



KEROLAINE MARTINS DE BEM

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESCADAS
AUTOPORTANTES DE CONCRETO ARMADO**

**LAVRAS-MG
2022**

KEROLAINE MARTINS DE BEM

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESCADAS AUTOPORTANTES DE
CONCRETO ARMADO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Ígor José Mendes Lemes

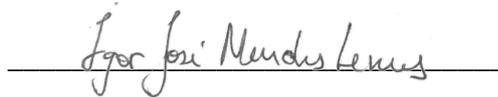
**LAVRAS-MG
2022**

KEROLAINE MARTINS DE BEM

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESCADAS AUTOPORTANTES DE
CONCRETO ARMADO
ANALYSIS AND DESIGN OF SELF-SUPPORTING REINFORCED CONCRETE
STAIRS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADA em 13 de setembro de 2022.
Dr. Ígor José Mendes Lemes, UFLA
M. Sc. Luís Eduardo Silveira Dias, UNILAVRAS
B. Sc. Pedro Henrique Andrade Lima, UFOP

A handwritten signature in black ink, reading "Igor José Mendes Lemes", is written over a horizontal line.

Dr. Ígor José Mendes Lemes

**LAVRAS-MG
2022**

Dedico este trabalho à minha mãe, Fátima, ao meu pai, Waldecir, e à minha irmã, Mikaela, por sempre acreditar em mim!

O amor e a confiança que vocês têm em mim são o que me estimulam a lutar e vencer todos os dias!

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da graduação.

Aos meus pais, Fátima e Waldecir, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência. Sem o apoio de vocês eu não teria conseguido completar essa jornada!

A minha irmã, Mikaela, por estar ao meu lado e por me fazer ter confiança nas minhas decisões. Você foi minha inspiração ao longo do caminho!

À Universidade Federal de Lavras pela qualidade do ensino oferecido.

A todos os professores pela paciência, pela partilha de conhecimento e pelos ensinamentos para a vida.

Ao professor Ígor José Mendes Lemes pelo aceite em ser meu orientador, pela ajuda, incentivo e paciência com a qual guiou o meu aprendizado. Seus conhecimentos foram cruciais neste trabalho!

Ao Lorrán pelo apoio e companheirismo durante a elaboração deste trabalho. Você me deu forças para vencer essa etapa!

A todos meus amigos e amigas que me acompanharam nessa trajetória. Vocês foram minha família quando aquela saudade de casa apertava!

A todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste sonho.

MUITO OBRIGADA!

RESUMO

Neste trabalho foi aplicado os métodos analíticos e numéricos para análise e dimensionamento de escadas autoportantes confeccionadas em concreto armado. Como elementos principais, foram estudados os esforços solicitantes atuantes na estrutura. Escolheu-se um padrão de escada com dois lances, sendo cada lance constituído de dez degraus, engastados nos apoios ao nível dos pisos da edificação, e um patamar intermediário livre. O método analítico adotado foi o proposto por Brazão Farinha (1995), na qual apresenta um grau de hiperestaticidade 2 e, por meio da determinação desses hiperestáticos, foi possível calcular os momentos fletores e a torção existentes na estrutura. Adicionalmente, métodos numéricos baseados no método dos elementos finitos foram utilizados para a obtenção dos resultados mais próximos aos da realidade. Foram encontrados resultados muito próximos entre os métodos analítico e numérico, validando assim o procedimento analítico utilizado no presente trabalho. Além disso, os momentos fletores na direção do comprimento do lance (direção x) apresentaram maiores valores, para ambos os métodos, apresentam-se na interação lance-patamar, o que já era esperado, visto que nesta região há a mudança de direção da laje, gerando concentração de esforços.

Palavras-chave: Escadas. Escada autoportante. Concreto armado. Métodos analíticos. Métodos numéricos. Análise estrutural.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Justificativa	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo Geral	2
1.2.2. Objetivo Específico	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1. Escadas.....	3
2.1.1. Elementos constituintes de uma escada.....	4
2.1.2. Carregamentos e ações atuantes	5
2.1.3. Tipos de escadas em concreto armado	6
2.2. Escada autoportante	7
2.2.1. Modelo estrutural.....	7
2.2.2. Método analítico	8
2.2.3. Métodos dos Elementos Finitos (MEF).....	14
2.2.4. Estudos realizados	14
3. MATERIAIS E MÉTODOS	16
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	18
4.1. Obtenção de esforços de flexão pelo método de Farinha (1995).....	18
4.1.1. Características geométricas	18
4.1.2. Ações atuantes no lance.....	19
4.1.3. Ações atuantes no patamar	20
4.1.4. Valores de X_1 e X_2	20
4.1.5. Momento fletor na direção $x - M_x$	23
4.1.6. Momentos fletores na direção $y - M_y$	25
4.1.7. Momentos de torção	26
4.2. Análise comparativa entre o método analítico de Farinha (1995) e modelo numérico com elementos de casca engastado pelo <i>software</i> SAP2000®	27
5. CONCLUSÃO	30
5.1. Sugestões para Futuros Estudos.....	30
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	31
ANEXO A –Método Brazão Farinha: Coeficiente k_i	32

1. INTRODUÇÃO

A escada é um dos elementos fundamentais da Arquitetura, além de servir à importante função de conectar de maneira confortável e segura, por meio de degraus sucessivos, os pavimentos de uma edificação, em alguns projetos se torna a grande protagonista.

Nos primórdios, as escadas eram construídas a fim de solucionar problemas relacionados a locomoção em diferentes níveis. Portanto, eram projetadas de acordo com os conhecimentos do senso comum e confeccionadas com os materiais existentes no ambiente em que estavam incluídas.

Nos dias atuais é possível encontrar na literatura referências acerca da definição, dimensionamento, análises e tipos de escadas existentes. Existem muitos tipos de escadas e materiais que podem ser utilizados. Entretanto, existem algumas formas de escada que devido à sua complexidade necessitam de um tratamento mais detalhado. Estas são denominadas escadas especiais.

As escadas especiais têm formas não convencionais e surpreendem pela sua estrutura diferenciada. Dentre as escadas que fazem parte desse grupo podemos destacar a escada autoportante, que apresenta uma estética surpreendente por se apoiar apenas nas vigas dos níveis superior e inferior, e possui, geralmente, um patamar intermediário em balanço. O dimensionamento desta tipologia de escada requer maior conhecimento por parte do projetista. O valor estético do projeto é destacado pela aparência leve obtida quando dispensa estruturas auxiliares.

Contudo, devido a sua complexidade, o calculista necessita ter um conhecimento aprofundado para a análise dos esforços internos gerados e o dimensionamento, a fim de garantir a segurança e a economia desses elementos estruturais. Portanto, esta pesquisa propôs-se a realizar a análise dos momentos fletores e torcionais de escadas autoportantes, obtidos a partir do modelo analítico formulado por Brazão Farinha (1995) e numérico, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando para o *software* de análise estrutural o SAP2000®.

1.1. Justificativa

Quando o assunto é escada autoportante, poucas são as referências e pesquisas acerca da análise estrutural. Ao se analisar este tipo de escada são verificados os surgimentos de

esforços normais, tangenciais e torcionais, que não são obtidos pelos modelos analíticos tradicionais de cálculo, utilizados em escadas convencionais. Como resultado dessa deficiência de fontes bibliográficas, engenheiros e arquitetos, optam por executar projetos com excesso de armadura afim de compensar a negligência desses esforços.

Portanto, o intuito deste trabalho foi contribuir não só com a literatura sobre o assunto, mas também com a prática de trabalho do profissional de Engenharia Civil e Arquitetura. O estudo dos esforços atuantes em escadas autoportantes de concreto armado é de extrema importância para o dimensionamento seguro e econômico.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Geral

Visou-se neste trabalho aplicar métodos analíticos e numéricos para análise de escadas autoportantes confeccionadas em concreto armado. Como elementos principais foram estudados os esforços solicitantes atuantes na estrutura. Para isso, métodos numéricos baseados no método dos elementos finitos foram utilizados para a obtenção dos resultados mais próximos aos da realidade.

1.2.2. Objetivo Específico

Como objetivos específicos destacam-se:

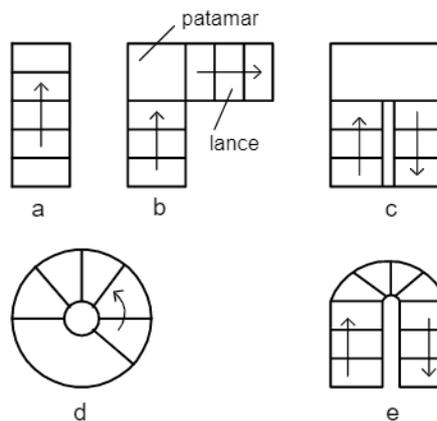
- Buscar na literatura autores que estudaram a respeito do tema;
- Detalhar o processo de cálculo de uma escada autoportante interna de uma edificação;
- Comparar métodos analíticos e números de cálculo de escadas autoportantes.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Escadas

Escadas são elementos estruturais que possibilitam a ligação e circulação entre diferentes níveis (pavimentos) de uma edificação. São projetadas nas mais diversas formas (Figura 2.1) e dimensões, dependendo do espaço disponível, tráfego de pessoas e aspectos arquitetônicos (ARAÚJO, 2010).

