UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

GABRIELA ALVES DA COSTA

RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO GRAU COM A UTILIZAÇÃO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

LAVRAS-MG

2022

GABRIELA ALVES DA COSTA

RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO GRAU COM A UTILIZAÇÃO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito para a elaboração da Monografia de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática.

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy
Orientador

LAVRAS-MG
2022

GABRIELA ALVES DA COSTA

RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO GRAU COM A UTILIZAÇÃO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

RESOLUTION OF SECOND-DEGREE POLYNOMIAL EQUATIONS WITH THE USE OF GEOMETRIC CONSTRUCTIONS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito para a elaboração da Monografia de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 02 de setembro de 2022.

Professora Dra. Daiane Alice Henrique Ament
Professora Dra. Silvia Maria Medeiros Caporale

Prof. Dr. Kleyton Vinicyus Godoy
Orientador

LAVRAS-MG
2022

À minha mãe Clélia (in memorian), por incontáveis recordações, como a risada gostosa, o colo que me acolhia, o abraço apertado, as palavras de conforto e as inuméras cartas de "Luz Gabi!"

Te amo, para muito além dessa vida!

Dedico

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus mentores e guias espirituais e a minha ancestralidade, que sempre estiveram comigo ao longo dessa trajetória.

À minha irmã Nádia, luz da minha vida, que me ensina todos os dias sobre o amor, a alegria, o carinho, a presença e a força, em gestos tão pequenos, porém tão grandiosos. Obrigada por nunca soltar a minha mão. Te amo, Naná!

À minha mãe Clélia (*in memorian*), por ter sido uma força da natureza, uma mulher guerreira, batalhadora, inteligente, despojada, engraçada... “Tantas dentro de uma só”! Sinto sua presença todos os dias e tenho muito orgulho em seguir um pouquinho dos seus passos, não somente enquanto educadora, mas principalmente, enquanto ser humano! Obrigada por ter me escolhido nesta vida e nunca ter medido esforços para me ver feliz! Palavras não cabem aqui, mas parte de você vive em mim, em cada passo e em cada conquista! Como diria aquela “nossa” velha música: “De onde eu venho não importa, pois já passou, o que importa é saber pra onde vou...”! E para onde eu for, levarei você comigo! Te amo muito!

Ao meu pai Marne, por todo o apoio, esforço, cuidado e por me ensinar a ouvir as melhores músicas de MPB, desde criança. Obrigada, te amo!

Ao meu melhor amigo, Sergio, por estar presente em minha vida todos os dias. Dentre tantos encontros, nos reencontramos por essa vida, e desde então, serei eternamente grata por tantos ensinamentos, tanto colo, tantas palavras, tantos momentos, tantas risadas! Você é luz, é gigante e dono de um coração enorme. Ao seu lado eu tenho a imensa certeza de que: “Quem tem um amigo, tem tudo”! Te amo e obrigada pela contribuição nesse trabalho e por compartilhar comigo desde ensinamentos matemáticos até os momentos mais bobos, como desvendar figurinhas de WhatsApp, mas principalmente, por ser um porto seguro em todos os momentos da minha vida.

À minha Vó Cotinha (*in memorian*) por ter cuidado tanto de mim e ser dona da melhor sopa de fubá que já existiu. E junto dela à minha Tia Docarmo (*in memorian*), à Dona Zilá (*in memorian*), à Vó Lenita (*in memorian*) que juntas jamais me fazem esquecer da minha ancestralidade. Amo muito vocês!

À Madrinha Irene, pelo apoio incondicional e por sempre se fazer presente.

Às minhas tias, em especial à Tia Ana, pelo colo e pelas inúmeras ligações.

À Amanda, por me lembrar que sempre vou ter para onde voltar.

À Frida *(in memorian)*, minha cachorra, que em quatro meses me alegrou com sua presença.

Ao meu orientador Kleyton, pelo apoio e dedicação para que este trabalho acontecesse.

Ao Centro Acadêmico de Matemática (CAMAT), gestão “Maria Laura Mouzinho”, por me permitir conhecer pessoas incríveis que levarei comigo ao longo da vida.

Às professoras e professores da Ufla, por tantos ensinamentos e momentos compartilhados.

E por fim, à todas e todos, que passam ou já passaram pela minha vida, me deixando ensinamentos, momentos e lições.

Amo muito, todos vocês! Axé!

“Porque se chamavam homens
Também se chamavam sonhos
E sonhos não envelhecem [...]
E basta contar compasso
E basta contar consigo
Que a chama não tem pavio
De tudo se faz canção
E o coração na curva
De um rio, rio, rio...”

(Milton Nascimento, Lô Borges e Márcio Borges, 1972)

RESUMO

Este trabalho, de caráter qualitativo, advém da crescente queixa de diversas e diversos estudantes quanto a desarrazoabilidade do ensino de equações, a mecanicidade dos métodos de resoluções e incompreensão do processo e/ou necessidade dos algoritmos utilizados. Desse modo, o objetivo é promover uma abordagem metodológica para resoluções de equações polinomiais do segundo grau sob a perspectiva da Geometria, por meio de construções geométricas com a utilização de régua e compasso. A presente pesquisa tem respaldo na História da Matemática para atribuir significados aos objetos matemáticos presentes no tema. Sendo assim, investigamos o contexto histórico no que se refere à resolução de equações polinomiais do segundo grau tanto no seu caráter intuitivo e dedutivo, perpassando os processos de construções geométricas desde a Antiguidade, seguindo pela reestruturação algébrica com a inserção de incógnitas e fórmulas. A partir dos trabalhos de Wagner e Carneiro (1993), Wagner (2009) e Várhidy (2010), realizamos as construções geométricas e apresentamos o método de Descartes considerando três casos: 1º) duas raízes positivas; 2º) uma raiz é positiva e a outra raiz é negativa; 3º) duas raízes negativas. Por fim, a pesquisa culmina na elaboração de uma sequência didática que visa abordar os conceitos algébricos, aritméticos e geométricos através de processos descritivos e dedutivos, em apoio às construções geométricas das raízes reais de equações polinomiais do segundo grau, que apresenta uma proposta de caráter funcional, histórico e flexível para o ensino e aprendizagem do tema que engloba não somente as e os educandos mas, também, a formação inicial e continuada das e dos educadores, no sentido de fornecer às professoras e professores um material que possibilite mostrar para as e os estudantes que os conceitos matemáticos não foram criados como conceitos inflexíveis, mas que demandaram grandes esforços que perpassaram longos períodos de estudos e ressignificações.

Palavras-chave: Resolução de equação do segundo grau. Construção Geométrica. Método de Descartes. Sequência Didática. História da Matemática.

ABSTRACT

This work, of a qualitative nature, comes from the growing complaint of several students regarding the unreasonableness of teaching equations, the mechanistic methods of resolution and misunderstanding of the process and/or need for the algorithms used. In this way, the objective is to promote a methodological approach for solving polynomial equations of the second degree from the perspective of Geometry, through geometric constructions with the use of ruler and compass. The present research is supported by the History of Mathematics to attribute meanings to the mathematical objects present in the theme. Therefore, we investigate the historical context regarding the resolution of polynomial equations of the second degree, both in its intuitive and deductive character, going through the processes of geometric constructions since Antiquity, following by the algebraic restructuring with the insertion of unknowns and formulas. Based on the works of Wagner and Carneiro (1993), Wagner (2009) and Várhidy (2010), we perform the geometric constructions and we present the Descartes method considering three cases: 1st) two positive roots; 2nd) one root is positive and the other root is negative; 3rd) two negative roots. Finally, the research culminates in the elaboration of a didactic sequence that aims to approach algebraic, arithmetic and geometric concepts through descriptive and deductive processes, in support of the geometric constructions of the real roots of polynomial equations of the second degree, which presents a proposal of character functional, historical and flexible for the teaching and learning of the theme that encompasses not only the students but also the initial and continuing education of educators, in the sense of providing teachers with material that makes it possible to show students that mathematical concepts were not created as inflexible concepts, but which demanded great efforts that spanned long periods of studies and resignifications.

Keywords: Resolution of second-degree equation. Geometric Construction. Descartes' Method. Following teaching. History of Mathematics.

LISTA DE ABREVIAÇÕES

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAMAT	Centro Acadêmico de Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFLA	Universidade Federal de Lavras
MMC	Mínimo Múltipo Comum
MPB	Música Popular Brasileira

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A escolha pela Licenciatura, em particular, Licenciatura em Matemática, me ocorreu através de inquietações e questões que surgiam ao longo de diferentes assuntos que me eram apresentados. Lembro-me de ficar intrigada com as fórmulas matemáticas – algoritmos para resolução de problemas – as quais me faziam questionar: Mas quem disse que isso *funciona* e, mais ainda, por que *sempre* funciona? Por que *tem que ser desse modo*? De onde vieram essas fórmulas? *Pra que preciso saber* o valor desse x? Dentre tantas outras inquietações. Em diversos contextos era complicado ver conexões. De repente, vi matemáticas diferentes: Álgebra, Aritmética, Geometria. Mas ainda assim era tudo Matemática. Qual a conexão?

Ainda hoje me deparo com frases compartilhadas em redes sociais tais como “mais um dia se passou e eu não usei a fórmula de Bháskara na minha vida”, pela grande maioria das pessoas que se viam frustradas, imersas num ensino mecanicista e desprovido de significado, cujo foco principal era a de resolução de problemas em situações fictícias, aquém de contextos atuais e permeada de algoritmos memorizáveis e desconexos da validade dos mesmos ou escolha de seu uso. Pois bem, aqui utilizamos o verbete “escolha” uma vez que ao longo de sua trajetória escolar, as e os estudantes conhecem diversos métodos de ensino, estudo, conhecimento e, em casos felizes, de descobertas das matemáticas por aquela ou aquele que lhe instrui. Sim, Matemáticas, no plural. Afinal, “abordagens metodológicas mais recentes na pesquisa em história da matemática indicam que não há *uma* matemática, que evolui linearmente ao longo do tempo, mas várias práticas matemáticas que nem sempre podem ser traduzidas umas nas outras” (ROQUE, 2014, p.167).

Existe uma crescente limitação no que se entende dos objetos matemáticos. Uma quebra do ensino significativo para uma aprendizagem significante como aborda Saussure (2003). Para exemplificar, vamos pensar na equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. O que é esse objeto? O que ele representa? Qual a sua finalidade? Dentre as respostas mais comuns, podemos destacar: “é uma equação útil para resolver problemas” ou “precisamos disso para sermos aprovadas e aprovados no vestibular”. Na melhor das hipóteses, quando pede-se um exemplo de aplicação, pode-se esperar seu uso na Física, para determinar o movimento de um projétil como a bala de um canhão, de uma flecha, ou a queda livre de uma pedra. E aqui temos, ainda que uma situação interessante de aplicação, algo que está bem distante da realidade daqueles que estão fazendo desse estudo investigativo algo significante. Podemos refletir: Quão próximo a trajetória da bala de um canhão está da realidade das e dos estudantes? Qual o interesse cotidiano de estudar o tempo de queda de uma pedra? Se for um paraquedas, quantos dessas e desses estudantes podem ou irão experienciar essa aventura? Logo percebemos o cenário de inserção desse objeto matemático: ele é um dado – "uma positividade" (FOUCAULT, 2012) – isto é, "[...] um fato incontornável, que o aluno deve aprender a resolver por meio da fórmula, ou aplicar a problemas preparados, de antemão, com o intuito de testar se este conhecimento foi aprendido" (ROQUE, 2014, p.170).

A forma pela qual a Matemática tem sido trabalhada atualmente nos permite perceber que ela está diretamente relacionada com as vivências na sociedade, no sentido de que o conhecimento deve não somente ser apresentado em sala de aula, mas ser apropriado de modo que faça sentido no cotidiano da e do educando, ademais "essas ideias são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento" (BRASIL, 2018, p.266). Conforme Piaget (1976), deve-se considerar a aprendizagem que está sendo construída. Nesse sentido, a estudante e o estudante ao receberem as informações vão aos poucos entendendo todos os processos e fazendo as devidas conexões. A Matemática abordada visando puramente a transmissão de conhecimento desprovida de sentido ao cotidiano do educando é infrutífera. Paulo Freire (2005) nesse sentido, reitera que a educação libertadora e problematizadora do sujeito não pode ser a favor de "depósitos" de conteúdos em corpos "vazios" das e dos educandos, nem de uma consciência mecanizada. Assim,

> A educação libertadora, problematizadora, já não pode ser o ato de depositar, ou de narrar, ou de transferir, ou de transmitir "conhecimentos" e valores aos educandos, meros pacientes à maneira da educação "bancária", mas um ato cognoscente. O antagonismo entre as duas concepções, uma, a "bancária" [grifos do autor], que serve à dominação; outra a problematizadora, que serve à libertação, toma corpo exatamente aí. Enquanto a primeira, necessariamente, mantém a contradição educador-educando, a segunda realiza a superação. (PAULO FREIRE, 2005, p. 78)

Diversas são as questões que surgem por analisar somente esse aspecto e, por esse motivo, é objeto de estudo deste trabalho. A abordagem da problemática aqui apresentada pode ser discutida em tantos outros ramos da Álgebra, Aritmética e da própria Geometria. A questão principal é: A que se deve esse modelo de ensino adotado atualmente? Para elucidar, comparemos com o estudo do Sistema de Numeração Decimal. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o processo construtivo do nosso Sistema Decimal passa pelo conhecimento histórico de sistemas numéricos que o precederam tais como o egípcio, maia, chinês, babilônico (inclusive o sistema hexagesimal babilônico nós utilizamos até os dias atuais para a divisão do tempo em horas, minutos e segundos) dentre outros. Até que então o estudo culmina em nosso habitual sistema. Tão prático e funcional, *"mais fácil, direto e próximo das nossas necessidades e realidades"* (grifo nosso). A compreensão dos algarismos, do sistema posicional e das classes que surgem de agrupamentos explicam processos presentes em algoritmos simples como os de "pedir emprestado", "somar um", "descer um número na divisão", "acrescentar um zero", "andar com a vírgula", "pôr em evidência" e assim por diante. De repente, como num piscar de olhos, nos deparamos com "encontre o valor de x", "fatore a equação", "a área do triângulo é base vezes altura dividido por 2" e "o volume da esfera é quatro terços de pi vezes o raio ao cubo" ou, ainda, mais abstrato, "encontre as raízes da equação".

Destacando o último ponto acima, das equações, podemos pensar em outra mensagem compartilhada nas redes sociais: "A Matemática tinha tudo para ser simples, mas alguém decidiu complicar e colocar letras no meio". Em comparação com o ensino de Sistemas de Numeração, não temos abordagens como: "Por que temos que somar e multiplicar assim?" "Que coisa difícil, alguém não tinha o que fazer quando inventou o sistema decimal!". O contraponto é que o processo pelo qual esse ensino se inseriu foi por atribuir e proporcionar a investigação desse sistema, atualmente adotado, através do conhecimento, desenvolvimento e investigação da História da Matemática por detrás da estrutura utilizada atualmente. Não haveria, talvez, o mesmo efeito positivo, ou de compreensão e aceitabilidade, se a História da Matemática se fizesse presente no estudo das equações como abordagem metodológica?

Conduzir um ensino investigativo através da linha do tempo do estudo das equações polinomiais, seus métodos geométricos de resolução, as situações do cotidiano da época ao qual eram desenvolvidas, as abstrações que se seguiram para o desenvolvimento do pensamento crítico e filosófico e, futuramente, sua estruturação com a atribuição de letras que representam valores desconhecidos e, então, algoritmos e fórmulas mais diretas para resoluções de problemas, podem acarretar numa aprendizagem significativa que seja valorizada, evitando o cenário de um detentor do saber que apresenta formulários prontos com algoritmos reproduzíveis os quais alienam, mecanizam e desestimulam os principais agentes desses processo educacional: as e os estudantes.

Desse modo, é primordial compreender as bases dessa estrutura engendrada que permeia o ensino de equações polinomiais do segundo grau, acrescentar à formação continuada das professoras e dos professores quanto a historicidade das metodologias de ensino e de desenvolvimento das matemáticas que cercam o tema. Considerando a iminente importância do Desenho Geométrico no desenvolvimento do racioncínio lógico, artístico, cultural e predecessor de diversas ramificações da Matemática, como apontado no estudo de

Bento et al (2017).

O objetivo geral deste trabalho é investigar abordagens geométricas para resoluções de problemas algébricos, especificamente, por meio da construção de segmentos de retas cujas medidas sejam exatamente as raízes reais de equações polinomiais do segundo grau, apresentando uma proposta de sequência didática com potencialidade para um ensino significativo em diversos enfoques, diálogos e reproduções, no qual os objetos matemáticos – equações polinomiais do segundo grau, fórmula de Bhaskara e letras representando incógnitas – tornem-se intuitivos, construtivos, investigativos, interativos e interessantes, para as e os estudantes que atuam como agentes ativos em seu processo de ensino e aprendizagem, tendo a professora e o professor o papel de tutora e tutor, respectivamente, nessa jornada!

Nesse viés, essa proposta de sequência didática, dar-se-á por apresentar a resolução de equações polinomiais do segundo grau, isto é, a determinação de suas raízes reais, por processos geométricos de construção utilizando régua e compasso (podendo também ser trabalhado com softwares como o GeoGebra[1] tanto quanto a validação dos mesmos através de justificativas geométricas e aritméticas tais como: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Potência de Ponto, Segmentos de uma circunferência, etc. Trabalhos como a dissertação de Mestrado de Várhidy (2010) e o Método de Descartes, servem de estímulo para a produção desta proposta. Todo o trabalho acompanhando construção, validação e contexto histórico buscando analisar, das bibliografias consultadas, a potência e riqueza dessa metodologia inserida, especificamente, neste tema abordado.

Ainda que resoluções de problemas algébricos através da Geometria possam ser mais extensos do que os algoritmos conhecidos, tais como a equação de Bháskara, o desenvolvimento e apropriação dos conceitos geométricos e seus processos de construção proporcionam o aprimoramento de habilidades em outros conhecimentos, contribuindo, por exemplo, no desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, do raciocínio lógico, da organização e criatividade.

