



**ÁLVARO MARTINS ESPÍNDOLA**

**UMA HEURÍSTICA CONSTRUTIVA PARA O  
PROBLEMA DE PARTICIONAMENTO DE  
ARESTAS EM DISTRITOS EULERIANOS**

**LAVRAS – MG**

**2022**



**ÁLVARO MARTINS ESPÍNDOLA**

**UMA HEURÍSTICA CONSTRUTIVA PARA O PROBLEMA DE  
PARTICIONAMENTO DE ARESTAS EM DISTRITOS EULERIANOS**

TCC apresentado à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Programa de  
Graduação em Monografia, área de concentração em  
TCC, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Mayron César de Oliveira Moreira  
Orientador

**LAVRAS – MG**

**2022**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos  
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Espíndola, Álvaro Martins

Uma heurística construtiva para o problema de particionamento de arestas em distritos Eulerianos / Álvaro Martins Espíndola. 1ª ed. rev., atual. e ampl. – Lavras : UFLA, 2022.

21 p. :

TCC(graduação)–Universidade Federal de Lavras, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Mayron César de Oliveira Moreira.

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-808.066

**ÁLVARO MARTINS ESPÍNDOLA**

**UMA HEURÍSTICA CONSTRUTIVA PARA O PROBLEMA DE  
PARTICIONAMENTO DE ARESTAS EM DISTRITOS EULERIANOS**

TCC apresentado à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Programa de  
Graduação em Monografia, área de concentração em  
TCC, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADA em 29 de Abril de 2022.

Prof. Dr. Júlio César Alves UFLA  
Prof. Dr. Bruno de Abreu Silva UFLA

Prof. Dr. Mayron César de Oliveira Moreira  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2022**



*Àquilo que foi, àquilo que é, àquilo que será.*





## **AGRADECIMENTOS**

Não há formas de agradecer em primeiro lugar diferentes de serem a meus pais, Edilsa Martins e Álvaro José Espíndola. Obrigado, mãe, por sempre ser o porto seguro e lutado pelo bem de sua família com sua força mais verdadeira. Obrigado, pai, por sempre acreditar em mim e ser a pedra serena e resiliente do nosso lar. Um enorme agradecimento aos meus irmãos João Pedro Martins Espíndola e Maria Clara Martins Espíndola que sempre farão parte do meu caminho. Agradeço também à minha madrinha Maraíza Martins que sempre foi uma segunda mãe para mim; nunca me sentirei sozinho. Agradeço à minha avó Maria Aparecida Martins pelo amor e aos que já trilharam seus caminhos Antônio José Martins, Maria da Conceição Espíndola e José Espíndola Sobrinho pelas marcas indissipáveis. Agradeço também ao meu padrinho Halison Espíndola e sua família que sempre estiveram presente em minha vida. Agradeço à minha querida amiga Juliana Silveira pela companhia durante tantos anos. Através dessa jornada não caminhei sozinho, obrigado Gabriel e Raphael por estes anos intensos, hilários e fraternos. Não posso também me esquecer do time dos sonhos - Aline Rodrigues, Leonardo Amorim e Luiz Soares - obrigado por estarem comigo sempre. Agradeço por fim meu amigo Bruno Espíndola pelas discussões eloquentes e intermináveis e aos meus amigos de Divinópolis. Um reconhecimento especial para o professor Mayron Moreira por me acompanhar neste desafio final. Que minhas escolhas, as quais me trouxeram até aqui, tenham traçado histórias em suas vidas assim como as suas na minha.



*Tudo terminará da melhor maneira possível.*



## RESUMO

Este trabalho propõe uma solução heurística para o problema de particionamento de arestas considerando distritos Eulerianos, o qual se revela presente em contextos como entrega de correspondências, leitura de medidores, coleta de neve, manutenção de estradas e coleta de lixo em municípios. O objetivo do problema consiste em dividir um grafo em distritos que possam ser percorridos evitando a repetição de vias e distribuindo a demanda total da forma mais igualitária possível. Instâncias de até 401 vértices e 764 arestas provenientes da literatura foram utilizadas para teste baseadas no estado da arte, as quais foram todas resolvidas considerando demanda, paridade dos vértices, compacidade e continuidade dos distritos; com tempo máximo de execução de 6.9 segundos. O algoritmo proposto encontra soluções factíveis para o problema, e pode ser um caminho para resolução de instâncias de larga escala considerando que o mesmo não necessita considerar a conectividade dos distritos, contrário ao estado da arte.

**Palavras-chave:** Particionamento de Arestas, Distritos, Grafos Eulerianos, Heurística Construtiva.



## ABSTRACT

This paper proposes a heuristic solution for the district design problem considering Eulerian districts, which arises in many forms as postal delivery, meter readings, winter gritting/snow salt spreading, road maintenance, and municipal solid waste collection. The biggest challenge in this problem is to partition a graph in districts that can be traversed with minimum road repetition and equal workload distribution. A series of instances, up to 401 nodes and 764 edges, from the state of the art literature were solved considering workload distribution, node parity, district compactness, and continuity while minimizing the objective function; with maximum execution time of 6.9 seconds. The proposed algorithm can achieve feasibility and be an alternative way to solve the problem in large-scale instances since it does not need to consider district connectivity opposed to the exact model in the state of the art.

**Keywords:** Arc Partitioning, Districts, Eulerian Graphs, Constructive Heuristic.





## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	19
<b>APENDICE A – Artigo segundo às normas da Sociedade Brasileira de Computação</b> .....	21



## 1 INTRODUÇÃO

O problema de particionamento de arestas em grafos está presente em diferentes contextos, tais como entrega de correspondências, leitura de medidores, moagem de neve, manutenção de estradas e coleta de lixo em municípios. (MUYLDERMANS et al., 2002) introduzem o problema através de uma formulação inteira mista para otimizar a distribuição de sal no inverno em regiões com intensas nevascas. Na sequência, (MUYLDERMANS; CATTRYSSE; OUDHEUSDEN, 2003) generalizam a abordagem e inclui uma melhoria no roteamento através de “Eulerização” do grafo. O presente trabalho considera (GARCÍA-AYALA et al., 2016) como o estado da arte do problema, não sendo de conhecimento dos autores deste texto qualquer outro trabalho após o citado que aprofunda neste contexto. A complexidade do distritamento envolve dividir o grafo em distritos que possuam balanceamento de demanda de trabalho, enquanto sejam contínuos e mais compactos possíveis. Além disso, busca-se o mínimo de *deadhead* no distrito, ou seja, cada distrito precisa ser mais Euleriano possível, para que a partir do depósito que cada um possui, o número de arestas percorridas mais de uma vez seja o menor possível.

Este estudo propõe uma heurística construtiva, a qual através de uma abordagem gulosa, constrói a partir dos depósitos a borda de cada distrito, expandindo as fronteiras de forma similar a uma Busca em Largura. Ademais, abre-se o caminho para a continuar a pesquisa considerando diferentes formas de expansão de fronteiras, paralelização considerando cada vértice de depósito e por fim utilização de algoritmos de busca local nas divisões dos distritos. Proposto em formato em formato de artigo de acordo com as normas da SBC, esta pesquisa almeja a futura publicação na área.



**REFERÊNCIAS**

GARCÍA-AYALA, G. et al. A novel model for arc territory design: promoting eulerian districts. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 23, n. 3, p. 433–458, 2016.

MUYLDERMANS, L.; CATTRYSSSE, D.; OUDHEUSDEN, D. V. District design for arc-routing applications. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 54, n. 11, p. 1209–1221, 2003.

MUYLDERMANS, L. et al. Districting for salt spreading operations. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 139, n. 3, p. 521–532, 2002.



