



**MATHEUS RODRIGUES DE ABREU  
YAN DAVID PIMENTA**

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS  
E NUMÉRICOS PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES  
DE CONCRETO ARMADO**

**LAVRAS-MG  
2022**

**MATHEUS RODRIGUES DE ABREU  
YAN DAVID PIMENTA**

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS  
PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO**

Concepção básica apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes  
Orientador

**LAVRAS-MG  
2022**

**MATHEUS RODRIGUES DE ABREU  
YAN DAVID PIMENTA**

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS  
PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO**

**COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN ANALYTICAL AND NUMERICAL  
METHODS FOR DESIGN OF REINFORCED CONCRETE SLABS**


Concepção básica apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

Aprovada em .

D.Sc. Ígor José Mendes Lemes UFLA

M.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias UNILAVRAS

B.Sc. Pedro Henrique Andrade Lima UFOP



Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes  
Orientador

**LAVRAS-MG  
2022**

*Dedicamos esse trabalho aos nossos  
pais por nos ensinarem o valor da  
educação.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus.

Aos meus pais, Anizio Rodrigues de Abreu e Rosylane Vita Simão de Abreu, pelo tempo investido em mim e pela educação que me proporcionaram.

Ao meu irmão, Luis Otávio de Abreu e familiares que sempre estiveram presentes em minha vida.

Ao professor Ígor J. M. Lemes, pela orientação, disposição e dedicação no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos que sempre me ajudaram e me apoiaram, especialmente ao Yan David Pimenta que realizou esse trabalho comigo.

Aos professores do curso de Engenharia Civil, pelos tantos ensinamentos passados e tamanha dedicação ao curso.

À UFLA, pela qualidade no ensino e estrutura proporcionada a nós estudantes.

*Matheus Rodrigues de Abreu*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus.

Aos meus pais, José Soares Pimenta e Sandra David Soares Pimenta, pelo tempo investido em mim e pela educação que me proporcionaram.

Aos meus irmãos, Yago David Pimenta e Anna Clara David Pimenta, e familiares que sempre estiveram presentes em minha vida.

Ao professor Ígor J. M. Lemes, pela orientação, disposição e dedicação no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram, especialmente ao Matheus Rodrigues de Abreu que realizou esse trabalho comigo.

Aos professores do curso de Engenharia Civil, pelos tantos ensinamentos passados e tamanha dedicação ao curso.

À UFLA, pela qualidade no ensino e estrutura proporcionada a nós estudantes.

*Yan David Pimenta*

## RESUMO

O seguinte trabalho propõe uma análise comparativa entre os métodos analíticos de dimensionamento de lajes maciças e um método numérico de análise estrutural baseado na técnica dos elementos finitos, para a obtenção do esforço interno, o momento fletor, e a área de aço necessária. Para esta análise foi usado um estudo de caso de um pavimento tipo composto por seis lajes retangulares, nas quais foram obtidos os momentos fletores máximos positivos e negativos corrigidos e compatibilizados por referências bibliográficas encontradas. Tendo em mãos os momentos fletores calculados por cada método, foi dimensionada a área de aço necessária. Assim, obtidos os momentos e quantidade de armaduras para cada direção das seis lajes do estudo de caso, foi apontado que os métodos analíticos apresentam resultados satisfatórios em relação ao software utilizado que tem como principal característica a sua precisão e velocidade de análise. Nota-se que os métodos de Marcus e Bares apresentam maior proximidade com o método numérico.

**Palavras-chave:** Lajes maciças. Método de Bares. Método de Wood-Armer. Método de Marcus. Momentos fletores em lajes. Área de aço.

## **ABSTRACT**

The following work proposes a comparative analysis between the analytical methods of designing solid slabs and a numerical method of structural analysis based on the finite element technique, to obtain the internal force, the bending moment, and the required steel area. For this analysis, a case study of a pavement type composed of six rectangular slabs was used, in which the maximum positive and negative bending moments were obtained, corrected and made compatible by bibliographic references found. With the bending moments calculated by each method, the required steel area was dimensioned. Thus, obtained the moments and amount of reinforcement for each direction of the six slabs of the case study, it was pointed out that the analytical methods present satisfactory results in relation to the software used, whose main characteristic is its precision and speed of analysis. Note that the Marcus and Bares methods are closer to the numerical method.

**Palavras-chave:** Slabs. Bares's Method. Wood-Armer's Method. Marcus's Method. Bending Moments. Steel Area.

## Lista de Figuras

Figura 1 – Dimensões consideradas no cálculo do vão efetivo .....	5
Figura 2 – Vãos teóricos $l_x$ e $l_y$ .....	5
Figura 3 – Tipos de bordas de laje .....	6
Figura 4 – Relação entre os comprimentos da laje analisada e a laje adjacente.....	6
Figura 5 – Relação entre as áreas da laje analisada e a laje adjacente.....	7
Figura 6- Laje analisada com continuidade em uma laje em balanço .....	8
Figura 7 – Parâmetros utilizados no cálculo de $d1$ e $d2$ .....	8
Figura 8 – Casos de vinculação de Bares .....	13
Figura 9 – Compatibilização dos Momentos Fletores .....	15
Figura 10 – Analogia das Grelhas em laje.....	17
Figura 11- Flechas de vigas de diferentes apoios .....	18
Figura 12 – Elementos finitos.....	20



## Lista de Tabelas

Quadro 1 – Peso específico aparente de alguns materiais .....	9
Quadro 2 – Cargas variáveis de utilização .....	10
Quadro 3 – Coeficientes das Combinações de ações.....	11
Tabela 4 – Fragmento da tabela de armadura simples.....	21
Tabela 5 – Parâmetro das lajes .....	24
Tabela 6 – Distribuição das Cargas .....	24
Tabela 7 – Resultados dos momentos fletores de Bares .....	26
Tabela 8 – Resultados dos esforços cortantes de Bares.....	27
Tabela 9 – Resultados área de aço .....	27
Tabela 10 - Cálculo do momento volvente $M_{xy}$ .....	28
Tabela 11 - Cálculo dos momentos $M_{xd}^*$ e $M_{yd}^*$ .....	29
Tabela 12 – Cálculo das áreas de aço .....	29
Tabela 13- Parâmetros da flecha das vigas.....	30
Tabela 14 – Parâmetros de Marcus.....	30
Tabela 15 -Momentos por Marcus.....	31
Tabela 16- Cortantes por Marcus .....	31
Tabela 17 – Resultados de área de aço .....	32
Tabela 18 – Momentos fletores e áreas de aço do método numérico.....	33
Tabela 19- Resumo dos resultados .....	34
Tabela 20 - Desvio e Erros Percentuais dos momentos fletores.....	35
Tabela 21 - Média dos desvios e erros percentuais dos momentos fletores .....	35
Tabela 22 - Desvio e Erros percentuais das áreas de aço .....	36
Tabela 23 - Média dos desvios e erros percentuais das áreas de aço.....	36

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações gerais .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação .....</b>	<b>1</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Considerações iniciais.....</b>	<b>3</b>
<b>2.2</b>	<b>Revisão bibliográfica .....</b>	<b>3</b>
<b>2.3</b>	<b>Lajes.....</b>	<b>3</b>
<b>2.4</b>	<b>Parâmetros das Lajes .....</b>	<b>4</b>
<b>2.4.1</b>	<b>Vão Efetivo .....</b>	<b>4</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Geometria .....</b>	<b>5</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Vinculação das bordas: .....</b>	<b>6</b>
<b>2.4.4</b>	<b>Altura útil das armaduras.....</b>	<b>8</b>
<b>2.5</b>	<b>Distribuição de cargas na laje.....</b>	<b>9</b>
<b>2.5.1</b>	<b>Ações permanentes .....</b>	<b>9</b>
<b>2.5.2</b>	<b>Cargas variáveis.....</b>	<b>10</b>
<b>2.6</b>	<b>Estados Limites .....</b>	<b>10</b>
<b>2.6.1</b>	<b>Estados Limites Últimos (ELU).....</b>	<b>10</b>
<b>2.6.2</b>	<b>Estados Limites de Serviço (ELS) .....</b>	<b>11</b>
<b>2.7</b>	<b>Cálculo dos Momentos Fletores e Força Cortante das Lajes .....</b>	<b>11</b>
<b>2.8</b>	<b>Método de Bares .....</b>	<b>12</b>
<b>2.8.1</b>	<b>Compatibilização dos Momentos Fletores.....</b>	<b>14</b>
<b>2.9</b>	<b>Método de Wood-Armer .....</b>	<b>15</b>
<b>2.10</b>	<b>Método de Marcus .....</b>	<b>17</b>
<b>2.10.1</b>	<b>Processo das Grelhas .....</b>	<b>17</b>
<b>2.10.2</b>	<b>Processo de Marcus .....</b>	<b>18</b>
<b>2.11</b>	<b>Método Numérico .....</b>	<b>20</b>
<b>2.12</b>	<b>Armadura para Flexão Simples .....</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Considerações iniciais.....</b>	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>Estudo de Caso.....</b>	<b>23</b>
<b>3.3</b>	<b>Tecnologias utilizadas.....</b>	<b>24</b>

<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE RESULTADOS .....</b>	<b>26</b>
<b>4.1</b>	<b>Considerações iniciais.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2</b>	<b>Aplicações dos métodos .....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.1</b>	<b>Aplicação de Bares.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Aplicação de Wood-Armer .....</b>	<b>28</b>
<b>4.2.3</b>	<b>Aplicação do Método de Marcus .....</b>	<b>30</b>
<b>4.3</b>	<b>Aplicação do método numérico .....</b>	<b>32</b>
<b>4.4</b>	<b>Análise Comparativa .....</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>39</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações gerais

A Engenharia Civil está sempre em crescente evolução, apresentando novos estudos e métodos inovadores que visam facilitar a resolução dos problemas individuais e coletivos da sociedade.

O estudo das lajes também evoluiu com o surgimento e a melhora da tecnologia dos computadores. Porém, por muitos anos, foram utilizados métodos analíticos que possibilitava uma análise rápida e eficaz destas placas. Tais métodos também foram melhorados tentando cada vez mais se aproximarem da realidade. E em meio ao crescimento e a inovação, surgiram softwares de análise que junto ao uso de computadores possibilitaram uma análise realista e eficaz das lajes de concreto armado.

Os métodos que serão utilizados no seguinte trabalho serão: Método de Bares por meio de suas tabelas, o Método de Wood-Armer com suas correções nos momentos fletores, o Método de Marcus seguindo a analogia de grelhas e o Método numérico através de um software de análise estrutural.

## 1.2 Motivação

As lajes são elementos fundamentais no contexto estrutural, bem como as lajes maciças de concreto armado que são amplamente usadas na construção civil no Brasil e no mundo. Dessa forma, há diversos estudos para melhor interpretar esse componente. Como tema desse trabalho tem-se o estudo dos momentos fletores e das armaduras para flexão simples.

Visto a importância das lajes de concreto armado, há diversas pesquisas a cerca desse tema e dos métodos já consolidados que são utilizados para o cálculo dos parâmetros citados no parágrafo anterior, como por exemplo os abordados pelas normas brasileiras. Nesse contexto, a comparação entre os métodos e as suas respectivas precisões na aferição dos dados torna-se um tema de grande interesse.

## 1.3 Objetivos

O presente trabalho visa aplicar métodos analíticos consolidados (método de Bares, método de Marcus, Método de Wood-Armer) para a análise de placas de concreto armado em um estudo de caso escolhido e compará-los com o método numérico baseado na técnica de elementos finitos. Para isso, foram desenvolvidas planilhas eletrônicas adaptadas para resolução analítica. Já para a solução numérica, um *software* foi utilizado. Foram comparados os resultados obtidos

dos esforços internos (momentos fletores) e área de aço, considerando os métodos analíticos e numérico.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Considerações iniciais

Esse capítulo tem como objetivo realizar uma revisão bibliográfica acerca do tema e abordar assuntos e determinações normativas que fundamentam a metodologia adotada.

### 2.2 Revisão bibliográfica

Já existem alguns trabalhos com objetivos semelhantes aos aqui visados, como os trabalhos de conclusões de curso de Pereira (2021), Martin e Rodrigues (2017) e Paula (2016). Os trabalhos se diferenciam pelos estudos de caso, além dos métodos e alguns parâmetros utilizados. Em Pereira (2021) há a comparação do método dos elementos finitos, através do CYPECAD®, com o método de Bares aplicados em três projetos para o cálculo da área de aço, o que gerou áreas de aço maiores no método simplificado, resultando em média 10,57% a mais do que o calculado pelo *software*.