Naturalmente surgem questões quanto a substituição de processos geométricos por algoritmos algébricos: Deu-se por aprimoramento? Quais as vantagens e desvantagens de cada abordagem? Em quais aspectos essas visões ultrapassam a sala de aula para os campos de atividade humana? Deve toda essa riqueza histórica ser negligenciada? A que custo? Etc.

Por fim, neste trabalho, nossa proposta é buscar respostas a estas e outras perguntas,

[1] O software GeoGebra pode ser utilizado gratuitamente através do sítio: https://www.geogebra.org/calculator.

elaborar um material metodológico dentro de uma proposta específica para resoluções de Equações do Segundo Grau com raízes reais, dando relevância a metodologia de ensino da História da Matemática. Trata-se, pois, de uma alternativa para instrumentalizar a educadora e o educador de Matemática no seu ofício, oferecendo as e os estudantes, igualmente, uma oportunidade concreta de entender como podemos, com o simples uso de régua e compasso resolver problemas que, aparentemente, só com a álgebra seria possível. Vale salientar a riqueza dessa proposta no âmbito das Tecnologias de Informação e Comunicação, dentre das quais, destacamos o GeoGebra. Reivindicando, a passos curtos, o papel fundamental da Geometria nos processos formadores de ensino e aprendizagem não somente das e dos estudantes, mas de toda a sociedade.

2 METODOLOGIA

Este trabalho consiste em uma investigação de abordagem qualitativa, a qual podemos caracterizar como "um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade" (OLIVEIRA, 2005, p.60). Assim objetiva-se buscar informações fiéis que expliquem com profundidade o significado de cada contexto em que se encontra o objeto de pesquisa.

Os procedimentos acerca dessa metodologia concerne na pesquisa exploratória visando "dar uma explicação geral sobre determinado fato, através da delimitação do estudo, levantamento bibliográfico, leitura e análise de documentos" (OLIVEIRA, 2005, p.65) embasado por dissertações, artigos e livros, a qual possuímos o intuito de elaborar uma sequência didática com potencialidade para ser desenvolvida em sala de aula a respeito de Resoluções de Equações Polinomiais do Segundo Grau com a utilização de construções geométricas e desenho geométrico.

O presente trabalho, se caracteriza pela pesquisa qualitativa, no que se refere primariamente à abordagem, pois destaca a interpretação de dados obtidos diante pesquisas de materiais, vivências e concepções difundidas ou sentidas. Conforme Flick (2009, p. 25):

> [...] os métodos qualitativos considerando a comunicação do pesquisador em campo como parte explicita da produção de conhecimento, em vez de simplesmente encará-la como uma variável a inferir no processo. A subjetividade do pesquisador, bem como daqueles que estão sendo estudados, torna-se parte do processo de pesquisa. As reflexões dos pesquisadores sobres suas próprias atitudes e observações em campo, suas impressões, irritações, sentimentos, etc., tornam-se dados em si mesmos, construindo parte de interpretaçãoe são, portanto, documentos em diários de pesquisa ou em protocolos de contexto.

Num viés próximo, Günther (2006) sintetiza a pesquisa qualitativa de modo peculiar, trazendo-a na proposta de coleta de dados e produção de textos junto a resultante construção de conhecimento. Assim, busca-se o processo de pesquisa e análise interpretativa de seus resultados.

Deste modo, pretendemos fornecer subsídios para uma abordagem metodológica que englobe diferentes conceitos e argumentações contribuindo com as interrelações presentes na Matemática que, por razões diversas, tanto quanto históricas, vem sendo substituídas por processos mecanicistas que obscurecem a fundamentação e explanação da razoabilidade e aplicabilidade ao cotidiano daquilo que se ensina e, consequentemente, se aprende por desenvolvimento – o qual dever-se-ia ocorrer de maneira ativa. Com isso, iremos nos embasar nos trabalhos de Allaire e Bradley (2001), Marmo e Marmo (1994, 1995a, 1995b), Wagner e Carneiro (1993), Wagner (2009), Várhidy (2010) e outros, para abordar a resolução de equações polinomiais do segundo grau por meio de construções geométricas e respaldar nossa sequência didática, assim como sua importância, pela análise da História da Matemática através dos trabalhos de Tatiana Roque (2012), Boyer (2010) e Eves (1994).

Conforme mencionado, objetivamos elaborar uma sequência didática com potencialidade de ser utilizada nas aulas de Matemática ao abordar a temática das equações do segundo grau – que em visão futura auxiliarão no processo de ensino e aprendizagem de funções quadráticas e desenvolvimento das tecnologias de informação como o uso do Geogebra. Este material poderá ser utilizado pelas professoras e professores que se interessarem em explorar a resolução de equações polinomiais do segundo grau através das construções geométricas supracitadas tendo em vista que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) – Brasil (1997) – é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, mas o desenvolvimento de novas práticas educacionais levam à reflexão da prática pedagógica, ao "desdobramento" de novos planejamentos de aulas, propiciando assim um ensino mais crítico e próximo da realidade dos e das estudantes, dentro das especificações de cada contexto. E através disso, promove-se então uma aprendizagem menos mecanicista e mais conceitual ao se tratar da Matemática.

Por conseguinte, espera-se incorporar à Educação Matemática seus signos, isto é, abordar sua linguagem própria na perspectiva de elucidar o seu significado (conceito ou ideia de algo, a parte inteligível da Matemática) e torná-la significante (a representação que dá o testemunho dos nossos sentidos, a parte perceptível da Matemática) como defende Saussure (2003). Assim, estudantes e professores podem aprimorar sua formação escolar/acadêmica desmistificando temas da Matemática seja por compreendê-las melhor, por enxergá-las em suas realidades ou por desenvolver sentido ao que se aprende e desenvolve.

3 CONTEXTO HISTÓRICO

Ao analisarmos a História da Matemática pode-se perceber que a utilização da régua e do compasso se faz presente desde a Antiguidade, como instrumentos auxiliadores, de modo a resolverem por processos dedutivos, diversos problemas matemáticos. De acordo com Roque (2012), o *problema deliano* como ficou conhecido, que consiste em dada a aresta de um cubo, construir somente com régua e compasso a aresta de um segundo cubo, tendo o dobro do volume do primeiro, surgiu no contexto da Academia de Platão, por volta do século IV a.C. A autora apresenta, ainda, que Hipócrates (460 – 377 a.C) havia tentado demonstrar o problema da *quadratura do círculo*, isto é, construir um quadrado cuja área seja igual a área de um dado círculo, conhecido por volta do século V a.C., utilizando-se, dentre outros, o método conhecido por método da *neusis*, que em tradução literal do grego, quer dizer "inclinação". A construção *neusis* pode ser realizada por meio de uma 'régua neusis', ou seja, uma régua graduada, que pode girar em torno de um ponto estimado, sendo essa uma técnica de construção que pode ser reduzida a construção com régua e compasso. Embora mais tarde Aristóteles (384 – 322 a.C) teria afirmado que Hipócrates havia fornecido uma prova falsa do problema, vale ressaltar que, como defende Roque (2012, p.160):

> A tarefa de resolver problemas não deve ter sido constrangida pela imposição da régua e do compasso, ao menos em suas etapas mais remotas. O objetivo principal dos geômetras era encontrar construções por qualquer método disponível. A restrição a um certo método de construção é uma limitação formal, advinda da necessidade de dividir e classificar o corpo de resultados existentes. Mas até que o campo da geometria tivesse alcançado um tamanho considerável, com uma grande diversidade de resultados, não haveria necessidade de classificar seguindo critérios formais.

Por outro lado, nos *Elementos* de Euclides, as construções foram realizadas utilizando régua e compasso e, apesar das tentativas de tais construções serem descredibilizadas por alguns matemáticos na época, como Platão (427 - 347 a.C.) e futuramente por outros, como Herman Hankel (1839 – 1873), credibiliza a ideia de que as explicações para a utilização de régua e compasso possam ter sido de ordem pedagógica, por essas fornecerem construções simples e sem teoria adicional e, em outro viés, provenientes da necessidade de ordenação e sistematização da geometria, de modo a expor a matemática elementar da época, demandando para isto somente o emprego da régua e do compasso. Sendo assim, defende Roque (2012, p.163):

> Parece mais adequado entender a exclusividade da régua e do compasso nos *Elementos* como uma restrição pragmática cujo objetivo poderia ser apresentar um uso ótimo dos instrumentos mais simples possíveis. Nesse caso, a mensagem implícita nessa obra seria: eis tudo o que se pode fazer em geometria com o uso somente da régua e do compasso.

A critério de esclarecimento vale-nos destacar o que está envolvido nas construções geométricas e a referida ênfase em régua e compasso. Primeiramente cabe-nos diferenciar Desenho Geométrico e Construções Geométricas uma vez que em Desenho Geométrico outros instrumentos podem ser utilizados (como o transferidor e o esquadro, por exemplo) além da *régua* e do *compasso*, que são os únicos permitidos nas construções geométricas. Com a finalidade para atividades pedagógicas atuais o desenho geométrico apresenta grande potencial. O segundo ponto é a definição de um número, elemento ou segmento, ser *construtível*. De acordo com a Geometria Euclidiana, construir com régua e compasso é dizer que somente dois procedimentos podem ser utilizados, a saber: (1) Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos; (2) Traçar um círculo conhecendo o seu centro e um de seus pontos. Conhecidos tais procedimentos, Costa (2013, p.24) apresenta a seguinte definição:

> Dizemos que um número real x é construtível, se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento de comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado como unidade.

Em que, nessa definição, ressaltamos a importância pedagógica de se estabelecer o segmento a ser tomado como unidade (podendo valer-se de uma régua graduada para este fim).

Buscando uma ramificação ou tópico de estudo, na História da Matemática, que corrobore com o contexto dos métodos de resolução por construções geométricas, podemos citar o estudo das equações. Inicialmente, apresentadas em linguagem de natureza retórica, isto é, forma verbal, problemas que envolviam descobrir um determinado valor desconhecido que atendia determinados requisitos – resolviam uma equação – datam de períodos bem remotos. Por exemplo, podemos citar um dos mais famosos documentos históricos da Matemática, que apresenta a prática da mesma no Egito Antigo, que é o Papiro de Rhind – documento egípcio de cerca de 1650 a.C. – comprado em 1858 pelo escocês Henry Rhind, daí o seu nome, mas também conhecido como Papiro de Ahmes, uma homenagem ao escriba que o copiou, como nos apresenta os estudos de Boyer (2010). Neste documento, há relatos de soluções de equações lineares onde o termo desconhecido era denominado “aha”. Podemos citar, como exemplo, o problema 26 do papiro onde se lê: “uma quantidade e o seu quarto torna-se 15. Qual é essa quantidade?”. Na linguagem simbólica, seria o mesmo que determinar o valor de x solução da equação $x+\frac{x}{4}=15$. Subsequentemente, é natural investigarmos o desenvolvimento do raciocínio para resoluções de equações quadráticas, objeto principal da nossa pesquisa de caráter qualitativo.

O estudo de equações do segundo grau, de acordo com Boyer (2010) começou há mais de quatro mil anos. Foram encontradas evidências de que elas eram estudadas pelos egípcios e babilônios de modo implícito e primitivo através de registros escritos em tábuas de argila utilizando palavras e papiros. Alguns trabalhos, tais como o Trabalho de Conclusão de Curso de Silva (2019), defendem que a primeira aparição da solução de uma equação do segundo grau encontra-se no Papiro de Kahun, datado por volta de 1950 a.C. Na notação atual este problema poderia ser escrito da seguinte forma: "A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quádruplo do lado do outro" (Pedroso, 2010, p. 2). Tais papiros posteriormente adquiriram o formalismo matemático com a obra de Euclides. Em os "Elementos da Geometria", escritos em 300 a.C., a ferramenta geométrica que permitia resolver equações de segundo grau que possuíam como coeficientes números positivos e construtíveis, era a aplicação de áreas de figuras planas.

Já na Índia vale destacar Bhaskara (1114-1185), conhecido como "o sábio". Matemático, professor, astrólogo e astrônomo, Bhaskara foi autor dos livros mais populares de aritmética e álgebra no século XII, que, segundo Roque (2012, p.293), "presume-se, foram livros textos voltados para o ensino". Suas obras mais conhecidas são o *Lilavati* e o *Bija Ganita*, ambos com muitos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas (determinadas ou indeterminadas), mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríades pitagóricas, regra de três, dentre outros. Foi ele o responsável por preencher lacunas deixadas por seus antecessores, inclusive, dando a solução geral da equação $x^2=1+py^2$, dentre várias outras equações diofantinas. Porém, mesmo com todo o seu talento, Bhaskara não pôde dar o passo fundamental no desenvolvimento das equações quadráticas: a descoberta da fórmula. Um fato curioso é que somente no Brasil estabeleceu-se o hábito de nomear a fórmula para resolver equações do segundo grau como "fórmula de Bhaskara".

Os árabes também contribuíram para os avanços nos estudos de equações do segundo grau e dentre eles vale destacar o matemático e astrônomo Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850) que exerceu influência significativa nos rumos da matemática. Além de outras obras, escreveu, em 825, *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah (ciência da restauração e da redução ou ciência das equações)*, obra de grande potencial didático. Nessa obra, al-Khowarizmi apresenta a equação do segundo grau, bem como sua resolução, de forma retórica, isto é, na forma verbal, além de uma comprovação geométrica denominada “Método de completar quadrados”.

A criação da álgebra simbólica teve início com o jurista francês François Viète (1540-1603) considerado por muitos estudiosos como: “O pai da Álgebra”. De acordo com Eves (2004) em seu mais famoso trabalho, denominado *In artem*, Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes e em 1637, René Descartes (1596-1650), introduziu a convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes, além de apresentar uma notação que diferia da utilizada até então somente pelo símbolo de igualdade. Logo, apresenta-se a equação do segundo grau que conhecemos hoje: $ax^2 + bx + c = 0$ a qual podem surgir outras a partir desta permitindo-nos gerar classificações, encarados como exemplos particulares, na forma de “casos”. Vale trazer, nas falas de Roque (2012, p.277), que:

> Enunciando uma fórmula geral, a resolução dos casos particulares se reduziria a uma aplicação mecânica do procedimento. Mais uma vez, contudo, atestamos que a história da matemática não é linear e não foi bem assim que aconteceu. A classificação de equações e o enunciado de fórmulas gerais não era uma questão na época, pois a álgebra não se constituía como uma disciplina e os métodos algébricos eram usados para resolver uma grande variedade de problemas. Sendo assim, nem mesmo Viète pode ser visto como o inventor da fórmula de resolução de equações.

René Descartes (1596-1650) viveu no século XVII e fez grandes contribuições à geometria analítica, ganhando essa a forma com que estamos familiarizadas e familiarizados nos dias de hoje. Tendo recebido educação cuidadosa no colégio de jesuítas de La Flèche, onde estudou Línguas Clássicas, Lógica, Ética, Matemática e Física, graduou-se posteriormente em Direito. Desde jovem, mostrou-se meditativo, impressionando seus mestres pela independência e pela insistência em não aceitar sem reflexão os ensinamentos recebidos. Como filósofo, Descartes foi revolucionário. Plenamente convencido do potencial da razão humana, criou um método novo para o conhecimento do mundo através da ciência e do raciocínio. Este método centrava-se na dúvida. Para ele, duvidar significava pensar. *Penso, logo existo.*

A obra, “A Geometria” de Descartes, escopo deste trabalho, foi apresentada, como um entre três apêndices de seu maior tratado: *Discours de Ia méthode pourbien conduire sa raison et chercher Ia verité dans les sciences*, ou seja, "*Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*", datado de 1637 e ocupa cerca de cem páginas. Segundo Roque (2012, p.322)

> O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, em que regras simples de composição levassem de objetos simples a outros mais complexos. O método começa por exibir os objetos mais simples de todos, as retas, e as relações simples que os relacionam, as operações aritméticas. Na abertura do primeiro livro da *Geometria*, Descartes se refere às cinco operações básicas da aritmética e mostra que tais operações correspondem a construções simples com régua e compasso.

Ao analisar equações do segundo grau, Descartes, mostra que a solução, ou seja, a incógnita, é um segmento de reta que pode ser construído. E, a partir daí, resolveu equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos. O fato de não generalizar o problema escrevendo apenas uma equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, se devia ao fato, de que só eram considerados coeficientes positivos, uma vez que deviam estar associados a linhas construtíveis. Descartes resolve outros tipos de equações do segundo grau usando construções com régua e compasso e enfatiza que essas construções podem ser obtidas por diversos outros meios e que os antigos não possuíam esse método, caso contrário, argumenta, não teriam escrito livros tão volumosos em que compilaram aqueles métodos já resolvidos.

Em suma, observa-se que Construções Geométricas é uma parte da Matemática destinada a explicar ou justificar o motivo pelo qual determinados procedimentos conduzem à certas construções ou resoluções de problemas, tendo sido difundida no decorrer da história em sua prática de construir e não no termo atual de calcular obtendo, assim, um paralelo com a Geometria Euclidiana a qual estabeleceu uma estrutura formal para essa área. Ressaltamos que a Geometria é vista como ciência dedutiva, segundo Eves (1994, p.7), através dos esforços de Tales de Mileto (640 – 546 a.C.) o qual aborda:

> Tales de Mileto (640 – 546 a.C.) foi um dos primeiros gregos a insistir que fatos geométricos devem ser estabelecidos por raciocínio lógico e não por observação, experimentação, tentativa e erro. Ele foi o fundador da geometria descritiva. Seus esforços serviram de base para o incomparável trabalho de Euclides (300 a.C.): Os Elementos.