**APÊNDICE A – Artigo segundo às normas da Sociedade Brasileira de  
Computação**

# Uma heurística construtiva para o problema de particionamento de arestas em distritos Eulerianos

Álvaro Martins Espíndola<sup>1</sup>, Mayron César O. Moreira<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação  
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Universidade Federal de Lavras – Lavras, MG – Brasil

alvaro.espindola@estudante.ufla.br, mayron.moreira@ufla.br

**Abstract.** *This paper proposes a heuristic solution for the district design problem considering Eulerian districts, which arises in many forms as postal delivery, meter readings, winter gritting/snow salt spreading, road maintenance, and municipal solid waste collection. The biggest challenge in this problem is to partition a graph in districts that can be traversed with minimum road repetition and equal workload distribution. A series of instances, up to 401 nodes and 764 edges, from the state of the art literature were solved considering workload distribution, node parity, district compactness, and continuity while minimizing the objective function; with maximum execution time of 6.9 seconds. The proposed algorithm can achieve feasibility and be an alternative way to solve the problem in large-scale instances since it does not need to consider district connectivity opposed to the exact model in the state of the art.*

**Resumo.** *Este trabalho propõe uma solução heurística para o problema de particionamento de arestas considerando distritos Eulerianos, o qual se revela presente em contextos como entrega de correspondências, leitura de medidores, coleta de neve, manutenção de estradas e coleta de lixo em municípios. O objetivo do problema consiste em dividir um grafo em distritos que possam ser percorridos evitando a repetição de vias e distribuindo a demanda total da forma mais igualitária possível. Instâncias de até 401 vértices e 764 arestas provenientes da literatura foram utilizadas para teste baseadas no estado da arte, as quais foram todas resolvidas considerando demanda, paridade dos vértices, compactidade e continuidade dos distritos; com tempo máximo de execução de 6.9 segundos. O algoritmo proposto encontra soluções factíveis para o problema, e pode ser um caminho para resolução de instâncias de larga escala considerando que o mesmo não necessita considerar a conectividade dos distritos, contrário ao estado da arte.*

## 1. Introdução

O problema de distritamento de regiões para fins logísticos está presente em diversos contextos, tais como entrega de correspondências, leitura de medidores, moagem de neve, manutenção de estradas e coleta de lixo em municípios. A modelagem deste problema, de acordo com [García-Ayala et al. 2016], se dá a partir de um grafo planar  $G = (V, E)$ , com o conjunto de vértices  $V = \{1, \dots, n\}$  representando as intersecções entre as ruas e o conjunto de arestas  $E = e = (u, v); u, v \in V$  indicando as ruas que



compõem a região estudada. Sem perda de generalidade, supomos que o conjunto de vértices  $P = \{1, \dots, k\} \subseteq V$  corresponde aos depósitos dos quais os percursos do grafo partem e retornam. Cada aresta  $e \in E$  possui uma demanda  $d_e$  clientes a serem atendidos, e uma distância  $b_{ep}$  em relação ao depósito  $p \in P$ . O objetivo do problema consiste em encontrar uma  $k$ -partição do conjunto de arestas  $E$ , minimizando a distância das arestas de cada distrito em relação ao depósito que as atende, de modo que as restrições abaixo sejam respeitadas.

1. Cada aresta (rua) deve ser atendida por exatamente um depósito;
2. Cada distrito possui exatamente um depósito;
3. A demanda total do distrito deve estar dentro de uma tolerância aceitável;
4. Os distritos são conexos;
5. Cada distrito deve ser o mais Euleriano possível.

Como já conhecido na literatura, um grafo conexo é Euleriano se nele existe uma trilha que saia de um vértice, percorra todas as arestas uma única vez e retorne ao mesmo. No contexto estudado, tal necessidade é relevante, visto que, durante o roteamento, as ruas não seriam percorridas mais de uma vez. No caso em que isso não seja possível (vértices com número ímpar de arestas incidentes), a ideia é minimizar o número de vezes que uma rua se repete no percurso.

O arcabouço de conhecimentos na literatura de problemas que tratam do particionamento de arcos para seu posterior roteamento é ainda recente. [Muyldermans et al. 2002] foram os primeiros a estudarem este problema, através de uma formulação inteira mista para melhorar a distribuição de sal no inverno em regiões que sofrem com intensas nevascas. Os autores levam em consideração também os aspectos de balanceamento da carga de trabalho, a qualidade do roteamento e a compactidade dos distritos. Na sequência, [Muyldermans et al. 2003] generalizaram a abordagem anterior para outras funções objetivo, incluindo uma transformação do grafo estudado em uma versão “Eulerizada”, a fim de tratar melhor o roteamento.

[Mourão et al. 2009] estuda um caso específico de particionamento de arestas com posterior roteamento. Nesse estudo, a contiguidade dos distritos não é considerada relevante, o que não se enquadra no contexto do problema do presente trabalho. Entretanto, em anos mais recentes, três outros trabalhos se destacaram na proposição de algoritmos para problemas inseridos neste contexto, como há de se ver a seguir.

Em [Butsch et al. 2014] desenvolve-se uma heurística construtiva com busca local baseada em estratégias tabu. Neste problema, o distritamento possui designação completa de arcos a distritos e exclusão (proibição) da combinação de arestas e distritos específicos durante a execução. Sua função objetivo é composta por uma soma ponderada dos seguintes critérios: *(i)* balanceamento de demanda entre os distritos; *(ii)* tempo desperdiçado por múltiplas visitas a arcos; e *(iii)* compactidade dos distritos.

[Assis et al. 2014] apresentam um estudo para o problema de leitura de medidores em uma companhia energética do estado de São Paulo. Através de uma adaptação da metaheurística GRASP, os autores consideram balanceamento de atendimento de demanda nos distritos, contiguidade do particionamento e similaridade da alocação dos arcos em relação à solução implantada pela empresa, a fim de evitar mudanças bruscas com o que já está implementado.

O estudo referência deste plano de trabalho foi proposto por [García-Ayala et al. 2016]. Os autores resolvem o particionamento de arcos promovendo, na medida do possível, a criação de distritos Eulerianos. O objetivo consiste em minimizar a distância dos arcos de cada distrito ao seu depósito, em um esquema similar ao clássico problema das  $p$ -medianas. Um modelo matemático inteiro-misto é proposto, com um conjunto de restrições de conectividade com cardinalidade exponencial. A resolução do problema se dá por meio de uma implementação do algoritmo *Branch-and-Bound* (B&B) usando um *software* comercial. Os autores relaxam as restrições exponenciais, e inserem cortes sempre que a melhor solução encontrada possui distrito desconexo.

Ao nosso conhecimento, não existe na literatura um estudo de algoritmos construtivos para o problema de particionamento de arestas tal como o abordado por [García-Ayala et al. 2016]. Este trabalho pretende preencher esta lacuna, com as seguintes contribuições:

- Proposição de uma heurística construtiva que visa selecionar arestas, a fim de minimizar a distância em relação aos depósitos. Tal algoritmo deve viabilizar as restrições de demanda e conectividade dos distritos, reduzindo a perda de paridade dos vértices dos distritos.
- Geração de novo protocolo de testes para uma futura comparação com o método [García-Ayala et al. 2016].
- Garantia de que as restrições de conectividade sejam atingidas através da expansão de bordas.
- Disponibilização do código pelo GitHub.

Espera-se que a pergunta de pesquisa “É possível desenvolver uma heurística construtiva eficiente que obtenha soluções viáveis para o problema descrito” seja respondida a partir de uma análise experimental. O restante deste documento é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, será exposto o estado da arte com o método proposto por [García-Ayala et al. 2016], analisando o que a abordagem contempla. Na Seção 3, apresenta-se a heurística construtiva proposta por este trabalho. A Seção 4 reporta os resultados obtidos pela heurística e detalhes técnicos do algoritmo. Por último, a Seção 5 apresenta as conclusões e propostas para futuras pesquisas.

