



YURI ANDRADE DIAS MARTINS

**IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA POR MÉTODOS DE
OTIMIZAÇÃO E SUBESTRUTURAÇÃO
TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE MODELOS FEM DE
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

LAVRAS – MG

2022

YURI ANDRADE DIAS MARTINS

**IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA POR MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO E
SUBESTRUTURAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE MODELOS FEM DE
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira

Orientador

LAVRAS – MG

2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Martins, Yuri Andrade Dias

Identificação Paramétrica por Métodos de Otimização e Subestruturação Teórico-Experimental de Modelos FEM de Estruturas Flexíveis / Yuri Andrade Dias Martins. – Lavras : UFLA, 2022.

145 p. : il.

TCC–Universidade Federal de Lavras, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira.

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-808.066

Aos meus pais, Cláudia e Marcelo.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Cláudia e Marcelo, pelo apoio, incentivo, paciência e amor incondicional.

Às minhas tias, Maria Helena e Lurdinha, pelo apoio, afeto e constante incentivo aos estudos.

Ao professor Henrique, meu orientador, por toda paciência, sabedoria, conselhos e conhecimento compartilhados. Pela inspiração, motivação, incentivo e todo o apoio. Pela oportunidade de ser seu orientado, inclusive na monitoria. Pelas boas conversas e risadas. Pelas incontáveis reuniões remotas durante o ensino ANP. Pelo símbolo de excelência profissional e dedicação. Pela amizade.

Ao professor Wander, pelos conhecimentos compartilhados, pela receptividade e prontidão, pelas boas conversas e conselhos.

Ao professor Belisário, pela paciência, pela amizade, pelas conversas, pelos incontáveis cafés, conselhos e ensinamentos.

Aos professores, Adriano, Bruna, Carlos, Fábio, Francisco, Mauricio, Dimas, Filipe, Joelma, L. Eduardo, Leonardo, Márcio e Sandro por todo conhecimento compartilhado.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica Aplicada (LMA), Lucas, Cozol, Vinícius, Gondonho e Daniel, pelas horas de convivência, pelos bons momentos, companhia, risadas, cafés e pela amizade.

Aos amigos do apartamento, Matheus, Cadu e Pedro, pela amizade, companhia, boas conversas, risadas e bons momentos.

Às amizades do Hybrid, Macedo, Jonas, Daud, Otávio, Dudu, Eugênio, Mancim, Otávio, André, Marani, Júnior, Marcos e Renan, pela amizade, companheirismo e boas conversas.

Aos amigos Alexandre, Lívia, Guido, Lara, Ighor, Luis Felipe, Kênio, pelos momentos vividos, conversas, trabalhos em grupo. Às demais amizades da graduação.

Aos amigos do Carlete, Matheus, Raphael, Gustavo, Thomás, Fernando, Dão e Elias, pela amizade, companhia, incentivo, boas conversas, risadas e bons momentos.

Ao Ne3 e todos os colegas.

If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.

(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre as características dinâmicas de uma estrutura de placa retangular de alumínio. A estrutura é modelada pelo método dos elementos finitos e, via rota teórica, os modelos espacial, modal e de resposta são obtidos. O procedimento experimental é conduzido através de um teste modal utilizando *shaker* a fim de obter as funções de resposta em frequência (FRFs) experimentais. Através da técnica de extração paramétrica de Ewins-Gleeson, os autovalores e autovetores experimentais são obtidos e os polinômios que descrevem as curvas experimentais são determinados. Embora o método dos elementos finitos seja capaz de modelar estruturas complexas, é comum haver divergências entre a predição numérica e o teste modal. Diante das discrepâncias, neste trabalho são escolhidos os parâmetros que apresentam maior grau de incerteza na modelagem e afetam significativamente as FRFs, tais como módulo de elasticidade e constantes de amortecimento para serem atualizados através do Algoritmo de Evolução Diferencial e também do Algoritmo de Abelhas, ambos utilizando dados teóricos e experimentais a fim de obter uma melhor correlação teórico-experimental. As frequências naturais, autovetores e FRFs teóricas e experimentais são comparadas antes e após o procedimento de *model updating*. Ambos os algoritmos retornaram a mesma função objetivo e os valores dos parâmetros de atualização encontrados pelos algoritmos são muito coerentes com a literatura. O modelo de placa atualizado apresentou alta correlação teórico-experimental em todo o intervalo de frequência analisado (0-1000 Hz), todavia, as ressonâncias e antirressonâncias do modelo atualizado apresentem-se mais amortecidas. Um estudo da influência do nível de ruído branco no desempenho dos algoritmos de atualização é apresentado, evidenciando a precisão e robustez dos métodos escolhidos em lidar com dados contaminados com ruído, o que é comum de se encontrar no levantamento experimental. Por fim, um estudo e aplicação de uma técnica de subestruturação baseada em FRFs é apresentado utilizando uma estrutura de viga de alumínio. Técnicas de acoplamento são bastante utilizadas para contornar a dificuldade de exercer medições experimentais em estruturas demasiadamente grandes. Através dessa técnica, a viga original é dividida em duas de comprimentos diferentes e a partir da resposta em frequência de cada subestrutura isolada, obtém-se a resposta da viga acoplada para todo o intervalo de frequência analisado (0-1200 Hz). Além disso, uma análise da influência do nível de ruído branco no desempenho da técnica também é realizada, destacando que o método escolhido é extremamente sensível. O procedimento de atualização de modelo apresentou excelentes resultados ao identificar os valores dos parâmetros, resultando em uma melhora significativa na correlação teórico-experimental tanto em frequência quanto em amplitude. Os polinômios das FRFs regenerados pelo método de Ewins-Gleeson representaram com acurácia as curvas experimentais. A técnica de subestruturação aplicada retornou predições satisfatórias da resposta da estrutura acoplada, principalmente na ausência de ruído branco.