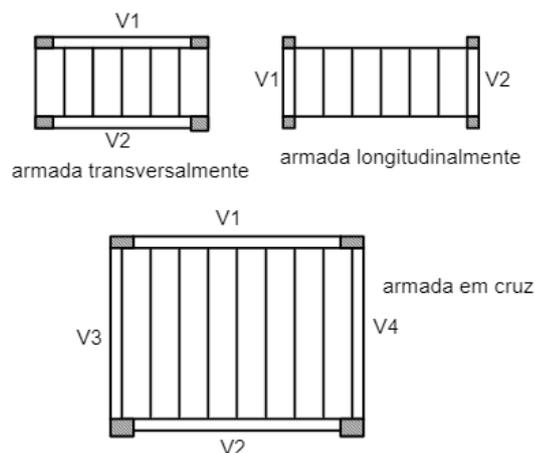
Figura 2.1 – Formas usuais das escadas dos edifícios: a) escada reta, b) escada em “L”, c) escada em “U”, d) escada espiral, e, e) escada com trecho curvo.



Fonte: ARAÚJO, 2010.

Além das diversas formas, as escadas recebem classificações dependendo da localização dos apoios, podendo ser classificadas como escadas armadas transversalmente, armadas longitudinalmente ou em cruz (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Classificação quanto à direção das armaduras principais.



Fonte: ARAÚJO, 2010.

Para Farinha (1995) as escadas, sejam interiores ou exteriores às edificações, devem oferecer ao usuário segurança, comodidade e ter uma estética agradável. Além disso, ao se escolher um meio de ligação entre diferentes pavimentos deve-se atentar ao tipo de acesso: normal ou de emergência, qual a frequência a ser utilizada, o número de usuários e a qualidade exigida para o projeto.

A ligação e circulação entre diferentes pavimentos é possibilitada através de degraus sucessivos, os quais formam lances inclinados, e de planos horizontais, chamados de patamares. Esses surgiram a fim de evitar que as subidas fiquem fatigante ao usuário devido ao número excessivo de degraus (FARINHA, 1995).

2.1.1. Elementos constituintes de uma escada

Os elementos constituintes de uma escada são os lances, degraus, composto por pisos e espelhos, além do guarda-corpo e patamares. Segundo a NBR 9077 (ABNT, 2001, p. 03) tem-se as seguintes definições:

- a) Degrau é o conjunto dos dois elementos, horizontal e vertical, de uma escada: o piso, isto é, o degrau propriamente dito, e o espelho;
- b) Guarda-corpo é a barreira protetora vertical, maciça ou não, delimitando as faces laterais abertas de escadas, rampas, patamares, terraços, balcões, galerias e assemelhados, servindo como proteção contra eventuais quedas de um nível para outro; e
- c) Lance de escada é a sucessão ininterrupta de degraus entre dois patamares sucessivos.

Os espelhos de uma escada representam a altura do degrau, na qual deve atender ao limite entre 0,16 e 0,18 metros, e os pisos representam a largura do degrau que deverá variar entre 0,28 e 0,32 metros (ABNT – NBR 9050:2015).

Além disso, os valores determinados para os espelhos e pisos devem sempre atender a fórmula de Blondel, que consiste no valor do espelho (E) de 2 degraus somado ao valor do piso (P) de 1 degrau, no qual o resultado deve variar entre 0,63 e 0,64 cm.

$$63 \text{ cm} \leq 2E + P \leq 64 \text{ cm} \quad (1)$$

A inclinação das escadas deve ser constante ao longo dos lances, ou seja, os valores devem ser os mesmos para todo o conjunto da escada. Exceto no caso do degrau de saída, o

qual pode ser dimensionado com o plano horizontal de 2 a 5 centímetros maior que os demais degraus (SANTOS, 2001).

2.1.2. Carregamentos e ações atuantes

A determinação das ações que atuarão sobre a estrutura é primordial para o dimensionamento de uma estrutura. A NBR 8681 (ABNT, 2004) classifica as cargas atuantes em uma estrutura como carga permanente (g), acidental (q) e excepcionais.

No dimensionamento de uma escada considera-se a atuação das cargas permanentes e acidentais. São consideradas cargas permanentes o peso próprio, os revestimentos, elementos construtivos de modo geral, e do parapeito, quando existente. As cargas acidentais são uniformemente distribuídas sobre toda a estrutura da escada e ao longo dos parapeitos, segundo a NBR 6120 (ABNT, 2019).

O peso próprio, obtido por m² de projeção horizontal, é uma carga vertical que atua tanto no lance inclinado quanto no patamar.

O peso próprio da laje do lance inclinado (g') é calculado da seguinte maneira:

$$g' = \frac{e_l \times \gamma}{\cos \beta} + \frac{a \times \gamma}{2} \quad (2)$$

Onde:

e_l – espessura da laje do lance inclinado (m);

γ – peso específico do concreto armado (kN/m³), segundo a NBR 6120 (ABNT, 2019);

β – ângulo de inclinação do lance (°);

a – largura da escada (m).

Para o peso próprio do patamar (g'') segue-se a mesma definição, apenas se desconsidera o peso próprio dos degraus em escadas que não apresentam esse elemento:

$$g'' = e_p \times \gamma \quad (3)$$

Em que:

e_p – espessura da laje do patamar (m);

γ – peso específico do concreto armado (kN/m^3), segundo a NBR 6120 (ABNT, 2019);

O peso do revestimento sobre a superfície, por metro quadrado de projeção horizontal da escada, depende do tipo de material empregado. A NBR 6120 (ABNT, 2019) traz uma tabela contendo o peso específico, em kN/m^3 , dos materiais de construção aplicados como revestimento. Na falta da especificação do tipo de revestimento utilizado na escada, pode-se adotar um valor entre 0,8 e 1,2 kN/m^2 , para efeito de cálculo. Além disso, pode-se considerar o peso específico expressos no manual dos fabricantes de revestimento.

As cargas acidentais provem do tipo de uso da estrutura. A NBR 6120 (ABNT, 2019), considera para as escadas os seguintes valores mínimos:

- Para escadas com acesso ao público: 3,0 kN/m^2 ;
- Para escadas sem acesso ao público: 2,5 kN/m^2 .

2.1.3. Tipos de escadas em concreto armado

Farinha (1995) considerou que as escadas em concreto armado podem ser divididas em dois grupos:

a) Escadas correntes são escadas usuais em concreto armado. São exemplos as escadas em consola (com viga principal e degraus em balanço), escadas com degraus apoiados e escadas apoiadas pelas extremidades dos lances.

b) Escadas especiais são aquelas na qual existe um nível de complexidade estrutural. Para essas escadas podemos citar as escadas em caracol (helicoidais), escadas plissadas (tipo cascata) e escadas autoportantes.

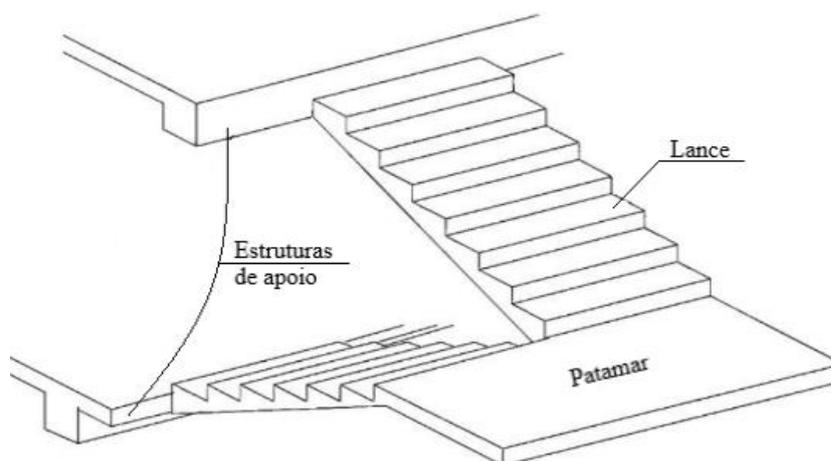
As escadas especiais destacam-se por seus formatos diferentes do convencional. Elegantes, elaboradas e não convencionais, estas são resultantes de projetos arquitetônicos com estrutura diferenciada, onde ao dispensar estruturas auxiliares as escadas apresentam uma estética de aparência leve (GRAVE, 2013).