## 2. Método Proposto por [García-Ayala et al. 2016]

O modelo linear inteiro de [García-Ayala et al. 2016] propõe uma função objetivo que consiste em minimizar a soma das distâncias de cada aresta para o seu respectivo depósito. Para isso, foram definidas restrições que incorporam as exigências do problema inicial: divisão de demanda entre distritos, continuidade dos distritos e paridade dos vértices. Nas equações, lê-se a seguinte notação.

- Parâmetros:
  - $b_{pe}$ : menor distância entre um depósito  $p \in P$  até uma aresta  $e = (i, j) \in E$ , definida pelo o menor caminho entre os menores caminhos dos vértices da aresta até o depósito. Formalmente:  $b_{pe} = \min\{f_{pu}, f_{pv}\}$ , em que  $f_{uv}$  é o menor caminho entre dois vértices  $u, v \in V$ .
  - $\sigma(e)$ : conjunto de arestas adjacentes à aresta  $e \in E$ .

- $\delta(i)$ : conjunto de arestas incidentes ao vértice  $i \in V$ .
- $V^o$ : subconjunto de vértices ( $V^o \subset V$ ) de grau ímpar.
- $V^e$ : subconjunto de vértices ( $V^e \subset V$ ) de grau par.
- $\sigma(S)$ : conjunto de corte arestas, relativo ao subconjunto  $S \subset E$ . Seja  $V(S)$  o conjunto de vértices tal que cada elemento de  $V(S)$  possui alguma extremidade em  $S$ . As arestas em  $\sigma(S)$  possuem um extremo em  $V(S)$  e outro extremo em  $V \setminus V(S)$ .
- $d_e$ : valor da demanda de uma aresta  $e \in E$ .
- $\bar{D}$ : demanda média por distrito, definida por  $\bar{D} = \sum_{e \in E} d_e / |P|$ .
- $M$ : um número significativamente grande, definido nesse estudo como o maior grau entre os vértices do grafo.
- $\tau_1 \in [0, 1]$ : tolerância para o desvio de balanceamento de demanda entre distritos.
- $\tau_2 \in [0, 1]$ : tolerância para a perda de paridade dos vértices nos distritos.

• Variáveis:

- $x_{pe}$ : variável binária igual a 1 se e somente se a aresta  $e \in E$  foi designada ao distrito  $p \in P$ .
- $w_{pi}$ : variável binária igual a 1 se e somente se o vértice  $i \in V$  possui alguma aresta designada ao distrito  $p \in P$ .
- $z_{ip}$ : variável inteira que armazena o valor do grau do vértice  $i \in V$  (número de arestas incidentes) no distrito  $p \in P$ .
- $z_{ip}^0$ : variável binária igual a 1 se e somente se o grau do vértice  $i \in V$  no distrito  $p \in P$  é ímpar.
- $r_i$ : variável binária igual a 1 se e somente se o vértice  $i \in V$  perdeu paridade ao ter uma aresta designada a um distrito.

Por definição, um vértice “perde paridade” em dois casos. No primeiro, ele possui grau par no grafo e em pelo menos um distrito existe um número ímpar de arestas incidentes a ele. Já no segundo, caso o grau do vértice for ímpar originalmente, o vértice “perde a paridade” se em mais de um distrito possuir um número ímpar de arestas incidentes a ele. O modelo proposto na literatura é mostrado na sequência.

$$\text{minimize } g(x) = \sum_{p \in P} \sum_{e \in E} b_{pe} x_{pe} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{p \in P} x_{pe} = 1 \quad e \in E \quad (2)$$

$$\sum_{s \in \sigma(S)} x_{ps} - \sum_{s \in S} x_{ps} \geq x_{pe} - |S| \quad p \in P, e \in E, S \subset E \setminus \sigma(e) \quad (3)$$

$$\bar{D}(1 - \tau_1) \leq \sum_{e \in E} d_e x_{pe} \quad p \in P \quad (4)$$

$$\sum_{e \in E} d_e x_{pe} \leq \bar{D}(1 + \tau_1) \quad p \in P \quad (5)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_{pe} \leq M w_{pi} \quad p \in P, i \in V \quad (6)$$

$$w_{pi} \leq \sum_{e \in \delta(i)} x_{pe} \quad p \in P, i \in V \quad (7)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_{pe} = 2z_{ip} + z_{ip}^0 \quad p \in P, i \in V \quad (8)$$

$$r_i \leq \sum_{p \in P} z_{ip}^0 \quad i \in V^e \quad (9)$$

$$|P|r_i \geq \sum_{p \in P} z_{ip}^0 \quad i \in V^e \quad (10)$$

$$r_i \leq \sum_{p \in P} z_{ip}^0 - 1 \quad i \in V^o \quad (11)$$

$$|P|r_i \geq \sum_{p \in P} z_{ip}^0 - 1 \quad i \in V^o \quad (12)$$

$$\frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} r_i \leq \tau_2 \quad (13)$$

$$w_{pi} \in \{0, 1\} \quad p \in P, i \in V \quad (14)$$

$$x_{pe} \in \{0, 1\} \quad p \in P, e \in E \quad (15)$$

$$z_{ip}^0 \in \{0, 1\} \quad i \in V, p \in P \quad (16)$$

$$r_i \in \{0, 1\} \quad i \in V \quad (17)$$

$$z_{ip} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad p \in P, i \in V. \quad (18)$$

A função objetivo definida pela Equação (1) foca na compacidade do distrito minimizando a soma das distâncias das arestas até o depósito designado. As Restrições (2) definem que cada aresta seja designada a exatamente um distrito.

A conectividade dos depósitos é definida pelas Restrições 3, as quais têm um papel essencial no problema. Seja  $S \subset E \setminus \sigma(e)$  um subconjunto de  $E$  no qual as arestas não são adjacentes a aresta  $e$ . Caso esta não seja designada a  $p$ , ou seja  $x_{pe} = 0$ , a restrição torna-se redundante. Portanto, no mesmo raciocínio, se ao menos uma aresta  $s \in S$  não seja designada ao distrito  $p$  qualquer em questão, o termo à esquerda se torna um pouco

menor que  $|S|$  e a restrição novamente redundante. Dessa forma o único jeito de 3 não entrar nesses casos é se todas as arestas em  $S$  forem do mesmo distrito  $p$ , forçando o primeiro termo mais à esquerda da inequação ser maior ou igual a 1. Assim ao menos uma aresta no corte do conjunto  $S$  precisa ser designada a  $p$  também.

Já as Restrições (4) e (5) estabelecem que o somatório das demandas, em cada distrito, pode variar um percentual para menos ou para mais em relação a uma divisão igualitária das demandas em todos os distritos, representada por  $\bar{D}$ .

As Restrições (6) e (7) indicam o acoplamento das variáveis  $x$  e  $w$ . Dessa forma, uma aresta  $e \in E$  é designada a um distrito  $p \in P$  se e somente se seus dois vértices extremos forem alocados ao mesmo depósito. Nas Restrições (8), determina-se o grau do vértice para cada distrito, calculando através da variável  $z_{pi}^0$  se o vértice  $i$  possui um número ímpar (par) de arestas incidentes a ele em  $p$ , atribuindo o valor um (zero) a  $z_{pi}^0$ .

As Restrições (9)-(12) são as inequações que avaliam se um vértice  $i$  perdeu a paridade, atribuindo, se for o caso,  $r_i = 1$ . Caso o vértice  $i$  tenha grau par ( $i \in V^e$ ),  $i$  perderá a paridade se em algum distrito  $p \in P$ , o valor de  $z_{pi}^0$  for igual a 1 (Restrições (9) e (10)). As Restrições (11) e (12) possuem semântica similar às duas anteriores. No entanto, são voltadas para vértices de grau ímpar ( $i \in V^o$ ). Note que, nesse caso, é esperado que em ao menos um distrito  $p$  tenha-se  $z_{pi}^0 = 1$ . Logo,  $r_i$  será igual a 1 se houver mais de um distrito com vértices de grau ímpar perdendo sua paridade. Por fim, as Restrições (13) estabelecem a perda de paridade geral dentro do limite estipulado por  $\tau_2$ . As Restrições (14)-(18) definem o domínio das variáveis de decisão.