Por outra perspectiva, no que tange a Geometria nas escolas, nota-se uma decadência nas últimas décadas, em todo o Mundo. Segundo Costa (2013, p.7) “nada mais era justificado (através de construções, por exemplo), mas apenas mostrado”. A tentativa atual de reaver os procedimentos construtivos de resoluções de problemas tais como de equações polinomiais está presente nas Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC’s) em meio ao surgimento de softwares (programas ou ambientes computacionais) de Geometria Dinâmica tais como o

GeoGebra em que, aos poucos, vem justificando a Geometria novamente nas salas de aula. Porém, inquietações surgem como aponta Lamphier (2004, p.6):

> Ao invés de se concentrarem em papel e lápis, e nas construções com régua e compasso, os livros atuais tendem a enfatizar o uso de softwares de geometria dinâmica [...] Será verdade que as construções euclidianas usando régua e compasso em papel em breve serão coisas do passado?

Analisando exemplos mais recentes de livros didáticos, e outros, visando observar o enfoque em construções geométricas e resoluções de problemas nessa perspectiva, é com pesar que observamos que muitos dos livros didáticos abordam elementos históricos acerca das equações polinomiais do segundo grau em pequenos fragmentos do texto ou até mesmo na forma de curiosidades. Apesar de apresentarem de maneiras diversas, ainda que sucintas, outros métodos de resoluções além da fórmula de Bhaskara, a apresentação é puramente conceitual e desprovida de prática. Dos livros didáticos mais relevantes dos quais apresentaram com eloquência e praticidade construções geométricas, destacamos os livros de Marmo e Marmo (1994, 1995a, 1995b) com o infortunoso contraste de que os mesmos, apesar de terem sido produzidos para fins pedagógicos e didáticos com propostas voltadas para a sala de aula, não possuíram em sua época, nem o possuem atualmente, o uso nas escolas para o qual foram produzidos.

De todos os livros pesquisados, destacamos os de Wagner (2009) e Wagner e Carneiro (1993) os quais compilam de maneira formal e estruturada diversas construções geométricas, com aplicações, situações-problema e exercícios diversos com caráter autodidático e bem direcionado. Eles serviram de base para alguns dos poucos trabalhos encontrados com escopos próximos à proposta do presente trabalho, tal como o trabalho de Várhidy (2010). Obras outras como Rezende e Queiroz (2008) e Putnoki (1989) com grande enfoque em Desenho Geométrico e Construções Geométricas possuem caráter universitário e escolar, respectivamente, mas com pouco conhecimento de seu uso para os devidos fins, conforme buscas textuais de livros, artigos e entrevistas com professoras e professores experientes. Os livros supracitados apresentam diversos métodos de resolução para equações polinomiais do segundo grau, muitos dos quais embasados no Método de Descartes, que enriquecem grandemente o estudo e compreensão de conceitos puramente mecanicistas como o algoritmo da fórmula de Bhaskara. No que se refere às pesquisas qualitativas de análises de livros didáticos quanto à temática abordada nesta pesquisa, citamos o trabalho de conclusão de curso de Silva (2019) o qual analisa outros livros recentes e conhecidos, bem adotados em salas de aula, tais como Dante e Bianchini.

Por fim, tão logo percebe-se a relevância do tema, constata-se a importância de nos empenharmos pela formação das professoras e dos professores quanto à prática didática de abordar a História da Matemática permitindo estabelecer conexões entre os métodos de resolução de equações do segundo grau contribuindo para o vislumbre da praticidade da “fórmula de Bhaskara” advinda, dentre outros fatores, de contribuições como as de Viète. Dizemos isso, pois enquanto professoras e professores, devemos buscar gerar habilidades e competências que garantam um ensino de maior qualidade, atendendo as diferentes dificuldades das e dos estudantes combatendo, consequentemente, o desinteresse e a não significação dos objetos matemáticos presentes no processo de aprendizagem das nossas e dos nossos estudantes – estas e estes, serão o futuro de nossa sociedade. Fica a reflexão!

4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Este capítulo é destinado a apresentar as construções geométricas, concomitantes com desenho geométrico, que justificam o método de resolução de equações polinomiais do segundo grau, isto é, a determinação de suas raízes reais, por intermédio da Geometria. O presente capítulo tem por base Wagner e Carneiro (1993), Wagner (2009), Várhidy (2010) e Allaire e Bradley (2001).

As Equações do Segundo Grau podem ser resolvidas utilizando os conceitos de Soma e Produto de Raízes. Assim, uma equação que, em princípio, se apresenta como $ax^2 + bx + c = 0$, considerando a, b e c números reais e $a \neq 0$, pode ser reescrita como $x^2 - Sx + P = 0$, em que S designa a **Soma das Raízes** e P designa o **Produto das Raízes**.

Considerando x_1 e x_2 as raízes de uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P := x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \tag{4.1}$$

A demonstração das relações acima apresentadas pode ser obtida por cálculo direto através da conhecida fórmula de Bhaskara a qual está apresentada na 4ª etapa da sequência didática no capítulo 5 deste trabalho.

Há diversas maneiras de se resolver sistemas de equações. Uma delas, do campo da Geometria Analítica, é isolar uma das incógnitas em cada equação e traçar as curvas que estas "novas" equações representam, no plano cartesiano, sendo o ponto de interseção dessas curvas a solução desejada. A dificuldade dessa metodologia está em traçar a equação referente ao produto das raízes, uma vez que a curva correspondente descreve uma hipérbole. Mas tal situação pode ser facilmente contornada utilizando softwares de construção de curvas como o GeoGebra, mas que foge do escopo deste trabalho. Visando um método de resolução descritivo e construtível consideramos outras possibilidades como, por exemplo, o método de Descartes o qual descreveremos, com modificações segundo os autores considerados, os passos a seguir.

Para realizar as construções dos segmentos cujas medidas representam as raízes reais desejadas, deve-se considerar três casos, sendo eles:

- **1º caso:** As duas raízes são positivas;
- **2º caso:** Uma raiz é positiva e a outra raiz é negativa;
- **3º caso:** As duas raízes são negativas;

Consideraremos as equações do segundo grau já modificadas, quando necessário, na forma $x^2 - Sx + P = 0$ a qual S e P são tais como o sistema (4.1) para $a = 1$.

4.1 Construções Iniciais

Iniciaremos apresentando algumas construções geométricas básicas, consideradas pré-requisitos auxiliadores nos procedimentos de construção de nosso interesse.

4.1.1 Retas Paralelas

Dada uma reta r e um ponto P fora dela, desejamos construir uma reta s paralela a r passando por P. Buscando praticidade e aprimoramento pedagógico faremos uso do Desenho Geométrico, uma vez que para tal construção utilizaremos, além da régua e compasso, um par de esquadros ou uma régua e um esquadro.

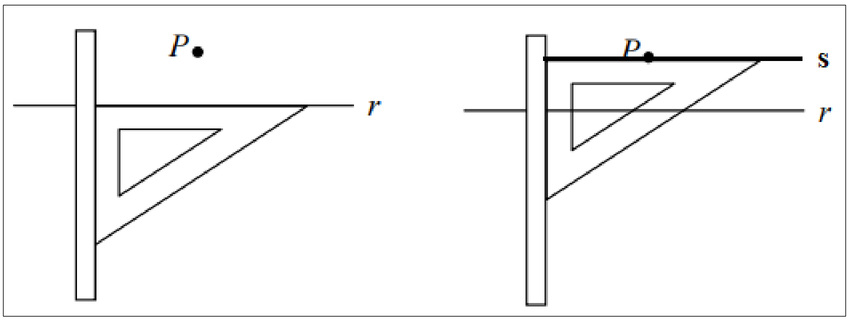
Para realizar a construção da reta s prosseguimos do seguinte modo:

1º passo: Posicionar a régua e um dos esquadros como na Figura 1.

2º passo: Fixar bem a régua e deslizar o esquadro até que seu bordo passe pelo ponto P.

3° passo: Com o lápis, traçar a reta s sobre o bordo do esquadro.

Figura 1 - Traçando retas paralelas



Fonte: Wagner (2009).

4.1.2 Retas Perpendiculares

Dada uma reta r e um ponto P fora dela, desejamos construir uma reta s perpendicular a r passando por P. Prosseguimos do seguinte modo:

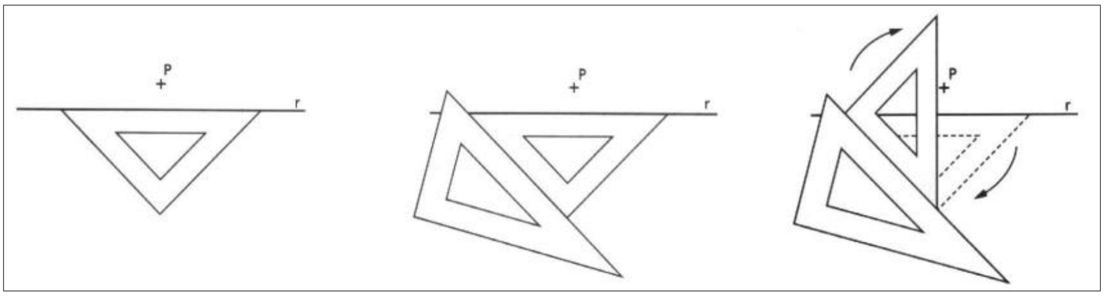
1° passo: Posicionar o esquadro de 45°, com o lado oposto ao ângulo de 90°, sobre a reta r.

2° passo: Apoiar o esquadro de 60° em um dos lados do esquadro de 45°, mantendo-o fixo. Ele servirá com um trilho.

3° passo: Girar o esquadro de 45°, trocando o lado de apoio com o esquadro de 60°, conforme a Figura 2.

4° passo: Deslize, se necessário, o esquadro de 45° até que sua hipotenusa esteja sobre o ponto e trace a reta.

Figura 2 - Traçando retas perpendiculares



Fonte: Apostila CP II (2019).

4.1.3 Mediatriz

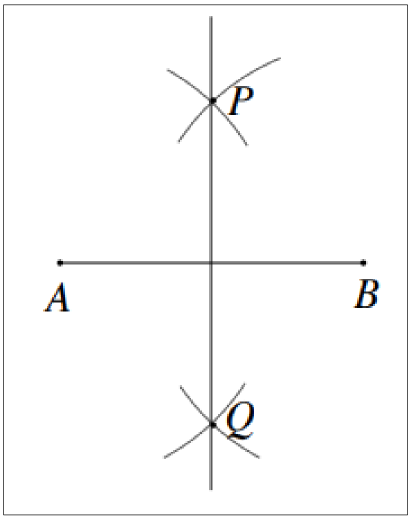
Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B. Consequentemente, a mediatriz é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que contém seu ponto médio. Para construir procedemos do seguinte modo:

1° passo: Posicionar a ponta seca do compasso sobre o ponto A e a outra ponta ficará virada para dentro do segmento $\overline{AB}$. Fazer uma abertura que seja maior que a metade do segmento $\overline{AB}$ e traçar um arco de circunferência com centro em A e raio igual a abertura do compasso.

2° passo: Com a mesma abertura do compasso, seguir os mesmos procedimentos do 1° passo, mas agora o arco terá centro B.

3° passo: Determinar os pontos P e Q, interseções desses arcos, e traçar a reta $\overline{PQ}$.

Figura 3 - Traçando a reta mediatriz



Fonte: Wagner (2009).

4.1.4 Raiz de um número real e positivo

Antes de analisarmos cada um dos casos no método de Descartes, é necessário, para todos eles, determinar um segmento cuja medida seja $\sqrt{c}$, para c real e positivo. Neste caso, c representa o produto das raízes. Tal construção dá-se da seguinte forma:

1º passo: Traçar um segmento de reta $\overline{AB}$, cujo tamanho seja o produto das raízes, ou seja, c.

2° passo: Traçar um segmento de reta $\overline{BC}$, de tamanho 1, partindo de B.

3° passo: Traçar a mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$ determinando o Ponto Médio (M) deste segmento.

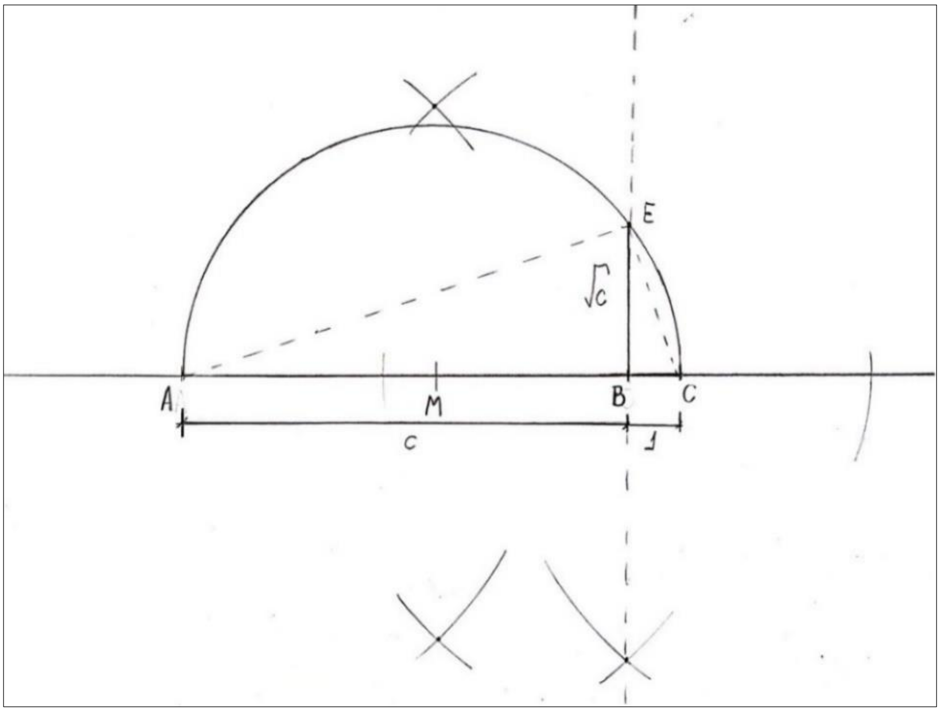
4° passo: Traçar o semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$.

5° passo: Traçar uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, passando pelo ponto B.

6° passo: Determinar o ponto E de interseção entre o semicírculo e a reta r.

7° passo: O segmento $\overline{BE}$ é o segmento desejado, de tamanho $\sqrt{c}$, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Construção de um segmento de reta medindo $\sqrt{c}$



Fonte: Da autora (2022).

Observação: Caso c seja um número quadrado perfeito, a construção acima é desnecessária uma vez que se pode traçar, diretamente, um segmento de reta medindo $\sqrt{c}$.

4.2 Casos

Realizada a construção de $\sqrt{c}$, em que c é o produto das raízes, seguimos para a análise dos casos conforme relatado por Wagner e Carneiro (1993), Wagner (2009) e Várhidy (2010).

4.2.1 As duas raízes são positivas (1° caso)

Para o caso em que x_1 e x_2 são números reais positivos, as determinamos da seguinte maneira:

1º passo: Construir um segmento de reta $\overline{AB}$, cujo tamanho é a soma das raízes, ou seja, b.

2º passo: Traçar a mediatriz para encontrar o Ponto Médio (M) do segmento.

3º passo: Traçar o semicírculo com diâmetro $\overline{AB}$.

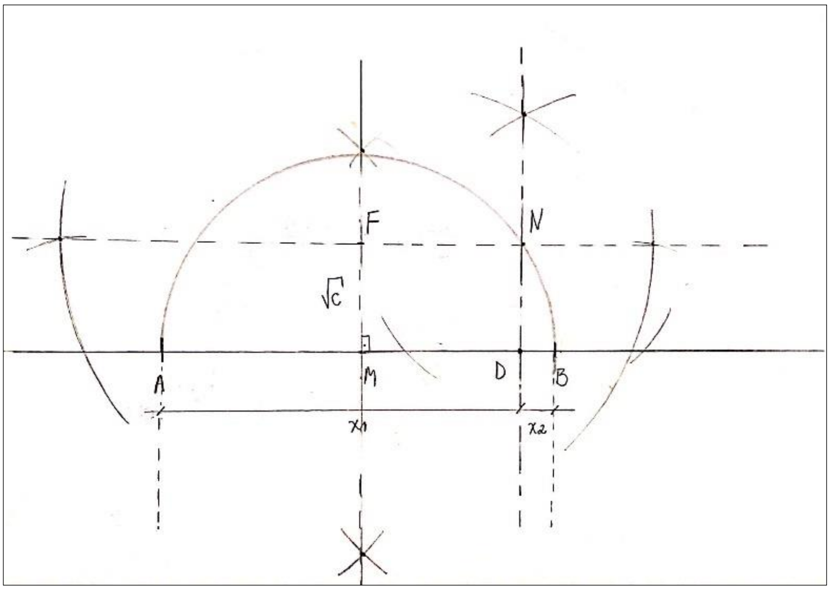
4º passo: Com o compasso, marcar sobre a mediatriz, um segmento $\overline{MF}$ de tamanho $\sqrt{c}$.

5º passo: Construir uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$, passando pelo ponto F, e em seguida marcar o ponto de interseção dessa reta com o semicírculo, denominado por N.

6º passo: Para finalizar, basta traçar um segmento de reta perpendicular a $\overline{AB}$, passando pelo ponto N (equivalentemente, uma reta paralela a mediatriz passando por N).

O ponto que a reta perpendicular, construída no 6° passo, intersecta o segmento de reta $\overline{AB}$, denominado por D, determina, portanto, dois segmentos de reta cujos comprimentos são as duas raízes $x_1 = \overline{AD}\ e\ x_2 = \overline{DB}$, como mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Construção do Primeiro Caso



Fonte: Da autora (2022).

Demonstração do Primeiro Caso:

Para provar que o método funciona, vamos utilizar duas propriedades geométricas:

(I) "Todo triângulo inscrito numa circunferência, cujo um dos lados é o diâmetro da circunferência é um triângulo retângulo".

(II) "Num triângulo retângulo, o quadrado da altura (h) relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos".

