Dizemos que dois pontos z e $z^* \in \mathbb{C}$ são simétricos em relação à uma reta L se L for perpendicular ao segmento de extremidades z e z^* e passar pelo seu ponto médio (FIGURA, B.3).

A Definição (B.4.1) garante que cada ponto $z \in \mathbb{C}$ possui um único ponto simétrico z^* em relação a uma dada reta L . De fato, vamos supor que z_1^* e z_2^* são pontos simétricos a z

² Nesta demonstração, estamos usando o traço acima dos números para denotarmos segmentos, não confundir com o conjugado complexo.

Figura B.3 – Simetria com respeito à reta L .

Fonte: Próprio autor (2022).

em relação à reta L . Pela definição (B.4.1), existe um segmento m_1 perpendicular a L cujas extremidades são z e z_1^* . Do mesmo modo, existe um segmento m_2 também perpendicular a L com extremidades z e z_2^* .

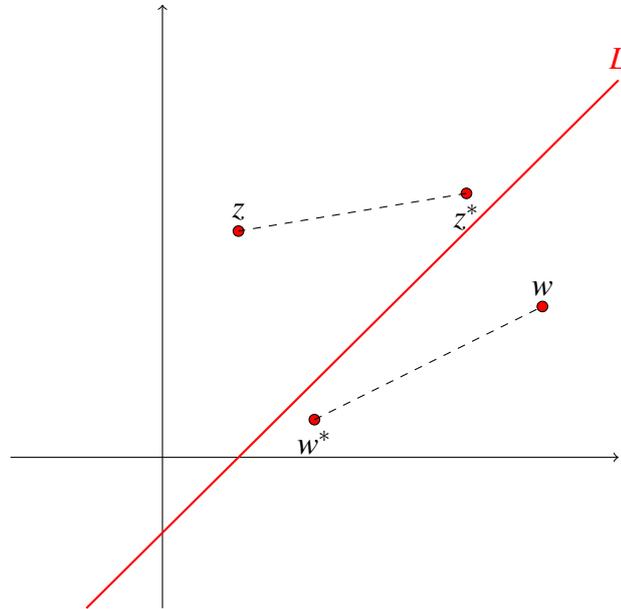
Como ambos os segmentos são perpendiculares a L e possuem o ponto z em comum, m_1 e m_2 coincidem e conseqüentemente z_1^* e z_2^* estão sobre o mesmo segmento. Ainda da definição (B.4.1) e da Figura B.3 vem que $|z - a| = |z_1^* - a|$ e $|z - a| = |z_2^* - a|$. Como z_1^* e z_2^* estão sobre o mesmo segmento, concluímos que $z_1^* = z_2^*$.

Uma outra consequência direta da definição e que se z e z^* são simétricos com respeito a L , então z e z^* pertencem a semiplanos opostos em relação a L e conseqüentemente $z \neq z^*$. De fato, se esse não fosse o caso, não seria possível traçar um segmento com extremidades em z e z^* que interceptasse L (FIGURA B.4).

Teorema B.4.2. *Sejam $z, z^* \in \mathbb{C}$ e L uma reta. Então z e z^* são simétricos com respeito a L se, e somente se $z \neq z^*$ e $|z - w| = |z^* - w|$ para todo $w \in L$.*

Demonstração. Se z e z^* são simétricos em relação L , existe um segmento perpendicular a L de extremidades em z e z^* com ponto médio em $a \in L$. Como já vimos, z e z^* estão em semiplanos opostos, então basta mostrarmos que $|z - w| = |z^* - w|$ para todo $w \in L$. Para isso, tomemos um ponto w qualquer em L e tracemos os segmentos unindo z e w e z^* e w (FIGURA B.5). Com

Figura B.4 – Se dois pontos estão em um mesmo semiplano determinado por uma reta L , não é possível traçar um segmento que intercepte L ligando-os.