Palavras-chave: Dinâmica Estrutural, Algoritmos de Otimização, Análise Modal Experimental.

ABSTRACT

This research presents the dynamic study of an aluminium plate structure. The structure is modeled by finite element method and, in a theoretical analysis, the spatial, modal and response model are obtained. The experimental procedure is performed through a modal test using shaker in order to obtain experimental frequency response functions. Using Ewins-Gleeson parametric extraction method, eigenvalues and eigenvectors are experimentally obtained, as well as the polynomials that describe the experimental curves. Although the finite element method by itself is capable of modelling complex structures, when the matter is experimental measures there are some discrepancies between experimental and theoretical results. In this context, parameters that present a higher degree of uncertainty, such as elasticity modulus and damping constants are chosen to be updated by Differential Evolution Algorithm and Bees Algorithm, both methods using theoretical and experimental data. Theoretical and experimental natural frequencies, eigenvectors and FRFs are compared before and after the model updating procedure. Both algorithms returned the same objective function value and the results regarding the parameters were very consistent with the literature. The updated plate FEM model presented an improved behaviour across the entire analyzed frequency range (0-1000 Hz), although the resonances are lightly more damped. A study regarding the influence of white noise level in the performance of the algorithms convergence is presented, enhancing the accuracy and robustness of the chosen methods to deal with noisy data, which is common in an experimental procedure. Furthermore, a substructuring technique based on FRFs is applied in an aluminium beam structure. The original beam is divided into two different components and the response of the coupled structure is obtained using the response of each substructure alone across the entire analyzed frequency range (0-1200 Hz). The model updating procedure presented excellent results, improving the plate dynamic behaviour both in frequency and amplitude. The polynomials regenerated from Ewins-Gleeson method accurately represented the experimental curves. The substructuring technique applied returned satisfactory predictions of the coupled structure response, mainly in absence of white noise.

Keywords: Structural Dynamics, Optimization Algorithm, Experimental Modal Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Elemento de placa com três graus de liberdade por nó.	28
Figura 4.2 – Esquema de arranjo das matrizes elementares na composição das matrizes globais.	33
Figura 4.3 – Sistema massa mola amortecedor 2 graus de liberdade.	36
Figura 4.4 – FRFs do tipo aceleração $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ para o sistema 2GL.	40
Figura 4.5 – Visualização da equivalência dos modelos.	41
Figura 4.6 – <i>MAC</i> de um sistema 6 GDL simulando perfeita correlação dos modos. . . .	44
Figura 4.7 – Fluxograma do Algoritmo de Evolução Diferencial.	45
Figura 4.8 – Representação esquemática genérica da etapa de inicialização.	46
Figura 4.9 – Representação das estratégias de mutação do DEA.	47
Figura 4.10 – Representação esquemática genérica da etapa de mutação.	48
Figura 4.11 – Representação esquemática genérica da etapa de <i>crossover</i>	49
Figura 4.12 – Pseudocódigo para implementação do DEA.	50
Figura 4.13 – Convergência do DEA na minimização do somatório.	53
Figura 4.14 – Fluxograma do Algoritmo de Abelhas.	56
Figura 4.15 – Convergência do BA na minimização do somatório.	59
Figura 4.16 – Diagrama esquemático do sistema C subdividido em A e B.	62
Figura 5.1 – Placa retangular de alumínio e malha de medição.	70
Figura 5.2 – <i>Setup</i> do teste modal experimental utilizando <i>shaker</i>	71
Figura 6.1 – Modelo de elementos finitos da estrutura de placa retangular no software HyperWorks 2021.	73
Figura 6.2 – Modo flexível 4 teórico.	75
Figura 6.3 – Modo flexível 6 teórico.	75
Figura 6.4 – Modo flexível 8 teórico.	76
Figura 6.5 – Modo flexível 4 teórico HyperWorks 2021.	76
Figura 6.6 – Modo flexível 6 teórico HyperWorks 2021.	77
Figura 6.7 – Modo flexível 8 teórico HyperWorks 2021.	77
Figura 6.8 – FRFs obtidas através da excitação com <i>shaker</i> no nó 25.	78
Figura 6.9 – Discrepâncias em frequência das FRFs obtidas através da excitação com <i>shaker</i> no nó 25.	78