Mas, devido à sua complexidade, para o cálculo é exigido do engenheiro um conhecimento mais aprofundado sobre o tema. Alguns casos, o uso de softwares computacionais é necessário para auxílio nas análises.

2.2. Escada autoportante

Classificadas como especiais, as escadas autoportantes não possuem um apoio intermediário em sua estrutura. Os tipos mais comuns são as escadas constituídas por dois lances retos em continuidade com um patamar intermediário (Figura 2.3), no qual os lances apoiam-se pelas suas extremidades ao nível dos pisos do edifício, sem quaisquer outros apoios exteriores (FARINHA, 1995).

Figura 2.3 – Escada em U de dois lances com patamar intermediário livre.



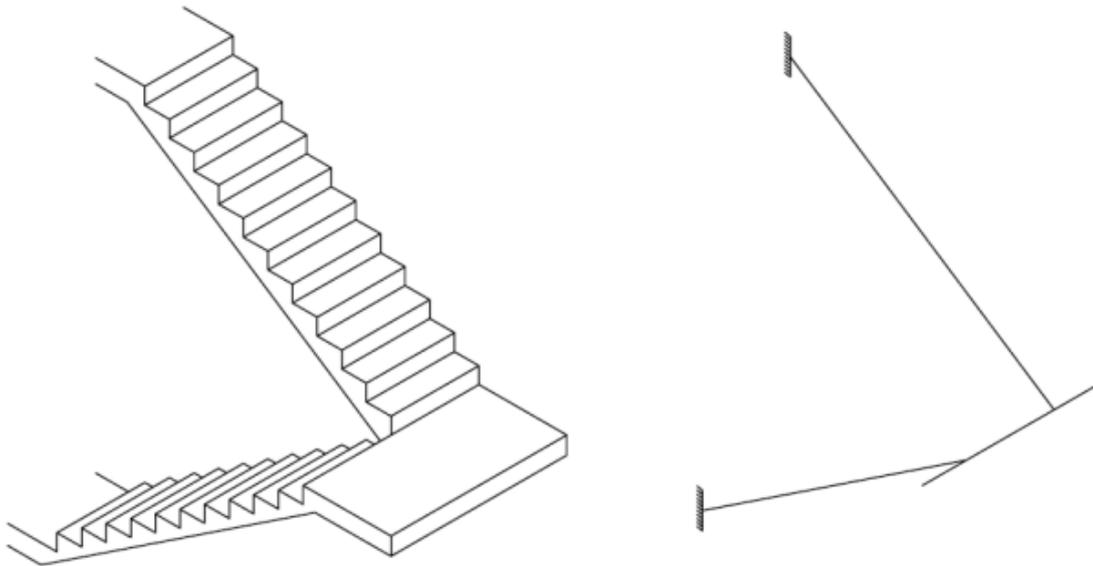
Fonte: Adaptado de Farinha (1995, p. 88).

Consideradas como estruturas hiperestáticas, ou seja, aquelas que seus esforços não podem ser determinados apenas pelas equações de equilíbrio, faz-se necessário a utilização de modelos estruturais apropriados para o estudo do comportamento delas diante do carregamento que são submetidas. Existem vários modelos, desde os mais simples até os mais complexos, que possibilitam essa representação.

2.2.1. Modelo estrutural

As escadas autoportantes são representadas, usualmente, como estruturas reticuladas, ou seja, estruturas constituídas por barras, no qual a união de tais elementos é feita por nós, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Escada autoportante como estrutura reticulada.



Fonte: GRAVE (2013).

O modelo matemático para estruturas reticuladas baseia-se na teoria de Navier, que rege o comportamento de estruturas que trabalham à flexão juntamente com efeitos axiais e de torção (MARTHA, 2010), que são os mesmos esforços que as escadas autoportantes estão sujeitas quando submetida a carregamentos.

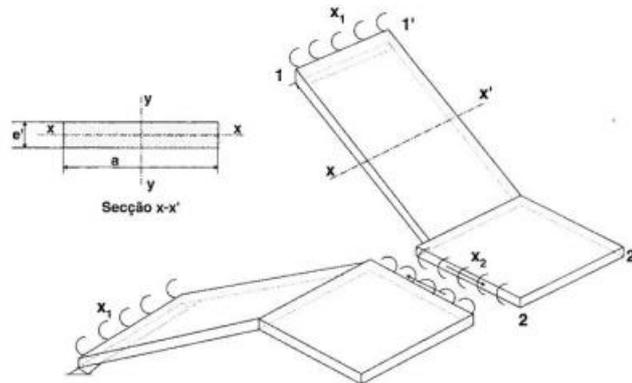
2.2.2. Método analítico

Farinha (1995) considerou que as escadas autoportantes são formadas por lajes inclinadas, os lances, e lajes planas, os patamares. Considera-se a atuação de ações verticais uniformemente distribuídas q , e o engastamento dos apoios, reduzindo assim o grau hiperestático para 2.

Para o modelo de cálculo separa-se, através de cortes, cada elemento de escada em duas partes simétricas, sendo cada uma delas constituída por um lance e metade do patamar. Os lances encontram-se engastados ao nível de cada piso e a extremidade livre de cada parte do patamar pode deslocar-se verticalmente, porém são impedidas no deslocamento horizontal devido a sua ligação ao lance.

O método de resolução parte de uma estrutura isostática, tomando por incógnitas hiperestáticas X_1 – momento fletor M_{1-2} no apoio 1, e X_2 – momento de flexão M_{2-1} no apoio 2, na seção média do patamar, exemplificadas na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Sistema de referência.



Fonte: FARINHA (1995).

O sistema isostático constitui a base de referência para os cálculos, sendo assim, faz-se necessário a determinação de seis deslocamentos (translações e rotações):

δ'_{20} – rotação do apoio 2 quando atua no lance uma ação distribuída $g' = 1$;

δ''_{10} – rotação do apoio 1 quando atua no patamar uma ação distribuída $g'' = 1$;

δ_{11} – rotação no apoio 1 quando nele atua um momento $X_1 = 1$;

δ_{12} – rotação no apoio 1 quando atua no apoio 2 um momento $X_2 = 1$;

δ_{21} – rotação no apoio 2 quando atua no apoio 1 um momento $X_1 = 1$;

δ_{22} – rotação no apoio 2 quando nele atua o momento $X_2 = 1$.

Conhecidos os deslocamentos, é possível determinar os valores das incógnitas pelo sistema de duas equações:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta'_{10} \\ \delta'_{20} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Em casos que há atuação de ações uniformemente distribuídas no lance e patamar, tem-se as seguintes equações para a determinação das incógnitas, respectivamente:

$$X'_1 = \frac{\delta'_{10} \delta_{22} - \delta'_{20} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_1 q' \ell^2 \quad (5)$$

$$X'_{2} = \frac{\delta'_{20} \delta_{11} - \delta'_{10} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_2 q' \ell^2 \quad (6)$$

$$X''_{1} = \frac{\delta''_{10} \delta_{22} - \delta''_{20} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_3 q'' \ell^2 \quad (7)$$

$$X''_{2} = \frac{\delta''_{20} \delta_{22} - \delta''_{10} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_4 q'' \ell^2 \quad (8)$$

Onde:

q' – ações uniformemente distribuídas no lance;

q'' – ações uniformemente distribuídas no patamar;

ℓ –vão do lance, em projeção horizontal;

k_1, k_2, k_3 e k_4 – coeficientes determinados pelas tabelas apresentadas no Anexo A.

Para a determinação dos coeficientes k_i , é necessário o conhecimento da inclinação longitudinal da escada (β) e do coeficiente γ , obtido a partir da relação entre o raio (r) e o vão do lance:

$$\gamma = \frac{r}{\ell} \quad (9)$$

Sendo:

$$r = \frac{a}{2} \quad (10)$$

Onde a é a largura da escada, em metros.

Considerando um engastamento perfeito nos apoios, os esforços finais M_x , V_x e N_x , podem ser obtidos pelas seguintes expressões:

$$M_x = M_{x,0} + M_{x,1}X_1 + M_{x,2}X_2 \quad (11)$$

$$N_x = N_{x,0} + N_{x,1}X_1 + N_{x,2}X_2 \quad (12)$$

$$V_x = V_{x,0} + V_{x,1}X_1 + V_{x,2}X_2 \quad (13)$$

Em que:

$M_{x,0}$, $N_{x,0}$, $V_{x,0}$ – esforços correspondentes ao sistema isostático de base;

$M_{x,1}$, $N_{x,1}$, $V_{x,1}$ – esforços que correspondem à aplicação de $X_1 = 1$ no sistema base, multiplicando pelo valor de X_1 depois de determinado;

$M_{x,2}$, $N_{x,2}$, $V_{x,2}$ – esforços que correspondem à aplicação de $X_2 = 1$ no sistema base, multiplicando pelo valor de X_2 depois de determinado;

Os cálculos dos valores dos esforços isostáticos para uma estrutura engastada nos apoios foram deduzidos por Brazão Farinha e apresentados, de forma simplificada, nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1 – Esforços isostáticos devidos à atuação das ações q' no lance e q'' no patamar.