Fonte: Próprio autor (2022).

isso, formamos os triângulos Δzwa e Δwz^*a . Segue da definição (B.4.1) que Δzwa e Δwz^*a são retângulos e portanto vale o teorema de Pitágoras e temos que

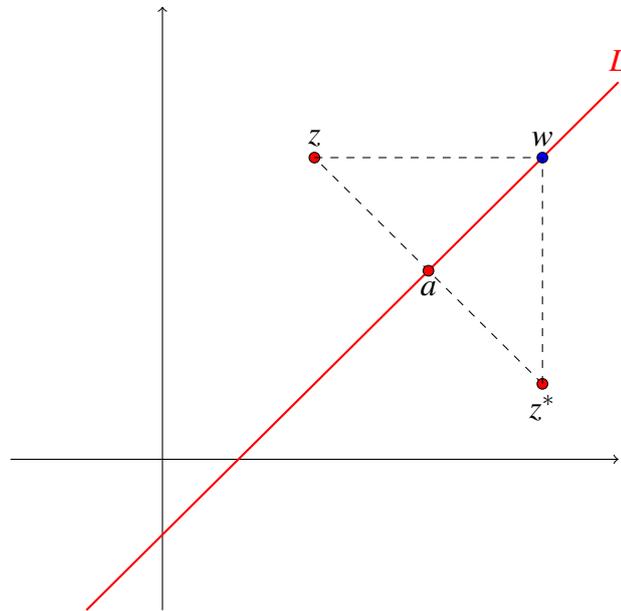
$$\begin{cases} |z - w|^2 = |z - a|^2 + |w - a|^2 \\ |z^* - w|^2 = |z^* - a|^2 + |w - a|^2 \end{cases} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Da hipótese, vem que $|z - a| = |z^* - a|$ e se subtrairmos a segunda equação de primeira em (B.4), chegamos em

$$|z - w|^2 - |z^* - w|^2 = 0 \implies |z - w|^2 = |z^* - w|^2 \implies |z - w| = |z^* - w|.$$

Por outro lado, se $z \neq z^*$ e $|z - w| = |z^* - w|$, para todo $w \in L$, construa o segmento m_1 perpendicular a L com extremidades em z e em $a \in L$. Logo vale que $|z - a| = |z^* - a|$. Vamos mostrar que o segmento m_2 de extremidades z^* e a também é perpendicular a L . Como m_1 é perpendicular à L , então para todo $w \in L$ vale

$$|z - w|^2 = |a - w|^2 + |z - a|^2. \quad (\text{B.5})$$

Figura B.5 – Triângulos retângulos Δzwa e Δwz^*a .

Fonte: Próprio autor (2022).

Substituindo $|z - w|$ e $|z - a|$ em (B.5), chegamos em

$$|z^* - w|^2 = |a - w|^2 + |z^* - a|^2,$$

o que nos diz que Δwz^*a é retângulo. Logo m_2 é perpendicular a L . Como $z \neq z^*$, existe um segmento m_3 de extremidades em z e z^* com ponto médio em a . Como $a \in L$, temos que L intercepta m_3 perpendicularmente em seu ponto médio. Portanto z e z^* são simétricos com respeito a L . ■

Podemos encontrar o ponto z^* simétrico a z em relação à uma reta L seguindo o seguinte caminho:

1. Utilizando uma Translação e uma Rotação convenientes, transformamos L no eixo real e z em algum ponto z_1 ;
2. Tomamos o conjugado complexo \bar{z}_1 (pela definição de conjugado complexo, o eixo real é levado em si mesmo e $|z_1 - x| = |\bar{z}_1 - x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$);

3. Aplicamos as inversas da Translação e da Rotação levando o eixo real de volta em L , z_1 de volta em z e \bar{z}_1 em um ponto z^* (como Translações e Rotações são Isometrias Euclidianas, segue que $|z - w| = |z^* - w|, \forall w \in L$).

De modo geral, se aplicarmos uma sequência de Transformações convenientes para um ponto z_0 qualquer, chegamos à expressão

$$z^* = \begin{cases} e^{2i\phi}(\bar{z} + z_0) + z_0, & \text{se } z_0 \in L \cap \text{Im}(z) \\ e^{2i\phi}(\bar{z} - z_0) + z_0, & \text{se } z_0 \in L \cap \text{Re}(z) \end{cases}, \quad (\text{B.6})$$

onde ϕ é o ângulo que a reta L faz com o eixo real e z_0 é o ponto de interseção de L com o eixo imaginário ou com o eixo real.