Martin e Rodrigues (2017) compararam o cálculo dos momentos fletores e a taxa de armadura dos métodos de Bares e Marcus com o programa ®CYPECAD em um pavimento com seis lajes, sendo que os resultados obtidos pelo *software* foram inferiores aos dos métodos simplificados o que gerou uma taxa de armadura mais econômica. Já os estudos de Paula (2016) apresentaram um comparativo de momentos fletores obtidos pela teoria de Marcus, Czerny, Bares e pela analogia de grelha, esta última através do *software* ®Alto Qi Eberick V8 em um pavimento com 8 lajes. Eles concluíram que o método de Marcus obteve valores menores que o do programa enquanto o de Czerny e Bares apresentaram momentos próximos aos do método numérico utilizado.

### 2.3 Lajes

Segundo Bastos (2021), as lajes, também chamadas de placas, são elementos de superfície, onde as duas dimensões (largura e comprimento) são maiores que a outra dimensão (a espessura). Sua principal função é receber as cargas provenientes de pessoas, móveis, equipamentos, paredes, veículos, e quaisquer tipos de cargas que possam existir de acordo com a arquitetura e finalidade do local em que ela se encontra. As cargas que geralmente são aplicadas perpendicularmente ao seu plano podem ser distribuídas em áreas, linearmente, ou ainda, em pontos da laje como forças concentradas. Depois de carregada, a laje transmite as cargas para os apoios que geralmente são as vigas, mas que eventualmente podem ser diretamente sobre os pilares.

Segundo Bastos (2021), as lajes maciças são aquelas em que toda a sua espessura é formada por concreto armado, ou seja, é composto por concreto e armaduras de aço. Em vários edifícios, as lajes representam um grande consumo de concreto, de aproximadamente 50% do total segundo Pinheiro (2007).

As lajes maciças podem ter espessuras variáveis que dependem da finalidade e das cargas que ela terá de suportar. A ABNT NBR 6118:2014 estabelece espessuras mínimas que devem ser respeitadas para determinadas situações, sendo elas:

- a) 7 cm para cobertura não em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- f) 15 cm para lajes com protensão apoiadas em vigas, com o mínimo de  $L/42$  para lajes de piso biapoiadas e  $L/50$  para lajes de piso contínuas;
- g) 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes-cogumelo, fora do capitel.

## 2.4 Parâmetros das Lajes

Para se analisar e estudar lajes maciças de concreto existem alguns parâmetros que são necessários para a execução dos cálculos, são eles:

- Vão efetivo
- Geometria
- Vinculação das bordas
- Altura útil das armaduras

### 2.4.1 Vão Efetivo

O vão efetivo das lajes ( $l_{ef}$ ) segundo a ABNT NBR 6118:2014 deve ser calculado seguindo a expressão:

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (1)$$

Com:

$$a_1 \leq \begin{cases} \frac{t_1}{2} \\ 0,3h \end{cases} \text{ ou } a_2 \leq \begin{cases} \frac{t_2}{2} \\ 0,3h \end{cases} \quad (2)$$

Onde,

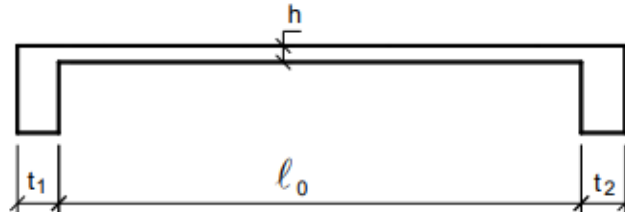
$l_0$  é o comprimento interno do vão em metros

$t_1$  e  $t_2$  são as larguras dos apoios em metros

$h$  é a altura da laje em metros

A Figura 1 representa os parâmetros citados acima.

Figura 1 – Dimensões consideradas no cálculo do vão efetivo



Fonte: Bastos (2021)

#### 2.4.2 Geometria

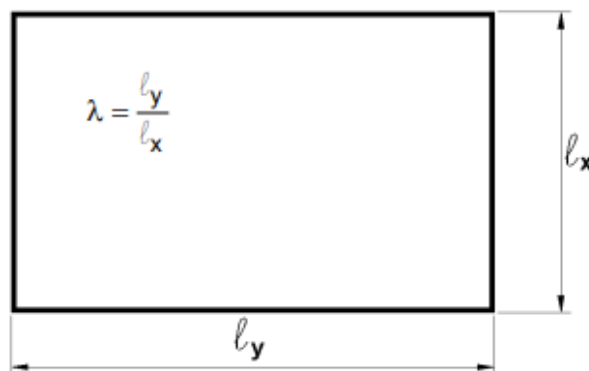
Existe uma classificação em função da geometria da laje com o objetivo de identificar se as armaduras resistentes aos momentos fletores serão dispostas em uma direção ou nas duas direções.

De acordo com Pinheiro (2007), considerando  $l_y$  e  $l_x$  o maior e o menor vão da laje, respectivamente (Figura 2), pode-se determinar o parâmetro  $\lambda$ . Com isso, utiliza-se a seguinte classificação:

$\lambda \leq 2 \rightarrow$  laje armada em duas direções

$\lambda > 2 \rightarrow$  laje armada em uma direção

Figura 2 – Vãos teóricos  $l_x$  e  $l_y$



Fonte: Pinheiro (2007)



### 2.4.3 Vinculação das bordas:

Segundo (Pinheiro, 2007) existem três tipos básicos de vinculação de borda: borda livre, borda apoiada e borda engastada, como ilustrado na Figura (3) a seguir:

Figura 3 – Tipos de bordas de laje

Borda livre	Borda simplesmente apoiada	Borda engastada
-----	—————	// // // // //

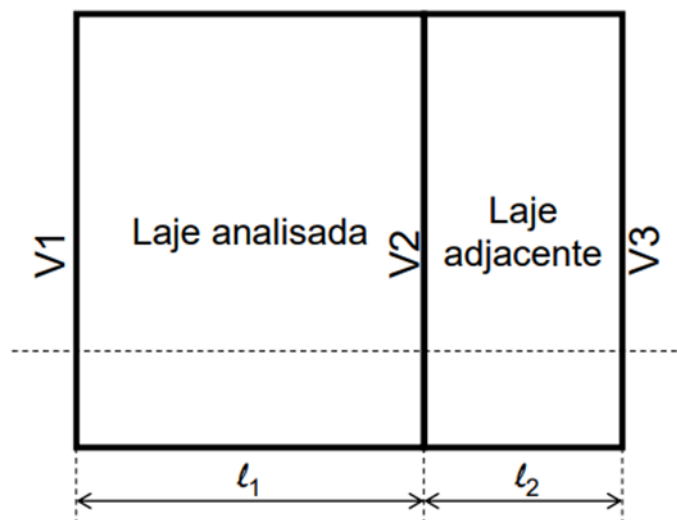
Fonte: Pinheiro (2007)

A borda livre recebe esse nome pelo fato de não restringir deslocamentos. Por outro lado, as bordas apoiada e engastada limitam os deslocamentos verticais, sendo que esta última ainda consegue limitar as rotações presentes na ligação.

Para a definição da vinculação existe algumas relações que ajudam na escolha do tipo de borda. Segundo Lemes (2022), uma laje terá um determinado bordo apoiado se houver uma viga neste local e não houver continuidade da laje sobre este bordo. Além disso, caso ocorra a continuidade da laje, deve-se levar em consideração as dimensões das lajes adjacentes para a correta definição das condições de apoio. Duas condições podem ser descritas.

A primeira é quanto ao comprimento das lajes analisadas, conforme a Figura (4).

Figura 4 – Relação entre os comprimentos da laje analisada e a laje adjacente

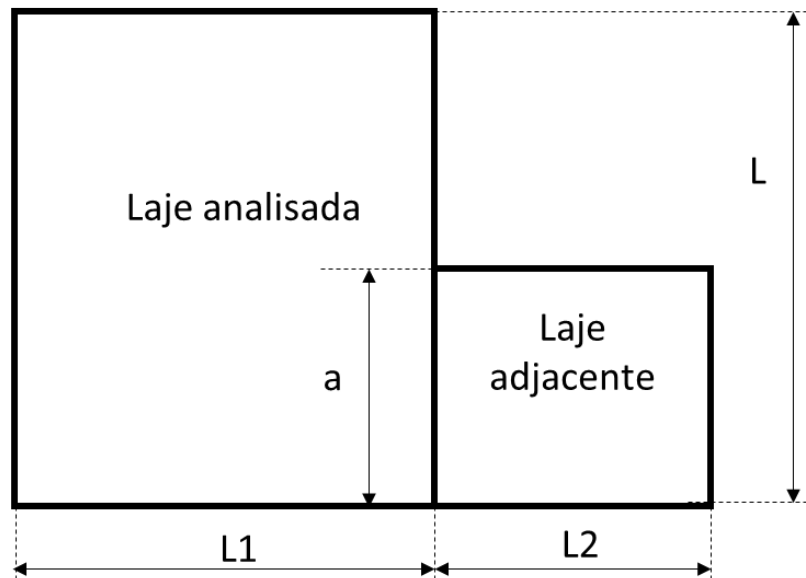


Fonte: Lemes (2022)

Se  $L_1 \geq 2 \cdot L_2$  a laje analisada pode ser considerada com a borda apoiada na laje adjacente, caso essa condição não seja aceita ela terá a borda engastada na laje adjacente.

O segundo tipo de análise é quanto as áreas das lajes analisadas, conforme mostrado na Figura (5).

Figura 5 – Relação entre as áreas da laje analisada e a laje adjacente



Fonte: Lemes (2022)

Se  $A_1 \geq 2 \cdot A_2$  a laje analisada pode ser considerada com a borda apoiada na laje adjacente, caso essa condição não seja aceita ele terá a borda engastada na laje adjacente.

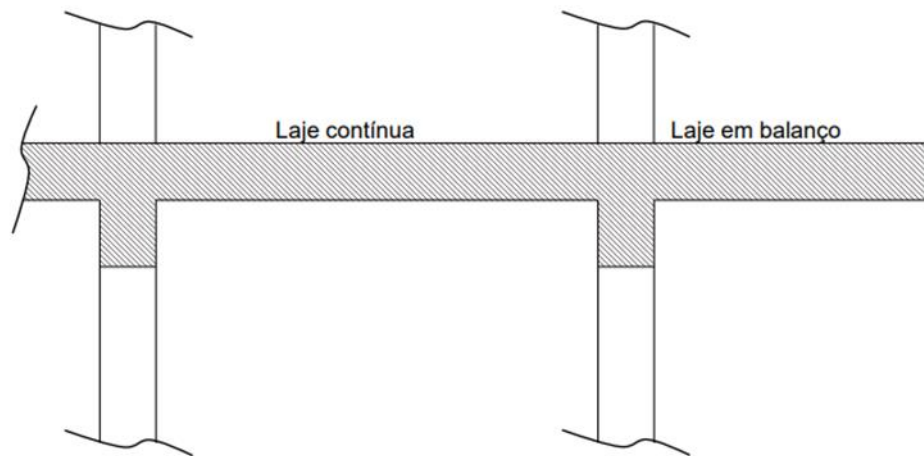
Existe ainda a possibilidade de não ter continuidade ao longo de toda a borda comum, conforme a Figura 5, nesse caso existe outro critério para a consideração da vinculação que é citado por Bastos (2021):

Se  $a \geq 2/3L$  a laje analisada pode ser considerada com a borda engastada na laje adjacente.

Se  $a < 2/3L$  a laje analisada fica com a borda simplesmente apoiada (apoio simples).

Segundo Lemes (2022), em casos de lajes em balanço, conforme ilustrado na Figura 6, sua borda em comum será engastada com a laje adjacente.

Figura 6- Laje analisada com continuidade em uma laje em balanço



Fonte: Lemes (2022)

#### 2.4.4 Altura útil das armaduras

Segundo Bastos (2021) a altura útil das armaduras é a distância entre o centro geométricos das armaduras até a face comprimida da seção.