Sendo assim, com base na Figura 5, segue de (I) que o triângulo ANB é retângulo em N cuja altura relativa à hipotenusa é dada por $h = \overline{ND}$. A projeção do cateto $\overline{AN}$ é x_1 e a projeção do cateto $\overline{NB}$ é x_2. Portanto, uma vez que $\sqrt{c} = \overline{MF} = \overline{ND}$, segue de (II) que

$$h^2 = x_1 \cdot x_2$$

mas

$$h = \sqrt{c}.$$

Logo,

$$\left(\sqrt{c}\right)^2 = x_1 \cdot x_2$$

$$c = x_1 \cdot x_2$$

$$c = P.$$

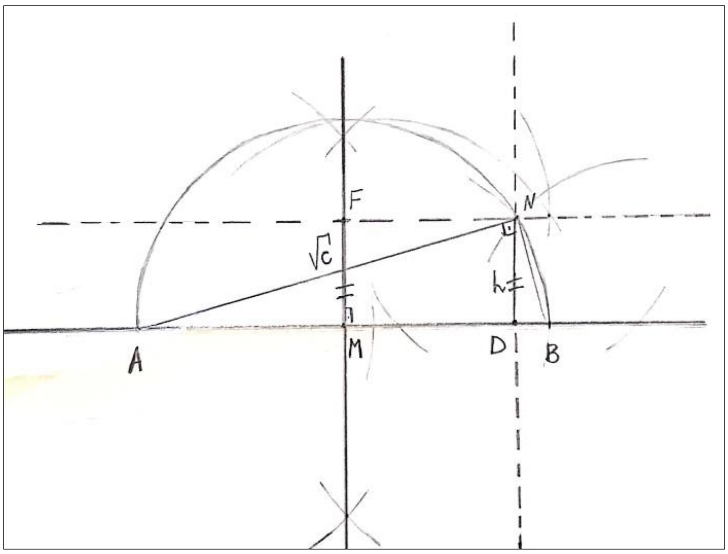
E, por construção, temos que:

$$x_1 + x_2 = b = S.$$

Portanto, $x_1 = \overline{AD}\ e\ x_2 = \overline{DB}$ satisfazem o sistema (4.1) para $a = 1$.

Segue abaixo a Figura 6, com a supracitada demonstração.

Figura 6 - Demonstração do Primeiro Caso



Fonte: Da autora (2022).

Observação: É válido notar que o ponto N sempre existe, ou seja, que $\overline{MF} < \frac{\overline{AB}}{2}$. Pois, assim, a reta paralela à $\overline{AB}$ passando por F intercepta o semicírculo no ponto N.

Mostremos que $\overline{MF} < \frac{\overline{AB}}{2}$. Como $x_1 \neq x_2$ e ambos são valores positivos, temos:

$$0 < (x_1 - x_2)^2$$

$$0 < x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2$$

$$2x_1x_2 < x_1^2 + x_2{}^2$$

$$x_1x_2 < \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_2 < \frac{x_1^2}{2} + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2}$$

$$2x_1x_2 < \frac{x_1^2}{2} + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2}$$

$$x_1x_2 < \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4}$$

$$x_1x_2 < \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{x_1x_2} < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}$$

$$\sqrt{c} < \frac{b}{2}$$

$$\overline{MF} < \frac{\overline{AB}}{2}.$$

4.2.2 Uma raiz é positiva e a outra raiz é negativa (2° caso)

O presente caso é uma abordagem integralmente baseada no método de Descartes para resoluções de equações do segundo grau. Temos $x^2 - bx + c = 0$. Logo:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = b \\ P = x_1 \cdot x_2 = c \end{cases} \qquad (4.2)$$

Já que uma das raízes é negativa temos que c é negativo. De fato, suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$. Logo $c = x_1 \cdot x_2 < 0$. Portanto, multiplicando o sistema (4.2) por -1, temos:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -b \\ (-x_1) \cdot x_2 = -c \end{cases} \qquad (4.3)$$

Desse modo, resolver o sistema (4.1) é equivalente a resolver o sistema (4.3). Para tal, procedemos da seguinte maneira:

<u>1º passo:</u> Construir um segmento de reta $\overline{AB}$, cujo tamanho é $\sqrt{-c}$. (Vale-se aqui do procedimento descrito em 4.1.4).

<u>2º passo:</u> Traçar uma reta perpendicular a $\overline{AB}$, passando por A, e marcar sobre ela um segmento $\overline{AC}$ de tamanho $|b|$, isto é, $\overline{AC} = |b|$.

<u>3º passo:</u> Ainda sob a reta $\overline{AC}$, traçar a mediatriz, de modo a encontrar o ponto médio, denominado por M. (Note que esta reta é paralela ao segmento $\overline{AB}$).

<u>4º passo:</u> Após encontrar o ponto médio, traçamos o círculo de diâmetro $\overline{AC}$. (Note que este círculo será tangente a reta $\overline{AB}$ no ponto A).

<u>5º passo:</u> Por fim, traçar uma semirreta ligando o ponto B ao ponto M, intersectando a circunferência em dois pontos, denominados respectivamente por D e E.

Finalizada a construção, concluímos que o segmento de reta $\overline{BE}$ é tal que

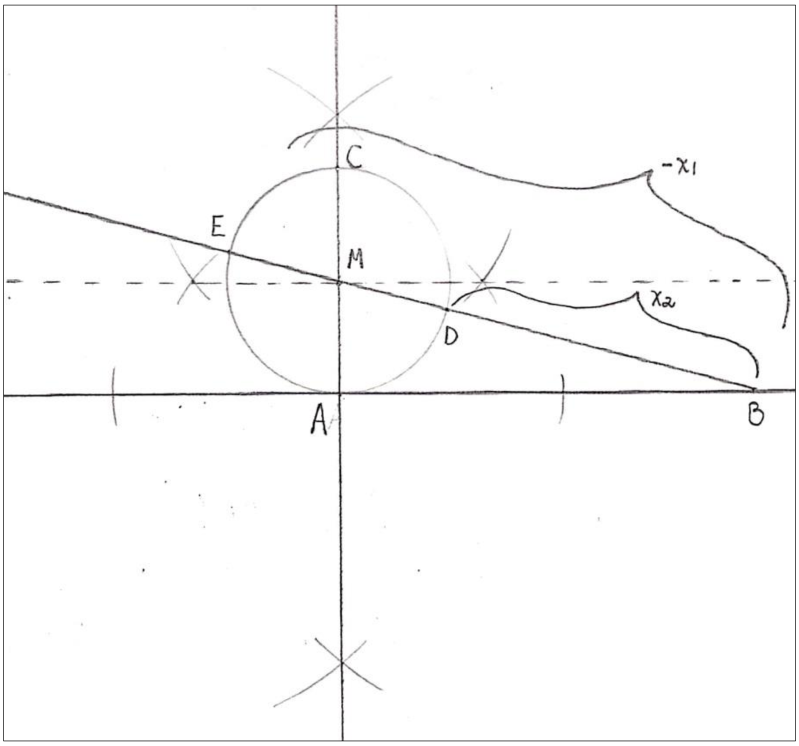
$$\overline{BE} = max\{|x_1|, x_2\}$$

e $\overline{BD}$ é tal que:

$$\overline{BD} = \min\{|x_1|, x_2\}\,.$$

Sem perda de generalidade, na situação em que $-x_1 > x_2$, consideremos $\overline{BE} = -x_1$ e $\overline{BD} = x_2$, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 - Construção do Segundo Caso



Fonte: Da autora (2022).

<u>Demonstração do Segundo Caso:</u>

Observe que o diâmetro da circunferência mede $\overline{AC} = |b|$. De fato, segue do sistema (4.3) e da Figura 7 que:

$$\overline{AC} = \overline{DE}$$

$$\overline{AC} = \overline{BE} - \overline{BD}$$

$$\overline{AC} = -x_1 - x_2$$

$$\overline{AC} = -b = |b|$$

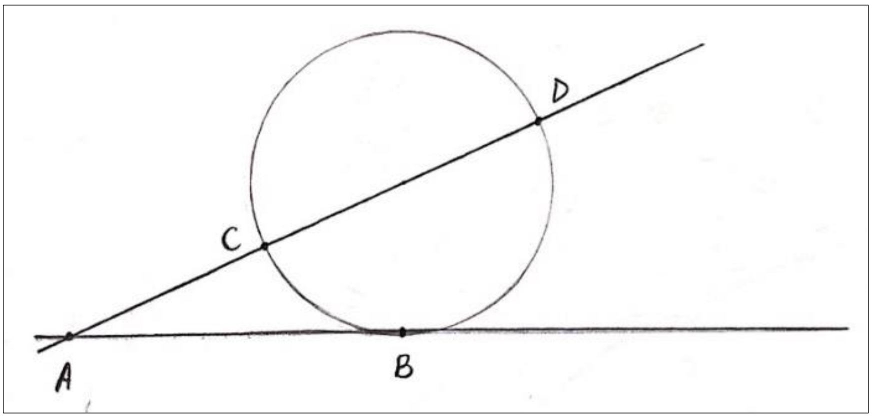
Uma vez que estamos supondo $-x_1 > x_2$.

Logo, pela construção:

$$\overline{DE} = |b|.$$

Por outro lado, para verificar que a multiplicação é igual a c, usamos a propriedade de Potência de Ponto, a saber: “Se A é um ponto externo à uma circunferência, $\overline{AB}$ uma reta tangente à circunferência em B e $\overline{AD}$ uma reta secante à circunferência, produzindo o outro ponto de interseção C entre A e D, então $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$”, como visto na Figura 8.

Figura 8 - Potência de Ponto



Fonte: Da autora (2022).

Assim, considerando a construção na Figura 7, temos:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$$

$$\left(\sqrt{-c}\right)^2 = (-x_1) \cdot x_2$$

$$-c = (-x_1) \cdot x_2.$$

Satisfazendo o sistema (4.3), como queríamos demonstrar.

4.2.3 Duas raízes negativas (3° caso)

Temos:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = b \\ P = x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}.$$

Observe que sendo as duas raízes negativas, $x_1, x_2 < 0$, concluímos que b < 0 e, desse modo, $-\,b$ > 0. Ainda, c > 0.

Multiplicando por -1 a primeira equação do sistema acima, temos:

$$\begin{cases} (-x_1) + (-\,x_2) = \,-\,b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases} \qquad (4.4)$$

Atente-se ao fato de que o produto de dois valores negativos é positivo, logo c > 0 e não precisamos multiplicar por -1 a segunda equação, pois:

$$(-x_1) \cdot (-x_2) = x_1 \cdot x_2 = c.$$

Assim, uma vez que $-x_1 > 0$ e $-x_2 > 0$, o procedimento de construção é o mesmo do Primeiro Caso descrito em 4.2.1 ressaltando que, ao dar a resposta, considera-se o valor simétrico dos tamanhos encontrados.

4.3 Quando a for diferente de 1.

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Dividindo-a por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$. Tais valores, em módulo, podem ser determinados pelo seguinte procedimento.

<u>1° passo:</u> Traçar um segmento $\overline{AB}$ de tamanho b (ou c).

<u>2° passo:</u> Traçar uma semirreta, partindo de A, formando um ângulo agudo com $\overline{AB}$.

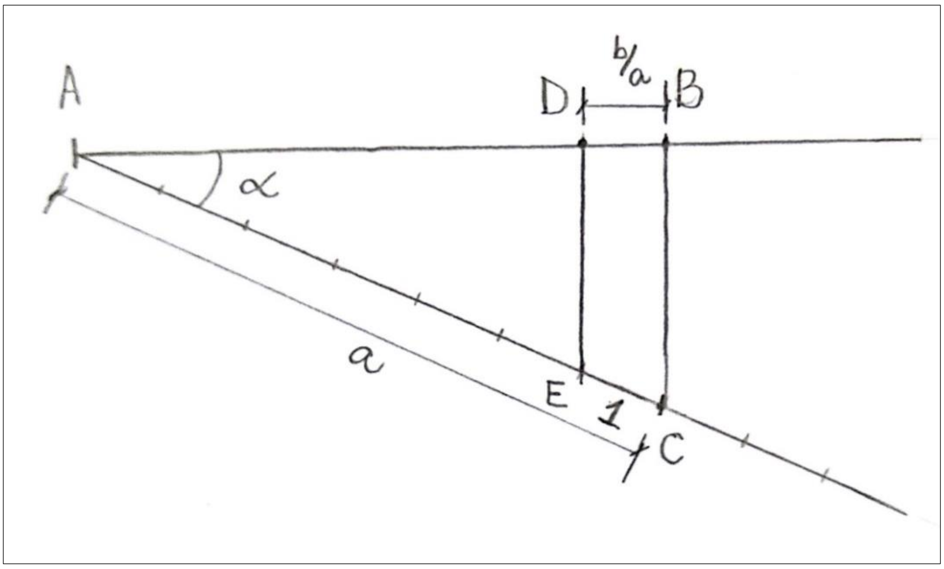
<u>3° passo:</u> Determine um segmento $\overline{AC}$ sobre a semirreta de tamanho a.

<u>4° passo:</u> Subdividir o segmento $\overline{AC}$ em partes iguais medindo uma unidade.

<u>5° passo:</u> Trace um segmento de reta ligando os pontos B e C.

<u>6° passo:</u> Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{BC}$ passando pela primeira subdivisão próxima a C, que chamaremos de E. Essa reta intercepta o segmento $\overline{AB}$ no ponto que chamaremos de D, como mostrado na Figura 9.

Figura 9 - Construção de $\frac{b}{a}$



Fonte: Da autora (2022).

O segmento $\overline{DB}$ mede $\frac{b}{a}\left(\text{ou}\frac{c}{a}\right)$.

Observação: Aqui consideramos a inteiro maior do que 1. No caso de a ser racional não inteiro, isto é, $a = \frac{p}{q}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$, multiplicamos a equação por q que tornará a inteiro maior do que 1, em efeito teremos $a = p$ (note que isso não modifica os valores das raízes). O caso em que a é irracional foge à proposta do presente trabalho. A importância para que a seja (ou se torne) inteiro é a de poder subdividi-lo em partes iguais de comprimento unitário. Os valores de b e c (mesmo os modificados quando necessário, isto é, multiplicados por q), ainda que não sejam inteiros, podem ser traçados e divididos por a.

Demonstração:

Observe que teremos dois triângulos semelhantes na Figura 9, a saber, ADE e ABC. Uma vez que os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, segue do Teorema de Tales que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Dessa forma, fazendo $\overline{DB} = x$,

$$\frac{b - x}{b} = \frac{a - 1}{a}.$$

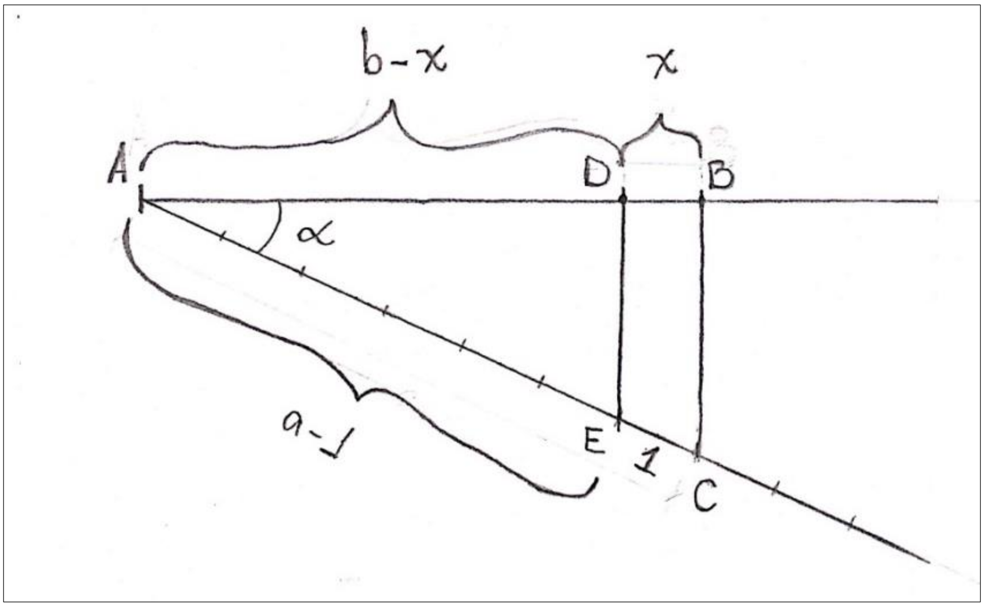
$$b \cdot (a - 1) = a \cdot (b - x)$$

$$ab - b = ab - ax$$

$$ax = b$$

$$x = \frac{b}{a}.$$

Figura 10 – Quando a é racional e $a \neq 1$



Fonte: Da autora (2022).

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta didática dividida em quatro etapas, idealizando um total de 8 (oito) aulas, podendo ser adaptado conforme necessidade, visando trazer a História da Matemática como uma das metodologias de ensino, perpassando pelo desenvolvimento histórico das equações polinomiais do segundo grau, compreendendo esse objeto, linguagens de representação e métodos de resolução.

Tema Central: Equações Polinomiais do Segundo Grau com Raízes Reais

5.1 Primeira Etapa (Aulas 1 e 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: História das Equações do Segundo Grau</td></tr>
<tr><td>Tempo: 2 aulas (aproximadamente100 min.)</td><td>Ano: 9°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetos de Conhecimento: Equações Polinomiais do Segundo Grau.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competências da BNCC:
• Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidades:
• Conhecer a evolução histórica e os diferentes métodos de resolução de equações, em particular das equações de segundo grau, através dos diferentes povos e culturas compreendendo a necessidade de formalismo e linguagem matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
• Reconhecer o processo de estruturação e formalismo da Matemática, enquanto ciência, por meio de contribuições diversas.
• Reconhecer a importância e utilidade dos algoritmos na resolução de problemas, visando um método prático que generalize situações presentes numa mesma estrutura, isto é, temática.
• Compreender processos de abstração matemática, através da história, iniciando com situações-problema do cotidiano em relação a época e cultura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos Utilizados:
• Projetor (Datashow).
• Lousa.
• Giz ou Pincel para Quadro Branco.</td></tr>
</table>

Descrição da Atividade

Inicialmente, é preciso que a professora ou o professor prepare um material, em slides, contendo os tópicos a serem apresentados, enriquecendo-os com figuras dos personagens e/ou objetos.