Manipulando um pouco mais a expressão (B.6), chegamos em uma expressão mais simples, que oferece pouca informação, mas que é útil em demonstrações:

$$z^* = e^{i\theta}\bar{z} + \beta, \quad (\text{B.7})$$

onde $\theta = 2\phi$ e $\beta = \pm e^{2i\phi}z_0 + z_0$.

Por fim, vejamos uma caracterização do ponto simétrico em termos da equação de uma reta L .

Teorema B.4.3. *Sejam z e z^* pontos de \mathbb{C} e $L = \{z \in \mathbb{C}; \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0, \alpha \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R}\}$ uma reta. Então z e z^* são simétricos com respeito a L se, e somente se $z^* = \frac{-\bar{\alpha}\bar{z} - d}{\alpha}$.*

Demonstração. Se z e z^* são simétricos com relação à L , então pelo teorema (B.4.2), $|z - w| = |z^* - w|$, com $z \neq z^*$, para todo $w \in L$. Mas observe que se $w \in L$, então $w = \frac{-\bar{\alpha}\bar{w} - d}{\alpha}$ e temos que

$$|z - w| = \left| z + \frac{\bar{\alpha}\bar{w} + d}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha z + \bar{\alpha}\bar{w} + d}{\alpha} \right| = \frac{|(\alpha z + \bar{\alpha}\bar{w} + d)|}{|\alpha|} = \left| \frac{\bar{\alpha}\bar{z} + d + \alpha w}{\alpha} \right| = \left| \frac{-\bar{\alpha}\bar{z} - d}{\alpha} - w \right|.$$

Concluimos, pelo Teorema (B.4.2), então que z e $\frac{-\bar{\alpha}\bar{z} - d}{\alpha}$ são simétricos com respeito a L . Mas por hipótese, z^* é o simétrico de z em relação à L , logo, pela unicidade do ponto simétrico, $z^* = \frac{-\bar{\alpha}\bar{z} - d}{\alpha}$.

Por outro lado, se $z^* = \frac{-\bar{\alpha}z - d}{\alpha}$, então pela demonstração da parte anterior, é imediato que z^* é simétrico a z com respeito a L . ■

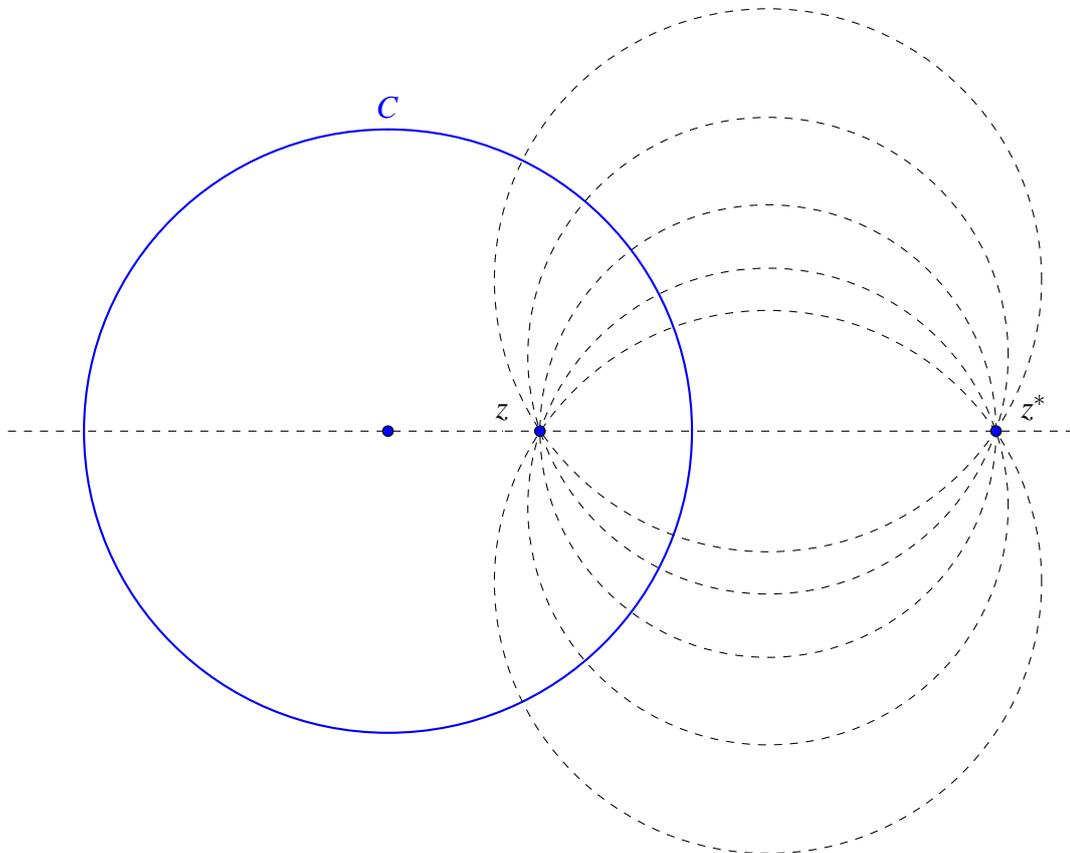
A expressão fornecida pelo Teorema (B.4.3) pode ser convertida para forma da expressão (B.7). Basta observar que se escrevermos $z^* = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\bar{z} - \frac{d}{\alpha}$, temos que $\left| -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right| = 1$ e portanto $-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = e^{i\theta}$, para algum ângulo θ . Daí, basta fazer $\beta = -\frac{d}{\alpha}$.