Figura 6.10 – Frequências naturais experimentais dos modos de corpo flexível da estrutura de placa, FRF $I_{16,73}$	79
Figura 6.11 – Frequências naturais experimentais dos modos de corpo rígido da estrutura de placa, FRF $I_{16,73}$	80
Figura 6.12 – Pontos amostrados da FRF $I_{88,73}$ para aplicação do método de identificação paramétrica de Ewins-Gleeson.	82
Figura 6.13 – FRF experimental e regenerada $I_{88,73}$	83
Figura 6.14 – Contribuição individual dos modos, FRF regenerada e experimental $I_{88,73}$	84
Figura 6.15 – Modo flexível 4 experimental.	84
Figura 6.16 – Modo flexível 6 experimental.	85
Figura 6.17 – Modo flexível 8 experimental.	85
Figura 6.18 – Comparação das frequências naturais teóricas e experimentais da estrutura de placa.	87
Figura 6.19 – Comparação das amplitudes e frequências naturais teóricas e experimentais da estrutura de placa. FRF $I_{79,73}$	88
Figura 6.20 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações.	90
Figura 6.21 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações.	91
Figura 6.22 – Convergência do DEA e BA em função das iterações.	92
Figura 6.23 – Comparação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa. FRF $I_{79,73}$	94
Figura 6.24 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 100 a 400 Hz. FRF $I_{79,73}$	95
Figura 6.25 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 400 a 700 Hz. FRF $I_{79,73}$	95
Figura 6.26 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 700 a 1000 Hz. FRF $I_{79,73}$	96
Figura 6.27 – <i>Modal assurance criterion</i>	97
Figura 6.28 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 10% de ruído em comparação com a curva experimental.	99
Figura 6.29 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 10% de ruído nas FRFs experimentais.	100

Figura 6.30 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 10% de ruído nas FRFs experimentais.	100
Figura 6.31 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 20% de ruído em comparação com a curva experimental.	102
Figura 6.32 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 20% de ruído nas FRFs experimentais.	103
Figura 6.33 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 20% de ruído nas FRFs experimentais.	103
Figura 6.34 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 30% de ruído em comparação com a curva experimental.	105
Figura 6.35 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 30% de ruído nas FRFs experimentais.	106
Figura 6.36 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 30% de ruído nas FRFs experimentais.	106
Figura 6.37 – Diagrama esquemático das vigas utilizadas na aplicação da técnica de subestruturação.	108
Figura 6.38 – Comparação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de viga. FRF $I_{19,19}$	108
Figura 6.39 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM sem a presença de ruído.	110
Figura 6.40 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ das subestruturas individuais.	110
Figura 6.41 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 5% de ruído.	111
Figura 6.42 – Ampliação da região de 400 até 800 Hz da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 5% de ruído.	112
Figura 6.43 – Ampliação da região de 450 até 750 Hz da FRF $I_{7,7}$ das subestruturas isoladas.	113
Figura 6.44 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 15% de ruído.	114
Figura 6.45 – Ampliação da região de 400 até 800 Hz da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 15% de ruído.	115
Figura 1 – Modo flexível 1 teórico.	123
Figura 2 – Modo flexível 2 teórico.	123
Figura 3 – Modo flexível 3 teórico.	124
Figura 4 – Modo flexível 5 teórico.	124

Figura 5 – Modo flexível 7 teórico.	125
Figura 6 – Modo flexível 9 teórico.	125
Figura 7 – Modo flexível 1 experimental.	126
Figura 8 – Modo flexível 2 experimental.	126
Figura 9 – Modo flexível 3 experimental.	127
Figura 10 – Modo flexível 5 experimental.	127
Figura 11 – Modo flexível 7 experimental.	128
Figura 12 – Modo flexível 9 experimental.	128
Figura 13 – FRF experimental e regenerada $I_{43,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	129
Figura 14 – FRF experimental e regenerada $I_{58,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	129
Figura 15 – FRF experimental e regenerada $I_{61,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	130
Figura 16 – FRF experimental e regenerada $I_{79,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	130
Figura 17 – FRF experimental e regenerada $I_{82,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	131
Figura 18 – FRF experimental e regenerada $I_{85,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	131
Figura 19 – FRF experimental e regenerada $I_{115,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	132
Figura 20 – FRF experimental e regenerada $I_{142,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	132
Figura 21 – FRF experimental e regenerada $I_{166,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	133
Figura 22 – FRF experimental e regenerada $I_{172,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	133
Figura 23 – FRF experimental e regenerada $I_{181,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	134
Figura 24 – FRF experimental e regenerada $I_{208,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	134
Figura 25 – FRF experimental e regenerada $I_{214,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	135
Figura 26 – FRF experimental e atualizada $I_{1,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	136
Figura 27 – FRF experimental e atualizada $I_{7,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	136
Figura 28 – FRF experimental e atualizada $I_{16,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	137
Figura 29 – FRF experimental e atualizada $I_{19,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	137
Figura 30 – FRF experimental e atualizada $I_{37,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	138
Figura 31 – FRF experimental e atualizada $I_{43,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	138
Figura 32 – FRF experimental e atualizada $I_{46,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	139
Figura 33 – FRF experimental e atualizada $I_{58,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	139
Figura 34 – FRF experimental e atualizada $I_{61,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	140
Figura 35 – FRF experimental e atualizada $I_{82,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	140
Figura 36 – FRF experimental e atualizada $I_{85,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	141