Para lajes ela pode ser calculada da seguinte forma:

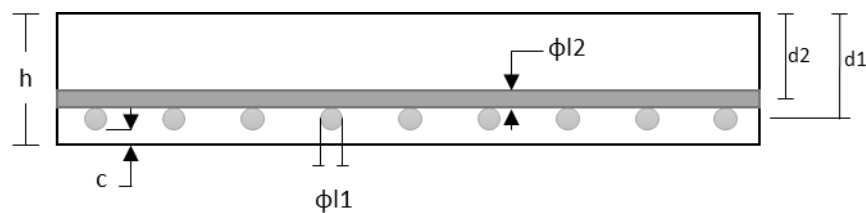
$$d1 = h - c - \Phi/2 \quad (3)$$

Para as lajes maciças em que existem duas direções utiliza-se a Equação (3) acima para a direção mais solicitada. Já para o vão menos solicitada subtrai-se a armadura mais solicitada no cálculo da altura útil, tendo a seguinte expressão mostrada na Equação (4):

$$d2 = h - c - \Phi_{11} - \Phi_{12}/2 \quad (4)$$

É possível visualizar a altura útil  $d1$  e a altura útil  $d2$  na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Parâmetros utilizados no cálculo de  $d1$  e  $d2$



Fonte: Dos autores (2022)

## 2.5 Distribuição de cargas na laje

Para se dimensionar as lajes é importante que se saiba quais cargas e como elas atuam sobre as estruturas. Nesse contexto, tem-se a ABNT NBR 6120:2019, que prevê as ações mínimas obrigatórias a serem consideradas incidentes sobre a estrutura em projetos de edificações no Brasil. Segundo Adão e Hermerly (2010), lajes são estruturas planas, dessa forma as forças que exercem influência sobre elas devem ser distribuídas sobre a sua área. Nas próximas subseções são feitas considerações sobre as ações permanentes e variáveis.

### 2.5.1 Ações permanentes

São consideradas permanentes as cargas que possuem nenhuma ou pouca variação com o tempo, ou seja, cargas constantes, como por exemplo o peso próprio. Em um projeto de edificação as ações permanentes consideradas nas lajes são definidas em função do próprio peso da laje e seus elementos construtivos (forros, argamassas, piso, etc). e de eventuais elementos de vedação (paredes) e equipamentos fixos. Para o cálculo do peso próprio deve-se atentar para os materiais que constituem a laje dos elementos constituintes.

A ABNT NBR 6120:2019 prescreve os pesos específicos de diversos materiais que são comumente utilizados na construção civil, como os apresentados no Quadro 1:

Quadro 1 – Peso específico aparente de alguns materiais

Material		Peso específico aparente $\gamma_{ap}$ kN/m <sup>3</sup>
3 Argamassas e concretos	Argamassa de cal, cimento e areia	19
	Argamassa de cal	12 a 18 (15)
	Argamassa de cimento e areia	19 a 23 (21)
	Argamassa de gesso	12 a 18 (15)
	Argamassa autonivelante	24
	Concreto simples	24
	Concreto armado	25
NOTA Os pesos específicos de argamassas e concretos são válidos para o estado endurecido.		

Fonte: ABNT NBR 6120:2019.

Já para o cálculo de cargas de paredes no meio das lajes segue-se o mesmo raciocínio da seleção de materiais, entretanto pode-se transformar a carga linear em carga por área, de kN/m para kN/m<sup>2</sup>.

### 2.5.2 Cargas variáveis

São cargas que possuem variações durante a sua incidência na vida útil da edificação, essas ações são divididas em especiais: transitórias e de pequena duração; e normais: aquelas que possuem alta probabilidade de ocorrência. Deve-se analisar as várias utilizações da edificação para se calcular as cargas variáveis. A ABNT NBR 6120:2019 determina valores mínimos de cargas uniformemente distribuídas para cada utilização, expressa em  $\text{kN/m}^2$  (Quadro 2):

Quadro 2 – Cargas variáveis de utilização

Local		Carga uniformemente distribuída ( $\text{kN/m}^2$ )	Carga concentrada (kN)
Edifícios residenciais	Dormitórios	1,5	-
	Sala, copa, cozinha	1,5	-
	Sanitários	1,5	-
	Dispensa, área de serviço e lavanderia	2	-
	Quadras esportivas	5 <sup>a</sup>	-
	Salão de festas, salão de jogos	3 <sup>a</sup>	-
	Áreas de uso comum	3 <sup>a</sup>	-
	Academia	3 <sup>a</sup>	-
	Forro acessíveis apenas para manutenção e sem estoque de materiais	0,1 <sup>at</sup>	-
	Sótão	2 <sup>a</sup>	-
	Corredores dentro de unidades autônomas	1,5	-
	Corredores de uso comum	3	-
	Depósitos	3	-
	Áreas técnicas (ver item específico)		
	Jardins (ver item específico)		

Fonte: ABNT NBR 6120:2019

## 2.6 Estados Limites

No dimensionamento de estruturas de concreto é importante a verificação da segurança, a qual é dada pelos estados limites que, segundo Pinheiro (2007), são estados em que a estrutura apresenta desempenho inadequado para sua finalidade. Essa verificação é dada normativamente pelas ABNT NBR 8681:2004 e ABNT NBR 6118:2014 que os divide nas classificações abordadas a seguir:

### 2.6.1 Estados Limites Últimos (ELU)

Definem a capacidade máxima da estrutura, se atingidos determinam a paralisação do uso da construção. Após a estrutura atingir o ELU, o elemento estrutural esgota a sua capacidade estrutural e o uso da edificação apenas é possível depois de reparos, reforço ou mesmo a substituição do elemento (CLÍMACO, 2016).

Dessa forma, há combinações de ações devem aderidas para encontrar a carga de cálculo utilizada de tal forma a evitar seu colapso, ou seja, prevenir que o estado limite último seja atingido. As combinações podem ser: normais, de construção, especiais, excepcionais. A Equação 5 define a expressão da combinação normal utilizada nesse trabalho.

$$F_d = \sum \gamma_c * G_i + \gamma_{qi} * Q_i + \sum \Psi_{0j} * \gamma_{qj} * Q_j \quad (5)$$

Sendo que, G é as cargas permanentes e Q as cargas variáveis e  $\gamma$  e  $\Psi$  são coeficientes retirados da norma. Segue Quadro 3 com alguns desses coeficientes dependendo das combinações.

Quadro 3 – Coeficientes das Combinações de ações

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 <sup>a</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0,0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0,0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0,0	1,2	0,9	0,0	0,0

onde  
D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.  
<sup>a</sup> Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

## 2.6.2 Estados Limites de Serviço (ELS)

Correspondem a situações precárias de serviço, ou seja, estão relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas. São exemplos de ELS: ocorrência de fissuras; flechas excessivas; vibrações que causem desconforto; e recalques diferenciais elevados. Vale ressaltar, que esse tópico não será abordado no trabalho.

## 2.7 Cálculo dos Momentos Fletores e Força Cortante das Lajes

Uma das soluções mais conhecidas para a resolução dos momentos e forças nas lajes é a teoria da elasticidade, entretanto essa teoria apresenta desenvolvimento complicado, devido

sua equação de quarta ordem. Dessa forma, tem-se métodos simplificados para prever o comportamento das lajes que foram desenvolvidos através de métodos semiempíricos ou com a utilização de outros conceitos, alguns deles serão abordados a seguir. Além disso, existem resoluções numéricas para essa mesma equação, como por exemplo via Método dos Elementos Finitos.

## 2.8 Método de Bares

Bares (1972) desenvolveu um método numérico que utiliza soluções em séries para as placas com diferentes vinculações, como foi introduzido no item 2.4.3, e diferentes geometrias de lajes. Dessa forma, houve a sintetização de tabelas em que se retira os coeficientes adimensionais para cálculo dos momentos fletores máximos  $\mu$ , além dos coeficientes para o cálculo das forças cortante  $v$ . Vales ressaltar, que esses coeficientes já incluem a direção (x ou y) das ações, bem como o sinal (positivo ou negativo). Segue equações de bares:

Para os momentos fletores máximos positivos:

$$m = \mu \times \frac{p \times lx^2}{100} \quad (6)$$

Onde,

$m$  representa o momento fletor em kNm/m;

$lx$  o menor vão da laje em metros;

e  $p$  a carga uniformemente distribuída atuante na laje em kN/m<sup>2</sup>;

Para os esforços cortantes:

$$r = v \times \frac{p \times lx}{10} \quad (7)$$

Onde,

$r$  é o esforço cortante em kN/m da laje na direção analisada;

Vale ressaltar, que a geometria das lajes é considerada pelo parâmetro  $\lambda$ , descrito no item 2.4.2. E com a definição dos das vinculações pode-se classificar as lajes em tipos, para posteriormente acompanhar a tabela de Bares para calcular os momentos fletores e os esforços

cortantes. Para cada tipo de vinculação, é definido um caso (Figura 8). Tal fato facilita a identificação dos coeficientes adimensionais para cada laje nas Tabelas de Bares.

Figura 8 – Casos de vinculação de Bares

Caso	Vinculação	Caso	Vinculação	Caso	Vinculação
1		2A		2B	
Quatro bordas simplesmente apoiadas		Uma borda menor engastada		Uma borda maior engastada	
3		4A		4B	
Duas bordas adjacentes engastadas		Duas bordas menores engastadas		Duas bordas maiores engastadas	
5A		5B		6	
Uma borda maior apoiada		Uma borda menor apoiada		Quatro bordas engastadas	

Fonte: Pinheiro (2007).

DAL PRÁ (2012) fez uma análise das condições e resultados que o método de Bares gera, dentre elas é importante focar nos seguintes itens:

- é considerado apenas o deslocamento máximo;
- as placas são retangulares, logo o método não funciona para placas irregulares;
- considera-se que o apoio seja perfeitamente engastado ou rotulado;
- não é fornecido o diagrama exato de momentos fletores negativos, então as armaduras são estendidas até um comprimento preestabelecido, que não representa de fato o comprimento necessário, mas que foi calibrado para considerar a hipótese mais desfavorável das combinações de vínculos;
- não é considerado que a fissuração reduza a rigidez, então subestima-se os deslocamentos;



f) algumas disposições estruturais induzem esforços importantes, que a solução encontrada pelo uso das Tabelas de Bares não identifica, como por exemplo, pilares muito rígidos situado na metade das vigas que servem de apoio para uma laje;

g) a consideração de apoio rígido é uma aproximação da realidade, deste modo pode-se afirmar que as lajes apresentam resultados tão mais próximos das tabelas, quanto mais rígidos são os apoios. Comumente verifica-se que, devido ao fato de haver apoios deslocáveis, os momentos fletores positivos e as flechas tendem a serem maiores que aqueles obtidos pelo uso das Tabelas de Bares e os momentos fletores negativos, a ser menores;

h) considera-se que as placas possuem condição de contorno que não se desloca na vertical.

### **2.8.1 Compatibilização dos Momentos Fletores**

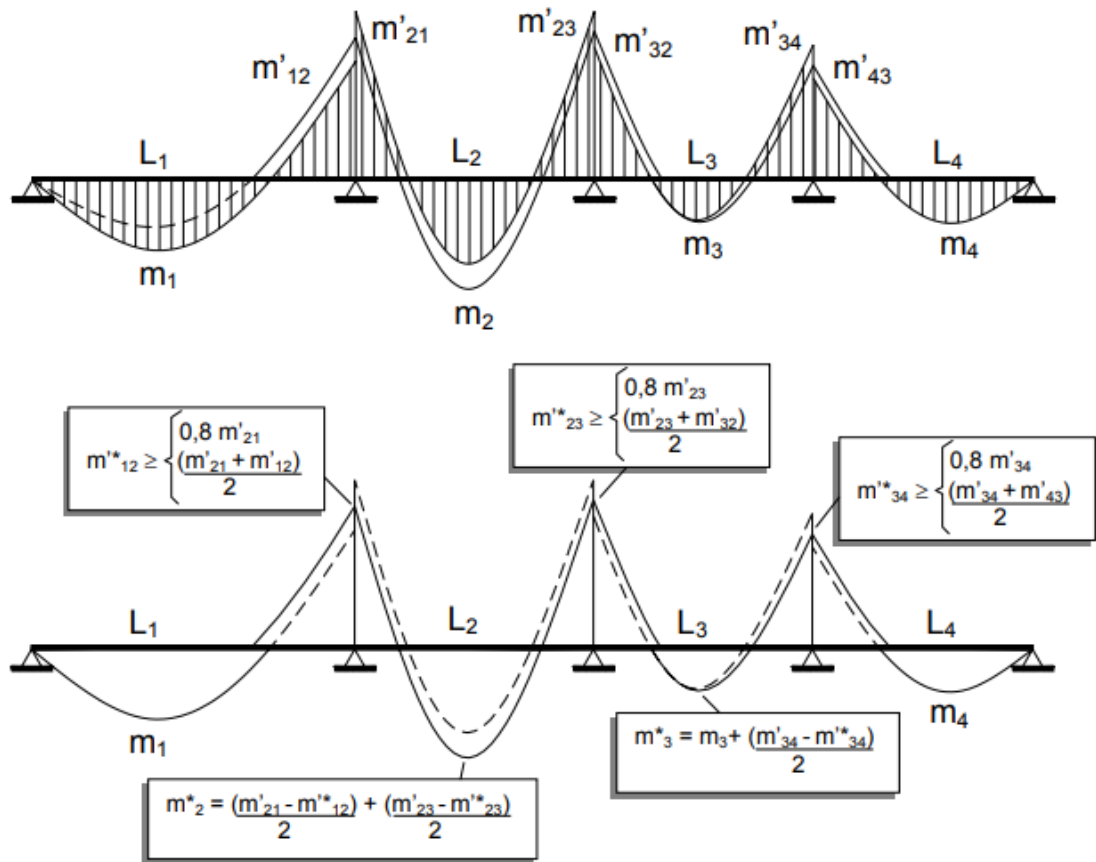
Uma vez que, o método tabelado é limitado a uma laje isolada, em alguns casos haverá dois momentos diferentes incidentes em um bordo, o que não acontece na realidade. A estrutura se comporta monoliticamente, assim deve-se realizar a compatibilização dos momentos fletores para melhor aproximação com a realidade. Dessa forma a ABNT NBR 6118:2014 permite a realização desse procedimento (CLÍMACO, 2016).