B.5 Simetria com respeito a uma circunferência

A definição a seguir também vem de Alencar e Rabello (2019, p. 175).

Definição B.5.1. Dizemos que dois pontos z e $z^* \in \mathbb{C}$ são simétricos em relação a uma circunferência C , se toda circunferência ou reta passando por z e z^* intercepta C ortogonalmente (FIGURA B.6).

Figura B.6 – Simetria com respeito a uma circunferência.



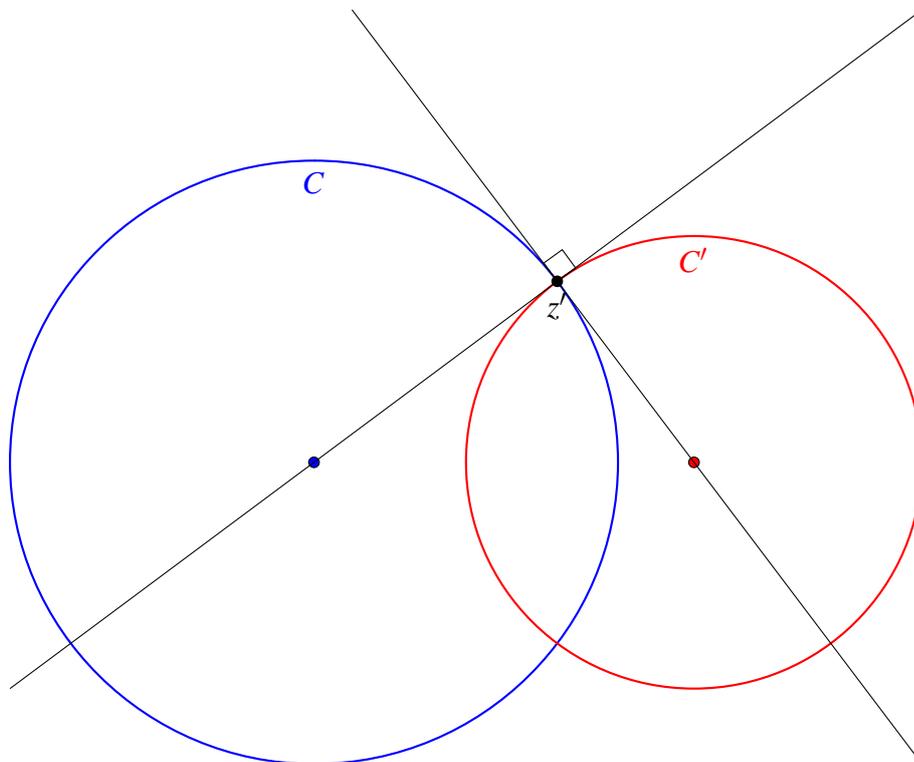
Fonte: Próprio autor (2022).