Figura 37 – FRF experimental e atualizada $I_{88,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	141
Figura 38 – FRF experimental e atualizada $I_{91,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	142
Figura 39 – FRF experimental e atualizada $I_{100,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	142
Figura 40 – FRF experimental e atualizada $I_{109,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	143
Figura 41 – FRF experimental e atualizada $I_{169,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	143
Figura 42 – FRF experimental e atualizada $I_{181,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	144
Figura 43 – FRF experimental e atualizada $I_{265,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	144
Figura 44 – FRF experimental e atualizada $I_{280,73}$. Teste modal realizado com <i>shaker</i> . . .	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Parâmetros do sistema 2 GL.	36
Tabela 4.2 – <i>crossover</i> binomial para o indivíduo $\vec{X}_1(0)$	52
Tabela 5.1 – Propriedades do material da placa.	70
Tabela 6.1 – Comparação das frequências naturais da estrutura de placa de 0 a 1000 Hz pelo MATLAB e HyperWorks 2021. Ambos modelos possuem 80 elementos.	74
Tabela 6.2 – Comparação das frequências naturais da estrutura de placa de 0 a 1000 Hz pelo MATLAB e HyperWorks 2021. Os modelos possuem 80 e 32000 elementos, respectivamente.	74
Tabela 6.3 – Frequências naturais experimentais da estrutura de placa obtidas pela excitação com <i>shaker</i>	81
Tabela 6.4 – Resíduos experimentais da estrutura de placa, FRF $I_{88,73}$	82
Tabela 6.5 – Frequências naturais teóricas e experimentais dos modos flexíveis da estrutura de placa.	86
Tabela 6.6 – Intervalo de busca para cada parâmetro de atualização.	88
Tabela 6.7 – Aspectos práticos individuais para o DEA.	89
Tabela 6.8 – Aspectos práticos individuais para o BA.	90
Tabela 6.9 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização.	92
Tabela 6.10 – Frequências naturais teóricas e experimentais dos modos flexíveis da estrutura de placa.	93
Tabela 6.11 – Número MAC entre modelo experimental e numérico atualizado.	98
Tabela 6.12 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 10% de ruído nas FRFs experimentais.	101
Tabela 6.13 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 20% de ruído nas FRFs experimentais.	104
Tabela 6.14 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 30% de ruído nas FRFs experimentais.	107
Tabela 6.15 – Propriedades do material da viga.	108

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	15
2.1	Objetivo geral	15
2.2	Objetivos específicos	15
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3.1	Contribuições do grupo de pesquisa	24
3.2	Resumo do capítulo	25
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
4.1	Introdução	27
4.2	Modelagem matemática por Elementos Finitos	27
4.2.1	Modelo de Elementos Finitos da estrutura de placa	28
4.3	Análise modal	34
4.3.1	Aplicação numérica em um sistema 2GL	35
4.4	Modelo de resposta	38
4.4.1	Aplicação numérica em um sistema 2GL	39
4.5	Identificação paramétrica	40
4.6	Comparação dos autovetores: <i>Modal Assurance Criterion</i>	43
4.7	Métodos de atualização de modelo (<i>model updating</i>)	44
4.7.1	Algoritmo de Evolução Diferencial (DEA)	44
4.7.1.1	Aplicação numérica: minimização de somatório	50
4.7.2	Algoritmo de Abelhas (BA)	53
4.7.2.1	Aplicação numérica: minimização de somatório	57
4.8	Contaminação das FRFs experimentais com ruído	59
4.9	Subestruturação	60
4.9.1	Método de Kidder Modificado	67
4.10	Resumo do capítulo	68
5	METODOLOGIA	70
5.1	Resumo do capítulo	71
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	73
6.1	Abordagem teórica	73
6.1.1	Modelo de elementos finitos	73

6.1.2	Modos de vibração	74
6.2	Abordagem experimental	77
6.2.1	Funções de resposta em frequência (FRFs)	77
6.2.2	Identificação Paramétrica	81
6.2.3	<i>Model updating</i>	85
6.3	Contaminação das FRFs experimentais com ruído	98
6.3.1	Cenário 1: 10% de ruído	98
6.3.2	Cenário 2: 20% de ruído	101
6.3.3	Cenário 3: 30% de ruído	104
6.4	Subestruturação	107
6.4.1	Cenário 1: 0% de ruído	109
6.4.2	Cenário 2: 5% de ruído	111
6.4.3	Cenário 3: 15% de ruído	113
6.5	Resumo do capítulo	115
7	CONCLUSÕES	117
	REFERÊNCIAS	119
	APENDICE A – Modos de vibrar teóricos da estrutura de placa	123
	APENDICE B – Modos de vibrar experimentais da estrutura de placa	126
	APENDICE C – FRFs experimentais e regeneradas da estrutura de placa	129
	APENDICE D – FRFs experimentais e atualizadas da estrutura de placa	136