Esforços		no lance	no patim
Actuação de q'	$M'_{x,0}$	$q' \frac{x}{2} (\ell - x)$	0
	$M'_{y,0}$	$\pm \frac{q' \ell^2 r}{2d} \cos \beta$	$\pm \frac{q' \ell^2}{2d} r \operatorname{sen} \varphi$
	$T'_{x,0}$	$q' \frac{\ell r}{2} \cos \beta$	0
	$N'_{x,0}$	$\pm q' \left(\frac{\ell^2}{2d} + \frac{dx}{\ell} \right) \cos \beta$	$\pm \frac{q' \ell^2}{2d} \operatorname{sen} \varphi$
	$V'_{x,0}$	$q' \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \cos \beta$	0
	$V'_{y,0}$	0	$-\frac{q' \ell^2}{2d} \cos \varphi$
Actuação de q''	$M''_{x,0}$	$\frac{q'' a^2}{2\ell} (x - \ell)$	0
	$M''_{y,0}$	$\pm \frac{q'' ar}{2d} (2\ell + a) \cos \beta$	$\pm \frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \cos \varphi$
	$T''_{x,0}$	$\frac{q'' ar}{2d} (2\ell + a) \operatorname{sen} \beta$	0
	$N''_{x,0}$	$\pm q'' a \left(\frac{2\ell + a}{2d} + \frac{d}{\ell} \right) \cos \beta$	$\pm \frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \operatorname{sen} \varphi$
	$V''_{x,0}$	$-q'' a \left(1 - \frac{2\ell + a}{2\ell} \right) \cos \beta$	0
	$V''_{y,0}$	0	$-\frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \cos \varphi$

Fonte: FARINHA (1995, p. 110).

Quadro 2 – Esforços isostáticos – Atuação dos momentos $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$ nos apoios 1 e 2.

Esforços		no lançaço	no patim
Actuação de X_1	$M_{x,1}$	$\frac{x}{\ell}$	0
	$M_{y,1}$	$\pm \frac{r}{d} \cos\beta$	$\pm \frac{r}{d} \operatorname{sen}\varphi$
	$T_{x,1}$	$\pm \frac{r}{d} \operatorname{sen}\beta$	0
	$N_{x,1}$	$\pm \frac{\cos\beta}{d}$	$\pm \frac{\operatorname{sen}\varphi}{d}$
	$V_{x,1}$	$-\frac{\operatorname{sen}\beta}{d}$	0
	$V_{y,1}$	0	$-\frac{\cos\varphi}{d}$
Actuação de X_2	$M_{x,2}$	0	$\cos\varphi$
	$M_{y,2}$	$\mp \operatorname{sen}\beta$	0
	$T_{x,2}$	$\pm \cos\beta$	$\pm \operatorname{sen}\varphi$
	$N_{x,2}$	0	0
	$V_{x,2}$	0	0
	$V_{y,2}$	0	0

Fonte: FARINHA (1995, p. 111).

2.2.3. Métodos dos Elementos Finitos (MEF)

Desenvolvido no século XX, o Método dos Elementos Finitos (MEF), ou *Finite Element Method* (FEM) é um método numérico utilizado em computadores capaz de solucionar problemas de engenharia, ou seja, ele simplifica e torna possível o cálculo de estruturas complexas.

Hambly (1991 apud REBOUÇAS, 2017) explicou que o método numérico consiste na discretização de um meio contínuo em uma malha de elementos em quantidade e dimensões definidas, de modo que sejam mantidas as propriedades do meio original. Basicamente, o método propõe a subdivisão de números infinito de variáveis desconhecidas em um número limitado de elementos de comportamento bem definidos.

Os elementos finitos podem apresentar formas triangulares, quadrilaterais, ou outras formas dependendo da função e dimensão do problema. Além disso, sua conexão ocorre por meio de nós ou pontos nodais, formando uma malha que possibilita a solução das equações matemáticas de forma aproximada. A precisão do MEF dependerá de aspectos como a quantidade de nós, do tamanho e dos tipos de elementos da malha.

2.2.4. Estudos realizados

Deitos (2018) desenvolveu uma base de conhecimento sobre a análise estrutural de escadas autoportantes, bem como o dimensionamento de uma escada autoportante. Estudou-se os métodos analíticos de Brazão Farinha, Knijinik e Tavares, a respeito do método de Cusens e Kuang, e Guerrin e Lavaur. No processo de análise, notou-se que o método de Brazão Farinha apresenta um sistema de segundo grau de hiperestaticidade a cerca de dois momentos de flexão quando considerado uma escada engastada nos seus apoios, semelhante ao estudado por Cusens e Kuang, que tem como incógnitas hiperestáticas o momento fletor e o esforço horizontal no ponto médio da escada. As conclusões do trabalho indicaram que mesmo apresentando resultados semelhantes, no dimensionamento apresentado por Brazão Farinha obteve-se uma escada com maior número e espessura de estribos, porém com menor armadura de flexão em seu patamar, no dimensionamento por Cusens e Kuang obteve-se uma escada mais armada em seu patamar, porém, com o cálculo da torção resultando em uma menor armadura para estribos. Isso pode ser explicado devido as diferenças na análise estrutural, enquanto Cusens e Kuang dimensiona o patamar a partir de três momentos fletores, Brazão Farinha dimensiona apenas por dois.

Grave (2013) desenvolveu um algoritmo para o cálculo de escadas autoportantes de concreto armado. Inicialmente, definiu-se um modelo que representasse a estrutura e seu comportamento adequadamente. Assim, através de um modelo de barras e consideração de cargas, resolveu-se o modelo pelo método dos deslocamentos, por análise matricial de estruturas de barras. Todo processo de cálculo foi sistematizado e transformado posteriormente em uma linguagem de programação. A autora notou que a maior dificuldade no cálculo desse tipo de estrutura estava ligada ao encontro das solicitações atuantes. Entretanto, após alguns testes com o programa já concluído, observou-se que ao afastar os lances da escada uns dos outros, aumentando assim o comprimento do patamar intermediário, a torção nos lances aumentava. Verificou-se também que ao aumentar o comprimento dos lances, deixando o balanço maior, o momento negativo no engaste também aumentava.

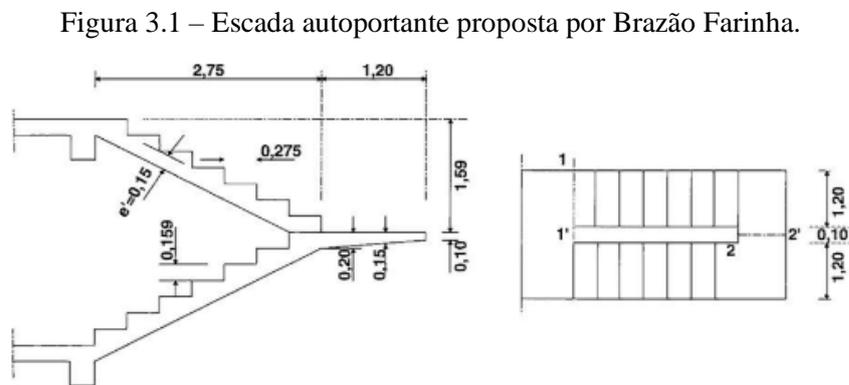
Mafaldo (2019) analisou uma escada reta autoportante em concreto armado a partir da variação de espessura da laje e da obtenção dos seus esforços normais de flexão e deformações. Tomou-se como base o método simplificado de Araújo (2014) e o método de Knijnik & Tavares (1977), e métodos numéricos, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000®. Avaliou-se os modelos computacionais compostos por elementos de barra e elementos de casca. Como conclusão, observou-se uma aproximação satisfatória entre os modelos analíticos e os modelos numéricos com elementos de casca. Já modelos formados por elementos de barra apresentaram momentos fletores negativos bem além dos observados nos métodos analíticos. Além disso, notou-se uma diminuição nas flechas à medida que a altura da laje aumentava. Para uma menor espessura o método analítico apresentou maior deformação. Entretanto, à medida que houve o aumento da altura, o método analítico e o modelo de casca se aproximaram, enquanto o modelo de barras obteve maiores flechas.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Para atingir os objetivos propostos, buscou-se na literatura métodos de cálculo de escadas autoportantes que correspondessem às expectativas. Dentre os métodos analíticos estudados, optou-se pelo método formulado pelo autor Brazão Farinha (1995).