Para a compatibilização dos momentos negativos, adota-se o maior valor entre a média dos dois momentos e 80% do maior. Esse critério apresenta razoável aproximação quando os dois momentos são da mesma ordem de grandeza. Em decorrência da compatibilização dos momentos negativos, os momentos positivos na mesma direção devem ser analisados. Se essa correção tende a diminuir o valor do momento positivo ignora-se a redução, pois, assim há uma majoração a favor da segurança.

Caso contrário, se houver acréscimo no valor do momento positivo, a correção deverá ser feita, somando-se ao valor deste momento fletor a média das variações ocorridas nos momentos fletores negativos sobre os respectivos apoios. Pode acontecer da compatibilização acarretar diminuição do momento positivo, de um lado, e acréscimo, do outro. Neste caso, ignora-se a diminuição e considera-se somente o acréscimo (PINHEIRO, 2007).

Estas condições são ilustradas na Figura 9:

Figura 9 – Compatibilização dos Momentos Fletores



Fonte: Pinheiro (2007).

## 2.9 Método de Wood-Armer

Segundo Pereira (2021), o método de Wood-Armer consiste em um ajuste nos momentos \$M\_x\$ (direção \$x\$) e \$M\_y\$ (direção \$y\$), levando em consideração a atuação dos momentos volventes na laje (\$M\_{xy}\$). Com isso, gera-se novos momentos de cálculo (\$M^\*\_{xd}\$ e \$M^\*\_{yd}\$) que serão utilizados para o cálculo da armadura de flexão.

Parsekian (1996) citou as equações que Timoshenko e Krieger (1959) elaboraram para os momentos de cálculo considerando os momentos volventes. Para os momentos positivos nas direções \$x\$ e \$y\$ as equações são, respectivamente:

$$M^*_{xd} = M_x + |M_{xy}| \quad (8)$$

$$M^*_{yd} = M_y + |M_{xy}| \quad (9)$$

Já para os momentos negativos, o sinal operador (+) é substituído por (-), ficando expresso da seguinte forma:

$$M_{xd}^* = M_x - |M_{xy}| \quad (10)$$

$$M_{yd}^* = M_y - |M_{xy}| \quad (11)$$

Porém, no cálculo do momento positivo pode-se obter um momento resultante negativo o que não teria significado físico. Assim, é necessário considerar nulo o momento da direção que apresentou resultado negativo e usar uma equação de correção para a outra direção, como segue:

$$\text{Se } M_x^* < 0 \text{ impõe-se } M_x^* = 0 \text{ sendo } M_y^* = M_y + \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right|; \quad (12)$$

$$\text{Se } M_y^* < 0 \text{ impõe-se } M_y^* = 0 \text{ sendo } M_x^* = M_x + \left| \frac{M_{xy}^2}{M_y} \right|. \quad (13)$$

De forma análoga, o contrário pode ocorrer, ou seja, pode-se obter um momento positivo no cálculo do momento negativo. Assim, utiliza-se do mesmo recurso mostrado nas Equações (12) e (13), porém com a diferença o operador será (-), invés do (+). Portanto, as equações são:

$$\text{Se } M_x^* > 0 \text{ impõe-se } M_x^* = 0 \text{ sendo } M_y^* = M_y - \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right|; \quad (14)$$

$$\text{Se } M_y^* > 0 \text{ impõe-se } M_y^* = 0 \text{ sendo } M_x^* = M_x - \left| \frac{M_{xy}^2}{M_y} \right|. \quad (15)$$

Parsekian (1996) apresentou uma equação para o cálculo do momento volvente ( $M_{xy}$ ) atuante em lajes maciças, que segue apresentada a seguir:

$$M_{xyd} = \sqrt{1 - \frac{Vd}{d \cdot \tau_{wu1}}} \cdot \frac{h^2 \cdot \tau_{wu1}}{3} \quad (16)$$

Onde:

$Vd$  = Força cortante de cálculo

$d$  = Altura útil das armaduras

$\tau_{wu1}$  = Máxima tensão cisalhante resistida pelo concreto, calculada segundo Parsekian (1996) pela expressão  $\tau_{wu1} = (0,06 \cdot C + 0,08) \cdot 1,06 \cdot (1,6 - d) \cdot \sqrt{f_{ck}} \leq 1$ , onde  $C = 1$  para cargas distribuídas.

$h$  = Altura total da laje

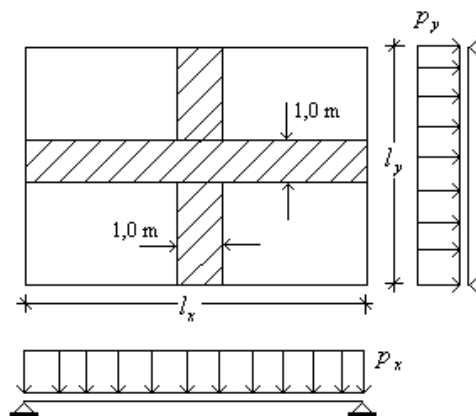
## 2.10 Método de Marcus

O método de Marcus incrementa um coeficiente semiempírico na Analogia da Grelhas para prever o comportamento elásticos das lajes o que apresenta resultados próximos aos reais (ARAÚJO, 2010). Segundo Clímaco (2016) é um dos modelos mistos mais utilizados no Brasil para o cálculo dos momentos em lajes.

### 2.10.1 Processo das Grelhas

A analogia das grelhas é o primeiro modelo de cálculo simplificado utilizado para prever o comportamento elástico das lajes. Esse método consiste em reduzir a placa retangular em duas vigas de largura unitária, uma horizontal e outra vertical, de tal forma que o ponto de flecha máxima seja a interseção entre as vigas, o que também define o carregamento. Vale ressaltar que os apoios dependem das condições de bordo da laje, conforme descrito por Silva (2022) e ilustrado na Figura 10.

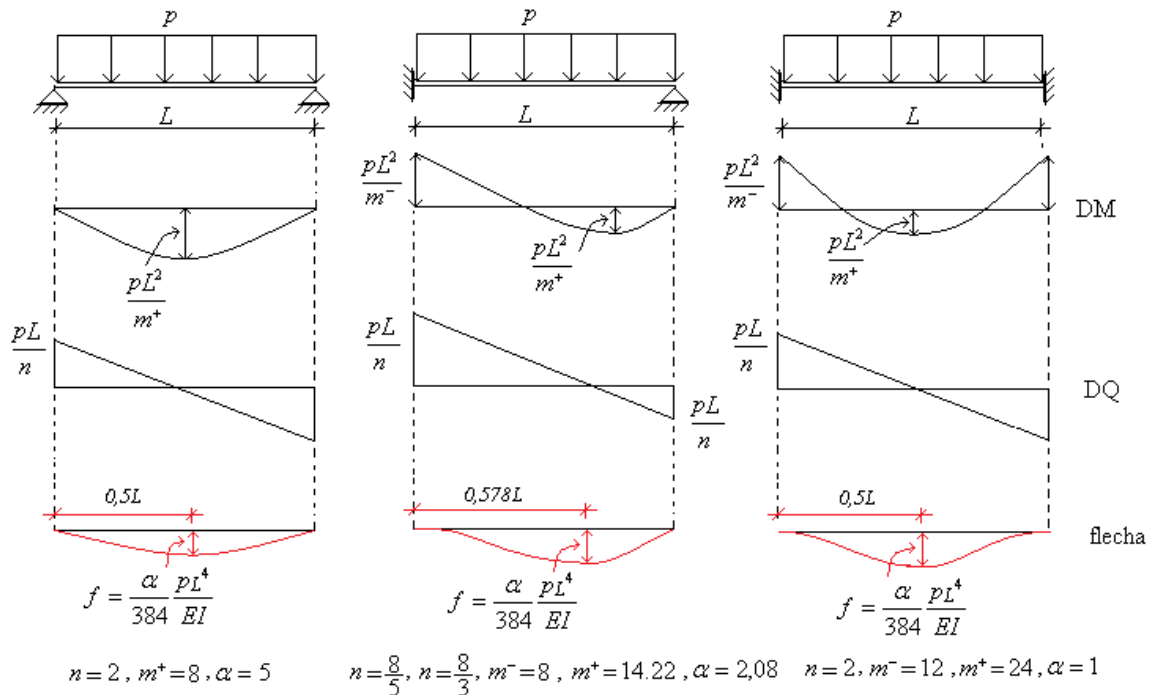
Figura 10 – Analogia das Grelhas em laje



Fonte: Silva (2022).

Assim, ao simular o problema em vigas as flechas máximas em estruturas com diferentes tipos de apoio podem ser obtidas com expressões clássicas da resistência dos materiais e ilustradas na Figura 11.

Figura 11- Flechas de vigas de diferentes apoios



Fonte: Silva (2022)

### 2.10.2 Processo de Marcus

A metodologia aplicada na analogia de grelhas pressupõe que as deformações das vigas de larguras unitárias são simétricas em torno da linha neutra, entretanto, há o efeito de faixas vizinhas que não são consideradas, assim ocorre a atuação de momentos volventes que reduz os momentos máximos positivos. Dessa forma, este método prevê coeficientes redutores para levar em consideração a continuidade da viga, ou seja, o efeito das faixas vizinhas, afim de conseguir obter resultados mais realistas.

Segundo Ribeiro e Souza (2018), o uso do método das grelhas com os coeficientes redutores dos momentos positivos obtidos por Marcus dispensa a verificação dos momentos volventes. Segue as equações 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25 utilizadas no método das grelhas, bem como no processo de Marcus:

Primeiro encontra-se os coeficientes  $k_x$  e  $k_y$  que são utilizados para encontrar o quanto da carga atua em cada direção:

$$\omega = \frac{l_y}{l_x} \quad (17)$$

$$k_x = \frac{a_y \times \omega^4}{\alpha_x + a_y \times \omega^4} \quad (18)$$

$$k_y = 1 - k_x \quad (19)$$

Onde,  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  são parâmetros retirados do estudo das flechas nas vigas no método das grelhas Figura 11;

$k$  em metros;

Dessa forma encontra-se o carregamento em cada viga na direção x ou y:

$$p_x = k_x \times q_d \quad (20)$$

$$p_y = k_y \times q_d \quad (21)$$

Onde,  $q_d$  é a carga de cálculo em kN/m<sup>2</sup>;

E  $p$  em kN/m;

Assim, calcula-se os momentos e as reações de apoio de cada viga, utilizando os parâmetros dispostos na Figura 11.

$$M = \frac{p \cdot l^2}{m} \quad (22)$$

$$V = \frac{p \cdot l}{n} \quad (23)$$

Onde,

$M$  é o momento em kNm/m;

$V$  é a força cortante em kN/m;

$m$  e  $n$  são oriundos da simplificação do cálculo das vigas;

Finalmente, pode-se minorar os momentos positivos com os coeficientes de Marcus que são:

$$v_x = 1 - \frac{20}{3} \cdot \frac{k_y \cdot \omega^2}{m_y^+} \quad (24)$$

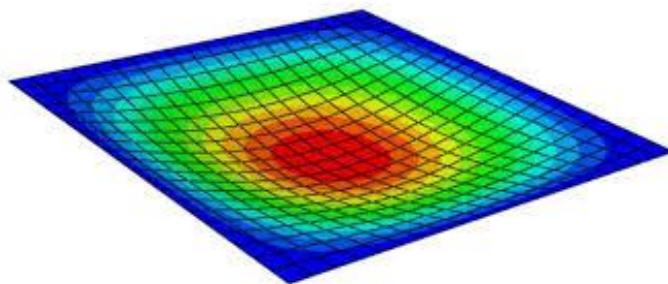
$$v_y = 1 - \frac{20}{3} \cdot \frac{k_x}{m_x^+ \cdot \omega^2} \quad (25)$$

Para lajes com continuidade o modelo de cálculo segue o mesmo princípio, portanto, a viga da analogia utilizada deve ser contínua passando por todas as lajes e está deve ser resolvida e em seguida incrementados os coeficientes de Marcus nos momentos reduzidos.