1 INTRODUÇÃO

As estruturas de placas finas estão amplamente presentes em diversos aspectos da vida moderna e sua modelagem é de grande interesse para vários projetos de engenharia, tais como chassis veiculares, cascos de navios, fuselagem de aviões e até mesmo componentes de construção civil. Em várias dessas aplicações, é necessário compreender os diversos efeitos dinâmicos envolvidos para assegurar a integridade estrutural do projeto como um todo, o que muitas vezes pode ser complexo e de difícil visualização. Diante disso, essas estruturas devem ser devidamente representadas através de modelos matemáticos confiáveis que garantem a aplicabilidade e segurança do projeto, sendo portanto capazes de descrever o comportamento dinâmico do conjunto até mesmo em situações críticas de operação.

O Método dos Elementos Finitos (FEM) é utilizado com o propósito de modelar a dinâmica de estruturas e componentes mecânicos através da ideia de discretização do contínuo. Aliado ao modelo FEM, uma técnica que tem sido aplicada amplamente na engenharia é a análise modal, que representa o processo de determinação dos parâmetros modais do sistema. Neste sentido, o método dos elementos finitos e a análise modal teórico-experimental apresentam-se como importantes ferramentas para análise do comportamento dinâmico geral de sistemas mecânicos. Dentre as várias aplicações da análise modal experimental (EMA), estão a completa caracterização experimental de estruturas e componentes em termos dinâmicos, viabilizando a identificação paramétrica, bem como a verificação, atualização e validação de modelos teóricos.

Neste trabalho, foi proposto um modelo FEM de estrutura de placa flexível a fim de representar, via rota teórica, o comportamento dinâmico de uma placa fina metálica. Diante desse modelo, foram obtidos os autovalores e autovetores pela solução do autoproblema e, posteriormente, o modelo de resposta em frequência teórico foi determinado para fins de validação. Via rota experimental, a estrutura de placa foi suspensa na condição livre-livre e através do teste modal utilizando *shaker*, foram obtidas as FRFs experimentais na forma complexa. Resultados teóricos e experimentais foram diretamente comparados a partir da sobreposição das FRFs onde tornou-se evidente a necessidade de atualizar o modelo FEM para aperfeiçoar a correlação teórico-experimental. Ainda nesse raciocínio, a atualização foi procedida através do algoritmo de Evolução Diferencial (*Differential Evolution Algorithm* - DEA) e do algoritmo de Abelhas (*Bees Algorithm* - BA) e ambos foram detalhadamente explicados considerando aspectos práticos de aplicações numéricas. O modelo atualizado foi comparado ao experimental para verificar a redução das discrepâncias em termos de amplitude e frequências naturais das FRFs. Ainda

no âmbito da atualização de modelo, foi realizado um estudo da influência do nível de ruído branco nas FRFs na convergência dos algoritmos, considerando três diferentes cenários. Além disso, a comparação dos autovetores foi realizada através do cálculo do número MAC (*Modal Assurance Criterion*). Por fim, como forma de explorar a importante técnica de subestruturação em estruturas flexíveis, uma viga de alumínio foi utilizada no estudo e aplicação da técnica de subestruturação baseada em funções de resposta em frequência, na qual a estrutura foi dividida em duas vigas de comprimentos diferentes e a partir da resposta em frequência de cada uma das subestruturas isoladas, obteve-se as funções de resposta em frequência da estrutura acoplada. Ademais, dois cenários de inserção de ruído branco nas FRFs translacionais foram abordados a fim de simular a aplicação da técnica em dados experimentais, que normalmente apresentam ruído de medição.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

O principal objetivo desse trabalho foi o estudo teórico-experimental de uma placa metálica flexível utilizando técnicas avançadas de otimização, a fim de realizar o *model updating* do modelo FEM. Como objetivo secundário, o trabalho tem por finalidade realizar o estudo e aplicação de uma técnica de subestruturação baseada em funções de resposta em frequência em uma viga flexível.