[García-Ayala et al. 2016] afirmam que situações às quais o número de vértices de grau ímpar é relativamente grande em relação ao número de vértices de grau par, indica-se a substituição das Restrições (9)-(13) por:

$$\sum_{i \in V} \sum_{p \in P} z_{pi}^0 - l = |V^o| \quad (19)$$

$$l \leq \tau_2(|V^o| + l). \quad (20)$$

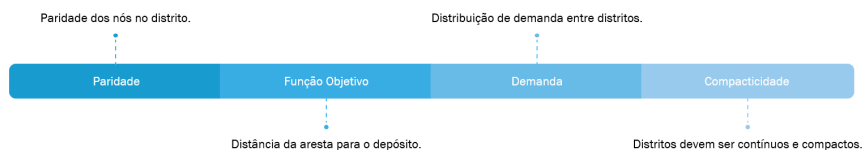
em que  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  determina a “imparidade” obtida pela designação de arestas aos distritos. Essas duas restrições de paridade reduzem a quantidade de variáveis binárias no modelo matemático, visto que o conjunto de variáveis  $r_i$  se tornam desnecessárias. O estudo de [García-Ayala et al. 2016] reporta testes com ambas as formas de garantir distritos mais Eulerianos.

## 2.1. Algoritmo

As Restrições (3) são responsáveis por delimitar que todos os distritos sejam contínuos. Porém, dessa equação surgem um número exponencial de subconjuntos corte  $S$ . Por tal dificuldade, o trabalho de [García-Ayala et al. 2016] relaxa esta restrição durante o algoritmo e após uma solução obtida, verifica se há distritos desconexos. Caso aconteça, o modelo é executado novamente com cortes onde a restrição de conectividade é violada, repetindo todo o processo até que a solução ótima seja encontrada. Na sequência, apresenta-se o algoritmo em detalhes.

1. Resolva o modelo linear inteiro dado pelas Restrições (1)-(18), eliminando as Restrições (3).
2. Identifique, através de um algoritmo de busca em grafos (Busca em Largura ou Busca em Profundidade) se existem componentes desconexas na solução do passo anterior.
3. Caso existam violações de conectividade, faça os cortes referentes e retorne ao Passo 1.
4. Caso nenhuma restrição for violada, pare e retorne a solução ótima.

O algoritmo irá convergir baseado que algoritmo de busca em grafos implementado retornará um conjunto vazio ou o conjunto com as restrições de conectividade violadas, as quais existem em número finito. Através dos experimentos computacionais, o algoritmo implementado por [García-Ayala et al. 2016] encontra a solução ótima para a maioria das instâncias testadas. Todavia, o trabalho não apresenta resultados para instâncias grandes, e não disponibiliza o código do método para que os experimentos possam ser replicados. Na Figura 1 temos as quatro principais restrições que o estado da arte apresenta, esta figura será importante para exemplificar a lacuna preenchida pelo presente trabalho.



**Figure 1. As quatro principais restrições do modelo de [García-Ayala et al. 2016]**

Analisando as restrições, é possível inferir que o algoritmo não escala bem para instâncias grandes devido ao fato de que as Restrições (3) impõem a necessidade de se identificar componentes desconexas, o que, em larga escala, significaria uma combinação exaustiva. No próprio trabalho de [García-Ayala et al. 2016], é sugerido um limite de 60.000 (sessenta mil) segundos para execução de cada instância e, apesar de quase todas atingirem valor ótimo rapidamente, não há dados de instâncias que representem grafos densos com vértices na ordem de milhar ou maior. Na Figura 2 está a solução exata encontrada pelo estado da arte para a instância Lpr-a-03 4 depósitos, vale ressaltar que não há definição da localidade dos depósitos.

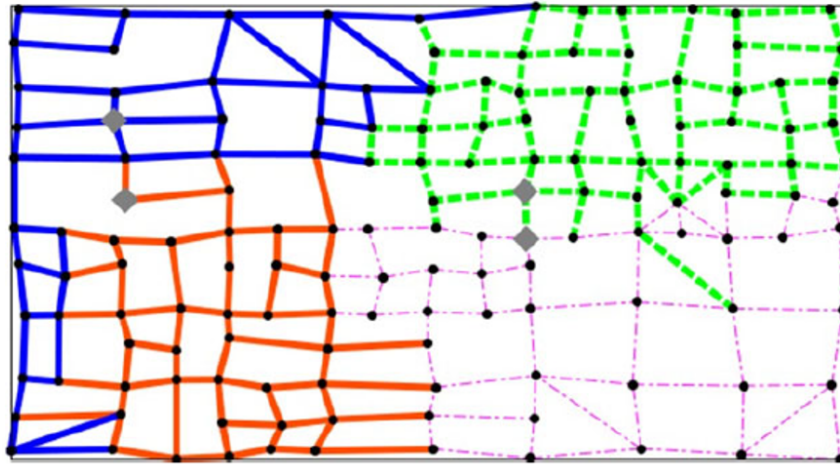


Figure 2. Solução exata para a instância Lpr-a-03 com 4 depósitos pela [García-Ayala et al. 2016]

### 3. Heurística Construtiva

A heurística proposta neste trabalho visa apresentar uma solução factível, que seja escalável para instâncias de grande porte. A ideia principal é a expansão por arestas a partir do vértice do depósito, garantindo conexidade, com a priorização através de um critério de qualidade pré-estabelecido. Neste estudo, utilizam-se três métricas de avaliação da expansão de um distrito, explicitadas mais adiante nesta seção. Para o início de cada distrito, é escolhida uma aresta aleatória das incidentes no vértice do depósito, dessa forma a borda inicia-se com uma aresta inserida. Nos algoritmos a seguir, lê-se:

- $D_p \geq 0$ : demanda total do distrito  $p \in P$ .
- $B_p \subset E$ : arestas que fazem parte da fronteira (borda) do distrito  $p \in P$ .
- $\alpha$ : critério heurístico de ordenação das arestas, inseridas a cada iteração do algoritmo.
- $\beta \geq 1$ : total de arestas inseridas em cada expansão de um distrito.

Na Figura 3 é possível perceber que este presente trabalho não se preocupa com a conexidade dos distritos, a qual é garantida pela expansão de bordas, desafio maior do trabalho de [García-Ayala et al. 2016], no qual é resolvido por uma combinação exaustiva, como já explicado em 2.