Comece a sequência, conversando com as e os estudantes sobre o tema a ser trabalhado e os procedimentos que serão adotados. Apresente o tema principal e o tema desta aula. A proposta é que essa aula seja mais expositiva e com diálogo. Pode-se iniciar abordando problemas geométricos que surgiram da necessidade dos povos na delimitação de terras como, por exemplo, os povos egípcios[2]. Aproveite para ressaltar a necessidade de se realizar medições tais como comprimento e área e traga para a atualidade ao comentar sobre terrenos e loteamentos. Convide as e os estudantes a falarem sobre o que sabem a respeito de medições de terrenos ou até mesmo a matemática presente em processos de construção civil.

Para continuar a conversa proponha a reflexão:

- Como era a matemática no início das civilizações? Como será que podemos saber a forma como as pessoas faziam contas ou resolviam problemas matemáticos há muitos anos?

Permita a livre participação! Aqui aproveite para trazer imagens tais como o Papiro de Rhind e o Papiro de Kahun que relatam a matemática dos egípcios, as tábuas de argila com escrita cuneiforme dos povos da mesopotâmia e o livro de Euclides como exemplo da matemática grega. Se possível, aproveite para realizar um trabalho interdisciplinar com a professora ou o professor de História para discutirem sobre documentos que permearam épocas e nos servem para compreender, analisar, estudar e aprimorar as ciências que foram se desenvolvendo ao longo do tempo, seja por necessidade ou filosofia.

Apresentadas essas considerações iniciais, aborde um pouco da matemática hindu e árabe, relembrando conteúdos já estudados em anos anteriores tais como os Sistemas de Numeração e o processo de evolução até obtermos o sistema decimal que adotamos nos dias de hoje. Insira figuras importantes como Brahmagupta, al-Khwarizmi e Bhaskara abordando suas contribuições para o estudo de equações do segundo grau relacionando-o aos problemas que envolvam áreas ou mais abstratos como determinar um valor desconhecido que atenda a certas condições.

Atingido esse patamar, reflita com as e os estudantes sobre a natureza retórica dos problemas matemáticos da época, isto é, sua forma verbal – trazendo exemplos de problemas

---

[2] Sugerimos o trabalho de Costa (2013) que aborda um problema geométrico de delimitação de terras no Antigo Egito sobre o rei Sesóstris (p. 5).

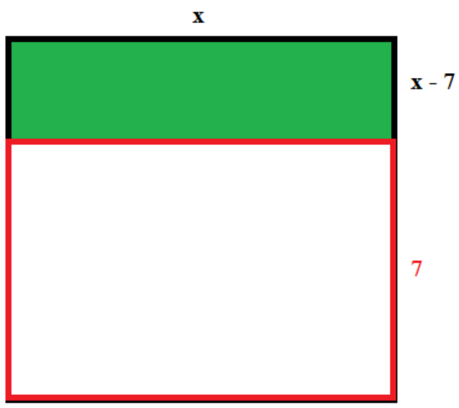
estudados nas épocas consideradas e os diferentes métodos de resolução, mas sem entrar em muitos detalhes – em seguida converse sobre o teor de curiosidade presente ao tornar um tópico matemático abstrato e as dificuldades enfrentadas pela ausência de estrutura, linguagem própria e formalismo.

Ao tratar de formalismo, aborde métodos de resolução com construções geométricas e dialogue com as e os estudantes sobre os impactos, que perduraram por anos, obtidos com a obra célebre de Os Elementos de Euclides[3]. Ressalte a abordagem pedagógica desses livros e os instrumentos utilizados (será produtivo ter os instrumentos em mãos para mostrar as estudantes e os estudantes e comentar curiosidades como o fato de que o compasso de Euclides não tinha um mecanismo para prender a abertura após solto do papel).

Para conversar sobre a presença de letras na linguagem matemática e, consequentemente, apresentar figuras como François Viète e René Descartes, pode-se trabalhar nesse último momento, o seguinte problema:

- **Forma contextualizada:** Tem-se um terreno quadrangular e será construído uma horta comunitária. Para isso, um engenheiro separa uma parte retangular desse terreno cujo um dos lados mede 7 metros. Sabendo que a área não utilizada tem 8 metros quadrados, qual o lado do terreno todo?
- **Forma retórica:** O quadrado de um número menos o seu sétuplo resulta em oito. Qual é esse número?
- **Forma retórica com visual:** Sabendo que o valor da área verde é 8 unidades de área, determine o valor de x.

Figura 11 - Qual o valor de x se a área verde vale 8 u.a.?



Fonte: Da autora (2022).

[3] Seria interessante levar o livro Os Elementos. Obra em que Irineu Bicudo traduz diretamente do grego para o português os livros de Euclides em sua coletânea Os Elementos original. Veja Bicudo (2009).

- **Forma simbólica:** Determine a raiz da equação $x^2 - 7x - 8 = 0$.

Converse com as e os estudantes sobre a equivalência dessas linguagens e as diferentes formas de apresentação de um mesmo problema matemático, assim como os diferentes objetos presentes em cada uma. Em seguida, pergunte:

- Qual das formas apresentadas é mais prática e direta? Justifique.

Dedique um tempo para trabalhar a interpretação do objeto **equação polinomial do segundo grau**, abordando os termos como *coeficiente*, *incógnita* e *raiz*.

Conclua a atividade conversando com as e os estudantes que o objetivo das próximas aulas serão conhecer e desenvolver alguns métodos de resolução de equações do segundo grau especificamente através de Desenho Geométrico (onde se utilizará além de régua e compasso o par de esquadros) e de Álgebra (onde se utilizará a *fórmula de Bhaskara* e *Delta*).

5.2 Segunda Etapa (Aulas 3, 4 e 5)

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: Desenho Geométrico e Sistemas de Equações</td></tr>
<tr><td>Tempo: 3 aulas (aproximadamente 150 min.)</td><td>Ano: 9°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetos de Conhecimento:
• Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta.
• Relações métricas no triângulo retângulo.
• Teorema de Pitágoras: verificações experimentais.
• Sistema de equações.
• Equações do segundo grau.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competências da BNCC:
• Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
• Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidades:
• (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento,</td></tr>
</table>

existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

- (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
- (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
- (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Objetivos:

- Revisar construções geométricas clássicas, valendo-se do desenho geométrico, tais como: Segmento de reta, reta, mediatriz, circunferência, raiz de um número natural, retas paralelas e perpendiculares.
- Revisar e verificar propriedades e resultados conhecidos tais como: Teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo, triângulo retângulo inscrito numa circunferência e Potência de Ponto.
- Revisar sistemas de equações e sua resolução através do método da substituição visando abordar a equivalência de um sistema com equações do segundo grau.
- Conhecer alguns dos tópicos supracitados caso não tenham sido abordados em anos anteriores.

Recursos Utilizados:

- Régua.
- Compasso.
- Par de esquadros.
- Papel e lápis.

- Lousa.
- Giz ou Pincel para quadro branco.

Descrição da Atividade

Essa etapa será subdividida em dois momentos. O primeiro para se dedicar ao Desenho Geométrico e o segundo para Sistemas de Equações.

No primeiro momento, apresente os instrumentos de desenho a serem utilizados. Uma régua, que pode ser graduada, um compasso e o par de esquadros. Discuta sobre a diferença entre os esquadros, sendo um de ângulos internos medindo 90°, 45°, 45° e o outro 90°, 60°, 30°. Em seguida, a atividade consistirá em proporcionar práticas de desenho geométrico para que as e os estudantes se familiarizem com estes instrumentos. Para tal, é importante conversar com todas e todos sobre a determinação da unidade, a qual pode ser estabelecida como sendo um segmento de reta medindo 1 cm, por exemplo, ou 2 cm (logo, a régua graduada torna-se útil e prática). No último caso, em que a unidade será estabelecida como 2 cm, é enriquecedor relembrar a importância de escalas para o desenho geométrico, cartografia, arquitetura, dentre outras aplicações, ajudando as e os estudantes a compreenderem que ao encontrem um segmento medindo 6 cm, por exemplo, deve-se considerar qual a escala adotada para darem a resposta final. Ainda, estabeleça qual será a unidade adotada na lousa, uma vez que a escala deverá ser maior para que todas e todos acompanhem os processos de construção.

Em sequência, aplique em sala de aula as construções apresentadas na seção 4.1 – Construções Iniciais deste presente trabalho, destacando os objetos matemáticos: *retas paralelas*, *retas perpendiculares* e *mediatriz*. Para a subseção 4.1.4 – Raiz de um número real e positivo, aproveite para justificar, algebricamente, o método. Para isso, pode-se utilizar as relações métricas do triângulo retângulo tal como utilizadas na demonstração do primeiro caso na subseção 4.2.1. No caso em que as e os estudantes estejam pouco familiarizados com essas relações, utilize o Teorema de Pitágoras para demonstrar a propriedade (II) utilizada na referida subseção 4.2.1. Ainda, pratique a construção de circunferências dados o seu centro e um raio, assim como a transposição de uma medida para o desenho (lembrando que primeiro construiremos um segmento de tamanho $\sqrt{c}$ e depois demarcaremos essa medida sobre uma reta mediatriz).

Utilize da criatividade para praticarem essas construções em diferentes ângulos, fazendo uso das rotações. Retas paralelas horizontais, verticais e oblíquas. O mesmo para retas perpendiculares e a mediatriz de segmentos. Converse sobre a utilidade em poder rotacionar o papel sobre a mesa.

Agora, partindo para o segundo momento, retome o diálogo da etapa anterior e comente sobre os estudos acerca de equações do segundo grau. Relembrando que este é o foco principal dessa sequência de aulas para com elas e eles em sala de aula. Para elaborar a proposta de conversa que engendre construções geométricas e resoluções de equações do segundo grau, propomos abaixo um roteiro de atividade.

Comece perguntando para as e os estudantes:

- Como vocês acham que surge uma equação do segundo grau?

Permita a livre participação. Aqui esperamos que as e os estudantes tragam reflexões de aparições desses objetos de acordo com a aula expositiva na etapa 1, isto é, problemas que envolvam área ou abstrações como determinar um valor desconhecido que atenda determinada condição/equação.

Em seguida, escreva na lousa o problema:

“Dois valores, quando somados, resultam em 5. Quando multiplicados o produto dá 6. Quais são esses valores”?

Peça que as e os estudantes conversem entre si e apresentem uma proposta de linguagem simbólica para esse problema e de que maneira eles poderiam começar a tentar resolvê-lo. Considerando que sistemas de equações é tema de anos anteriores, esperamos que alguns possam apresentar essa ideia ou, ainda, relembrá-la da etapa anterior. Conduza a aula para que se chegue ao sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

Caso seja sugerido utilizar as incógnitas x_1 e x_2, aproveite essa fala e utilize-as. Dando sequência, relembre, se necessário, o processo de resolução de sistemas de equações através do método da substituição e sugira que as e os estudantes tentem resolver o sistema acima por meio desse método. Peça que alguém lhe informe os passos para prosseguir com a resolução na lousa. Uma proposta é dada a seguir:

Utilizando a primeira equação, isolamos a incógnita y.

$$y = 5 - x.$$

Agora, substituindo na segunda equação:

$$x \cdot (5 - x) = 6$$

$$5x - x^2 = 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Pergunte:

- E se tivéssemos isolado a incógnita x?
- O que podemos, então, concluir sobre os valores de x e y que satisfazem o sistema?

Neste momento, espera-se que compreendam que independente da escolha da incógnita, tal método de resolução resultaria na mesma equação do segundo grau e, por conseguinte, isso nos diz que os valores de x e y que satisfazem o sistema são, equivalentemente, as raízes da equação do segundo grau. Aproveite para discutir a equivalência desse sistema, em particular, com a equação do segundo grau obtida. Questione:

- Sempre que tivermos um sistema que consista em determinar dois valores cuja soma e produto são conhecidos, obteremos uma equação do segundo grau?

Permita a livre participação e incentive a investigação dessa generalização. Essa é uma excelente oportunidade para abordar como surgem as questões filosóficas que impulsionam matemáticos a desenvolverem Matemática. Retomando a História da Matemática, apresente resoluções de equações do segundo grau utilizando o método de áreas e completar quadrados, como abordado por al-Khowarizmi. Um bom exemplo pode ser encontrado, com detalhes, em SILVA (2019). Outros problemas interessantes, sugerimos ROQUE (2012).

Finalize a etapa conversando com as e os estudantes que as próximas aulas serão destinadas a resolverem uma equação do segundo grau, com coeficiente quadrático igual a 1, utilizando desenho geométrico, por métodos inspirados nas contribuições de René Descartes.

5.3 Terceira Etapa (Aulas 6 e 7)

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: Resolução de Equações do Segundo por Construções Geométricas</td></tr>
<tr><td>Tempo: 2 aulas (aproximadamente 100 min)</td><td>Ano: 9°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetos de Conhecimento:
• Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta.
• Relações métricas no triângulo retângulo.
• Teorema de Pitágoras: verificações experimentais.
• Sistema de equações.
• Equações do segundo grau.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competências da BNCC:
• Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir</td></tr>
</table>

e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. • Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. • Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
Habilidades: • (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). • (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. • (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
Objetivos: • Converter um problema de equação do segundo grau para um sistema de equações quanto à soma e produto de suas raízes. • Resolver o sistema de equações equivalente à uma equação do segundo grau através do Desenho Geométrico. • Dialogar sobre as contribuições de René Descartes para o algoritmo estudado.
Recursos Utilizados: • Régua. • Compasso. • Par de esquadros. • Papel e lápis. • Lousa. • Giz ou Pincel para quadro branco.

- Projetor (Datashow) e Software GeoGebra – opcional.

Descrição da Atividade

Nesta etapa, seguiremos os procedimentos apresentados na seção 4.2 – Casos, do presente trabalho. Inicie a aula relembrando com as e os estudantes a equivalência discutida na última aula. De preferência, traga a mesma equação. Apresente a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ e pergunte:

- Se x_1 e x_2 são as raízes (ou soluções) dessa equação, o que podemos afirmar sobre as relações entre estes valores?

Nesse contexto, aborde novamente os termos *soma* e *produto de raízes* de uma equação do segundo grau e identifique-os na equação para obter a forma $x^2 - Sx + P = 0$. Agora, a proposta é explicar os procedimentos de resolução para equações do segundo grau por duas etapas – montar o sistema e realizar construções geométricas (valendo-se do desenho geométrico) para determinar segmentos cujas medidas sejam iguais aos valores de x_1 e x_2 desejados. Aborde as contribuições importantes de René Descartes para as discussões dessa aula. A seguir, apresentamos uma proposta de roteiro para que a professora ou o professor possa seguir na lousa, lembrando sempre de pedir que as e os estudantes sigam seus passos no papel compreendendo o algoritmo de cada caso. Vale aqui ressaltar que o objetivo principal é transcender processos mecanicistas. O algoritmo é um processo mecânico, sim, porém quando justificado e compreendido torna-se para as e os estudantes uma ferramenta poderosa, por ter significado, em que se sentem os agentes ativos, investigadores e desenvolvedores do tema abordado. Deixam de encarar os algoritmos como fórmulas prontas e entregues, mas trabalham a autoestima por sentirem que é fruto de suas próprias investigações. Por esse motivo, é muito importante que a tutora ou o tutor – isto é, a professora ou o professor – dedique um tempo para justificar as construções, validando-as, tal como apresentadas na seção 4.2.

Começaremos com o primeiro caso: duas raízes reais e positivas. Vamos determinar as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$. Se x_1 e x_2 são tais raízes, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = 7 \\ P := x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$$

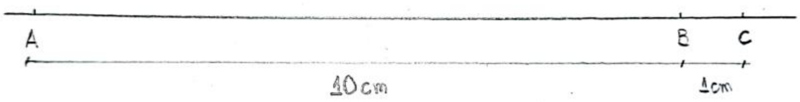
Pergunte à turma:

- O que podemos afirmar sobre o sinal de x_1 e x_2? Isto é, podemos garantir que são ambos os valores positivos, negativos ou um positivo e o outro negativo?

Auxilie nessa investigação. Por exemplo, veja que pelo produto os dois valores devem ter o mesmo sinal. Já pela soma, concluímos que esse sinal só pode ser positivo. Portanto, pelo sistema, podemos concluir que ambas as raízes são números reais e positivos. Prossigamos para a construção utilizando os passos descritos na subseção 4.2.1.

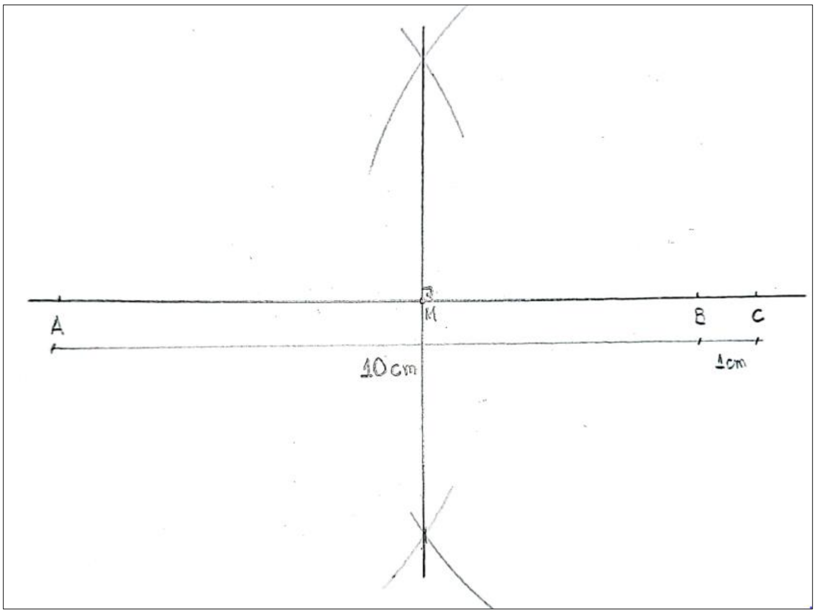
1° procedimento: Construir um segmento cuja medida é $\sqrt{c} = \sqrt{10}$. Realizamos essa construção conforme descrito na subseção 4.1.4. Primeiro, determine a unidade com a turma. Sugerimos utilizar um segmento medindo 1 cm. Em seguida, prossiga com os passos da seção 4.1.4 conforme apresentados nas figuras a seguir:

Figura 12 - Segmento AB de tamanho 10 e segmento BC de tamanho 1



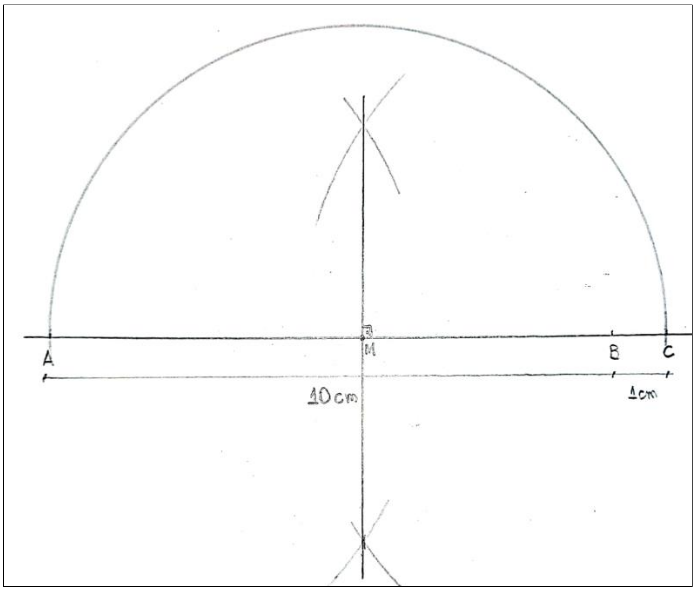
Fonte: Da autora (2022).