### 2.11 Método Numérico

O método numérico que será utilizado se baseia na técnica dos elementos finitos, que segundo Carvalho e Figueiredo (2016), subdivide o problema em um conjunto de elementos menores conectados entre si, reduzindo-o em várias regiões finitas. Quanto maior o número de elementos discretizados, maior é a exatidão da solução. Dentro de cada elemento são usadas as mesmas variáveis que também representam todo o sistema e através de formulações polinomiais conhecidas obtém-se funções expressas pelas variáveis nos pontos nodais de cada elemento. Portanto, soma-se todas as equações encontradas para cada elemento, chegando, assim, em um sistema de equações que ao ser solucionado representam a resposta total do problema (GEIRINHAS, 2010). É ilustrado na Figura 12 um resultado de deslocamentos em placa obtido pelo método dos elementos finitos.

Figura 12 – Elementos finitos



Fonte: Ribeiro e Souza, 2018

Nesse presente trabalho foi utilizado um *software* baseado na técnica dos elementos finitos para a análise dos momentos no Estudo de Caso de caso que será abordado mais à frente.

### 2.12 Armadura para Flexão Simples

Outra análise fundamental para o dimensionamento de lajes maciças de concreto é a determinação da área de aço. Nesse contexto, há o auxílio da tabela de  $k_c$  e  $k_s$  que facilita o

dimensionamento das barras de aço na flexão simples. Tais tabelas são determinadas com base nos domínios de deformação na flexão. Os coeficientes  $k_c$  e  $k_s$  são determinados como segue:

$$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \quad (26)$$

$$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \quad (27)$$

É possível notar que com a Equação (27), pode-se determinar a área de aço ( $A_s$ ). Os coeficientes para auxílio no processo de dimensionamento são descritos na Tabela 4.

Tabela 4 – Fragmento da tabela de armadura simples

Tabela 1.1													
FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES													
$\beta_c = \frac{x}{d}$	$k_c = \frac{bd^2}{M_d} \text{ (cm}^2 \text{ / kN)}$									$k_s = \frac{A_s d}{M_d} \text{ (cm}^2 \text{ / kN)}$			D O M Í N I O
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020	
0,06	35,2	23,4	17,6	14,1	11,7	10,1	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021	
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,20	11,2	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,22	10,3	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,24	9,5	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,26	8,8	5,9	4,4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,28	8,3	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,052	0,026	0,022	
0,30	7,8	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	2,0	1,7	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,32	7,4	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,34	7,0	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,36	6,7	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	6,4	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	
0,40	6,1	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023	
0,42	5,9	3,9	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023	

Fonte: Pinheiro (2007).



Para o a utilização das tabelas é necessário que se estipule as bitolas de aço que serão utilizadas, para isso usou-se das notas de aula de Lemes (2022) que aborda a seguintes recomendações para as espessuras de aço de acordo com momento encontrado: Md de 0 à 3,8 kNm/m,  $\varphi=5$  mm; Md de 3,8 à 7,5 kNm/m,  $\varphi =6,3$  mm; Md de 7,5 à 11 kNm/m,  $\varphi =8$  mm; Md a partir de 11 kNm/m,  $\varphi =10$ mm.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Considerações iniciais

Esse capítulo tem como objetivo descrever as ferramentas utilizadas na elaboração da aplicação e como foram realizados os cálculos e as planilhas automatizadas das lajes, bem como as considerações para atingir os melhores resultados.

#### 3.2 Estudo de Caso

Foi escolhido o projeto de uma edificação residencial unifamiliar de dois pavimentos para o estudo das lajes, na qual, a laje do primeiro pavimento foi considerada como maciça. Assim, a planta de forma foi elaborada considerando vigas com espessura de 15 cm e altura de 25 cm. Vale ressaltar que, esta planta já era de conhecimento dos autores em projetos durante a graduação. A planta de forma das lajes do primeiro pavimento está ilustrada no anexo A. De modo a simplificar o processo de cálculo, destaca-se aqui, que a laje LS4 foi considerada contínua no bordo com condição parcial de engastamento.

Assim, pôde-se iniciar o estudo das lajes maciças de concreto armado. Primeiramente retirou-se os parâmetros da laje: vão efetivo,  $\lambda$  e vinculação seguindo o item 2.4. Em seguida, foi feita a distribuição das cargas seguindo o item 2.5, para isso foi considerado a seguinte disposição da laje para o peso próprio:

- Peso específico do concreto armado utilizado (10 cm): 25kN/m<sup>3</sup>;
- Regularização (argamassa de cimento e areia) (h=4cm): 21kN/m<sup>3</sup>;
- Assentamento (argamassa de cimento e areia) (h=2cm): 21kN/m<sup>3</sup>;
- Piso (porcelanato) (h=1cm): 23kN/m<sup>3</sup>;
- Revestimento do teto (argamassa de cal, cimento e areia) (h=1,5cm): 19kN/m<sup>3</sup>.

As cargas permanentes encontradas foram majoradas por 1,4 conforme previsto pela ABNT NBR 6118:2014 para a combinação última normal (item 2.6.1). Na Tabela 5, são ilustrados dados geométricos das lajes, tal como na Tabela 6, as cargas combinadas para o dimensionamento do conjunto de lajes.

Tabela 5 – Parâmetro das lajes

LAJE	DIMENSÕES DA LAJE		
	Lx (m)	Ly (m)	$\lambda$
LS1	1,80	2,15	1,19
LS2	3,30	4,90	1,48
LS3	4,55	4,90	1,08
LS4	3,15	5,85	1,86
LS5	3,65	5,00	1,37
LS6	2,20	2,50	1,14

Fonte: Dos autores, 2022.

Tabela 6 – Distribuição das Cargas

LAJE	PERMANENTE (kN/m <sup>2</sup> )		VARIÁVEL (kN/m <sup>2</sup> )	ELU Qd(kN/m <sup>2</sup> )
	PESO PRÓPRIO	PAREDE	SERVIÇO	
LS1	4,84	0,00	1,50	8,87
LS2	4,84	0,00	1,50	8,87
LS3	4,84	2,66	1,50	12,60
LS4	4,84	0,00	1,50	8,87
LS5	4,84	0,00	1,00	8,17
LS6	4,84	0,00	1,00	8,17

Fonte: Dos autores, 2022.

### 3.3 Tecnologias utilizadas

Para a realização deste trabalho foram usados alguns *softwares* com o intuito de agilizar os cálculos e fazer a comparação com os métodos analíticos citados.

O primeiro deles é o @Excel que é um *software* que permite o usuário colocar dados, salvando-os e manipulando-os de forma rápida e efetiva. Aqui, este programa foi utilizado para a criação de planilhas de cálculo, pois elas permitem a alteração dos dados e equações de forma livre, além de deixar o processo rápido.

O segundo é o @Ftool que é um *software* de cálculo estrutural desenvolvido pelo professor Luiz Fernando Martha, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). É um *software* simples e prático que permite o cálculo de estruturas planas, obtendo principalmente esforços e deslocamentos. A versão utilizada no trabalho foi a Basic que é totalmente gratuita e com foco para o cunho educacional. Este programa foi utilizado no trabalho para encontrar os diagramas de momentos fletores para as vigas no item 2.11.

Foi usado também um software de interface 3D que têm como base o método dos elementos finitos, com o objetivo de modelar, analisar e dimensionar estruturas dos mais variados tipos. Para o presente trabalho foram calculados nesse programa os esforços de momentos fletores para o conjunto de lajes escolhido para fazer a comparação dos mesmos com os outros métodos analíticos feitos.

## 4 ANÁLISE DE RESULTADOS

### 4.1 Considerações iniciais

Neste item serão exemplificadas a aplicação dos métodos e serão apresentadas as comparações entre os quatro métodos utilizados, Bares, Wood-Armer, Marcus e método numérico.

### 4.2 Aplicações dos métodos

Neste item serão exemplificadas a aplicação dos métodos de cálculo descritos no capítulo 2.

#### 4.2.1 Aplicação de Bares

Para a aplicação das tabelas de Bares seguiu-se o item 2.8.

Primeiro foi feita a classificação das lajes em tipos conforme mostrado na Figura 8, em seguida foi calculado lambda, de posse de ambos, foram obtidos os parâmetros m e v. Em seguida foram calculados os momentos fletores e as forças cortantes seguindo as equações 6 e 7. No caso dos momentos fletores foi feita a análise se seria necessário realizar a compatibilização dos momentos fletores, também descrita no item 2.8.1.

Os resultados obtidos são apresentados nas Tabela 7 e Tabela 8.

Tabela 7 – Resultados dos momentos fletores de Bares

LAJE	TIPO	ANÁLISE DE FLEXÃO				MOMENTOS FLETORES (KNM/M)			
		$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_x$	$\mu'_y$	$m_x$	$m_y$	$m'_x$	$m'_y$
LS1	2B	4,342	2,608	9,738	0,000	1,248	0,749	2,798	0,000
LS2	2B	5,192	2,148	11,022	0,000	5,015	2,075	10,645	0,000
LS3	4B	3,298	1,866	7,326	0,000	8,600	4,866	19,103	0,000
LS4	4B	4,152	0,862	8,330	0,000	3,654	0,759	7,331	0,000
LS5	2A	5,580	3,934	0,000	10,728	6,073	4,281	0,000	11,675
LS6	2B	4,150	2,696	9,426	0,000	1,641	1,066	3,727	0,000

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 8 – Resultados dos esforços cortantes de Bares

LAJE	TIPO	ANÁLISE DA CORTANTE				ESFORÇOS CORTANTES (KN/M)			
		vx	vy	v'x	v'y	rx	ry	r'x	r'y
LS1	2B	2,998	1,830	4,392	0,000	4,786	2,921	7,011	0,000
LS2	2B	3,258	1,830	4,770	0,000	9,535	5,356	13,961	0,000
LS3	4B	0,000	1,440	3,666	0,000	0,000	8,252	21,009	0,000
LS4	4B	0,000	1,440	4,224	0,000	0,000	4,023	11,801	0,000
LS5	2A	2,506	2,960	0,000	4,330	7,472	8,826	0,000	12,911
LS6	2B	2,938	1,830	4,302	0,000	5,280	3,289	7,731	0,000

Fonte: Dos autores (2022).