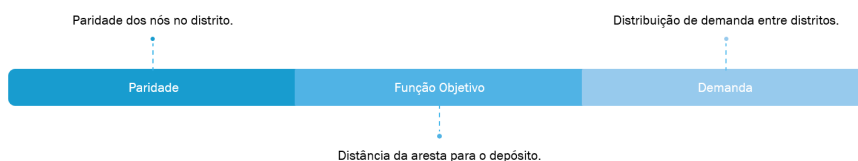


Figure 3. As principais restrições da heurística proposta

---

**Algoritmo 1** Heurística Construtiva

---

```
1: Seja  $U$  o conjunto de arestas não alocadas a algum distrito.  $\triangleright$  Inicialmente,  $U \leftarrow E$ .
2: while  $U \neq \emptyset$  do
3:    $p \leftarrow \text{distrito-mais-desbalanceado}()$ .  $\triangleright$  Algoritmo 2.
4:   Seja  $C \subset E$  as arestas candidatas a serem designadas a  $p$ .
5:   for  $e \in \mathcal{B}_p$  do
6:     Seja  $\mathcal{N}_e$  o conjunto de arestas pertencentes a  $\sigma(e)$ 
7:      $C \leftarrow C \cup \mathcal{N}_e$ .
8:   end for
9:    $C \leftarrow \alpha(C)$   $\triangleright$  Arestas candidatas ordenadas a partir do critério  $\alpha$ .
10:  Seja  $C' \subset C$  um subconjunto de arestas a serem selecionadas de  $C$ .
11:  if  $\beta \leq |C|$  then
12:    Selecione  $\beta$  arestas de  $C$  e atribua a  $C'$ , com base no critério heurístico  $\alpha$ .
13:  else
14:     $C' \leftarrow C$ .
15:  end if
16:   $\mathcal{B}_p \leftarrow \mathcal{B}_p \cup C'$ .
17:   $U \leftarrow U \setminus C'$ .
18: end while
```

---

O Algoritmo 1 descreve o funcionamento da heurística construtiva proposta. As linhas 2-17 garantem a designação de todas as arestas a algum distrito. Através do Algoritmo 2, o depósito mais desbalanceado é escolhido. Leva-se em conta dois casos: (i) todos depósitos estão dentro do limite  $[\bar{D}(1 - \tau_1), \bar{D}(1 + \tau_1)]$ , então, o mais distante do limite superior é escolhido; (ii) ainda há depósitos fora do intervalo desejável. Logo, o distrito com menor demanda total é escolhido.

A borda de cada depósito é composta pelas arestas adjacentes a outras que ainda não foram alocadas a distritos ou a arestas que fazem parte de seu próprio distrito. Como uma forma de otimizar o desempenho da heurística, não é preciso recalcular a fronteira de arestas, em relação aos distritos, a cada iteração, basta expandi-la a partir de um procedimento similar ao que é feito em uma busca em largura em grafos. Em termos de linguagem de programação, utiliza-se uma estrutura *map*, que relaciona o identificador de um vértice (*id*) a uma aresta incidente a ele, a qual foi inserida na borda. O acesso a *map* do vértice é feito em tempo amortizado de  $O(1)$ <sup>1</sup>.

Para exemplificar essa atualização, suponha a inserção de uma aresta  $e = (u, v)$  em um distrito  $p$ . Se  $\mathcal{B}_p = \emptyset$ , insere-se a aresta  $e$  no distrito  $p$ . Caso contrário, verifica-se a presença de uma extremidade da aresta  $e$  com um vértice  $u$  na borda, através do seu *id*. Insere-se, na sequência, o *id* da outra ponta  $v$ . Ao final, caso o primeiro vértice citado não consiga expandir, ou seja, não possua arestas adjacentes sem designação de distrito, ele é retirado da borda. O raciocínio é análogo se  $v$  está na borda.

Considerando um conjunto de arestas candidatas a serem inseridas como parte de um distrito, foram três critérios heurísticos  $\alpha$  (Seção 3) adotados para a seleção da aresta a ser alocada a um distrito:

---

<sup>1</sup>Fonte: <https://wiki.python.org/moin/DictionaryKeys>



**Critério 1** Escolha da aresta pelo *menor valor da soma ponderada do menor caminho em relação ao depósito do distrito, demanda da aresta e maior número de vértices com grau par no distrito*, sendo  $\min((-1 * demanda) + (-1 * paridade) + funcao_objetivo)$ . A paridade da aresta é definida pela soma da paridade de seus vértices, a qual será 1 para caso o vértice se torne par, e 0, se o vértice tenha grau ímpar com adição da aresta ao distrito. Logo, o valor máximo deste termo é 2, com ambos vértices com grau par naquele distrito. Para que a escolha do menor valor da soma fique adequada aos três critérios, multiplica-se o valor da demanda e da paridade por  $-1$ . Os itens da soma são então normalizados, considerando o maior valor de menor caminho entre todos os vértices, a maior demanda de todas as arestas e a paridade máxima. Caso existam mais de uma aresta com a mesma prioridade, seleciona-se aquela com menor índice lexicográfico.

**Critério 2** Escolha da aresta que cause o *menor incremento do valor da função objetivo*. Caso existam mais de uma aresta com a mesma prioridade, seleciona-se aquela com menor índice lexicográfico.

**Critério 3** Escolha da aresta que *aumente mais o somatório das demandas do distrito*. Caso existam mais de uma aresta com a mesma prioridade, seleciona-se aquela que cause o menor incremento da função objetivo.

---

**Algoritmo 2** Escolha do distrito mais desbalanceado

---

**function** DISTRITO-MAIS-DESBALANCEADO( )

Seja  $p'$  do distrito mais desbalanceado quanto à demanda.

**if**  $\exists p \in P; \mathcal{D}_p \notin [\overline{D}(1 - \tau_1), \overline{D}(1 + \tau_1)]$  **then**

$p' \leftarrow \underset{\overline{D}(1+\tau_1)}{\operatorname{argmin}}_{p \in P; \mathcal{D}_p \notin [\overline{D}(1-\tau_1), \overline{D}(1+\tau_1)]} (\mathcal{D}_p)$ .

**else**

$p' \leftarrow \operatorname{argmax}_{p \in P} (\overline{D}(1 + \tau_1) - \mathcal{D}_p)$ .

**end if**

**return**  $p'$ .

**end function**

---

## 4. Experimentos Computacionais

Os experimentos foram executados em um computador Lenovo L340, com uma CPU Intel Core i5-9300H 2.40 GHz, 8GB de RAM e Windows 11. A heurística foi codificada em Python 3.10. Na Seção 4.1 serão descritas as instâncias utilizadas para os testes, advindas do trabalho de [García-Ayala et al. 2016]. A Seção 4.2 apresenta uma comparação dos valores das soluções obtidas pela heurística, comparando seu desempenho em termos de função objetivo, tempo computacional, atendimento da restrição de demanda, atendimento da restrição de paridade, para distintos valores de  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

### 4.1. Instâncias

A base de dados proposta por [García-Ayala et al. 2016] apresenta problemas quanto a indicação explícita do significado dos parâmetros do problema nos arquivos disponíveis. Além disso, outros fatores impossibilitaram uma comparação direta com os resultados de [García-Ayala et al. 2016]. Esses são listados abaixo.

- A localidade dos vértices é indicada no plano cartesiano, mas os vértices identificadores dos depósitos não são reportados.
- Os autores não apresentam o esquema utilizado para a geração das instâncias do problema em estudo.
- Não há o acesso ao algoritmo implementado pelos autores, para posterior execução com versões recentes de programas resolvedores de modelos lineares inteiros.

Diante disso, as comparações entre soluções consideram as variações da heurística construtiva, apresentada na Seção 3. Seguindo as recomendações de [García-Ayala et al. 2016], foi considerada a topologia do grafo sem direcionamento de arestas e para o peso de cada aresta, foi levado em consideração o atributo *trav\_cost*, presente nas instâncias. Tomava-se o atributo *cost* sempre quando alguma aresta não possuía a indicação de *trav\_cost*. Vale ressaltar que o nome das instâncias é acompanhado por *pXX*, que significa o número de depósitos, selecionados aleatoriamente entre os vértices. Neste estudo foram selecionados vértices aleatórios para os depósitos em cada instância.

Na Tabela 1 estão todas as instâncias utilizadas para os testes com o número de arestas e vértices. Pode-se perceber que são grafos bem similares na questão de densidade, alguns sendo até variações com o mesmo número para  $|V|$  e  $|E|$ ; em destaque, a maior instância utilizada.

### 4.2. Experimentos

Os experimentos a seguir utilizam três critérios de qualidade: (i) função objetivo; (ii) percentual de vértices que perderam a paridade (de acordo com o mesmo critério definido na Seção 2.1); e (iii) tempo de execução. A média das distâncias entre os vértices que representam os depósitos é utilizada como parâmetro auxiliar para a interpretação dos resultados. Tal parâmetro ligado à instância tem como objetivo estimar a proximidade entre todos os depósitos.