Além disso, a fim de obter uma maior confiabilidade dos valores encontrados pelo método analítico, analisou-se pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o *software* SAP2000®, os momentos fletores e deformações de escadas autoportantes.

A escada escolhida para desenvolvimento das análises foi a apresentada no Capítulo 5, página 100, do livro de Brazão Farinha (1995). Trata-se de uma escada com dez degraus cada lance, sendo engastados nos apoios ao nível dos pisos da edificação, e um patamar intermediário livre, como mostra a Figura 3.1.



Fonte: FARINHA, 1995 (p. 100).

Para a determinação da resistência característica do concreto armado (f_{ck}) e do Módulo de Elasticidade (E), seguiu-se o estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2014) – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. O peso específico do concreto e demais cargas para o cálculo da estrutura foram adotadas conforme a NBR 6120 (ABNT, 2019) – Cargas. Para efeito de cálculo, desconsiderou-se a atuação da carga proveniente de parapeitos.

Para a obtenção dos esforços de flexão, a priori foi definido no *software* as características dos materiais de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014). As propriedades do material concreto armado adotadas foram:

- Peso específico: 25 kN/m^3 ;
- Resistência à compressão: $2,5 \text{ kN/m}^2$;

- Módulo de elasticidade: 2.380 kN/m²;
- Coeficiente de Poisson: 0,2.

As escadas foram modeladas como elementos de casca (*shell*), no qual possuem maior semelhança com as lajes que as compõem. A geometria da escada foi considerada de acordo com a planta mostrada na Figura 3.1.

Os carregamentos foram adotados conforme os valores obtidos no item 2.1.2 deste trabalho.

A análise estrutural da escada foi feita em regime elástico-linear e desconsiderando a fissuração ou plastificação do concreto. Os esforços de flexão foram coletados nos nós onde ocorreram os máximos valores positivos e negativos, em cada direção.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão apresentados o dimensionamento a partir do método analítico de Farinha (1995) e o método numérico pelo software SAP2000®.

Para efeito comparativo, na análise dos dados foi utilizada a seguinte equação para determinação do percentual de variação:

$$\Delta = \frac{V_A - V_C}{V_C} \times 100\% \quad (14)$$

Em que:

Δ – Variação dos resultados, em %

V_C – Valor analisado;

V_A – Valor comparativo.

4.1. Obtenção de esforços de flexão pelo método de Farinha (1995)

4.1.1. Características geométricas

Para início dos cálculos, definiu-se algumas características geométricas, Tabela 1, e realizou-se a compatibilização das unidades, a fim de utilizar todas de acordo com o Sistema Internacional de Medidas (SI). Portanto, tem-se que:

Tabela 1 – Características geométricas da escada estudada.

Vão do lance – ℓ	2,75 metros
Espessura média das escadas – e	0,15 metros
Largura da escada – a	1,20 metros
Distância da face superior do piso à face superior do patamar – d	1,588 metros
Espelhos dos degraus (E)	0,1588 metros
Pisante dos degraus (P)	0,275 metros
Inclinação das escadas – β	30°

Fonte: AUTORA (2022)

Com o conhecimento das características geométricas, partiu-se para o cálculo das ações atuantes. Segundo Farinha (1995) adotou-se a ação de uma sobrecarga de 5,0 kN/m² atuante tanto nos lances quanto no patamar, um revestimento com carga de 1,0 kN/m e o peso específico do concreto armado sendo 25 kN/m³.

A seguir serão apresentadas algumas nomenclaturas adotadas para identificação das cargas atuantes em cada elemento:

- Ações permanentes atuante nos lances – g' ;
- Ações permanentes atuante no patamar – g'' ;
- Sobrecarga atuante nos lances – q' ;
- Sobrecarga atuante no patamar – q'' .

4.1.2. Ações atuantes no lance

Durante o processo de análise, foi identificado que os lances das escadas sofrem ações permanentes provenientes do seu peso próprio – laje (g_1'), dos degraus (g_2'), do revestimento (g_3') e a ação da sobrecarga (q'). Tomando as parcelas separadamente da Equação 2 e multiplicando pela largura da escada, tem-se os seguintes valores para as ações atuantes no lance:

- Devida ao peso da laje:

$$g_1' = \frac{0,15 \text{ m} \times 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 1,20 \text{ m}}{\cos 30^\circ} \rightarrow g_1' = 5,1962 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Devida ao peso dos degraus:

$$g_2' = \frac{0,1588 \text{ m} \times 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 1,20 \text{ m}}{2} \rightarrow g_2' = 2,3820 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Devida aos acabamentos:

$$g_3' = 1,0000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Devida à sobrecarga

$$q' = 5,00 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times 1,20 \text{ m} \rightarrow q' = 6,0000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

A ação atuante total no lance é:

$$g' + q' = 5,1962 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 2,3820 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 1,0000 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 6,0000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$g' + q' = 14,5782 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

4.1.3. Ações atuantes no patamar

Para o patamar tem-se as ações permanentes devido ao seu peso próprio – laje (g_1''), do revestimento (g_3'') e a ação da sobrecarga (q''). Tomando apenas a primeira parcela da Equação 2, pois não há degraus no patamar, e multiplicando pela largura da escada, obtêm-se os seguintes valores as ações atuantes no patamar:

- Devida ao peso da laje:

$$g_1'' = 0,15 \text{ m} \times \left(1 + \frac{0,10 \text{ m}}{2 \times 1,20 \text{ m}} \right) \times 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 1,20 \text{ m} \rightarrow g_1'' = 4,6875 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Devida aos acabamentos:

$$g_3'' = 1,00 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 1,20 \left(1 + \frac{0,10 \text{ m}}{2 \times 1,20 \text{ m}} \right) \rightarrow g_3'' = 1,2500 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

- Devida à sobrecarga

$$q'' = 5,00 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times 1,20 \text{ m} \times \left(1 + \frac{0,10 \text{ m}}{2 \times 1,20 \text{ m}} \right) \rightarrow q'' = 6,2500 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

A ação atuante total no lance é:

$$g'' + q'' = 4,6875 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 1,2500 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 6,2500 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

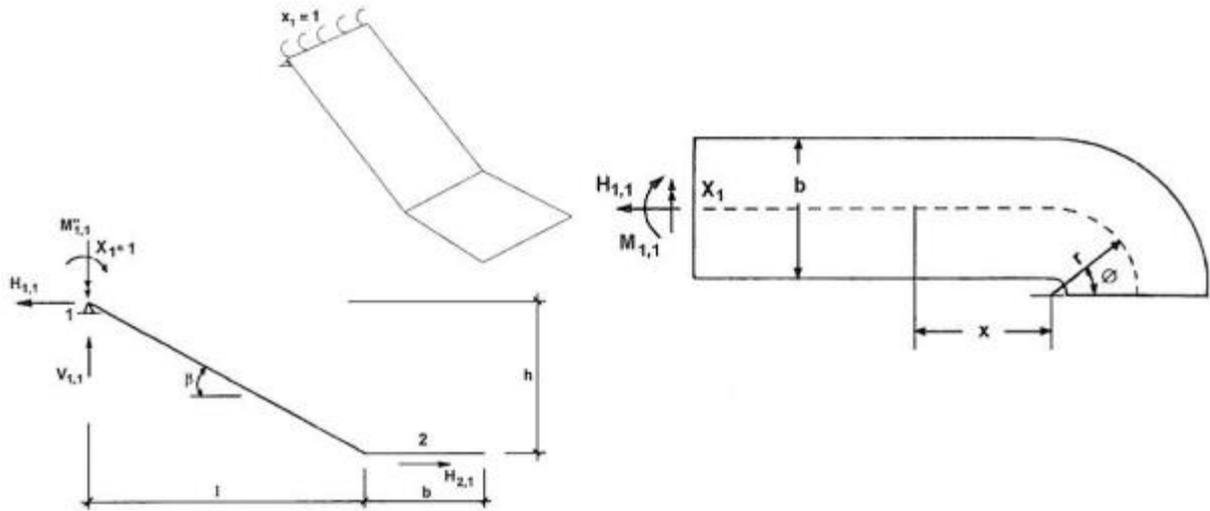
$$g'' + q'' = 12,1875 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

4.1.4. Valores de X_1 e X_2

Para a resolução numérica dos valores de X_1 e X_2 começa-se pela determinação dos valores dos coeficientes k (k_1 a k_4) por interpolação dos valores nas Tabelas 5.1 a 5.4 – Anexo A.