Em seguida, foram obtidas as áreas de aço utilizando a Tabela 4 e foram utilizados o cobrimento de 2 cm e o b de 100cm, vale ressaltar que esses dados foram utilizados para todas os cálculos das áreas de aço que serão apresentados nos itens a seguir. Resultados agora obtidos estão presentes na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados área de aço

Local	$\phi_{adot}$	Aço	d	M	kc	ks	As, calc
	(cm)	CA	(cm)	(kNm/m)	(cm <sup>2</sup> /kN)	(cm <sup>2</sup> /kN)	(cm <sup>2</sup> /m)
LS1 - x	0,500	60	7,75	124,800	48,127	0,019	0,306
LS1 - y	0,500	60	7,25	74,900	70,177	0,019	0,196
LS2 - x	0,630	50	7,69	501,500	11,777	0,024	1,566
LS2 - y	0,500	60	7,12	207,500	24,431	0,020	0,583
LS3 - x	1,000	50	7,50	1242,100	4,529	0,025	4,140
LS3 - y	0,630	50	6,69	486,600	9,184	0,024	1,747
LS4 - x	0,500	60	7,75	365,400	16,437	0,020	0,943
LS4 - y	0,500	60	7,25	75,900	69,252	0,019	0,199
LS5 - x	0,630	50	7,69	607,300	9,725	0,024	1,897
LS5 - y	0,630	50	7,06	536,700	9,274	0,024	1,826
LS6 - x	0,500	60	7,75	164,100	36,601	0,020	0,423
LS6 - y	0,500	60	7,25	106,600	49,308	0,019	0,279
LS1 - x'	0,50	60	7,75	279,800	21,466	0,020	0,722
LS1 - y'	0,50	60	7,75	0,000	0,000	0,000	0,000
LS2 - x'	0,63	50	7,69	1528,200	3,681	0,026	5,298
LS2 - y'	0,50	60	7,75	0,000	0,000	0,000	0,000
LS3 - x'	1,00	50	7,50	1528,200	3,681	0,026	5,298
LS3 - y'	0,63	50	7,69	0,000	0,000	0,000	0,000
LS4 - x'	0,50	60	7,75	950,300	6,078	0,025	3,126
LS4 - y'	0,50	60	7,75	0,000	0,000	0,000	0,000
LS5 - x'	0,63	50	7,69	0,000	0,000	0,000	0,000
LS5 - y'	0,63	50	7,69	950,300	6,078	0,025	3,126
LS6 - x'	0,50	60	7,75	372,700	16,116	0,020	0,962
LS6 - y'	0,50	60	7,75	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Dos autores (2022).

#### 4.2.2 Aplicação de Wood-Armer

Para encontrar os momentos fletores segundo o método de Wood-Armer foram utilizadas as equações presentes no item 2.9.

Foi feito, primeiramente, uma planilha para a obtenção do momento volvente para cada direção de todas as lajes analisada.

O cálculo da altura útil ( $d$ ) e da máxima tensão cisalhante resistida pelo concreto ( $\tau_{wu1}$ ), foram feitos seguindo, respectivamente, os itens 2.4.4 e 2.9. Já a força cortante de cálculo é a mesma encontrada no método de Bares, sendo utilizado o maior valor encontrado no método para cada laje. E, por fim, o cálculo de  $M_{xy}$  foi feito utilizando a Equação 16 presente no item 2.9.

Os resultados encontrados para  $M_{xy}$  estão descritos na Tabela 10.

Tabela 10 - Cálculo do momento volvente  $M_{xy}$

Local	d		$\tau_{wu1}$	$\tau_{wu1}$	Vd	Mxy	Mxy
	(cm)	(m)	(MPa)	(MPa)			
LS1 - x	7,750	0,0775	1,130	1,000	0,00701	0,003320	3,320
LS1 - y	7,250	0,0725	1,133	1,000	0,00701	0,003318	3,318
LS2 - x	7,685	0,0769	1,130	1,000	0,01396	0,003278	3,278
LS2 - y	7,120	0,0712	1,134	1,000	0,01396	0,003269	3,269
LS3 - x	7,500	0,0750	1,132	1,000	0,02101	0,003200	3,200
LS3 - y	6,685	0,0669	1,138	1,000	0,02101	0,003164	3,164
LS4 - x	7,750	0,0775	1,130	1,000	0,01180	0,003294	3,294
LS4 - y	7,250	0,0725	1,133	1,000	0,01180	0,003289	3,289
LS5 - x	7,685	0,0769	1,130	1,000	0,01291	0,003286	3,286
LS5 - y	7,055	0,0706	1,135	1,000	0,01291	0,003277	3,277
LS6 - x	7,750	0,0775	1,130	1,000	0,00773	0,003317	3,317
LS6 - y	7,250	0,0725	1,133	1,000	0,00773	0,003314	3,314

Fonte – Dos autores (2022).

Obtidos os momentos volventes ( $M_{xy}$ ) foi escolhido o maior entre as duas direções para cada laje analisada. Em seguida, usou-se as Equações 8, 9, 10 e 11 para a análise dos momentos positivos e negativos. Lembrando que os momentos  $M_x$  e  $M_y$  utilizados foram os encontrados pelo método de Bares.

Os resultados obtidos estão presentes na Tabela 11.

Tabela 11 - Cálculo dos momentos  $M_{xd}^*$  e  $M_{yd}^*$ 

Lajes	Momentos positivos					Momentos negativos			
	$M_{xy}$ adot (kNm/m)	mx (kNm/m)	my (kNm/m)	mxd* (kNm/m)	myd* (kNm/m)	m'x (kNm/m)	m'y (kNm/m)	mxd* (kNm/m)	myd* (kNm/m)
LS1	3,320	1,248	0,749	4,568	4,069	-2,798	0,000	-6,118	-3,320
LS2	3,278	5,015	2,075	8,293	5,353	-15,282	0,000	-18,560	-3,278
LS3	3,200	12,421	4,866	15,621	8,066	-15,282	0,000	-18,482	-3,200
LS4	3,294	3,654	0,759	6,948	4,053	-15,282	0,000	-18,576	-3,294
LS5	3,286	6,073	5,367	9,359	8,653	-3,727	-9,503	-7,013	-12,789
LS6	3,317	1,641	1,066	4,958	4,383	-3,727	0,000	-7,044	-3,317

Fonte – Dos autores (2022).

E por fim, foram obtidas as áreas de aço através da Tabela 9 para os momentos fletores  $M_{xd}^*$  e  $M_{yd}^*$ , tanto os positivos quanto os negativos.

Tabela 12 – Cálculo das áreas de aço

Local	$\phi$ adot (cm)	Aço CA	d (cm)	M (kNcm/m)	kc (cm <sup>2</sup> /kN)	ks (cm <sup>2</sup> /kN)	As, calc (cm <sup>2</sup> /m)
LS1 - x	0,50	60	7,75	456,766	13,150	0,020	1,179
LS1 - y	0,50	60	7,25	406,866	12,919	0,020	1,122
LS2 - x	0,63	50	7,69	829,287	7,122	0,024	2,590
LS2 - y	0,50	60	7,12	535,287	9,471	0,020	1,504
LS3 - x	1,00	50	7,50	1562,088	3,601	0,026	5,415
LS3 - y	0,63	50	6,69	806,588	5,541	0,024	2,896
LS4 - x	0,50	60	7,75	694,846	8,644	0,020	1,793
LS4 - y	0,50	60	7,25	405,346	12,967	0,020	1,118
LS5 - x	0,63	50	7,69	935,896	6,310	0,024	2,923
LS5 - y	0,63	50	7,06	865,296	5,752	0,024	2,944
LS6 - x	0,50	60	7,75	495,770	12,115	0,020	1,279
LS6 - y	0,50	60	7,25	438,270	11,993	0,020	1,209
LS1 - x'	0,50	60	7,75	611,793	9,817	0,020	1,579
LS1 - y'	0,50	60	7,75	331,966	18,093	0,020	0,857
LS2 - x'	0,63	50	7,69	1855,987	3,182	0,026	6,279
LS2 - y'	0,50	60	7,75	327,787	18,324	0,020	0,846
LS3 - x'	1,00	50	7,50	1848,188	3,044	0,026	6,407
LS3 - y'	0,63	50	7,69	319,988	18,457	0,024	0,999
LS4 - x'	0,50	60	7,75	1857,646	3,233	0,022	5,273
LS4 - y'	0,50	60	7,75	329,446	18,231	0,020	0,850
LS5 - x'	0,63	50	7,69	701,296	8,421	0,024	2,190
LS5 - y'	0,63	50	7,69	1278,896	4,618	0,025	4,160
LS6 - x'	0,50	60	7,75	704,355	8,527	0,020	1,818
LS6 - y'	0,50	60	7,75	331,670	18,109	0,020	0,856

Fonte – Dos autores (2022).



### 4.2.3 Aplicação do Método de Marcus

Para a aplicação do método de Marcus seguiu-se o Item 2.10.

Primeiro o conjunto lajes foi dividido em vigas, vigas contínuas quando essas têm lajes vizinhas. Em seguida, foram extraídos os parâmetros dos cálculos das flechas (Figura 11), para calcular  $k_x$ ,  $k_y$ , os coeficientes redutores e as cargas em x e y das equações 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25. Assim, resolveu-se a viga com o auxílio do software  $\text{Ftool}$  e em seguida os dados encontrados foram multiplicados pelos coeficientes redutores de Marcus. Os resultados encontrados são mostrados na Tabela 13, Tabela 14, Tabela 15 e Tabela 16.

Tabela 13- Parâmetros da flecha das vigas

LAJE	Parâmetros da flecha das vigas					
	x			y		
	$\alpha$	m-	m+	$\alpha$	m-	m+
LS1	2,08	8	14,22	5,00	0,00	8,00
LS2	2,08	8	14,22	5,00	0,00	8,00
LS3	1,00	12	24,00	5,00	0,00	8,00
LS4	1,00	12	24,00	5,00	0,00	8,00
LS5	5,00	0	8,00	2,08	8,00	14,22
LS6	2,08	8	14,22	5,00	0,00	8,00

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 14 – Parâmetros de Marcus

LAJE	$k_x$	$k_y$	$v_x$	$v_y$	$p_x$ (kN/m)	$p_y$ (kN/m)
LS1	0,830	0,170	0,727	0,798	7,364	1,505
LS2	0,921	0,079	0,804	0,855	8,170	0,699
LS3	0,871	0,129	0,791	0,875	10,965	1,630
LS4	0,983	0,017	0,921	0,952	8,722	0,147
LS5	0,594	0,406	0,736	0,643	4,855	3,314
LS6	0,800	0,200	0,709	0,785	6,538	1,631

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 15 -Momentos por Marcus

LAJE	Momentos ftool						Momentos reduzidos					
	x			y			x			y		
	M,esq	M,dir	M,meio	M,esq	M,dir	M,meio	M,esq	M,dir	M,meio	M,esq	M,dir	M,meio
LS1	0,00	3,01	1,67	0,00	0,00	0,87	0,00	2,19	1,21	0,00	0,00	0,69
LS2	3,01	16,19	2,50	0,00	0,00	2,10	2,42	13,02	2,01	0,00	0,00	1,80
LS3	16,19	14,85	12,87	0,00	0,00	4,89	12,81	11,75	10,19	0,00	0,00	4,28
LS4	14,85	7,66	-0,14	0,00	0,00	0,64	13,67	7,05	-0,13	0,00	0,00	0,61
LS5	6,54	0,00	5,15	7,66	0,00	6,87	4,81	0,00	3,79	4,93	0,00	4,42
LS6	0,00	6,54	1,36	0,00	0,00	1,27	0,00	4,64	0,97	0,00	0,00	1,00

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 16- Cortantes por Marcus

LAJE	Esforços Cortantes			
	x		y	
	V,esq	V,dir	V,esq	V,dir
LS1	4,971	8,284	1,620	1,620
LS2	10,110	16,850	1,720	1,720
LS3	24,945	24,945	3,990	3,990
LS4	13,738	13,738	0,440	0,440
LS5	8,860	8,860	10,357	6,214
LS6	5,394	8,990	2,040	2,040

Fonte: Dos autores (2022).