Como no início do algoritmo a aresta inicial do distrito é escolhida de modo aleatório, foram também executadas 10 vezes para cada instância variando o valor de  $\tau_1$  em cinco opções, dadas por  $\{1, 0; 0, 75; 0, 5; 0, 25; 0, 1\}$ . Por fim, foram executadas 20

Instância	$ V $	$ E $
Lpr-a-01-p03	28	47
Lpr-a-02-p02	53	91
Lpr-a-02-p03	53	91
Lpr-a-03-p02	143	217
Lpr-a-03-p03	143	217
Lpr-a-03-p04	143	217
Lpr-a-03-p05	143	217
Lpr-a-04-p04	195	357
Lpr-a-05-p04	321	593
Lpr-b-01-p02	28	47
Lpr-b-01-p03	28	47
Lpr-b-02-p02	53	91
Lpr-b-03-p04	163	292
Lpr-b-04-p04	248	465
<b>Lpr-b-05-p06</b>	<b>401</b>	<b>764</b>
Lpr-c-01-p03	28	47
Lpr-c-02-p03	53	91
Lpr-c-03-p04	163	292
Lpr-c-04-p03	277	516
Lpr-c-05-p04	369	692

**Table 1. Instâncias utilizadas**

instâncias descritas na Tabela 1 com diferentes números de depósitos, totalizando 1.000 execuções da heurística ( $10 \times 5 \times 20$ ), com  $\beta = 1$ <sup>2</sup>.

Os gráficos abaixo possuem uma série para cada  $\alpha$ , logo, em cada instância existem três séries representando os  $\alpha$  apresentados na Seção 3. É importante ressaltar que para os gráficos de perda paridade, uma alta porcentagem indica baixo desempenho considerando os distritos Eulerianos. Diante dos 1.000 testes executados, decidiu-se por disponibilizar as tabelas completas de resultados junto ao código do trabalho, no repositório acesso pelo link <https://github.com/alvaromaresp/eulerian-districting-problem-tcc>. Nesta seção, serão expostos resultados das instâncias *Lpr-a-03-p05*, *Lpr-b-05-p06* e *Lpr-c-05-p04*, as maiores da base de dados citada na Tabela 1. Como descrito no algoritmo 2, é requisito que todos os distritos estejam dentro do intervalo de divisão de demanda. Logo, como todas as instâncias atenderam a restrição, esses dados foram omitidos por não apresentarem conclusões significativas. O desvio padrão de todas as médias calculadas para todas instâncias estão disponíveis nas tabelas completas no repositório.

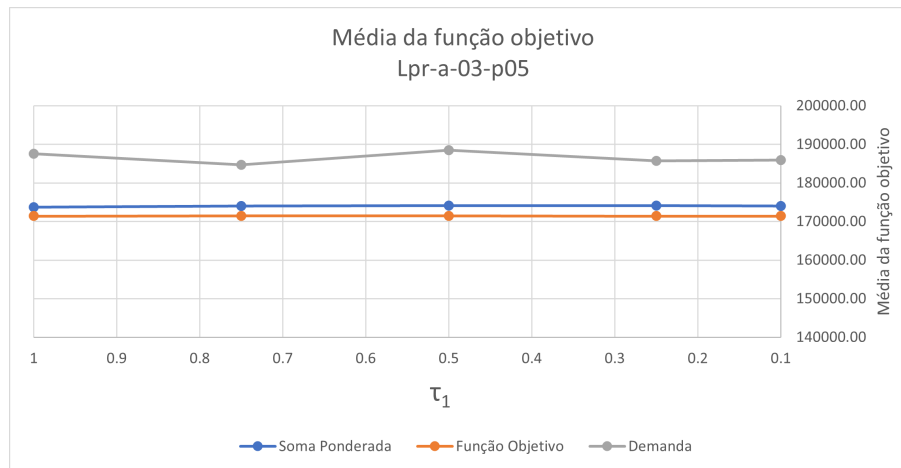
Na Tabela 2, estão a média das distâncias entre os depósitos, para cada instância considerada. Esse dado é relevante pois depósitos muito próximos ou muito distantes impactam na função objetivo. Por exemplo, grafos com depósitos adjacentes precisam dividir seus arredores enquanto distritos esparsos conseguem expandir suas fronteiras sem interferência dos demais.

<sup>2</sup>Parâmetro que indica quantas arestas são inseridas quando um determinado distrito vai expandir sua fronteira. Veja a Seção 3.

Instância	Média de distância
Lpr-a-03-p05	4580.50
Lpr-b-05-p06	4058.69
Lpr-c-05-p04	2177.07

**Table 2. Média da distância dos depósitos entre si**

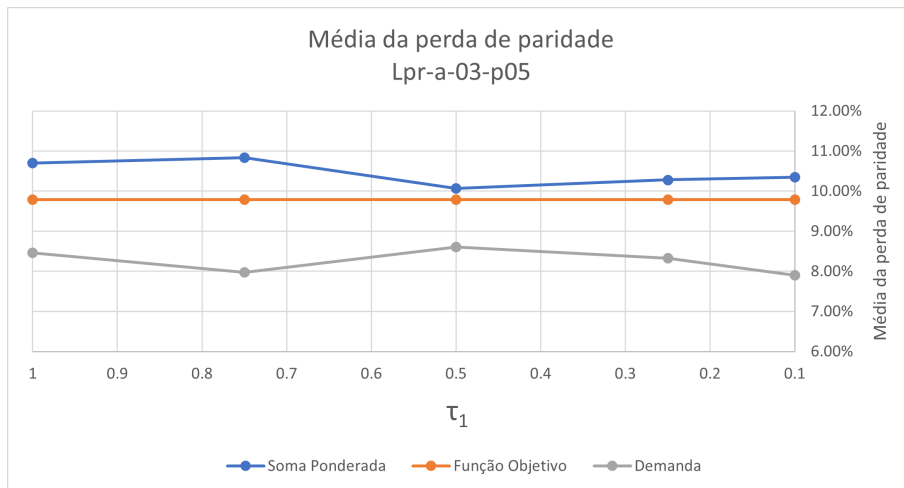
Na Figura 4, tem-se a relação de  $\tau_1$  com a função objetivo para a instância *Lpr-a-03-p05*. A variação de  $\tau_1$  influenciou apenas nos resultados da escolha por maior demanda. Teoricamente, a heurística encontra mais facilidade em factibilizar as soluções quanto maior for o valor de  $\tau_1$ . No entanto, note que o valor da função objetivo pouco se alterou para as variações testadas desse parâmetro, considerando o critério de escolha da aresta guiada pela demanda. Constatou-se que esse tipo de escolha contorna as dificuldades que o método encontraria para diferentes valores de  $\tau_1$ . Com a escolha das arestas com maiores demandas, a heurística tenderia a viabilizar a solução de forma mais eficiente, não alterando de maneira drástica o valor da função objetivo. Os demais critérios não foram afetados e obtiveram valores próximos entre si, o que é previsto, dado que o parâmetro  $\tau_1$  tem relação direta com as restrições de demanda.



**Figure 4. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a função objetivo em Lpr-a-03-p05**

A Figura 5 mostra a perda de paridade. A escolha por arestas de maior demanda alcançou os melhores resultados para todas as variações de  $\tau_1$ , enquanto os critérios por minimização da função objetivo e por soma ponderada foram pouco afetados e tiveram resultados similares. Nota-se que a diferença entre os critérios provavelmente se deu pelo cerne do princípio das escolhas, já que tem-se valores melhores para o critério de maior demanda, o qual oscila pelo valor de  $\tau_1$ , enquanto os demais possuem certa estabilidade e proximidade, já que ambos consideram a função objetivo. Entretanto a diferença entre todos é de em torno de um vértice que perdeu a paridade, considerando 8% – 11,5% de 143 vértices, logo para um cenário de  $\tau_2 = 0.1$ , as instâncias seriam viáveis.