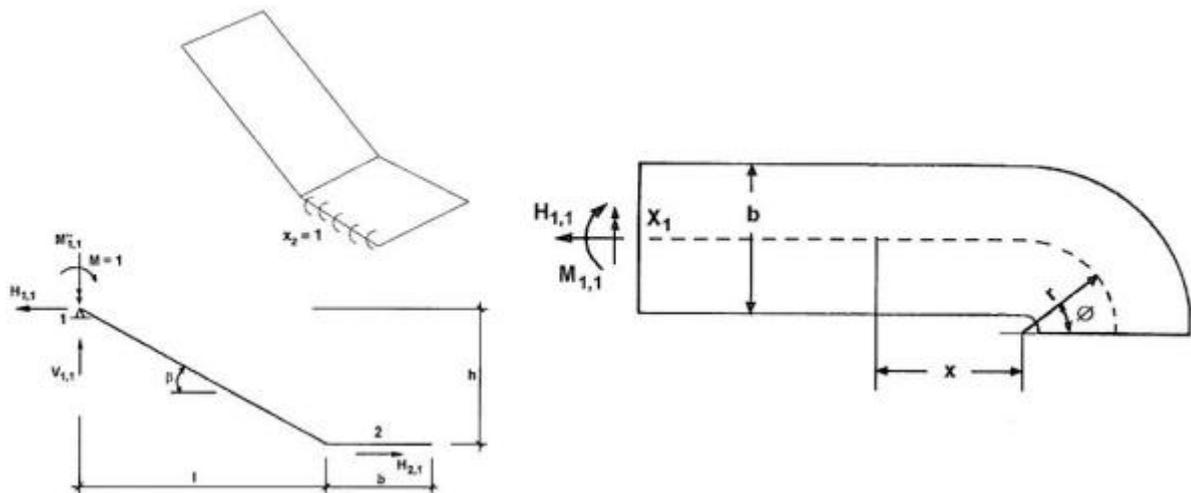
Nas Figuras 4.1 e 4.2 são apresentados os locais de atuação dos momentos fletores X_1 e X_2 .

Figura 4.1 – Aplicação do momento $X_1 = 1$ no apoio 1.



Fonte: FARINHA (1995).

Figura 4.2 – Aplicação do momento $X_2 = 1$ no apoio 1.



Fonte: FARINHA (1995).

Temos das Equações 9 e 10, o seguinte valor para visualização nas tabelas:

$$\gamma = \frac{1,20 \text{ m}}{2} \rightarrow \gamma = 0,2182$$

- Coeficiente k_1

$$\frac{k_1 - 0,1309}{0,1354 - 0,1309} = \frac{0,2182 - 0,20}{0,25 - 0,20} \rightarrow k_1 = 0,1325$$

- Coeficiente k_2

$$\frac{k_2 - 0,0478}{0,0543 - 0,0478} = \frac{0,2182 - 0,20}{0,25 - 0,20} \rightarrow k_2 = 0,0502$$

- Coeficiente k_3

$$\frac{k_3 - (-0,0319)}{-0,0435 - (-0,0319)} = \frac{0,2182 - 0,20}{0,25 - 0,20} \rightarrow k_3 = -0,0361$$

- Coeficiente k_4

$$\frac{k_4 - 0,0663}{0,0995 - 0,0663} = \frac{0,2182 - 0,20}{0,25 - 0,20} \rightarrow k_4 = 0,0784$$

Para a obtenção dos valores de X_1 e X_2 , considerou-se a atuação da ação unitária de 1 kN/m. Portanto:

$$X'_1 = -0,1325 \times 2,75^2 \rightarrow X'_1 = -1,0020 \text{ kNm}$$

$$X'_2 = -0,0502 \times 2,75^2 \rightarrow X'_2 = -0,3796 \text{ kNm}$$

$$X''_1 = +0,0361 \times 2,75^2 \rightarrow X''_1 = 0,2730 \text{ kNm}$$

$$X''_2 = -0,0784 \times 2,75^2 \rightarrow X''_2 = -0,5929 \text{ kNm}$$

Para atuação da ação permanente $g = g' + g''$, sendo $g' = 8,5782$ kN/m e $g'' = 5,9375$ kN/m, obteve-se

$$X_{1g} = -1,0020 \times 8,5782 + 0,2730 \times 5,9375 \rightarrow X_{1g} = -6,9744 \text{ kNm}$$

$$X_{2g} = -0,3796 \times 8,5782 - 0,5929 \times 5,9375 \rightarrow X_{2g} = -6,7766 \text{ kNm}$$

Para atuação da sobrecarga $q' = 6,00$ kN/m no lance, obteve-se:

$$X_{1q'} = -1,0020 \times 6,00 \rightarrow X_{1q'} = -6,0120 \text{ kNm}$$

$$X_{2q'} = -0,3796 \times 6,00 \rightarrow X_{2q'} = -2,2776 \text{ kNm}$$

Para atuação da sobrecarga $q'' = 6,25$ kN/m no patamar, obteve-se:

$$X_{1q''} = +0,2730 \times 6,25 \rightarrow X_{1q''} = +1,7063 \text{ kNm}$$

$$X_{2q''} = -0,5929 \times 6,25 \rightarrow X_{2q''} = -3,7056 \text{ kNm}$$

Concluiu-se que os valores máximos de X_1 e X_2 são:

$$X_1 = -(6,9744 + 6,0120) \rightarrow X_1 = -12,9864 \text{ kNm}$$

$$X_2 = -(6,7766 + 2,2776 + 3,7056) \rightarrow X_2 = -12,7598 \text{ kNm}$$

Em que X_1 é o momento fletor na direção x (M_x) no apoio 1 e X_2 é o momento fletor na seção média do patamar. A fim de obter o maior valor possível, foi desprezado a atuação da sobrecarga q'' no cálculo de X_1 .

4.1.5. Momento fletor na direção x – M_x

O momento fletor na direção x (M_x), provem da seguinte formulação:

$$M_x = M_{x,0} + M_{x,1}X_1 + M_{x,2}X_2$$

De acordo com os Quadros 1 e 2, as expressões que permitem determinar os momentos fletores no patamar são:

$$M_x = \cos\varphi X_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Ações permanentes (g' + g'')} \\ \text{Sobrecarga } q' \text{ no lance} \\ \text{Sobrecarga } q'' \text{ no patamar} \end{array} \right.$$

No patamar, $\varphi = 0$, logo, tem-se o momento fletor na seção média, de:

$$M_x = \cos(0) \times X_2 \rightarrow M_x = X_2 = -12,7598 \text{ kNm}$$

Além disso, para os lances, utilizou-se as seguintes formulações:

- Ação permanente no lance da escada:

$$M_{x,0} = \left[g' \times \frac{x}{2} \times (\ell - x) + g'' \times \frac{a^2}{2\ell} \times (x - \ell) \right] - 6,9744 \times \frac{x}{\ell}$$

$$M_{x,0} = \left[8,5782 \times \frac{x}{2} \times (2,75 - x) - 5,9375 \times \frac{1,20^2}{2 \times 2,75} (x - 2,75) \right] - 6,9744 \times \frac{x}{2,75}$$

$$M_{x,0} = [4,2891x \times (2,75 - x) - 1,5545 \times (x - 2,75)] - 2,5361x$$

$$M_{x,0} = -4,2891x^2 + 10,8134x - 4,2749$$

- Sobrecarga q' no lance:

$$M'_x = q' \times \frac{x}{2} \times (\ell - x) - 6,0120 \times \frac{x}{\ell}$$

$$M'_x = 6,00 \times \frac{x}{2} \times (2,75 - x) - 6,0120 \times \frac{x}{2,75}$$

$$M'_x = 3,00x \times (2,75 - x) - 2,1862x$$

$$M'_x = -3,00x^2 + 6,0638x$$

- Sobrecarga q'' no patamar:

$$M''_x = \frac{q'' \times a^2}{2\ell} \times (x - \ell)$$

$$M''_x = \frac{6,25 \times 1,20^2}{2 \times 2,75} \times (x - 2,75)$$

$$M''_x = +1,6364x - 4,50$$

Para $x = 0$, seção de transição do lance para o patamar, temos que é a soma de todos os momentos fletores atuantes:

$$M_x = -7,2891 \times 0^2 + 18,5136 \times 0 - 8,7749 \rightarrow M_x = -8,7749 \text{ kNm}$$

Para $x = 1,375$ m, meio do vão d lance, tem-se:

$$M_x = -7,2891 \times 1,375^2 + 16,8772 \times 1,375 - 4,2749 \rightarrow M_x = +5,1503 \text{ kNm}$$

Não se contabilizou a parcela proveniente da sobrecarga q'' no patamar. Por se tratar de um momento fletor negativo, causaria uma redução do momento fletor existente nesse ponto.

$$M''_x = +1,6364 \times 1,375 - 4,50 \rightarrow M''_x = -2,25 \text{ kNm}$$

Para $x = 2,75$ m, seção de apoio, obteve-se o seguinte valor:

$$M_x = -7,2891 \times 2,75^2 + 16,8772 \times 2,75 - 4,2749 \rightarrow M_x = -12,9863 \text{ kNm}$$