E por fim, foi obtido as áreas de aço através das tabelas de Kc e Ks descritas no item 2.12 e ilustrada na Tabela 17:

Tabela 17 – Resultados de área de aço

Local	$\phi_{adot}$	Aço	d	M	kc	ks	As, calc
	(cm)	CA	(cm)	(kNcm/m)	(cm <sup>2</sup> /kN)	(cm <sup>2</sup> /kN)	(cm <sup>2</sup> /m)
LS1 - x	0,5	60	7,75	121,4350	49,461	0,019	0,298
LS1 - y	0,5	60	7,25	69,4476	75,687	0,019	0,182
LS2 - x	0,63	50	7,685	201,0307	29,378	0,023	0,602
LS2 - y	0,5	60	7,12	179,5837	28,229	0,02	0,504
LS3 - x	1	50	7,5	1018,6494	5,522	0,025	3,395
LS3 - y	0,63	50	6,685	427,8236	10,446	0,024	1,536
LS4 - x	0,5	60	7,75	-12,8911	-465,922	0,02	-0,033
LS4 - y	0,5	60	7,25	60,9584	86,227	0,019	0,160
LS5 - x	0,63	50	7,685	379,0817	15,580	0,024	1,184
LS5 - y	0,63	50	7,055	441,7977	11,266	0,024	1,503
LS6 - x	0,5	60	7,75	96,4828	62,252	0,019	0,237
LS6 - y	0,5	60	7,25	99,7131	52,714	0,019	0,261
LS1 - x'	0,5	60	7,75	218,874	27,442	0,02	0,565
LS1 - y'	0,5	60	7,75	0,000	0,000	0,02	0,000
LS2 - x'	0,63	50	7,685	1301,875	4,536	0,025	4,235
LS2 - y'	0,5	60	7,75	0,000	0,000	0,02	0,000
LS3 - x'	1	50	7,5	1281,425	4,390	0,025	4,271
LS3 - y'	0,63	50	7,685	0,000	0,000	0,024	0,000
LS4 - x'	0,5	60	7,75	1367,377	4,393	0,021	3,705
LS4 - y'	0,5	60	7,75	0,000	0,000	0,02	0,000
LS5 - x'	0,63	50	7,685	481,397	12,268	0,024	1,503
LS5 - y'	0,63	50	7,685	492,601	11,989	0,024	1,538
LS6 - x'	0,5	60	7,75	463,969	12,945	0,02	1,197
LS6 - y'	0,5	60	7,75	0,000	0,000	0,02	0,000

Fonte: Dos Autores (2022).

### 4.3 Aplicação do método numérico

Como foi dito no item 2.11, foi usado um *software* de análise estrutural baseado no método dos elementos finitos para calcular os esforços nas lajes do estudo de caso.

Basicamente, o processo de cálculo do *software* consiste, primeiramente, na inclusão da estrutura a ser analisada de acordo com uma malha feita com a geometria da laje a ser analisada, fazendo um ajuste das coordenadas do programa com as medidas reais da laje estudada. Em seguida, discretiza-se a estrutura de acordo com o número de elementos escolhidos pelo usuário, fazendo que cada elemento fique interligado entre si através dos pontos nodais. O próximo passo consiste em fornecer apoios para cada um dos elementos, seguindo a posição das vigas presentes no modelo do estudo de caso. E, por fim, é feita a atribuição das cargas de cálculo que serão utilizadas em cada elemento, de acordo com a direção (x,y,z) de cada uma delas. Feito isso, executa-se o *software* para que ocorra o processo de operações e, assim, ele possa exibir os resultados desejados.

Na Tabela 18 estão apresentados os momentos fletores e as áreas de aço encontrada no método.

Tabela 18 – Momentos fletores e áreas de aço do método numérico

Local	Momentos	As
	kNcm/m	cm <sup>2</sup> /m
LS1 - x	123,46	0,39
LS1 - y	66,94	0,21
LS2 - x	401,27	1,41
LS2 - y	137,32	0,45
LS3 - x	973,46	3,27
LS3 - y	673,10	2,27
LS4 - x	288,14	0,92
LS4 - y	27,30	0,11
LS5 - x	589,34	1,97
LS5 - y	361,89	1,28
LS6 - x	88,57	0,25
LS6 - y	52,83	0,12
LS1 - x'	424,41	1,40
LS1 - y'	0,30	0,10
LS2 - x'	1509,65	4,77
LS2 - y'	0,17	0,10
LS3 - x'	1411,90	4,88
LS3 - y'	0,25	0,10
LS4 - x'	755,73	4,88
LS4 - y'	0,17	0,07
LS5 - x'	406,37	1,33
LS5 - y'	755,73	2,51
LS6 - x'	406,37	1,17
LS6 - y'	1,92	0,10

Fonte: Dos autores (2022).

#### 4.4 Análise Comparativa

Uma vez que o método numérico apresenta os resultados mais próximo dos reais, ele foi utilizado como o parâmetro da comparativa, dessa forma pode-se analisar quanto os outros métodos se desviam do comportamento real das lajes. Para comparação foram calculados o desvio e o erro percentual dos métodos, utilizando as seguintes equações:

$$\text{Desvio} = |\text{ResultadoM.numérico} - \text{ResultadoM.simplificado}| \quad (28)$$

$$\text{Erro Perc.} = \frac{|\text{ResultadoM.numérico} - \text{ResultadoM.simplicado}|}{\text{ResultadoM.numérico}} * 100 \quad (29)$$

A Tabela 19 indica os momentos fletores e áreas de aço calculados nos itens anteriores. Os resultados da comparação obtidos são apresentados nas Tabela 20, Tabela 21, Tabela 22 e Tabela 23:

Tabela 19- Resumo dos resultados

Local	Bares		Marcus		Wood-Armer		Numérico	
	Momentos	As	Momentos	As	Momentos	As	Momentos	As
	kNcm/m	cm <sup>2</sup> /m	kNcm/m	cm <sup>2</sup> /m	kNcm/m	cm <sup>2</sup> /m	kNcm/m	cm <sup>2</sup> /m
LS1 - x	124,80	0,306	121,43	0,298	456,77	1,179	123,46	0,39
LS1 - y	74,90	0,196	69,45	0,182	406,87	1,122	66,94	0,21
LS2 - x	501,50	1,566	201,03	0,602	829,29	2,590	401,27	1,41
LS2 - y	207,50	0,583	179,58	0,504	535,29	1,504	137,32	0,45
LS3 - x	1242,10	4,140	1018,65	3,395	1562,09	5,415	973,46	3,27
LS3 - y	486,60	1,747	427,82	1,536	806,59	2,896	673,1	2,27
LS4 - x	365,40	0,943	-12,89	-0,033	694,85	1,793	288,14	0,92
LS4 - y	75,90	0,199	60,96	0,160	405,35	1,118	27,3	0,11
LS5 - x	607,30	1,897	379,08	1,184	935,90	2,923	589,34	1,97
LS5 - y	536,70	1,826	441,80	1,503	865,30	2,944	361,89	1,28
LS6 - x	164,10	0,423	96,48	0,237	495,77	1,279	88,57	0,25
LS6 - y	106,60	0,279	99,71	0,261	438,27	1,209	52,83	0,12
LS1 - x'	279,8	0,722	218,87	0,565	611,79	1,579	424,41	1,4
LS1 - y'	0,00	0,000	0,00	0,000	331,97	0,857	0,3	0,1
LS2 - x'	1528,2	5,298	1301,88	4,235	1855,99	6,279	1509,65	4,77
LS2 - y'	0,00	0,000	0,00	0,000	327,79	0,846	0,17	0,1
LS3 - x'	1528,2	5,298	1281,42	4,271	1848,19	6,407	1411,9	4,88
LS3 - y'	0,00	0,000	0,00	0,000	319,99	0,999	0,25	0,1
LS4 - x'	1528,2	5,298	1367,38	3,705	1857,65	5,273	755,73	4,88
LS4 - y'	0,00	0,000	0,00	0,000	329,45	0,850	0,17	0,07
LS5 - x'	950,3	3,126	481,40	1,503	701,30	2,190	406,37	1,33
LS5 - y'	372,70	0,962	492,60	1,538	1278,90	4,160	755,73	2,51
LS6 - x'	372,70	0,962	463,97	1,197	704,36	1,818	406,37	1,17
LS6 - y'	0,00	0,000	0,00	0,000	331,67	0,856	1,92	0,1

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 20 - Desvio e Erros Percentuais dos momentos fletores

Local	Bares		Marcus		Wood-Armer	
	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.
	kNcm/m	%	kNcm/m	%	kNcm/m	%
LS1 - x	1,34	1,085	2,03	1,640	333,31	269,971
LS1 - y	7,96	11,891	2,51	3,746	339,93	507,808
LS2 - x	100,23	24,978	200,24	49,901	428,02	106,666
LS2 - y	70,18	51,107	42,26	30,778	397,97	289,810
LS3 - x	268,64	27,596	45,19	4,642	588,63	60,468
LS3 - y	186,50	27,708	245,28	36,440	133,49	19,832
LS4 - x	77,26	26,813	301,03	104,474	406,71	141,149
LS4 - y	48,60	178,022	33,66	123,291	378,05	1384,785
LS5 - x	17,96	3,047	210,26	35,677	346,56	58,804
LS5 - y	174,81	48,305	79,91	22,081	503,41	139,105
LS6 - x	75,53	85,277	7,91	-8,934	407,20	459,750
LS6 - y	53,77	101,779	46,88	88,743	385,44	729,586
LS1 - x'	144,61	34,073	205,54	48,429	187,38	44,151
LS1 - y'	0,30	0,000	0,30	0,000	331,67	110555,458
LS2 - x'	18,55	1,229	207,77	13,763	346,34	22,942
LS2 - y'	0,17	0,000	0,17	0,000	327,62	192715,903
LS3 - x'	116,30	8,237	130,48	9,241	436,29	30,901
LS3 - y'	0,25	0,000	0,25	0,000	319,74	127895,286
LS4 - x'	772,47	102,215	611,65	80,935	1101,92	145,808
LS4 - y'	0,17	0,000	0,17	0,000	329,28	193692,021
LS5 - x'	543,93	133,851	75,03	18,463	294,93	72,576
LS5 - y'	383,03	50,683	263,13	34,818	523,17	69,227
LS6 - x'	33,67	8,286	57,60	14,174	297,99	73,329
LS6 - y'	1,92	0,000	1,92	0,000	329,75	17174,504

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 21 - Média dos desvios e erros percentuais dos momentos fletores

Média	Bares		Marcus		Wood-Armer	
	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.
	kNcm/m	%	kNcm/m	%	kNcm/m	%
	66,54	36,036	31,92	3,232	394,78	26944,160

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 22 - Desvio e Erros percentuais das áreas de aço

Local	Bares		Marcus		Wood-Armer	
	Desvio cm <sup>2</sup> /m	Erro Perc. %	Desvio cm <sup>2</sup> /m	Erro Perc. %	Desvio cm <sup>2</sup> /m	Erro Perc. %
LS1 - x	0,08	21,548	0,09	23,664	0,79	202,244
LS1 - y	0,01	6,529	0,03	13,333	0,91	434,471
LS2 - x	0,16	11,076	0,81	57,330	1,18	83,676
LS2 - y	0,13	29,526	0,05	12,100	1,05	234,137
LS3 - x	0,87	26,616	0,13	3,838	2,15	65,604
LS3 - y	0,52	23,042	0,73	32,337	0,63	27,566
LS4 - x	0,02	2,496	0,95	103,616	0,87	94,908
LS4 - y	0,09	80,828	0,05	45,230	1,01	916,543
LS5 - x	0,07	3,727	0,79	39,906	0,95	48,364
LS5 - y	0,55	42,638	0,22	17,416	1,66	129,969
LS6 - x	0,17	69,394	0,01	5,385	1,03	411,763
LS6 - y	0,16	132,805	0,14	117,764	1,09	907,518
LS1 - x'	0,68	48,424	0,84	59,655	0,18	12,773
LS1 - y'	0,10	100,000	0,10	100,000	0,76	756,687
LS2 - x'	0,53	11,064	0,53	11,213	1,51	31,639
LS2 - y'	0,10	100,000	0,10	100,000	0,75	745,902
LS3 - x'	0,42	8,561	0,61	12,471	1,53	31,292
LS3 - y'	0,10	100,000	0,10	100,000	0,90	899,313
LS4 - x'	0,42	8,561	1,17	24,075	0,39	8,060
LS4 - y'	0,07	100,000	0,07	100,000	0,78	1114,549
LS5 - x'	1,80	135,037	0,17	13,037	0,86	64,671
LS5 - y'	1,55	61,681	0,97	38,710	1,65	65,752
LS6 - x'	0,21	17,794	0,03	2,337	0,65	55,358
LS6 - y'	0,10	100,000	0,10	100,000	0,76	755,924

Fonte: Dos autores (2022).

Tabela 23 - Média dos desvios e erros percentuais das áreas de aço

	Bares		Marcus		Wood-Armer	
	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.	Desvio	Erro Perc.
	cm <sup>2</sup> /m	%	cm <sup>2</sup> /m	%	cm <sup>2</sup> /m	%
<b>Média</b>	0,07	5,173	0,30	29,582	1,00	337,445

Fonte: Dos autores (2022).

Ao analisar os resultados tem-se que os desvios dos métodos de Bares e Marcus apresentam valores na ordem das dezenas e possuem poucos locais da laje onde o erro percentual é maior que 100%. Dentre os dois no método Marcus apresenta erros menores nos momentos fletores, possuindo a menor média entre os métodos, já o método de Bares apresenta média menores quando analisado as áreas de aço. Método de Wood-Armer apresenta desvio e erros percentuais altos.