2.2 Objetivos específicos

- Obtenção do modelo matemático de elementos finitos da estrutura de placa flexível e implementação do mesmo em MATLAB.
- Explorar, implementar e validar algoritmos de *model updating*.
- Discutir e comparar as formulações dos algoritmos (DEA e BA) utilizados na atualização, evidenciando as vantagens e desvantagens de cada um.
- Verificar a eficiência do ajuste proposto por cada algoritmo.
- Explorar, implementar e validar a técnica de subestruturação, além de verificar a influência do ruído branco no desempenho da mesma.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise modal pode ser definida como um processo de determinação das propriedades dinâmicas inerentes de um sistema em termos de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar. Essa abordagem é baseada no fato de que a resposta de vibração de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, através da hipótese da superposição modal, pode ser expressa em termos de uma combinação linear de movimentos harmônicos chamados modos naturais de vibrar, onde cada modo possui um fator de participação na resposta dinâmica. Tais modos naturais dependem das propriedades físicas como massa, rigidez e amortecimento e de como estão distribuídas espacialmente. Ou seja, os modos e frequências naturais possuem uma intrínseca relação com as propriedades elásticas e inerciais da estrutura. Neste contexto, essa técnica tem sido amplamente aplicada a fim de extrair propriedades experimentais de estruturas e componentes mecânicos. Além disso, a análise modal constitui a base para estudos mais avançados, tais como aplicação de controle baseado em modelo, modificações estruturais, detecção de dano estrutural, subestruturação, identificação de amortecimento no sistema, monitoramento da integridade estrutural (MAIA; SILVA, 1997; FU; HE, 2001; EWINS, 2000; AVITABILE, 2017; LIN; ZHU, 2006).

Sistemas mecânicos e estruturais apresentam, em sua grande maioria, geometrias e distribuições espaciais complexas, de difícil modelagem e em alguns casos sem solução do ponto de vista analítico e que requerem técnicas numéricas para a obtenção de uma solução aproximada. Segundo tal premissa, foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos (FEM) com o propósito de fragmentar o contínuo em subdomínios, de modo que a estrutura seja representada por uma quantidade suficiente de elementos que retratem com acurácia o verdadeiro comportamento mecânico estudado para determinar a solução aproximada do problema, considerando-se apenas alguns pontos ou os chamados nós do modelo. O conjunto de nós e elementos constitui a malha de elementos finitos, que representa a discretização do contínuo e resulta em um sistema de múltiplos graus de liberdade representados por meio de equações diferenciais ordinárias, as quais possuem solução numérica direta (LOGAN, 2016; RAO, 2011; COOK et al., 2001; BITTENCOURT, 2010; SHAMES; DYM, 1995).

O processo de atualização de modelo é, por definição, um ajuste nos parâmetros do modelo teórico baseado em dados experimentais. Embora o modelo FEM seja capaz de modelar com acurácia uma infinidade de sistemas mecânicos, quando se trata de medições experimentais existem determinadas incertezas associadas a geometria, constantes de materiais e condições de

contorno que geram diferenças significativas na correlação teórico-experimental. A fim de lidar com tal fato, os métodos de atualização de modelo são amplamente utilizados para minimizar algumas das discrepâncias entre os modelos teórico e experimental e, portanto, obter um modelo acurado cuja resposta está mais próxima da realidade. Em grande parte dos casos, o aprimoramento do modelo teórico utilizando dados de função de resposta em frequência (FRFs) experimentais é baseado em uma análise de compatibilidade dos modelos, na qual as FRFs teóricas e experimentais são diretamente comparadas em termos de amplitude e frequências naturais (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; MAIA; SILVA, 1997).

Em dinâmica estrutural, técnicas de atualização de modelo são frequentemente aplicadas em conjunto com medições de vibração para identificar parâmetros desconhecidos do sistema ou até mesmo verificar se as hipóteses assumidas para realização do experimento são válidas. Dessa forma, ao identificar os parâmetros que necessitam de ajuste, a partir de modificações nas matrizes de massa, rigidez e amortecimento ou nos parâmetros que caracterizam o sistema, a atualização de modelo encontra a melhor correlação teórico-experimental respeitando o intervalo de valores para cada parâmetro atualizado. É importante ressaltar que os problemas de otimização são totalmente dependentes da seleção dos parâmetros, ou seja, deve-se ser capaz de escolher corretamente o grupo de variáveis para ser atualizado e essas devem descrever com precisão as regiões ou características do sistema supostamente inadequadas no modelo teórico. Além disso, o *output* (autovalores, FRFs) deve ser sensível aos parâmetros escolhidos para que o problema possua uma única solução ótima global dentro do intervalo especificado (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; MAIA; SILVA, 1997; IMREGUN; VISSER; EWINS, 1995; MARWALA, 2010).

O processo de atualização pode ser realizado por dois métodos: direto ou iterativo. Os métodos diretos são aqueles que não utilizam iterações, realizando mudanças pontuais no sistema. Geralmente, retornam resultados menos precisos quando comparados aos iterativos, embora demandem esforços computacionais muito menores. Os métodos iterativos, por sua vez, visam ajustar a discrepância teórico-experimental baseados em algoritmos que reavaliam o modelo diversas vezes em cada iteração e verificam a influência da mudança nos parâmetros em todo o sistema. Ainda nesse raciocínio, dentre os métodos iterativos, existem dois tipos mais comuns: *Eigensensitivity method* e *FRF based method*. O primeiro representa os métodos que determinam a sensibilidade da estrutura com relação as variáveis a serem atualizadas e dependem fortemente da estimativa inicial para garantir a convergência. O segundo grupo é

composto por métodos que utilizam diretamente informações de FRFs através de uma análise de compatibilidade em termos de amplitude e frequências naturais. O grande diferencial dos métodos baseados em FRFs é a independência da estimativa inicial na convergência, uma vez que são algoritmos de busca aleatória e são melhores em encontrar a solução ótima global para o problema. Além disso, pelo fato de realizarem uma compatibilidade de FRFs, são melhores para lidar com identificação de constantes de amortecimento, uma vez que influenciam diretamente na amplitude das respostas. Desse modo, pode ser definido o conceito de função objetivo, que consiste em uma função $f(x)$ sujeita a um grupo de parâmetros x , onde cada componente desse grupo possui um intervalo dentro do qual o algoritmo busca por soluções possíveis. Basicamente, a ideia é minimizar a função $f(x)$ variando os parâmetros x de acordo com o *output* definido pelo usuário (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; MARWALA, 2010).