Ao dizermos que duas circunferências C_1 e C_2 são ortogonais, estamos dizendo que as retas tangentes a C_1 e a C_2 em seus dois pontos de interseção são perpendiculares. Do mesmo modo, uma reta L é ortogonal a uma circunferência C , se a reta tangente a C no ponto de interseção de C com L for perpendicular a L .

É suficiente que as circunferências sejam ortogonais em apenas um dos pontos de interseção para que elas sejam ortogonais.

Da definição (B.5.1) é possível concluir que a reta contendo z e z^* também passa pelo centro de C , pois toda reta ortogonal a uma circunferência passa pelo seu centro.

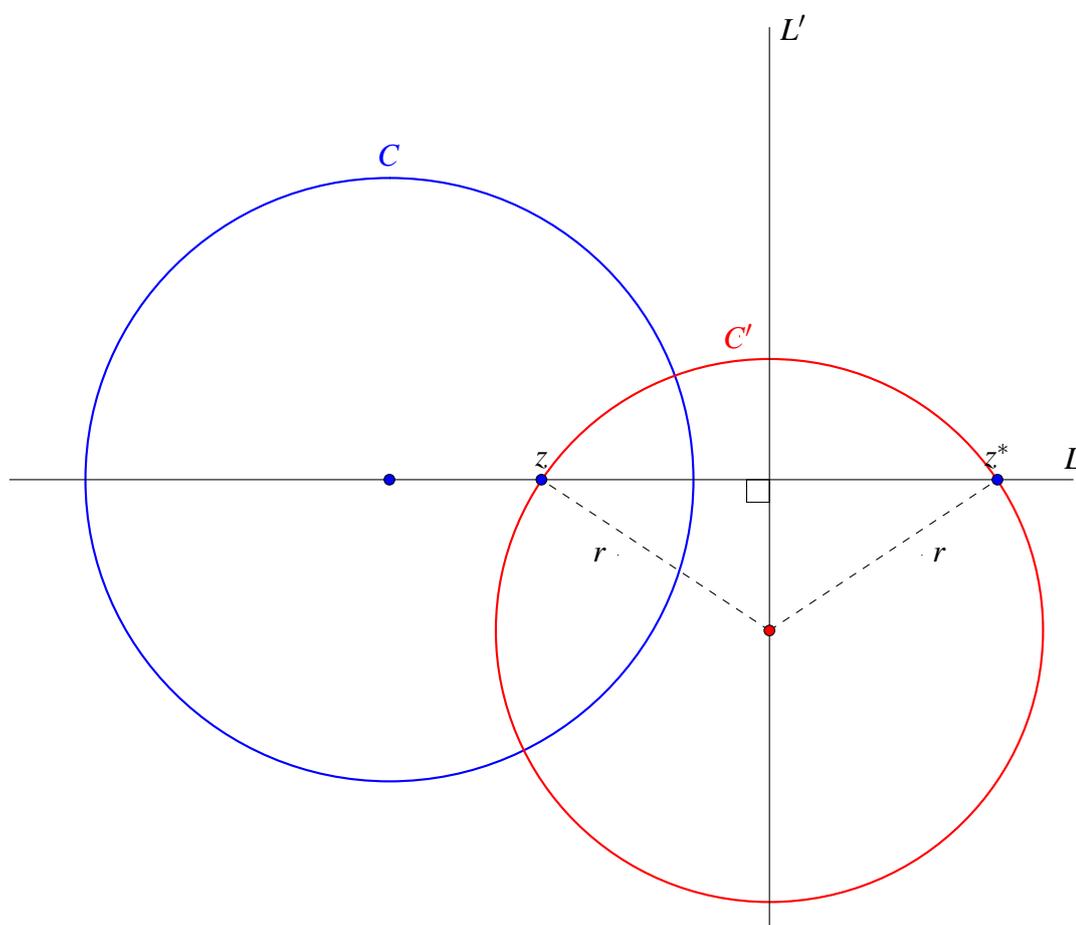
Figura B.7 – Circunferências ortogonais.