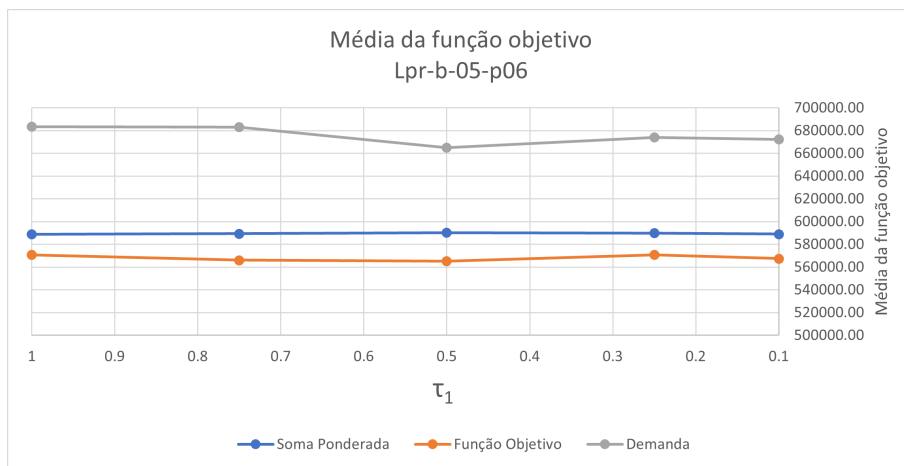
Na Figura 6 com a instância *Lpr-b-05-p06*, a seleção por maior demanda segue com piores resultados para a função objetivo. Dessa vez, a escolha por soma ponderada teve valores um pouco piores em comparação com o critério por minimização da função objetivo. Pela Tabela 2, pode-se perceber que os depósitos estão mais próximos do que



**Figure 5. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a perda da paridade em Lpr-a-03-p05**

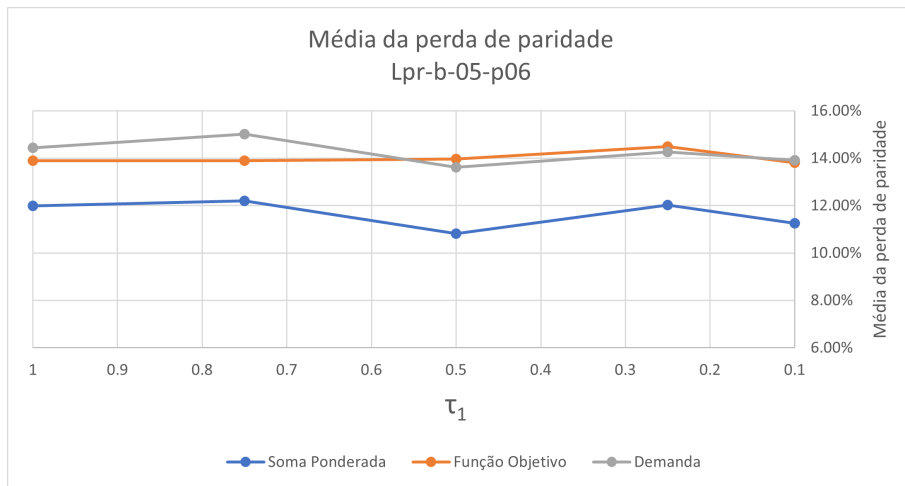
na instância anterior. Isso indica que o critério de escolha da aresta pelo menor caminho é mais apropriado para instâncias cujos depósitos estão mais próximos.

Na Figura 7, o termo que considera paridade no critério por soma ponderada aparenta ter dado diferença no resultado, alcançado uma menor média de perda da paridade. Isso se reafirma ao analisar os demais critérios que obtiveram resultados próximos e oscilaram com o mesmo comportamento.

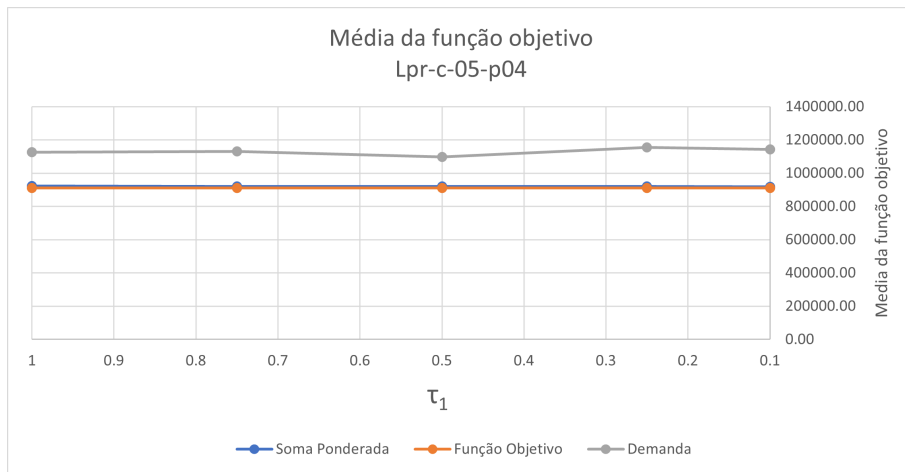


**Figure 6. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a função objetivo em Lpr-b-05-p06**

Na instância *Lpr-c-05-p04*, o critério por minimização da função objetivo se saiu melhor que os demais. Mesmo que a Figura 8 indique resultados similares com o critério da soma ponderada, a escolha de arestas pelo caminho mais curto obtém a perda da paridade (Figura 9) superior às outras duas métricas. Como nas outras instâncias, o critério por demanda se saiu pior em ambos os casos. Novamente, nas Figuras 8 e 9, a diferença de distância entre depósitos mostra influência nos resultados. Porém, provavelmente neste caso, os pesos das arestas eram em média menores que as nas outras instâncias. Logo, os depósitos estavam de fato distantes e os resultados da função objetivo nos critérios foram similares. Outra hipótese é que os depósitos estavam de fato perto e a heurística teve um



**Figure 7. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a perda da paridade em Lpr-b-05-p06**



**Figure 8. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a função objetivo em Lpr-c-05-p04**

desempenho baixo para os três critérios. O reflexo da distância pode estar estampado na diferença da perda de paridade na figura 9.

Em todos os 1.000 testes realizados, a heurística não ultrapassou 7 segundos de execução para achar uma solução factível. O maior tempo encontrado foi para a instância *Lpr-a-05-p04*, com  $\tau_1 = 0.75$  e média de distância de depósitos de 2828.25, a qual atingiu 6.93s em média com desvio padrão de 2.76s. Isso mostra a eficiência da abordagem proposta, e o seu potencial na resolução de problemas modelados em grafos de grande dimensão. Nas figuras 10 e 11 temos todas instâncias em um mesmo gráfico para facilitar a comparação, na primeira a função objetivo e na segunda a paridade.