Após o surgimento das técnicas de atualização convencionais e do avanço nos estudos relacionados a essa área, novos algoritmos foram propostos e implementados ao longo dos anos tais como redes neurais, algoritmos genéticos e evolucionários baseados em comportamentos de grupos de animais que são, no geral, algoritmos capazes de lidar com problemas de otimização complexos e encontrar soluções ótimas globais em intervalos de tempo cada vez menores (ATALLA; INMAN, 1998; LACERDA et al., 2020; STORN; PRICE, 1995).

Koh *et al.* (2003) sugerem que um bom método de atualização utilizado para identificar parâmetros de um sistema deve ser capaz de convergir para a solução exata independentemente da estimativa inicial, bem como não ser muito sensível aos ruídos de medição e não necessitar da medição de muitos graus de liberdade, ou seja, ser capaz de lidar com medições incompletas.

Moradi *et al.* (2010) utilizaram um método evolucionário de otimização denominado algoritmo de Abelhas (BA) que aplica o comportamento instintivo de abelhas ao buscar por néctar. São geradas inicialmente soluções aleatórias e dentre elas são selecionadas as N melhores, ou seja, aquelas que retornam o menor valor de função objetivo, e então é estabelecido um raio de busca ao redor das melhores soluções a fim de afunilar as possibilidades de convergência. No trabalho, foi realizado um teste modal experimental utilizando martelo de impacto em um sistema de canalização com tubos de aço. A partir do modelo de resposta experimental foram obtidos, via ajuste de curva, as frequências naturais, modos de vibrar e fatores de amortecimento experimentais. Além disso, para fins de validação, foi desenvolvido também um modelo teórico por elementos finitos a fim de selecionar os parâmetros mais sensíveis e incertos para serem atualizados, tais como módulo de elasticidade, densidade, massa concentrada

no joelho da tubulação e rigidez vertical dos suportes de fixação. Diante disso, foi definida a função objetivo do problema como a soma ponderada do quadrado do erro entre os parâmetros modais medidos e calculados via elementos finitos. Perante o exposto, após a atualização de modelo, o erro relativo entre os parâmetros modais teóricos e experimentais foi consideravelmente reduzido. Além disso, o algoritmo mostrou-se bastante eficaz em lidar com identificação de amortecimento da estrutura.

Moradi *et al.* (2018) também utilizaram o algoritmo de Abelhas (BA) para fins de atualização de modelo utilizando medições experimentais. No trabalho, foram abordados conceitos de análise modal operacional de um pórtico através da excitação randômica por *shaker*. Além dos dados experimentais, foi gerado também um modelo teórico de elementos finitos a fim de realizar uma análise de sensibilidade da estrutura com relação aos parâmetros a serem atualizados para determinar o quão sensível o *output* seria com relação a cada grupo de parâmetros. Diante disso, foram escolhidos para fins de atualização: módulo de elasticidade, densidade, dimensões geométricas dos tubos, módulo de elasticidade na região da solda. A partir da definição dos parâmetros, a função objetivo do problema foi determinada como o somatório dos erros entre as frequências naturais teóricas e experimentais para que o BA encontrasse a melhor solução dentro do intervalo especificado para os parâmetros. Perante o exposto, após a atualização, o erro relativo total entre as frequências naturais foi reduzido de 70.85% para 0.021% e os valores encontrados para cada parâmetro foram fisicamente consistentes. Desse modo, o BA mostrou-se amplamente capaz de lidar com problemas de otimização estrutural, apresentando convergência em poucas iterações.

Khademi e Alimouri (2019) utilizaram o algoritmo de Abelhas (BA) em um procedimento bem similar ao que foi apresentado por Moradi *et al.* (2018), no qual foram abordados conceitos de análise modal operacional de uma estrutura de painéis solares de 20kW, uma vez que a ação do vento na região da usina excitava a estrutura de forma que as amplitudes de vibração não eram consideradas seguras. Diante disso, um modelo FEM foi desenvolvido a fim de realizar uma análise de sensibilidade da estrutura com relação aos parâmetros a serem atualizados e diminuir o tempo de processamento do algoritmo para atingir a solução ótima global. Como resultado dessa análise, foram escolhidos para atualização: densidade, módulo de elasticidade, espessura e comprimento das barras e a espessura dos painéis solares. A função objetivo escolhida como o somatório do quadrado do erro entre as 5 primeiras frequências naturais. Ao realizar a atualização, o erro relativo total entre as frequências naturais foi reduzido de

77.708% para 0.32% e os valores dos parâmetros retornados pelo algoritmo foram fisicamente consistentes, evidenciando a capacidade do método em lidar também com estruturas de grande porte.