Fonte: Próprio autor (2022).

Além disso, se C' é uma circunferência qualquer ortogonal a C em um ponto z' , então a reta tangente a C em z' é ortogonal a C' e passará pelo seu centro. Analogamente, a reta tangente a C' em z' passará pelo centro de C (FIGURA,B.7). Assim, o centro de C está de fora de qualquer que seja a circunferência C' ortogonal a C .

Ainda, como o centro de C está fora de qualquer que seja C' , e z e z^* pertencem a C' , podemos concluir que z e z^* pertencem à mesma semirreta com origem no centro de C .

Figura B.8 – Simetria de z e z^* com respeito a reta L' .

Fonte: Próprio autor (2022).

Observe na Figura B.8, que se z e z^* são simétricos com respeito a C , então para qualquer que seja C' passando por z e z^* , podemos traçar uma reta L passando por z e z^* e uma reta L' perpendicular a L passando pelo ponto médio de z e z^* . Segue que L' passa pelo centro de C' , pois L' passa pelo ponto médio de uma corda de C' . Além disso, z e z^* são simétricos com respeito a reta L' .

Pelo fato de que C' foi tomada aleatoriamente, toda circunferência passando por z e z^* está centrada na mesma reta L' .

Proposição B.5.2. *Sejam z e $z^* \in \mathbb{C}$ pontos simétricos com respeito a uma circunferência C e L a reta contendo z e z^* . Se L' é a reta perpendicular a L passando pelo ponto médio de z e z^* , então z e z^* são simétricos com respeito a L' .*

Segue da Proposição (B.5.2) a unicidade do ponto simétrico com respeito a circunferências.

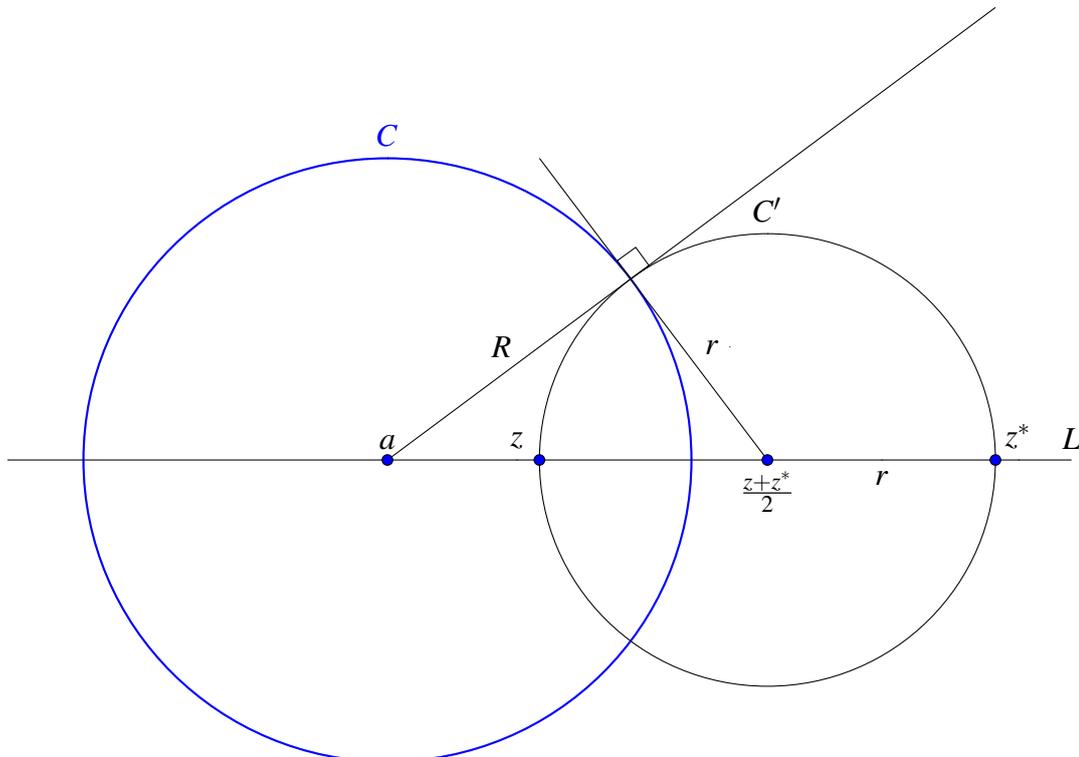
Da Figura B.8, podemos inferir que se z pertencer ao interior de C , z^* pertencerá ao exterior e vice-versa.