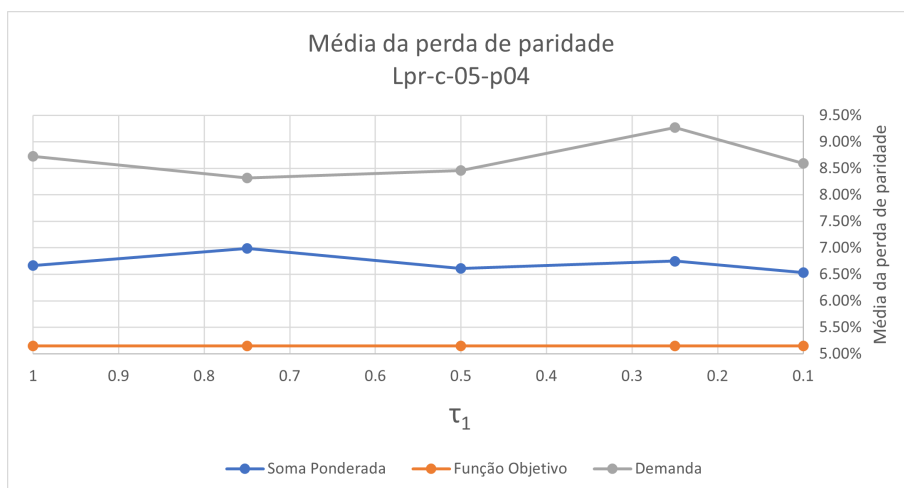


Figure 9. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a perda da paridade em Lpr-c-05-p04

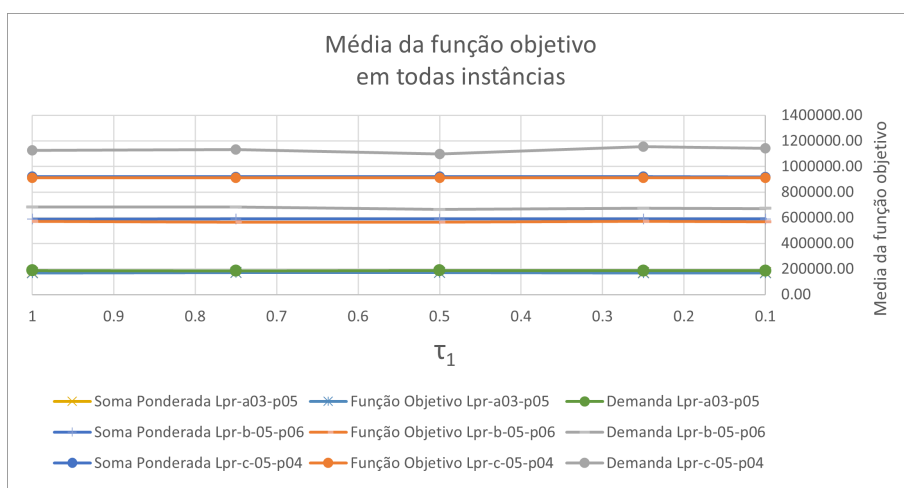


Figure 10. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a função objetivo em todas as instâncias.

## 5. Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho propõe uma heurística construtiva para a resolução do problema de particionamento de arestas considerando distritos Eulerianos. A pergunta de pesquisa formulada é definida por: “É possível desenvolver uma heurística construtiva eficiente que obtenha soluções viáveis para o problema estudado?”. A análise experimental de um conjunto de instâncias extraídas da literatura mostra que a heurística proposta encontra soluções que respeitam as restrições de demanda. Quanto à factibilidade das restrições de paridade, constata-se que as soluções da heurística garantem que no máximo 10% dos vértices percam paridade.

A escolha das arestas com maior prioridade para a expansão de um distrito considerou três critérios: (i) soma ponderada normalizada entre caminho mais curto, demanda e paridade do vértice adjacente a aresta; (ii) função objetivo; (iii) demanda. Com base nos resultados, fica claro que selecionar sempre as arestas com maior demanda não resulta em um bom desempenho visando a função objetivo. Os resultados em todas as instâncias para esse caso foram piores que a demais, e como em todos os casos as soluções

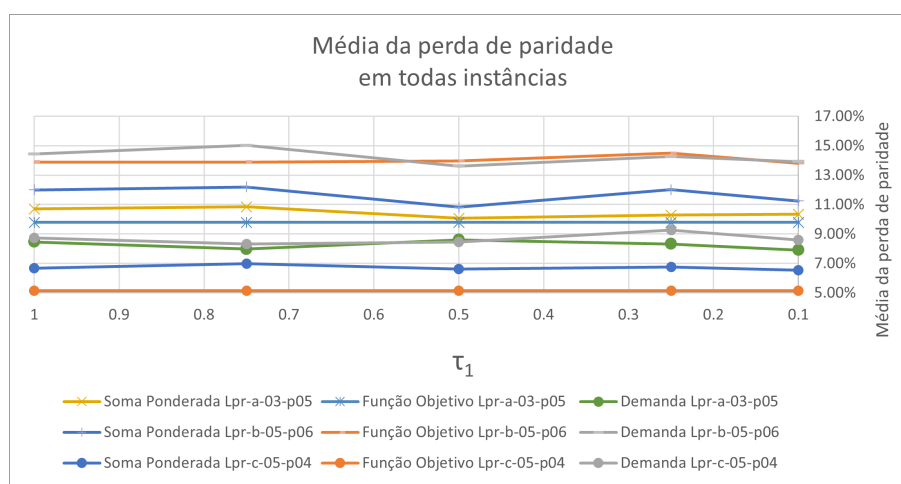


Figure 11. Gráfico que compara  $\tau_1$  com a perda da paridade em todas as instâncias.

ficaram dentro do intervalo definido por  $\tau_1$ , o algoritmo 2 se mostra suficiente para a distribuição de demanda para o presente trabalho. Isso também reflete nos resultados da soma ponderada, a qual teve resultados bem similares à escolha por minimizar a função objetivo.

Ainda na linha da análise dos resultados, como foi explicado em [García-Ayala et al. 2016] e reiterado acima neste trabalho, a localização dos depósitos e a distância entre si são de suma importância para o cálculo da função objetivo. O parâmetro  $\tau_1$  se mostrou importante para o balanceamento das demandas, mas como critério da heurística este não mostrou impacto direto.

Trabalhos futuros indicam a necessidade da implementação do modelo matemático inteiro-misto proposto por [García-Ayala et al. 2016]. Para tanto, é necessário que um trabalho envolvendo a geração de uma nova base de dados seja feito, priorizando a documentação e divulgação do conteúdo, o qual fará com que os estudos referentes a esse problema sejam reprodutíveis por outros autores. Isto junto aos resultados e pontos relacionados neste trabalho em relação à heurística e ao estado da arte, formam o novo protocolo de testes, em suma: (i) gerador de instâncias em qualquer escala; (ii) disponibilização do código fonte do estado da arte; (iii) identificação de qual método é adequado para quais contextos.

Além disso, o presente trabalho foi projetado para que se consiga seguir três linhas claras que afetariam o resultado da heurística: (i) variação do valor de  $\beta$  para que as fronteiras se expandam mais rápido com paridade distintas; (ii) paralelizar o crescimento das bordas com processos ou *threads* designados para cada depósito; (iii) execução de algoritmos de busca local nas fronteiras dos depósitos, onde pode se obter ganho. Assim a heurística terá mais dados para comparação com o modelo que garante solução ótima, esclarecendo em quais condições se deve optar por uma solução exata ou uma heurística.

## References

Assis, L. S., Franca, P. M., and Usberti, F. L. (2014). A redistricting problem applied to meter reading in power distribution networks. *Computers & Operations Research*,



41:65–75.

- Butsch, A., Kalcsics, J., and Laporte, G. (2014). Districting for arc routing. *INFORMS Journal on Computing*, 26(4):809–824.
- García-Ayala, G., González-Velarde, J. L., Ríos-Mercado, R. Z., and Fernández, E. (2016). A novel model for arc territory design: promoting eulerian districts. *International Transactions in Operational Research*, 23(3):433–458.
- Mourão, M. C., Nunes, A. C., and Prins, C. (2009). Heuristic methods for the sectoring arc routing problem. *European Journal of Operational Research*, 196(3):856–868.
- Muyldermans, L., Cattrysse, D., and Oudheusden, D. V. (2003). District design for arc-routing applications. *Journal of the Operational Research Society*, 54(11):1209–1221.
- Muyldermans, L., Cattrysse, D., Van Oudheusden, D., and Lotan, T. (2002). Districting for salt spreading operations. *European Journal of Operational Research*, 139(3):521–532.