## 5 CONCLUSÃO

Depois de executado o método de Bares, método de Marcus, método de Wood-Armer e o método Numérico para o conjunto de lajes mostrado e obtidos os resultados de momentos fletores e área de aço necessária é interessante a discussão dos valores encontrados, apontado as semelhanças e diferenças entre os métodos.

Observando os resultados percebe-se de imediato que houve uma diferença considerável dos métodos de Bares, Marcus e o Numérico para o método de Wood-Armer, tendo este apresentado maiores valores de momento fletores em todas as lajes. Essa diferença pode ser explicada, uma vez que, o método considera o momento volvente atuante nas duas direções, o que faz com que ocorra uma majoração nos resultados, o que por sua vez exige uma quantidade de armadura maior.

Os métodos de Bares e Marcus apresentaram resultados mais próximos de forma geral, sendo esses os mais recomendáveis para elaborar a armação das lajes. Entretanto, ainda existem alguns pontos a se considerar. Vale ressaltar que no método de Bares as lajes são consideradas separadamente o que pode explicar algumas divergências nos valores, além do fato da compatibilização realizada incidir uma majoração nos momentos positivos. Já no processo de Marcus considerou-se as atuações das lajes vizinhas através das vigas contínuas, entretanto, o método peca em não considerar a própria continuidade da laje, uma vez que, reduz o problema em uma linha (viga).

Outra questão a se analisar é que os métodos simplificados consideram apenas o momento fletor máximo, o que limita a interpretação da estrutura como um todo. Como por exemplo, no software utilizado (método dos elementos finitos) pode-se perceber tanto momentos negativos quanto positivos no interior das Lajes 1, 4 e 6. Esse fenômeno ocorre pela influência das lajes vizinhas e pela concentração de tensões que os cantos presentes no modelo da estrutura podem gerar, uma vez que, nem todas as lajes do estudo de caso tem suas bordas ligadas ao longo do seu comprimento total com a laje adjacente (formação de “dentes”).

Essa influência das lajes vizinhas pode ser melhor discutida, ao analisar-se os momentos do centro do vão da Laje 4, por exemplo, é apresentando como um momento positivo no método de Bares, porém no método de Marcus tem se um momento negativo. No método numérico percebe-se que há tanto momento negativo como momento positivo, o que ocorre pelo efeito de vizinhança das lajes. Nota-se que o método de Marcus considera uma viga unitária que passa através de várias lajes (LS1, LS2, LS3, LS4 e LS5), o que explica o fato de a tração ser encontrada na face superior da laje nesse caso.



As áreas de aço acompanham os resultados dos momentos fletores, mostrando diferenças maiores quando comparados o método numérico com o método de Wood-Armer e maiores proximidades entre o método numérico com os métodos de Bares e Marcus. Isso mostra que o método de cálculo de área de aço utilizado pelo programa no método numérico apresenta resultados próximos as tabelas de  $K_c$  e  $K_s$ , comprovando a eficácia das mesmas.

Portanto, nota-se que os métodos analíticos mostrados ainda são úteis e bem próximos dos valores do software, principalmente, os métodos de Bares e de Marcus. Entretanto, a análise feita no presente trabalho foi considerando apoios rígidos e não apoios flexíveis, o qual retrataria melhor a realidade, pois consideram as deformações nas vigas que apoiam a laje. Além disso, nenhum método analítico considera a influência dos cantos das lajes, prejudicando a análise dos resultados.

Assim, para trabalhos futuros sugere-se uma análise com métodos considerando lajes com apoios flexíveis e também, levando em conta a influência dos cantos em lajes parcialmente contínuas. Além da comparação de outros parâmetros das lajes e tipos de lajes diferentes, como por exemplo esforços cortantes e lajes nervuradas.

## 6 REFERÊNCIAS

ADÃO, HERMELY, **Concreto Armado, Novo Milênio Cálculo Prático e Econômico**, 2ªed, Editora Interciência Ltda. Rio de Janeiro, 2010.

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 2. Ed. Rio Grande: Dunas, 2010. 100 p. v. 2

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120** - Ações para o cálculo de estruturas de edificações. ABNT. Rio de Janeiro. 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

BARES, R. **Tablas para El cálculo de placas y vigas parede**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1972.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Estruturas em Concreto I: Lajes de concreto armado**. Apostila de disciplina. Universidade Estadual Paulista. Bauru/SP, 2021.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas usuais de Concreto Armado**, segundo a NBR:6118/2014, 4ª.ed. Editora da Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, 2016.

CLÍMACO, João Carlos Teatini de Souza. **Estruturas de concreto armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier; Brasília: Ed. UnB, 2016.

DAL PRÁ, Arthur Antônio **Análise de alternativas de projeto para pavimentos em vigas em concreto armado**. Tese (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil. 2012.

LEMES, Igor. **Notas de Aula da disciplina de Estruturas de Concreto I – Lajes de Concreto**. Curso de graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Lavras. Lavras, não publicado, 2022.

GEIRINHAS, Nuno Alexandre Riscado Valente; **Cálculo automático de estruturas: análise estrutural de lajes através do método dos elementos finitos**. 2010. Dissertação de Mestrado, ISEL – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, Portugal. 2010.

SILVA, Hamilton Rodrigues da. **Notas de Aula da disciplina de Estruturas de Concreto I – Lajes de Concreto**. Curso de graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Lavras. Lavras, não publicado, 2022.

MARTINS, Northon Bernades; RODRIGUES, Romário Soares Pinheiro; **Análise quantitativa no cálculo de momentos fletores e armadura em lajes maciças de concreto armado utilizando diferentes métodos de dimensionamento**. 2017. TCC – Curso de Graduação em Engenharia Civil, Faculdades Integradas de Caratinga, Caratinga, MG, Brasil. 2017.

PARSEKIAN, G. A. **Cálculo de armação de lajes de concreto armado com a consideração de momentos volventes**. Universidade de São Paulo. São Carlos. 1996.

PAULA, Wanderson Pascolato; **Estudo comparativo de métodos de cálculos de lajes**. 2016. TCC – Curso de Graduação em Engenharia Civil, Instituto Tecnológico de Caratinga, Caratinga, MG, Brasil. 2016.

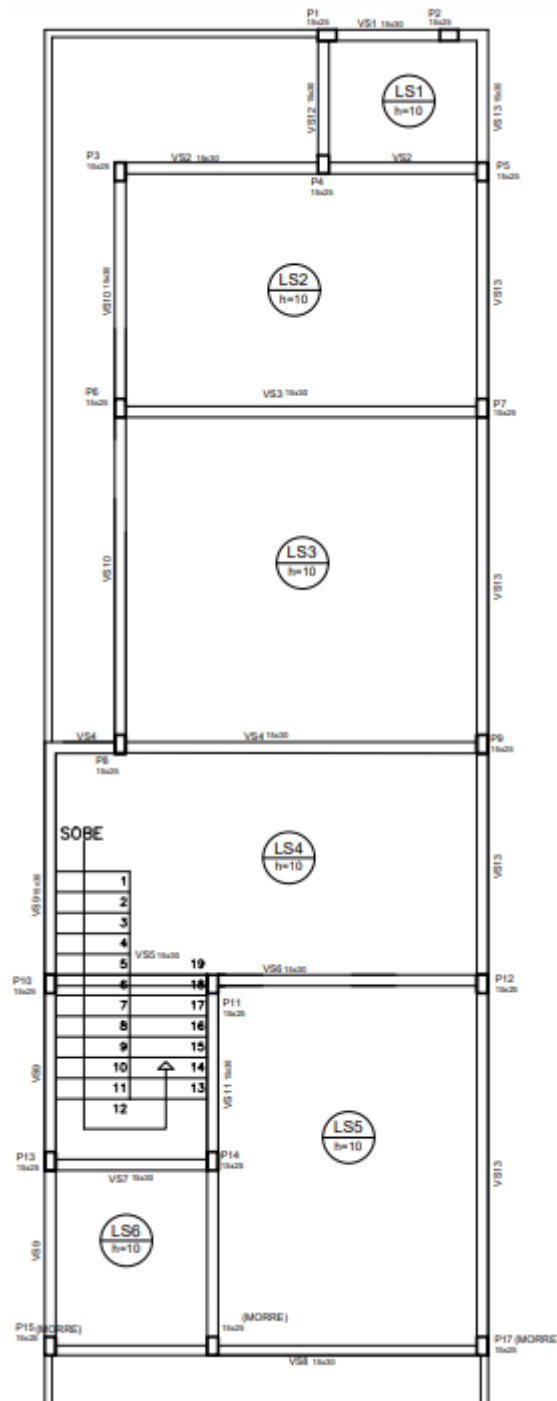
PEREIRA, Rubens de Souza; **Comparativo de métodos de cálculo estrutural para lajes de concreto: elementos finitos x método simplificado**. 2021. TCC – Curso de Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal Lavras, Lavras, MG, Brasil. 2021.

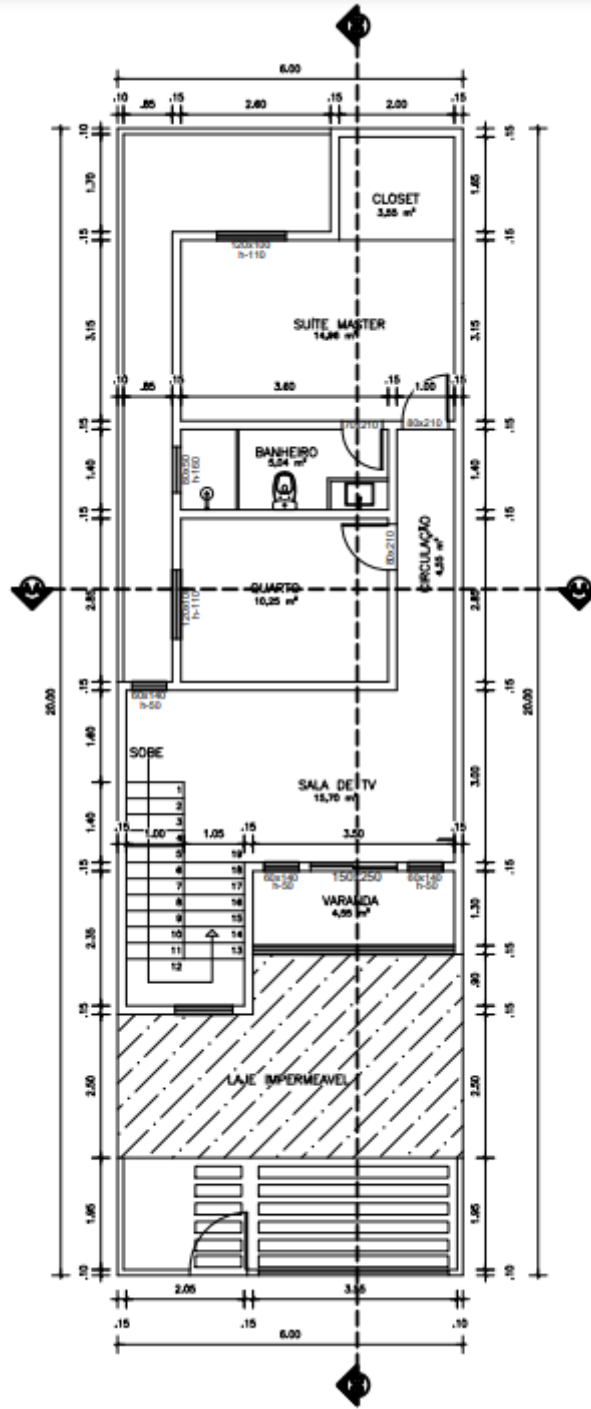
PINHEIRO, L. M. **Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios**. Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Paulo, 2007.

RIBEIRO, Paula de Oliveira; SOUZA, Lucas Teotônio; **Comparação de flechas em lajes de concreto armado obtidas por meio de cálculos manuais (séries de bares), método das diferenças finitas e métodos dos elementos finitos**. 2018. Simpósio de Mecânica Computacional – Universidade Federal do Espírito Santo, Campus Goiabeiras, Vitória, ES, Brasil. 2018.

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials**. 1a. ed. Stanford: McGraw-Hill Book Company, Inc., v. I, 1953.

APÊNDICE A – Planta de forma e Planta Baixa do Estudo de Caso





Fonte: Dos autores (2022).