Figura 13 - Traçar a mediatriz ao segmento AB determinando seu ponto médio M



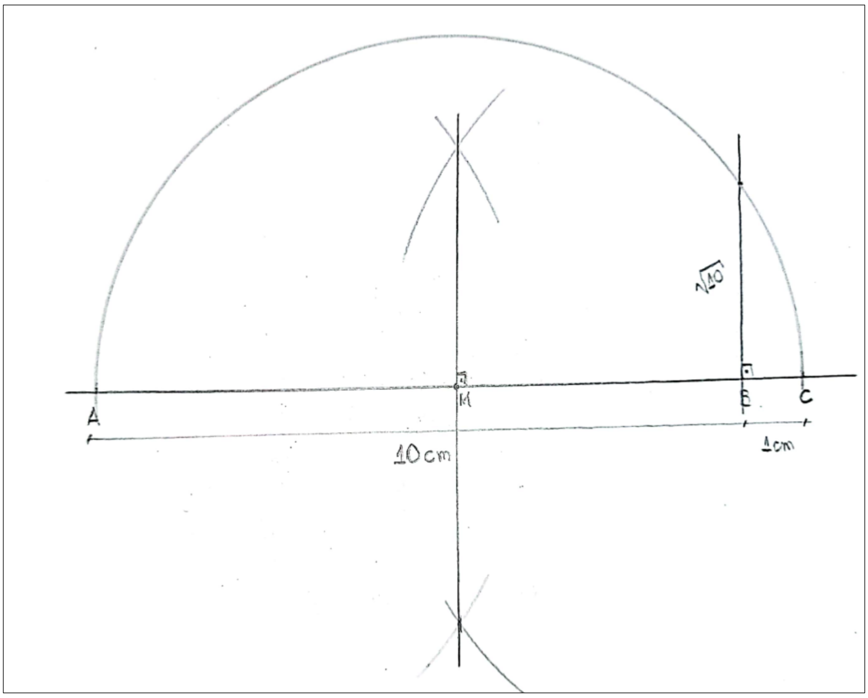
Fonte: Da autora (2022).

Figura 14 - Traçar o semicírculo de diâmetro AC.



Fonte: Da autora (2022).

Figura 15 - Traçar uma reta perpendicular a AC, por B.



Fonte: Da autora (2022).

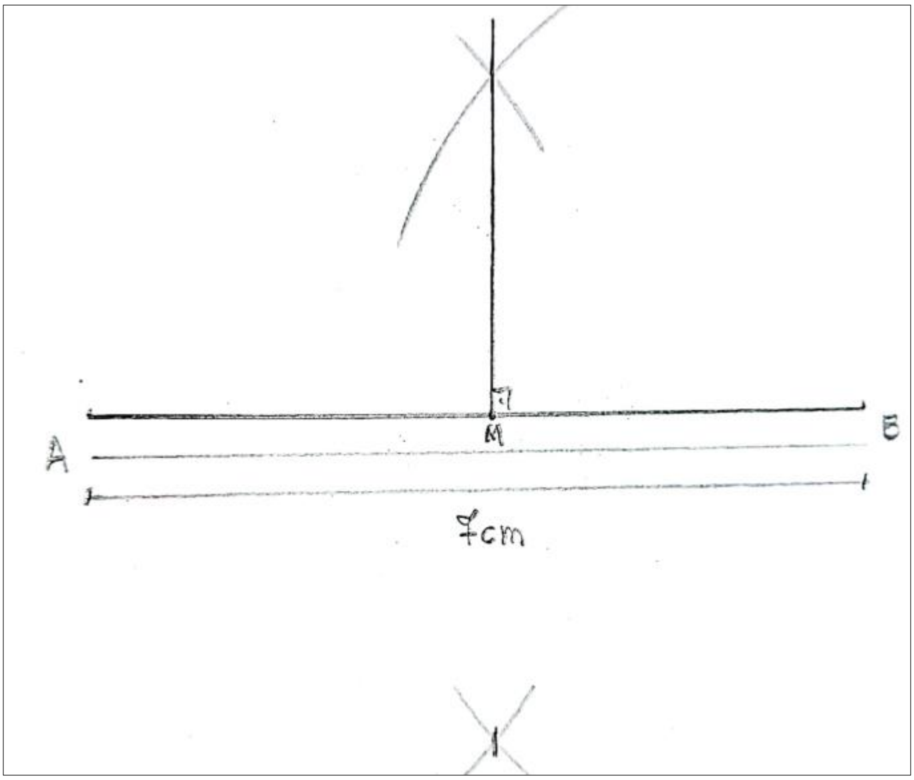
Prove com a turma que o segmento obtido, interior ao semicírculo, de fato mede $\sqrt{10}$ cm. Prossiga para a resolução do sistema.

<u>2° procedimento:</u> Realize a construção conforme descrito na subseção 4.2.1, apresentada nas figuras a seguir:

Figura 16 - Segmento AB de tamanho 7 cm.

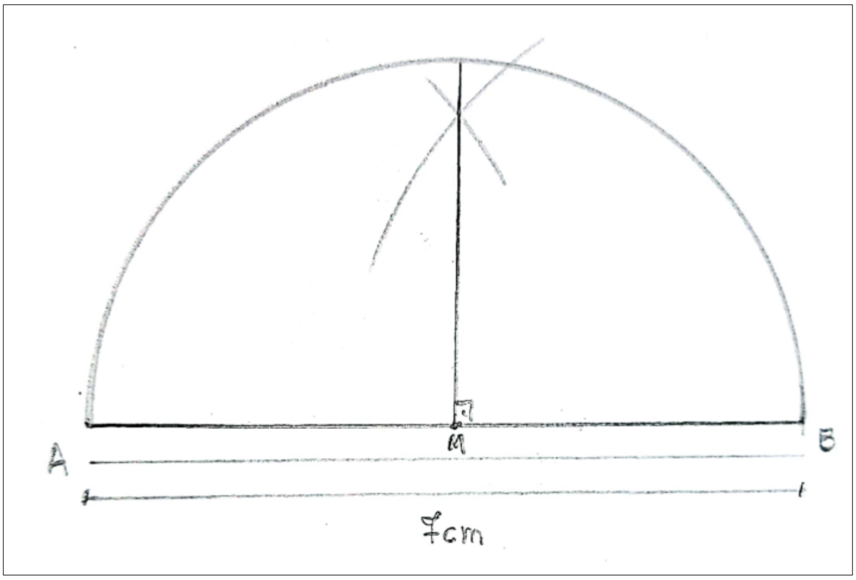
Fonte: Da autora (2022).

Figura 17 - Mediatriz a AB, delimitando o ponto médio M



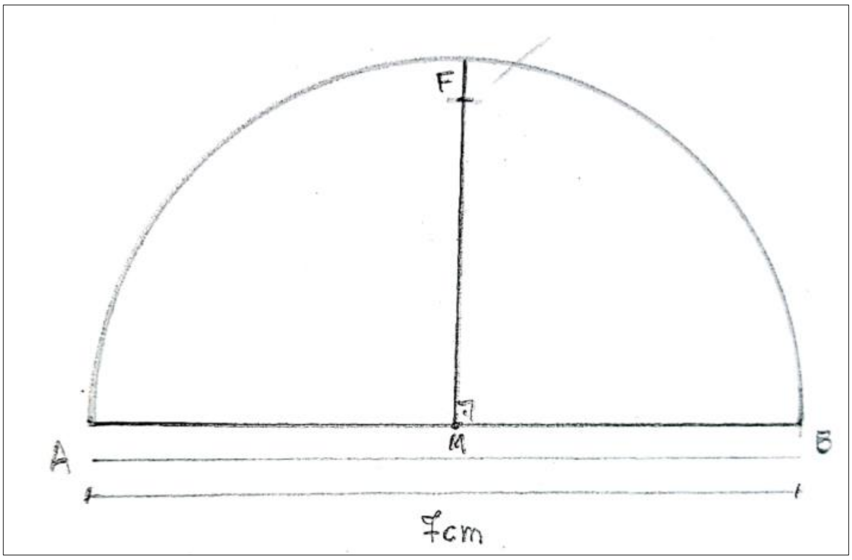
Fonte: Da autora (2022).

Figura 18 - Semicírculo de diâmetro AB



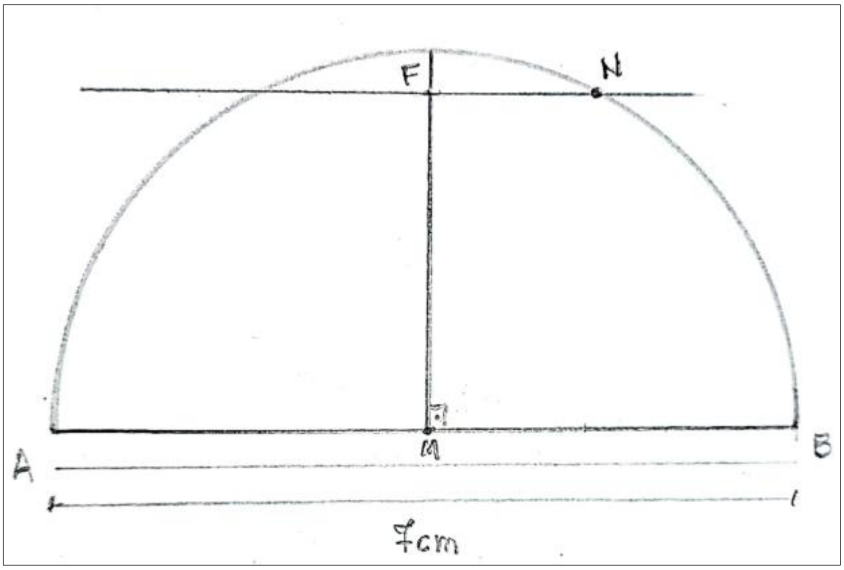
Fonte: Da autora (2022).

Figura 19 - Segmento MF de medida $\sqrt{10}$ cm.



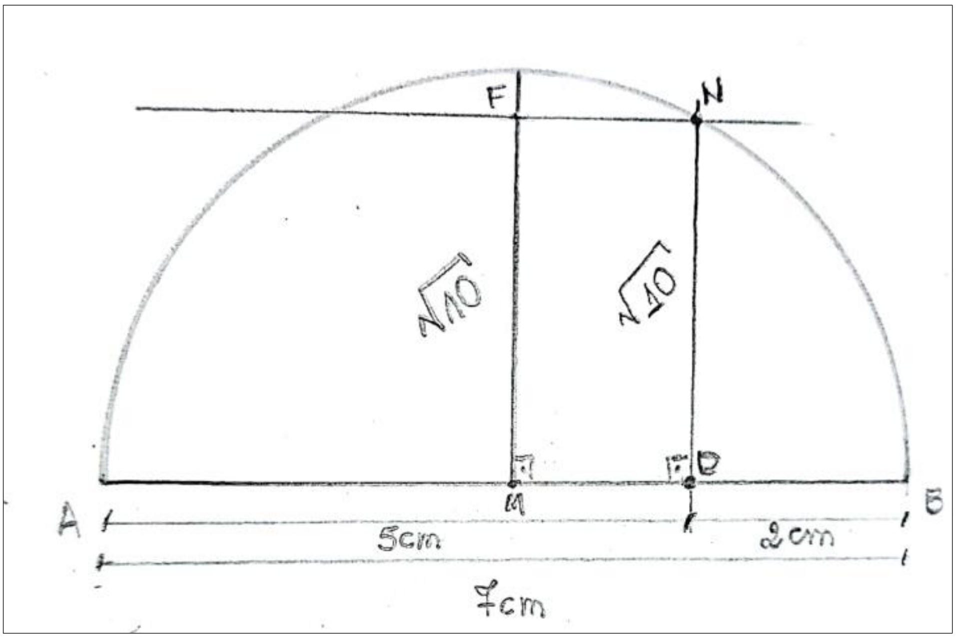
Fonte: Da autora (2022).

Figura 20 - Paralela a AB, por F, delimitando o ponto N interseção com o semicírculo



Fonte: Da autora (2022).

Figura 21 - Perpendicular a AB, por N, delimitando o ponto D.



Fonte: Da autora (2022).

Observe que os segmentos $\overline{AD} = 5\ cm$ e $\overline{DB} = 2\ cm$ são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$. Justifique as construções tal como demonstrado em 4.2.1.

Vamos, agora, investigar a equação $x^2 - 4x - 11 = 0$. Se x_1 e x_2 são tais raízes, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = 4 \\ P := x_1 \cdot x_2 = -11 \end{cases}$$

Pergunte à turma:

- O que podemos afirmar sobre o sinal de x_1 e x_2? Isto é, podemos garantir que são ambos os valores positivos, negativos ou um positivo e o outro negativo?

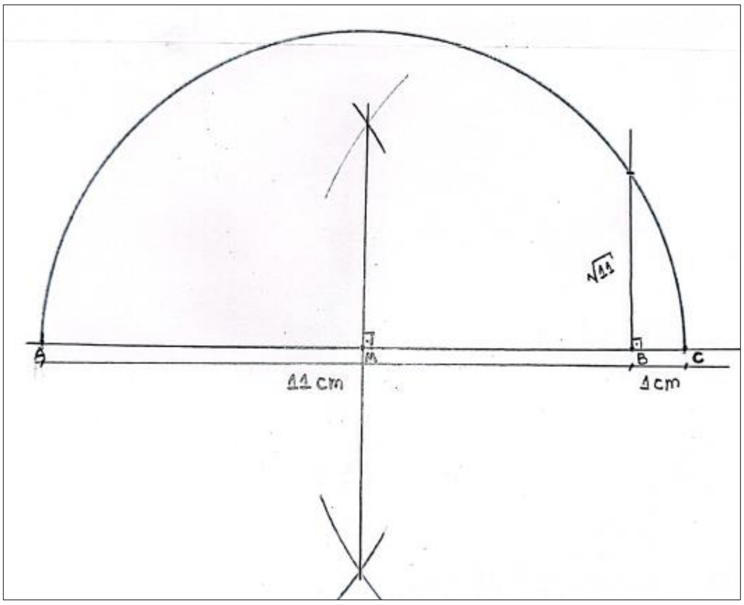
Auxilie nessa investigação. Por exemplo, veja que pelo produto os dois valores devem ter sinais contrários. Já pela soma, concluímos que a maior raiz tem sinal positivo. Supondo que a raiz negativa é x_1, podemos resolver o sistema equivalente:

$$\begin{cases} (-x_1) - x_2 = -4 \\ (-x_1) \cdot x_2 = 11 \end{cases}$$

Prossigamos para a construção utilizando os passos descritos na subseção 4.2.2.

<u>1° procedimento:</u> Construir um segmento cuja medida é $\sqrt{-c} = \sqrt{11}$. Realizamos essa construção conforme descrito na subseção 4.1.4. Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior teremos a construção abaixo.

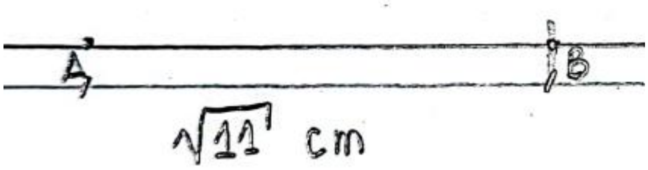
Figura 22 - Segmento de medida $\sqrt{11}$ cm



Fonte: Da autora (2022).

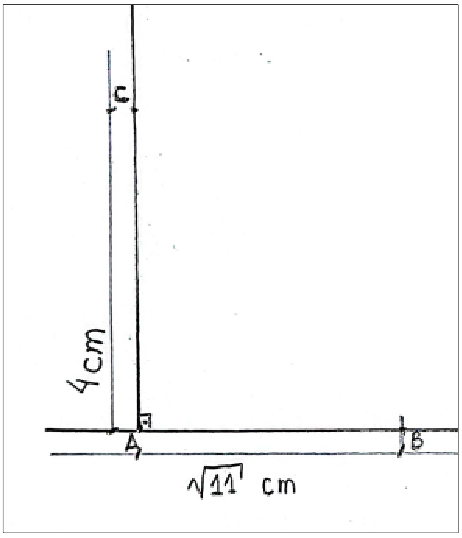
<u>2° procedimento:</u> Prossiga a construção conforme descrito na subseção 4.2.2, apresentada nas figuras a seguir:

Figura 23 - Segmento AB de medida $\sqrt{11}$ cm



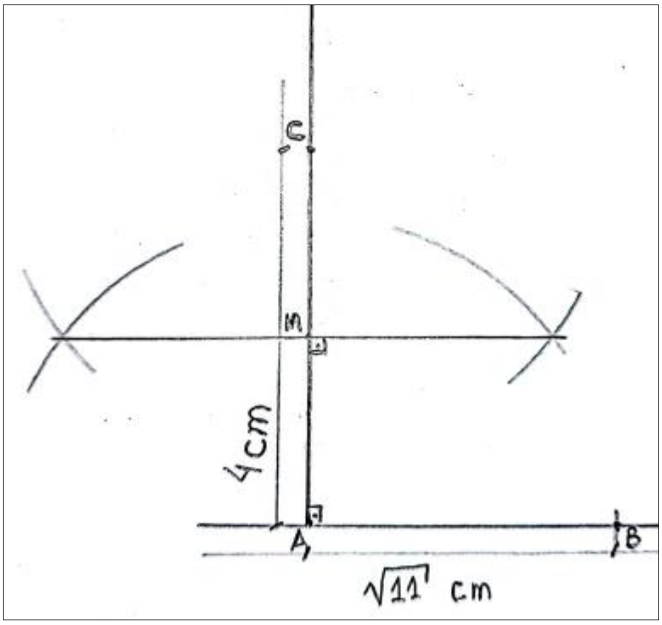
Fonte: Da autora (2022).