4.1.6. Momentos fletores na direção y – M_y

O momento fletor na direção y (M_y), foi obtido da seguinte maneira:

$$M_y = M_{y,0} + M_{y,1}X_1 + M_{y,2}X_2$$

No patamar estes momentos são nulos para $\varphi = 0$, seção em que atua X_2 . No lance, partiu-se das formulações presentes nos Quadros 1 e 2.

$$M'_{y,0} = \frac{q' \times \ell^2 \times r}{2d} \times \cos \beta = \frac{2,75^2 \times \frac{1,20}{2}}{2 \times 1,588} \times \cos (30^\circ) \times q' \rightarrow M'_{y,0} = 1,2373q'$$

$$M''_{y,0} = \frac{q'' \times a \times r}{2d} \times (2\ell + a) \times \cos \beta = \frac{q'' \times 1,20 \times \frac{1,20}{2}}{2 \times 1,588} \times (2 \times 2,75 + 1,20) \times \cos (30^\circ)$$

$$M''_{y,0} = 1,3154q''$$

$$M_{y,1} = \pm \frac{r}{d} \times \cos \beta \times X_1 = \pm \frac{1,20}{1,588} \times \cos (30^\circ) \times X_1 \rightarrow M_{y,1} = \pm 0,3778X_1$$

$$M_{y,2} = \pm \text{sen } \beta \times X_2 \rightarrow M_{y,2} = \mp 0,50X_2$$

▪ Ações permanentes:	$(1,2373 \times 8,5782 + 1,3154 \times 5,9375)$
	$-0,3778 \times 6,9744$
	$+0,50 \times 6,7766$
	<hr/>
	$+19,1774 \text{ kNm}$
▪ Sobrecarga g' no lance:	$1,2373 \times 6,00$
	$-0,3778 \times 6,0120$
	$+0,50 \times 2,2776$
	<hr/>
	$+6,5895 \text{ kNm}$
▪ Sobrecarga g'' no patamar:	$1,3154 \times 6,25$
	$+0,3778 \times 1,7063$
	$+0,50 \times 3,7056$
	<hr/>
	$+10,7187 \text{ kNm}$

O momento fletor $M_y = \pm [19,1774 + 6,2895 + 10,7187] = \pm 36,1856 \text{ kNm}$.

4.1.7. Momentos de torção

No patamar, os momentos de torção são de valor nulo para $\varphi = 0$, seção em que atua X_2 .
No lance, os momentos são determinados a partir das formulações dos Quadros 1 e 2:

$$T'_{x,0} = q' \times \frac{\ell \times r}{2} \times \cos \beta = q' \times \frac{2,75 \times \frac{1,20}{2}}{2} \times \cos (30^\circ) \rightarrow T'_{x,0} = 0,7145q'$$

$$T''_{x,0} = q \times \frac{a \times r}{2d} \times (2\ell + a) \times \sin \beta = q \times \frac{1,20 \times \frac{1,20}{2}}{2 \times 1,588} \times (2 \times 2,75 + 1,20) \times \sin (30^\circ)$$

$$T''_{x,0} = 0,7594q''$$

$$T_{x,1} = \frac{r}{d} \times \sin \beta \times X_1 = \frac{1,20}{1,588} \times \sin (30^\circ) \times X_1 \rightarrow T_{x,1} = 0,1889X_1$$

$$T_{x,2} = \cos \beta \times X_2 \rightarrow T_{x,2} = 0,8660X_2$$

▪ Ações permanentes:	+0,7145 × 8,5782 + 0,7594 × 5,9375
	−0,1889 × 6,9744
	−0,8660 × 6,7766
	<hr/>
	+3,4521 kNm
▪ Sobrecarga g' no lance:	+0,7145 × 6,00
	−0,1889 × 6,0120
	−0,866 × 2,2776
	<hr/>
	+1,1789 kNm
▪ Sobrecarga g'' no patamar:	+0,7594 × 6,25
	+0,1889 × 1,7063
	−0,8660 × 3,7056
	<hr/>
	+1,8595 kNm

O momento torcional $T = \pm (3,4521 + 1,1789 + 1,8595) = \pm 6,4905$ kNm.

4.2. Análise comparativa entre o método analítico de Farinha (1995) e modelo numérico com elementos de casca engastado pelo *software* SAP2000®

A partir dos cálculos analíticos pelo método de Farinha (2015) e da modelagem numérica feita pelo SAP2000®, obtiveram-se os momentos de flexão e torção nas interações lance-piso, lance-patamar e na região central do patamar. Os momentos foram coletados em um ponto médio da região.

A Tabela 2 e Tabela 3 apresentam, respectivamente, os resultados encontrados pelos dois métodos para os momentos atuantes no patamar e atuantes no lance.

Tabela 2 – Momentos atuantes no patamar.

Método	$M_{x,P}$ (kNm)	$M_{y,P}$ (kNm)	T_P (kNm)
Brazão Farinha (1995)	- 12,7598	Nulo	Nulo
SAP2000	- 11,3874	$\pm 0,0094$	$\pm 0,0006$

Fonte: AUTORA (2022).

Farinha (1995) determina que, para o patamar, os momentos fletores na direção y e as torções na seção que atua X_2 são nulos e a validação dessa consideração pode ser facilmente observada nos resultados expressos na Tabela 2, na qual foram obtidos valores bem próximos de zero.

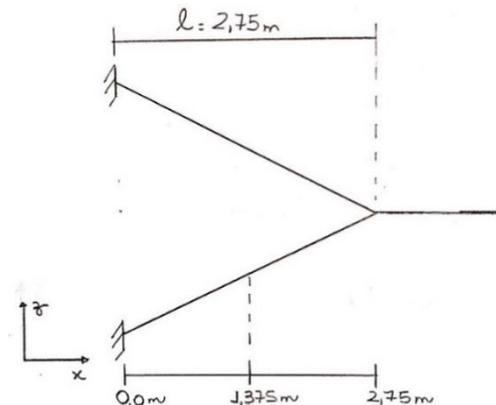
Tabela 3 – Momentos atuantes no lance.

Método	$M_{x, 0,00\text{ m}}$ (kNm)	$M_{x, 1,375\text{ m}}$ (kNm)	$M_{x, 2,75\text{ m}}$ (kNm)	$M_{y, L}$ (kNm)	T_L (kNm)
Brazão Farinha (1995)	- 8,7749	5,1503	- 12,9863	$\pm 36,7187$	$\pm 6,4905$
SAP2000	- 7,4202	2,9404	- 11,6526	$\pm 25,4739$	$\pm 6,4222$

Fonte: AUTORA (2022).

Os momentos fletores atuantes na direção x foram analisados na seção de apoio do lance ($x = 0$), no centro do lance ($x = 1,375\text{ m}$) e na interação lance-patamar ($x = 2,75\text{ m}$), como mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Pontos de análise do momento fletor M_x .



Fonte: Autora (2022).

A partir dos resultados expressos na Tabela 3 foi possível observar que os momentos fletores na direção $x - M_x$ de maior valor, para ambos os métodos, apresentam-se na interação lance-patamar, o que já era esperado, visto que nesta região há a mudança de direção da laje, gerando concentração de esforços. Ademais, em função dos engastamentos de extremidade, o momento positivo no centro do lance é reduzido.

Além disso, nota-se que o momento fletor M_x analisado no centro do lance apresentou uma variação significativa entre os resultados encontrados pelos dois métodos, isso deve ao fato de que Farinha (1995), em sua análise, desprezou o momento fletor negativo proveniente da sobrecarga q'' do patamar.

Na análise do momento de torção localizado no lance, observou-se que a maior concentração dos esforços ocorre na interação lance-patamar, devido ao nível de rigidez existente entre essa ligação.

Para fins de comparação, a modelagem numérica foi escolhida como base, devido ao fato de ser uma estrutura bidimensional, assemelhando-se à estrutura real. Na Tabela 4, são apresentadas as variações percentuais, de acordo com a Equação 14, dos momentos para cada método analisado.

Tabela 4 – Variações percentuais (Δ) entres os dois métodos analisados.

$M_{x,P}$	$M_{x,0,00\text{ m}}$	$M_{x,1,375\text{ m}}$	$M_{x,2,75\text{ m}}$	$M_{y,L}$	T_L
12,05%	18,26%	73,55%	10,27%	44,14%	1,06%

Fonte: Autora (2022).

A partir dos valores de variação expostos na Tabela 4, foi possível observar que o método de Farinha (1995) apresentou uma aproximação significativa dos resultados comparado ao MEF.

A comparação entre a solução realizada por Farinha (1995) e a realizada pelo SAP2000®, divergem exatamente pelos pontos em que o autor gera aproximações e os valores divergentes são iguais ou próximos dos valores que foram aproximados.