Proposição B.5.3. *Seja $C = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}$ uma circunferência. Se $z, z^* \in \mathbb{C}$ são pontos simétricos com respeito a C , então*

$$z^* = a + \frac{R^2}{z - a}. \quad (\text{B.8})$$

Demonstração. Suponha que, sem perda de generalidade, z esteja no interior de C . Se z e z^* são simétricos em relação a C , segue da definição (B.5.1) que a reta L passando por a , z e z^* e a circunferência C' contendo z e z^* centrada em $\frac{z+z^*}{2}$ e de raio r são ortogonais a C (FIGURA B.9).

Figura B.9 – z e z^* são pontos simétricos com respeito à circunferência C centrada em a e de raio R .



Fonte: Próprio autor (2022).

Observe que podemos rescrever $z^* - a$ da seguinte maneira:

$$z^* - a = z^* - a + z - z = (z - a) + (z^* - z).$$

Pela Figura B.9 temos que $(z^* - z)$ é um vetor com valor absoluto igual a $2r$ e com a mesma direção de $(z - a)$. Assim podemos reescrevê-lo como

$$z^* - z = 2r \frac{(z - a)}{|z - a|}.$$

Logo ficamos com

$$z^* - a = (z - a) + 2r \frac{(z - a)}{|z - a|}. \quad (\text{B.9})$$

Mas pelo Teorema de Pitágoras temos também que

$$\begin{aligned} (|z - a| + r)^2 &= R^2 + r^2 \\ |z - a|^2 + 2r|z - a| + r^2 &= R^2 + r^2 \\ r &= \frac{R^2 - |z - a|^2}{2|z - a|}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de r na equação (B.9), finalmente chegamos em

$$\begin{aligned} z^* - a &= (z - a) + 2 \left(\frac{R^2 - |z - a|^2}{2|z - a|} \right) \left(\frac{(z - a)}{|z - a|} \right) \\ &= (z - a) + \left(\frac{R^2 - |z - a|^2}{|z - a|^2} \right) (z - a) \\ &= (z - a) + \frac{R^2 - |z - a|^2}{\overline{z - a}} \\ &= \frac{|z - a|^2 + R^2 - |z - a|^2}{\overline{z - a}} \\ &= \frac{R^2}{\overline{z - a}}. \end{aligned}$$

Portanto $z^* = a + \frac{R^2}{\overline{z - a}}$, como queríamos demonstrar. ■

É possível demonstrar a recíproca da proposição (B.5.3), porém nos limitaremos a fornecer uma ideia geral de como demonstrá-la.

Suponha z no interior de C . Partindo de $z^* - a = \frac{R^2}{\overline{z - a}}$, observa-se que $z^* - a$ e $z - a$ possuem a mesma direção e portanto é possível construir uma reta passando por a , z e z^* . Toma-se o módulo de ambos os lados e conclui-se que $|z^* - a| = |z - a| + 2 \frac{R^2 - |z - a|^2}{2|z - a|}$ e consequentemente $|z^* - z| = 2 \frac{R^2 - |z - a|^2}{2|z - a|} = 2r$.

Manipulando a expressão anterior, chega-se na relação de Pitágoras da demonstração do proposição (B.5.3) o que garante a existência de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $|z - a| + r$ e catetos R e r . Assim a circunferência de raio r centrada no ponto médio de z e z^* será ortogonal a C . Depois é necessário mostrar que qualquer outra circunferência passando por z e z^* é ortogonal a C .

Teorema B.5.4. *Seja $C = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}$ uma circunferência. Os pontos $z, z^* \in \mathbb{C}$ são simétricos com respeito a C se, e somente se*

$$z^* = a + \frac{R^2}{z - a}. \quad (\text{B.10})$$