Figura 24 - Segmento AC, de medida 4 cm, perpendicular a AB, em A



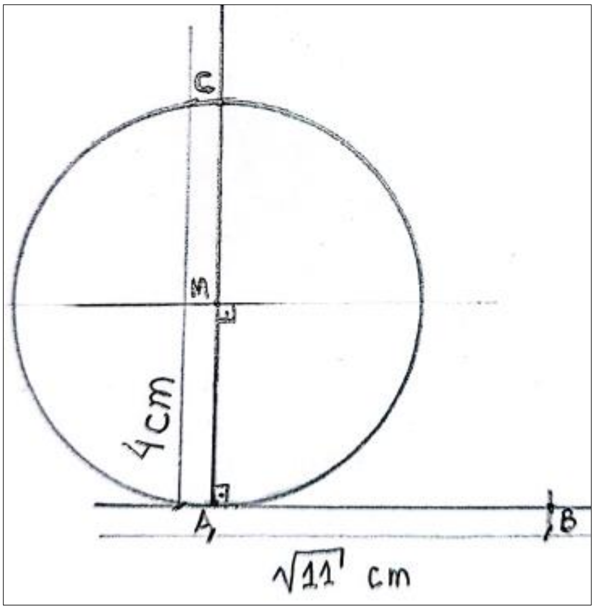
Fonte: Da autora (2022).

Figura 25 - Mediatriz a AC, delimitando o ponto médio M



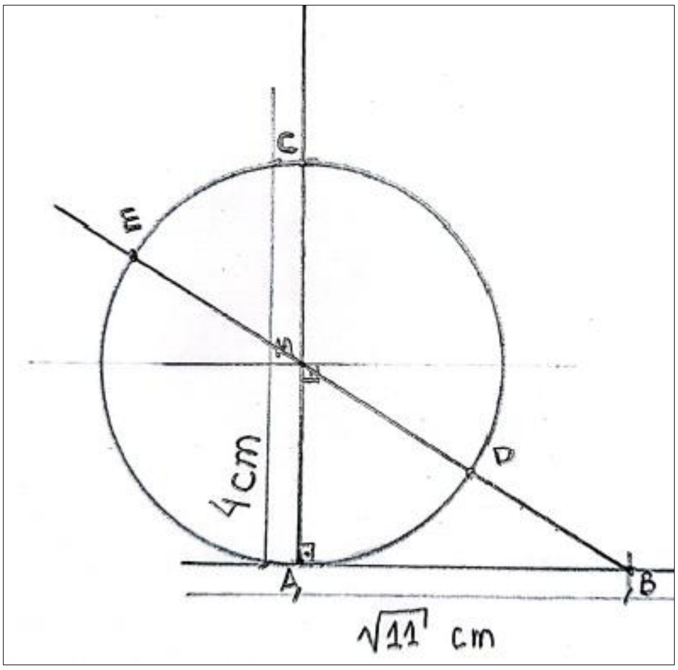
Fonte: Da autora (2022).

Figura 26 - Circunferência de diâmetro AC



Fonte: Da autora (2022).

Figura 27 - Semirreta BM, secante ao círculo, delimitando os pontos D e E



Fonte: Da autora (2022).

Observe que os segmentos $\overline{BE} = 2 + \sqrt{15}\ cm$ e $\overline{DB} = -(2 - \sqrt{15})\ cm$ nos darão as raízes da equação $x^2 - 4x - 11 = 0.$ De fato, $\overline{BE}$ é a raiz positiva e, tal como justificado pelas construções em 4.2.2, observa-se que a raiz negativa é, na verdade, $-\overline{DB} = 2 - \sqrt{15}$ cm, uma vez já discutido que uma das raízes é negativa e, a mesma, tem valor absoluto menor do que a positiva. Em relação aos valores exatos das raízes, eles serão obtidos na próxima etapa desta sequência. Aqui aproveite para analisar que são segmentos de valores não inteiros e que podem ser tanto racionais quanto irracionais.

Para finalizar a fase de apresentação e justificativa das construções, partimos para o último exemplo, a saber, $x^2 + 8x + 13 = 0$. Se x_1 e x_2 são tais raízes, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = -8 \\ P := x_1 \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

Pergunte à turma:

- O que podemos afirmar sobre o sinal de x_1 e x_2? Isto é, podemos garantir que são ambos os valores positivos, negativos ou um positivo e o outro negativo?

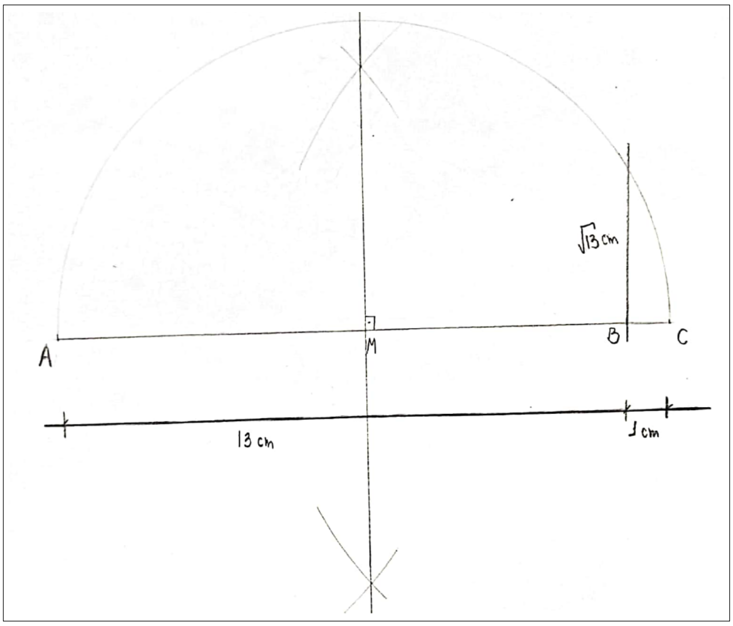
Auxilie nessa investigação. Por exemplo, veja que pelo produto os dois valores devem ter o mesmo sinal. Já pela soma, concluímos que ambos devem ter sinal negativo. Portanto, podemos resolver o sistema equivalente:

$$\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

Prossigamos para a construção utilizando os passos descritos na subseção 4.2.3 (que remete a subseção 4.2.1).

<u>1° procedimento:</u> Construir um segmento cuja medida é $\sqrt{c} = \sqrt{13}$. Realizamos essa construção conforme descrito na subseção 4.1.4. Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior teremos a construção abaixo.

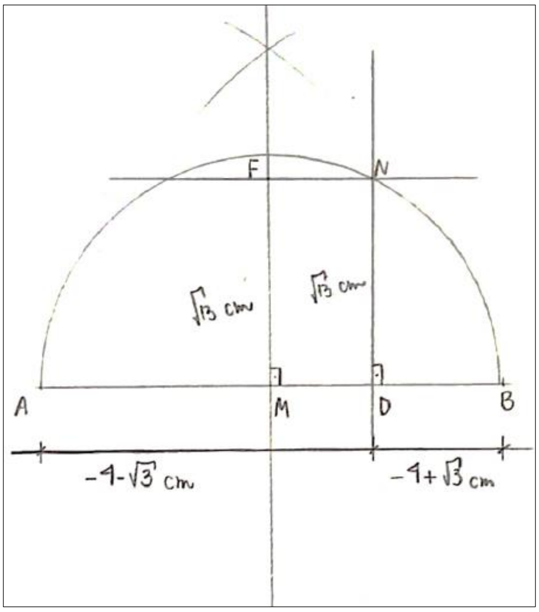
Figura 28 - Construção de segmento com medida $\sqrt{13}$ cm



Fonte: Da autora (2022).

<u>2° procedimento:</u> Prossiga a construção conforme descrito na subseção 4.2.3, apresentada na figura a seguir:

Figura 29 - Determinando as raízes da equação $x^2 + 8x + 13 = 0$



Fonte: Da autora (2022).

Observe que os segmentos $\overline{AD} = -(-4 - \sqrt{3})\ cm$ e $\overline{DB} = -(-4 + \sqrt{3})\ cm$ determinam as raízes da equação $x^2 + 8x + 13 = 0$. Justifique as construções tal como demonstrado em 4.2.1 e observe que as raízes negativas são, na verdade, $-\overline{AD} = -4 - \sqrt{3}$ cm e $-\overline{DB} = -4 + \sqrt{3}$ cm, uma vez já discutido que ambas as raízes são negativas. Em relação aos valores exatos das raízes, eles serão obtidos na próxima etapa desta sequência. Aqui aproveite para analisar que são segmentos de valores não inteiros e que podem ser tanto racionais quanto irracionais.

Por fim, peça as e os estudantes que, de modo individual, apresentem suas resoluções, descrevendo detalhadamente cada etapa (contendo os procedimentos por escrito ou em forma de fluxograma) das seguintes equações:

- (a) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
- (b) $x^2 - 7x - 8 = 0$;
- (c) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

Espera-se que as e os estudantes consigam obter, ainda que com o auxílio da professora ou do professor, os seguintes sistemas e construções (soluções):

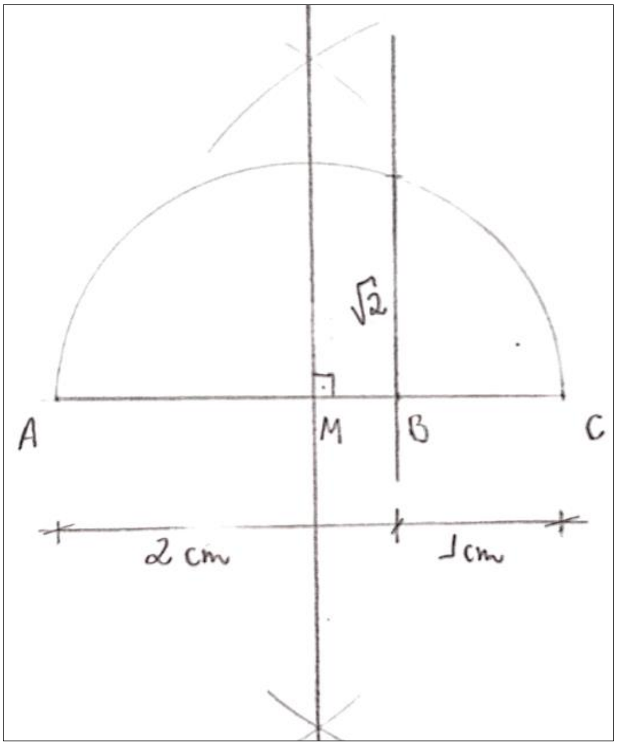
(□) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = 4 \\ P := x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

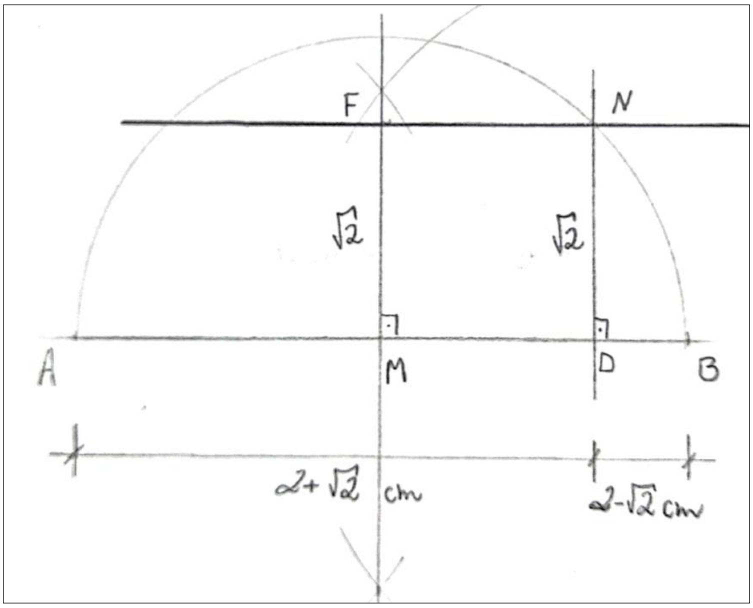
Identificar que é do 1° caso e realizar as construções:

Figura 30 - Construção de um segmento de medida $\sqrt{2}$ cm



Fonte: Da autora (2022).

Figura 31 - Solução da equação $x^2 - 4x + 2 = 0$



Fonte: Da autora (2022).

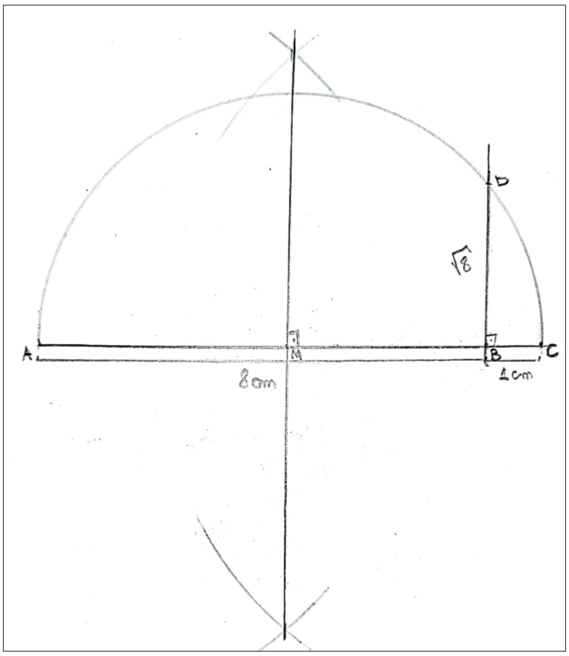
$(b)\ x^2 - 7x - 8 = 0.$

Montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = 7 \\ P := x_1 \cdot x_2 = -8 \end{cases}$$

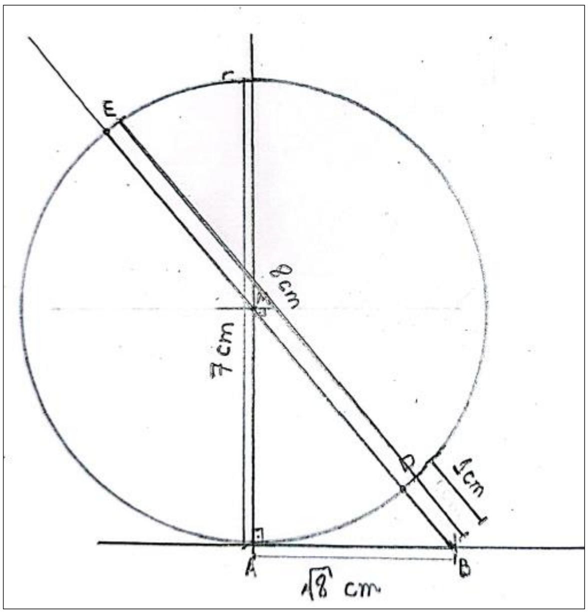
Identificar que é do 2° caso e realizar as construções:

Figura 32 - Segmento de medida $\sqrt{8}$ cm



Fonte: Da autora (2022).

Figura 33 - Solução da equação $x^2 - 7x - 8 = 0$



Fonte: Da autora (2022).

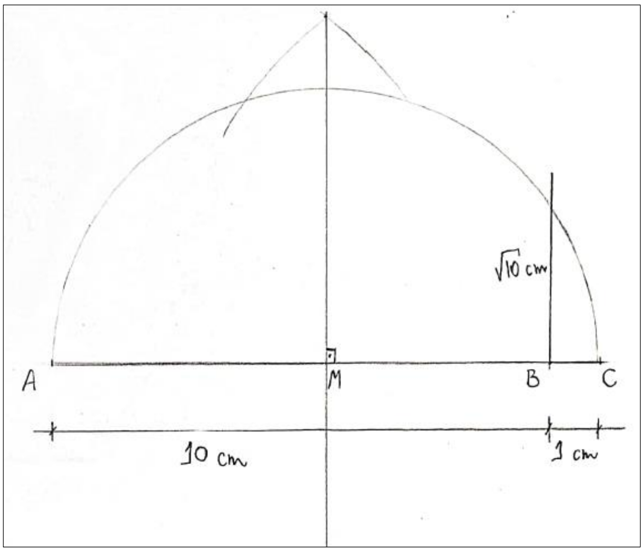
$(c) x^2 + 7x + 10 = 0.$

Montar o sistema:

$$\begin{cases} S := x_1 + x_2 = -7 \\ P := x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$$

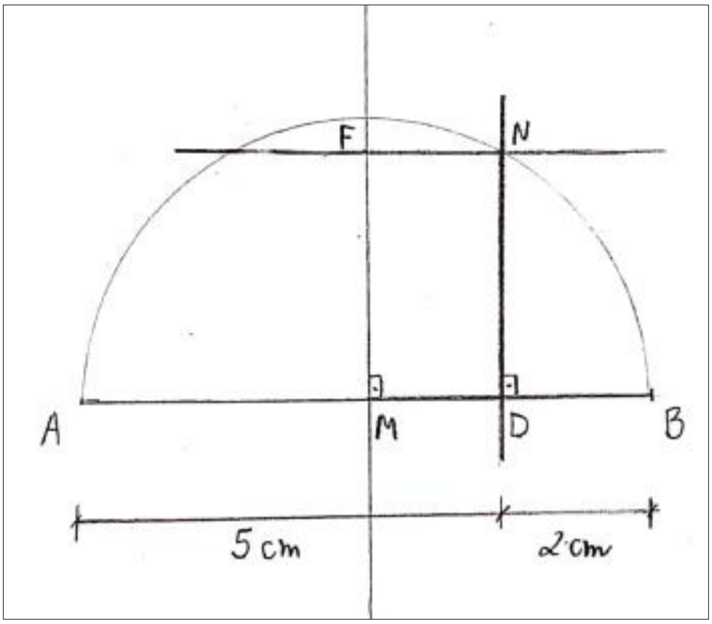
Identificar que é do 3° caso e realizar as construções:

Figura 34 - Construção de segmento com medida $\sqrt{10}$ cm



Fonte: Da autora (2022).