5. CONCLUSÃO

As escadas autoportantes devido à sua complexidade necessitam de uma análise cuidadosa e mais aprofundada frente as escadas convencionais. Portanto, a escolha do método, seja analítico ou numérico, adequado para a obtenção dos esforços é de extrema importância.

De forma geral, os resultados obtidos com ambos os métodos apresentaram boa aproximação na obtenção dos esforços, porém, o método de Farinha (1995) obteve uma variação máxima de 73,55% para o momento fletor na direção x no centro do lance comparado ao encontrado pelo SAP2000®, devido as aproximações geradas pelo autor durante o processo de cálculo.

Além disso, notou-se que os maiores valores de M_x , para ambos os métodos, apresentam-se na interação lance-patamar, visto que nesta região há a mudança de direção da laje, gerando concentração de esforços. E os menores valores de M_x foram obtidos no centro do lance, fato justificado em função dos engastamentos de extremidade.

5.1. Sugestões para Futuros Estudos

Para futuros estudos, sugere-se os seguintes temas:

- Estudo de escadas plissadas;
- Estudo de escadas autoportantes helicoidais;
- Análise da estrutura apresentada neste trabalho considerando a ação do parapeito;
- Comparação das deformações, entre o método analítico e numérico, que ocorrem na estrutura apresentada neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado: Volume 4**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento** Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 2019.

DEITOS, Ana Carolina. Projeto e Análise de Escadas Autoportantes em Concreto armado. 2018. 137 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2018.

FARINHA, Brazão J. S. **Lajes e escadas em Betão armado**. Queluz: EPGE, 1995, v.1.

GRAVE, M. **Escadas autoportantes: Desenvolvimento de programa computacional de dimensionamento**. 2013. 78 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

KNIJNIK, Anibal; TAVARES, José Julio Alves. **Escada autoportante sem apoio no patamar**. Revista Estrutura, 1977, n.81, p. 109-121.

MAFALDO, J. G. **Estudo comparativo analítico e numérico via método dos elementos finitos (MEF) de escada reta autoportante em concreto armado**. 2019. 90 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

REBOUÇAS, Arthur da Silva. **Análise da distribuição de momento fletor devido a carga móvel em pontes curvas de concreto armado**. 2017. 194 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

ANEXO A – Método Brazão Farinha: Coeficiente k_i

Tabela 5.1 – Valores de k_1 (escada engastada nos apoios).

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251
0,10	0,1260	0,1260	0,1260	0,1259	0,1258	0,1258	0,1257	0,1256
0,15	0,1281	0,1280	0,1279	0,1277	0,1275	0,1273	0,1271	0,1268
0,20	0,1318	0,1315	0,1312	0,1309	0,1304	0,1300	0,1294	0,1289
0,25	0,1370	0,1366	0,1360	0,1354	0,1346	0,1338	0,1328	0,1318
0,30	0,1440	0,1432	0,1424	0,1413	0,1401	0,1387	0,1372	0,1356
0,35	0,1524	0,1514	0,1502	0,1486	0,1468	0,1449	0,1427	0,1403
0,40	0,1623	0,1610	0,1592	0,1572	0,1547	0,1520	0,1491	0,1459
0,45	0,1734	0,1717	0,1695	0,1668	0,1637	0,1602	0,1563	0,1522
0,50	0,1855	0,1833	0,1806	0,1773	0,1735	0,1691	0,1643	0,1592
0,55	0,1982	0,1957	0,1925	0,1886	0,1840	0,1788	0,1730	0,1668
0,60	0,2114	0,2085	0,2048	0,2003	0,1950	0,1889	0,1822	0,1749
0,65	0,2248	0,2216	0,2174	0,2123	0,2064	0,1995	0,1918	0,1834
0,70	0,2382	0,2347	0,2301	0,2246	0,2179	0,2103	0,2017	0,1922

Fonte: FARINHA (1995, p. 113).

Tabela 5.2 – Valores de k_2 (escada engastada nos apoios).

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0167	0,0167	0,0166	0,0165	0,0164	0,0162	0,0161	0,0158
0,10	0,0301	0,0299	0,0297	0,0294	0,0291	0,0286	0,0281	0,0274
0,15	0,0408	0,0405	0,0402	0,0397	0,0390	0,0383	0,0373	0,0361
0,20	0,0495	0,0491	0,0485	0,0478	0,0469	0,0458	0,0445	0,0428
0,25	0,0564	0,0558	0,0551	0,0543	0,0531	0,0518	0,0501	0,0480
0,30	0,0617	0,0611	0,0603	0,0592	0,0580	0,0564	0,0544	0,0521
0,35	0,0656	0,0650	0,0641	0,0630	0,0616	0,0599	0,0577	0,0551
0,40	0,0684	0,0677	0,0668	0,0657	0,0642	0,0624	0,0602	0,0574
0,45	0,0701	0,0694	0,0685	0,0674	0,0660	0,0641	0,0619	0,0591
0,50	0,0709	0,0703	0,0694	0,0684	0,0670	0,0652	0,0630	0,0602
0,55	0,0709	0,0704	0,0696	0,0686	0,0673	0,0656	0,0635	0,0608
0,60	0,0703	0,0698	0,0692	0,0683	0,0671	0,0656	0,0636	0,0610
0,65	0,0692	0,0688	0,0683	0,0675	0,0665	0,0651	0,0633	0,0608
0,70	0,0677	0,0674	0,0670	0,0664	0,0655	0,0643	0,0627	0,0604

Fonte: FARINHA (1995, p. 114).

Tabela 5.3 – Valores de k_3 (escada engastada nos apoios).

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025
0,10	-0,0094	-0,0094	-0,0094	-0,0094	-0,0095	-0,0095	-0,0096	-0,0096
0,15	-0,0194	-0,0195	-0,0197	-0,0198	-0,0200	-0,0202	-0,0204	-0,0207
0,20	-0,0306	-0,0310	-0,0314	-0,0319	-0,0325	-0,0331	-0,0338	-0,0346
0,25	-0,0405	-0,0412	-0,0423	-0,0435	-0,0449	-0,0464	-0,0482	-0,0500
0,30	-0,0460	-0,0476	-0,0497	-0,0521	-0,0550	-0,0581	-0,0616	-0,0653
0,35	-0,0444	-0,0472	-0,0509	-0,0553	-0,0603	-0,0660	-0,0722	-0,0788
0,40	-0,0325	-0,0372	-0,0431	-0,0502	-0,0585	-0,0677	-0,0779	-0,0887
0,45	-0,0078	-0,0148	-0,0238	-0,0345	-0,0470	-0,0611	-0,0766	-0,0932
0,50	0,0322	0,0222	0,0095	-0,0059	-0,0238	-0,0441	-0,0665	-0,0905
0,55	0,0894	0,0759	0,0586	0,0376	0,0131	-0,0147	-0,0455	-0,0789
0,60	0,1652	0,1477	0,1251	0,0977	0,0655	0,0287	-0,0122	-0,0568
0,65	0,2607	0,2387	0,2102	0,1755	0,1345	0,0875	0,0349	-0,0227
0,70	0,3765	0,3495	0,3147	0,2720	0,2213	0,1630	0,0972	0,0247

Fonte: FARINHA (1995, p. 114).

Tabela 5.4 – Valores de k_4 (escada engastada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0048	0,0048	0,0048	0,0047	0,0047	0,0047	0,0046	0,0045
0,10	0,0184	0,0183	0,0182	0,0180	0,0178	0,0176	0,0172	0,0168
0,15	0,0400	0,0397	0,0394	0,0389	0,0382	0,0375	0,0365	0,0354
0,20	0,0686	0,0681	0,0673	0,0663	0,0651	0,0635	0,0617	0,0594
0,25	0,1033	0,1023	0,1011	0,0995	0,0974	0,0949	0,0918	0,0881
0,30	0,1431	0,1417	0,1398	0,1375	0,1345	0,1308	0,1263	0,1208
0,35	0,1868	0,1850	0,1825	0,1793	0,1753	0,1704	0,1643	0,1570
0,40	0,2333	0,2311	0,2281	0,2242	0,2192	0,2130	0,2054	0,1960
0,45	0,2816	0,2791	0,2756	0,2710	0,2652	0,2579	0,2487	0,2375
0,50	0,3306	0,3279	0,3240	0,3190	0,3125	0,3042	0,2938	0,2807
0,55	0,3795	0,3766	0,3727	0,3674	0,3604	0,3514	0,3399	0,3253
0,60	0,4274	0,4246	0,4207	0,4154	0,4082	0,3988	0,3865	0,3707
0,65	0,4737	0,4712	0,4675	0,4624	0,4554	0,4459	0,4332	0,4165
0,70	0,5180	0,5159	0,5127	0,5081	0,5014	0,4922	0,4795	0,4624

Fonte: FARINHA (1995, p. 115).