Figura 35 - Solução da equação $x^2 + 7x + 10 = 0$



Fonte: Da autora (2022).

Para finalizar, selecione uma das equações trabalhadas nessa etapa e discorra sobre possíveis interpretações, desde aplicações a problemas cotidianos como funções-lucro de uma empresa ou o modelo da cauda de um avião a situações mais gerais como áreas de figuras. Em seguida, solicite que as e os estudantes criem versões de natureza retórica, seja para abstrações generalizadas ou aplicações em áreas, para reescreverem as equações trabalhadas nesta etapa.

Caso aprecie e o tempo permita, converse com as e os estudantes sobre situações mais gerais onde a é um número racional diferente de 1, dividindo também em casos quando é positivo ou negativo. Para isso, pode-se trabalhar mais problemas de aplicações e, visando a parte de construções geométricas, abordar a seção 4.3 – Quando a for diferente de 1, do presente trabalho.

Por fim, indicamos o uso dos recursos opcionais como, por exemplo, o software GeoGebra, para mostrar as e os estudantes os procedimentos de construção através das tecnologias de informação e comunicação (TIC's).

5.4 Quarta Etapa (Aula 8)

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: Resolução de Equações do Segundo por álgebra</td></tr>
<tr><td>Tempo: 1 aula (50 min)</td><td>Ano: 9°</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetos de Conhecimento:
Equações do segundo grau.
Fórmulas de Bháskara e Delta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competências da BNCC:
Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras</td></tr>
</table>

linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). • Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
Habilidades: • (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. • (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. • (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Objetivos: • Demonstrar a fórmula de Bhaskara e identificar a fórmula do Delta para a resolução de equações polinomiais do segundo grau; • Utilizar as fórmulas supracitadas para resolver equações do segundo grau e situações problema com a mesma temática; • Verificar a validade da fórmula de soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau; • Dialogar sobre a praticidade da linguagem simbólica no algoritmo de resolução de equação do segundo grau, comparando os métodos Geométrico e Algébrico.
Recursos Utilizados: • Papel e lápis. • Lousa. • Giz ou Pincel para quadro branco.

<u>Descrição da Atividade</u>

Visando concluir esta sequência didática, nos debruçaremos em abordar as contribuições de François Viète, René Descartes e Bhaskara quanto ao trato algébrico das equações polinomiais do segundo grau. Retome discussões históricas sobre esses personagens dialogando com as e os estudantes, preocupando-se em convidá-los ao debate, apresentando suas visões quanto ao uso de letras e símbolos na linguagem matemática e como estão percebendo esse desenvolvimento ao longo da História da Matemática.

Comece a atividade escrevendo na lousa a equação do segundo grau geral:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

abordando a importância de se ter $a \neq 0$. Em seguida, relembre, com exemplos, o processo de fatoração conhecido como trinômio quadrado perfeito e através do procedimento de completamento de quadrados, isole a incógnita x da equação obtendo as fórmulas conhecidas como *fórmula de Bhaskara* e *Delta*. A seguir, apresentamos uma possível demonstração.

<u>Demonstração:</u>

Temos:

$ax^2 + bx + c = 0$, subtraindo c de ambos os lados da equação, temos:

$ax^2 + bx = -c$, dividindo por a ambos os lados da equação, temos:

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$, completando quadrado, temos:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$, e então, temos:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$, extraindo a raiz quadrada, temos:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$, tirando o Mínimo Múltiplo Comum (MMC), temos:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, reescrevendo o segundo membro da equação, temos:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$, logo:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, e então isolando a incógnita x, temos:

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, portanto:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Após a demonstração é importante a professora ou o professor ressaltar que o sinal de $\pm$ (mais ou menos) se deve ao fato de que ao tirarmos a raiz quadrada podemos ter valores positivos e negativos e que com a demonstração da fórmula podemos perceber que a fórmula do *Delta* (Δ) equivale a: $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Converse sobre a utilidade de, inicialmente, determinarmos o valor de Δ e analise o que acontece quando temos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$. Conclua que sempre teremos, no máximo, duas raízes, a saber,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Aproveite para, com as raízes explicitadas acima, demonstrar as fórmulas de soma e produto das raízes como apresentadas no sistema (4.1).

Caso o tempo permita e/ou surjam perguntas quanto ao caso em que $\Delta < 0$, aproveite para discutir mais contribuições como as de Gauss e o corpo dos complexos que permitem resolver situações dessa natureza, trazendo problemas que foram objeto de estudo para muitos matemáticos, tais como $x^2 + 1 = 0$.

Em seguida, a professora ou o professor, deverá escrever na lousa a equação: $x^2 - 7x + 10 = 0$, resolvida através de construções geométricas na seção 5.3, e resolvê-la utilizando a fórmula de Bhaskara, como segue:

- $x^2 - 7x + 10 = 0$

  $\Delta = \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)} = \sqrt{9} = 3$, logo:

  $x = \frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2}$, e então:

  $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$ e $x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$, portanto:

As raízes encontradas são $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$.

A professora ou o professor pedirá então para as estudantes e os estudantes conferirem os valores encontrados com aqueles que foram construídos na seção 5.3.

O mesmo procedimento deve ser feito com as equações: $x^2 - 4x - 11 = 0$ e $x^2 + 8x + 13 = 0$, porém a professora ou o professor poderá solicitar a participação das e dos estudantes na resolução, como segue:

- $x^2 - 4x - 11 = 0$

  $\Delta = \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-11)} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

  $x = \frac{-(-4)\pm 2\sqrt{15}}{2}$, e então:

  $x_1 = \frac{4+2\sqrt{15}}{2} = 2 + \sqrt{15}$ e $x_2 = \frac{4-2\sqrt{15}}{2} = 2 - \sqrt{15}$

As raízes encontradas são $x_1 = 2 + \sqrt{15}$ e $x_2 = 2 - \sqrt{15}$.

- $x^2 + 8x + 13 = 0$

  $\Delta = \sqrt{(8)^2 - 4(1)(13)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

  $x = \frac{-8\pm 2\sqrt{3}}{2}$, e então:

  $x_1 = \frac{-8+2\sqrt{3}}{2} = -4 + \sqrt{3}$ e $x_2 = \frac{-8-2\sqrt{3}}{2} = -4 - \sqrt{3}$

As raízes encontradas são $x_1 = -4 + \sqrt{3}$ e $x_2 = -4 - \sqrt{3}$.

Após a resolução, a professora ou o professor pedirá para que as e os estudantes comparem os valores obtidos com os da seção 5.3 enriquecendo a atividade e discutindo sobre a construção de segmentos com medida irracional.

Finalmente, a professora ou o professor solicitará para que as e os estudantes resolvam, utilizando a fórmula de Bhaskara, as equações (a), (b) e (c), da seção 5.3, e confiram os resultados com as medidas dos segmentos encontrados.

- (a) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
- (b) $x^2 - 7x - 8 = 0$;
- (c) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

Ao final das resoluções, a professora ou o professor perguntará a turma:

- Com base nas aulas anteriores e na aula de hoje, qual o método de resolução você achou melhor? Justifique sua escolha.

Dedique o tempo final da aula para conversar com a turma sobre a importância do formalismo e de uma linguagem para a matemática e como a inserção de letras contribuiu para o desenvolvimento dessa ciência viva.

Argumente sobre o impacto em desenvolver um algoritmo de resolução mais flexível e prático. Ainda, as letras permitem descrever diversos problemas numa mesma linguagem e que podem ser resolvidos com diferentes argumentos (geométricos, algébricos ou aritméticos, seja individual ou concomitantemente).

Peça para que as e os estudantes discorram sobre o que aprenderam dessa sequência didática, o que sentiram com a aprendizagem dos métodos e suas justificativas e impressões a respeito da evolução acerca dos estudos das Equações Polinomiais do Segundo Grau.

Por fim, utilize esse esboço de sequência para alavancar sua criatividade enquanto professora e professor de matemática, abordando novas metodologias e práticas pedagógicas buscando, também, seu aprimoramento pessoal. Esperamos que haja o despertar de curiosidades tais como as construções em situações em que há duas raízes reais e iguais ou quando uma das raízes é nula (despertar esse não somente da parte das e dos estudantes).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo central deste trabalho é o de proporcionar o pensamento crítico e filosófico quanto ao ensino de Matemática, suas ramificações, abordagens metodológicas e, mais a fundo, sobre o papel da professora e do professor na sala de aula e sobre o que esta e este compreende como sua função. Para este propósito, trouxemos a História da Matemática como ferramenta metodológica útil e necessária com impactos tais como o de diminuir processos mecanicistas de ensino que apresentam fórmulas, dadas como entes prontos e soberanos, desprovidos de investigação, verificação e assimilação. Decorar não é aprender. Saber usar um algoritmo, não é habilidade adquirida.

Aproveitamos as considerações finais para trazer algumas reflexões, as quais nos esforçaremos em evitar dar juízo de valor, pois buscamos que as e os leitores meditem e reflitam. No que concerne a História da Matemática, especificamente os anos finais do ensino fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018, p.298 e 289) aborda:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. [...] Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática.

Entretanto, considerando o estudo das equações do segundo grau como exemplo, não há objetos de conhecimento ou habilidades específicas que contemplem a história da matemática (observe que a 1ª etapa da sequência didática, seção 5.1, não há uma habilidade específica da BNCC, pois não há no referido documento).

No que se refere ao ensino mecanicista, é natural que a leitora ou o leitor se pergunte: “Mas a resolução de equações através do desenho geométrico não é, também, um processo mecanicista?”. De fato, é. Porém, estamos defendendo a construção do conhecimento por meio da História da Matemática para enriquecer e explicar essas mecânicas, ultrapassando a pura reprodução dos algoritmos prontos por focarmos nas justificativas de sua praticidade, funcionalidade e flexibilidade, contribuindo para o engajamento e papel de agente ativo da e do estudante, permitindo que optem entre diferentes métodos de resolução, que desconstruam as ideias disseminadas nas mídias de fórmulas inúteis ou aprendizagem desnecessária. Que possam compreender, por próprio raciocínio e desenvolvimento, a praticidade da linguagem simbólica e, consequentemente, de algoritmos e fórmulas, tais como a de Bhaskara, por apresentarem menos requisitos e serem mais funcionais e rápidas do que os métodos de resolução que as precederam. Afinal, todo algoritmo é um processo mecânico e todo processo mecânico (em matemática) torna-se um algoritmo. Já preparou uma receita, como um bolo por exemplo, e se perguntou: “Quem será que descobriu que misturando esses ingredientes nessa proporção resultaria nesse prato? E como?”. Já modificou uma receita para deixar com *a sua cara* e viu que deu muito certo, ou o contrário? Esse processo de aprendizagem tem um viés natural, divertido e que instiga curiosidade e produtividade.

Imagine um diálogo com uma professora ou um professor de História, engajado em sua profissão, que nos apresente sua resposta à pergunta: “Por que estudar História?”. Disponha de um tempo para ter esse diálogo. Projetos interdisciplinares enriquecedores podem surgir dessa conversa e, principalmente, provocar resultados incríveis com as e os estudantes. Afinal, nos empenhamos por elas e eles, e fazemos aquilo que muito amamos.

Por outro lado, a medida com que investigamos artigos, dissertações, teses e livros didáticos, vimos a carência da abordagem de Desenho Geométrico ou Construções Geométricas no ensino de Matemática. Tem decaído com o passar dos anos. Esse fenômeno se deve a quê? É claro que há diversos fatores que contribuem para esse sucesso, principalmente verbas governamentais, recursos e condições de infraestrutura das escolas, engajamento das e dos estudantes, participação das famílias, dentre outros fatores. Mas o que cada um de nós pode fazer com aquilo que temos? Não é à beira da extinção que uma espécie evolui? Não é preciso muito para se fazer bem-feito. O importante é aproveitar tudo o que se pode. Livro didático não é manual e muito menos uma obra para ser integralmente copiada em lousas e cadernos. São catalisadores para ideias, aprimoramentos e desenvolvimentos outros. Ainda, conhecimento deve ser compartilhado, difundido e aprimorado. Daí a ideia de realizar essa pesquisa e elaborar esse trabalho. Sem dúvidas queremos manter a esperança de que, em breve, haja mais e mais movimentos por reflexões na educação matemática.

A linguagem Matemática é belíssima, quase uma nova língua, e por isso deve ser bem compreendida para que haja comunicação fluente. Há diversas interpretações, como vimos, para uma simples equação escrita no quadro e, muitas vezes, o processo reverso é o que mais dificulta nossas e nossos estudantes. Desse modo, é essencial trabalharmos a interpretação de situações-problemas e a criação delas, em conjunto com a turma.

Em epílogo, no que se refere ao uso da geometria e, consequentemente, o conhecimento histórico das equações, concluímos este trabalho com as falas de Lamphier (2004, p.2):

> “Quando vamos usar isso?”. Esta é uma pergunta que todo professor já ouviu em algum momento ou em vários momentos. Mas uma pergunta melhor seria: “Onde isso foi usado no passado?”. É importante não apenas olhar para o

futuro, mas também olhar para o passado. Para entender completamente um tópico, seja ele de ciências, estudos sociais ou matemática, sua história é definitivamente importante aprender. À medida que o mundo progride e evolui, a geometria também. Nas salas de aula do ensino médio, hoje, o papel das construções geométricas mudou drasticamente. Para entender o papel da geometria hoje, a história da geometria deve ser discutida. [...] a história da matemática [...] desmitologiza a matemática ao mostrar que ela é criação de seres humanos. A história enriquece o currículo de matemática. Aprofunda os valores e amplia o conhecimento que os alunos constroem nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

[1] ALLAIRE, Patrícia R. BRADLEY, Robert E. **Geometric Approaches to Quadratic Equations from Other Times and Places.** Mathematic Teacher, v. 94, n. 4, p. 308-319, abril 2001.

[2] APOSTILA CP II. **Posições da Reta**. Disponível em: http://www.cp2.g12.br/blog/re2desenho/files/2019/10/6-Capitulo_V_6o-Ano-GABARITO2.pdf>. Acesso em 13 de agosto de 2022.

[3] BENTO, C. S.; MOREIRA, A. S.; GILICZYNSKI, A.; ROCHA, A. C. M; SILVA, E. Q.; **O desenho geométrico como ferramenta de estímulo ao estudo de matemática no ensino fundamental.** Relato de Experiência. Disponível em: <http://www.repositorio.jesuita.org.br/bitstream/handle/UNISINOS/8457/7375-9934-2-DR.pdf?sequence=1>. 2017

[4] BICUDO, I. **Os elementos**. 1ª ed. Editora Unesp, 2009.

[5] BOYER, Carl B. **História da Matemática** / prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach; tradução de Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[6] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

[7] BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1997.

[8] COSTA, Valderi C. ***Números Construtíveis***. Universidade Federal de Campina Grande – Trabalho de Conclusão de Curso – 51 f. Campina Grande, 2013.

[9] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1994.

[10] FLICK, U. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

[11] FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 42. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

[12] FOUCAULT, Michel. **Arqueologia do Saber**. Trad. Luiz Felipe Baeta Neves. Rio de Janeiro: Forense Universitária. 2012.

[13] GÜNTHER, Hartmut. **Pesquisa qualitativa versus pesquisa quantitativa: esta é a questão?.** Psicologia: Teoria e Pesquisa, v. 22, n. 2, p. 201-209, maio/ago. 2006. DOI: https://doi.org/10.1590/S0102-37722006000200010. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0102-37722006000200010. Acesso em 13 de agosto de 2022.

[14] LAMPHIER, L. Geometric Constructions. Disponível em: https://studylib.net/doc/7957041/geometric-constructions Acesso em 13 de agosto de 2022.

[15] MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico.** Volume 1,São Paulo, Editora Scipione, 1994.

[16] MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico.** Volume 2**,** São Paulo, Editora Scipione, 1995a.

[17] MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico.** Volume 3, São Paulo, Editora Scipione, 1995b.

[18] OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

[19] PEDROSO, H. A. **Uma breve história da equação do 2º grau**. Revista Eletrônica de Matemática, v.2, p.1-13, 2010.

[20] PIAGET, Jean. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas**. Problema central do desenvolvimento. Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

[21] PUTNOKI J. C. **Elementos de Geometria & Desenho Geométrico**. 2º vol. Editora Scipione, 1989.

[22] REZENDE, E. Q. F. & QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2008.

[23] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[24] ROQUE, Tatiana. **Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?** Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, jul | dez 2014.

[25] SAUSSURE, Ferdinand de. Curso de Linguística Geral. 25 ed. São Paulo: Cultrix, 2003.

[26] SILVA, Jeyson Barbosa A. **Equações do Segundo Grau: Sua história e abordagens didáticas.** Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Paraíba, João Pessoa, 64 f. 2019.

[27] VÁRHIDY, Charles Geoges. **Desenho Geométrico: Uma ponte entre a Álgebra e a Geometria. Resolução de Equações pelo Processo Euclidiano.** Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

[28] WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às Construções Geométricas.** Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[29] WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, José. **Construções Geométricas**. 5ª Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1993.