Tang *et al.* (2008) utilizaram um método heurístico de otimização denominado Algoritmo de Evolução Diferencial (DEA). O DEA vem apresentando ao longo dos anos resultados promissores na resolução de problemas de otimização complexos. O algoritmo possui uma estrutura simples e de fácil implementação, além de propiciar boa convergência e robustez ao lidar com identificação de parâmetros de sistemas estruturais até mesmo nas condições de sinais contaminados com ruídos e falta de conhecimento prévio sobre os parâmetros a serem atualizados. Foi realizada a identificação estrutural de dois sistemas via rota teórica, com 8 e 20 graus de liberdade, utilizando respostas de aceleração, com e sem ruído branco, simuladas ao longo dos graus de liberdade do pórtico em estudo. Embora via rota teórica os valores que o algoritmo tenha que retornar sejam previamente conhecidos, o DEA foi capaz de identificar com altíssima precisão os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento do sistema até mesmo nas situações com 10% de ruído a partir da minimização da função objetivo definida como a diferença entre a FRF simulada e aquela obtida via elementos finitos. Vale ressaltar que primeiramente os autores tentaram identificar somente parâmetros de rigidez e amortecimento e obtiveram resultados excelentes com pouco tempo de simulação. Em um segundo momento, inseriram as massas discretas como incógnitas e o tempo de simulação aumentou consideravelmente.

Syedpoor *et al.* (2015) utilizaram o Algoritmo de Evolução Diferencial (DEA) com o intuito de encontrar dano estrutural em estruturas de viga, treliça e pórtico via rota teórica. Para cada estrutura, foram considerados três casos de dano estrutural em diferentes elementos da malha, sendo que o local e dano eram previamente conhecidos para verificar a eficiência do método em identificar corretamente esses parâmetros desconhecidos. O dano foi induzido no sistema através da redução do módulo de elasticidade em alguns elementos, o que afetaria diretamente a frequência natural. Diante disso, a função objetivo foi determinada como a diferença entre dois vetores, sendo um deles contendo as frequências naturais da estrutura intacta e o outro as frequências naturais da estrutura danificada. A partir disso, o algoritmo foi capaz de identificar com altíssima precisão os elementos danificados e a proporção desse dano de acordo com o grau de ruído no módulo de elasticidade inserido. Os resultados mostraram que o DEA é uma ferramenta robusta e eficiente para identificar danos estruturais nos mais diversos tipos de estruturas.

Ho-Huu *et al.* (2016) apresentaram uma versão melhorada do DEA a partir de mudanças no esquema do mutação do algoritmo, combinando diferentes variantes de escolha dos vetores aleatórios em um só algoritmo, o que permitiu explorar com mais eficiência as soluções de forma global e local ao mesmo tempo. A proposta de melhoria foi utilizada na resolução de um problema de otimização de massa de treliças, garantindo certos condicionais. A função objetivo minimizada pelo algoritmo era o somatório do peso das barras da treliça, no qual o comprimento das barras e a densidade foram considerados constantes e o algoritmo poderia variar a área de seção transversal dentro de um certo intervalo para encontrar a solução ótima. Além disso, por questões de segurança, a solução ótima deveria atender também certos condicionais para as três primeiras frequências naturais, que não podiam ser menores que determinados valores. Os valores de massa total encontrados pelo algoritmo em sua versão melhorada foram bem similares àqueles obtidos pela versão original, entretanto a convergência do primeiro foi superior e ambos foram capazes de atender os requisitos condicionais.

Sanches (2015) aplicou o DEA em sua versão original para identificar parâmetros de rigidez e amortecimento de mancais em uma bancada de máquina rotativa com discos rígidos e eixo flexível. Como o propósito do trabalho era identificação de falhas através do modelo matemático, os dados dos mancais eram de profundo interesse na representação dinâmica do sistema. Diante disso, foram feitas medições de FRFs e as mesmas foram utilizadas diretamente na função objetivo, que consistia basicamente em subtrair as amplitudes das FRFs teóricas daquelas experimentais em cada frequência, extrair o módulo dessa operação e comparar com o módulo da amplitude da FRF experimental na mesma frequência em todo o intervalo de medição, considerando múltiplas FRFs. Os parâmetros atualizados foram: rigidez e amortecimento dos mancais nas duas direções de medição, bem como as constantes de amortecimento proporcional do eixo. Diante disso, o algoritmo identificou valores para os parâmetros e as curvas teóricas se aproximaram bastante das experimentais.

Cavalini *et al.* (2015) aplicaram uma versão auto-adaptativa do DEA, denominada SA-DEA (*Self-Adaptive Differential Evolution Algorithm*), na identificação de parâmetros de mancais em uma bancada de máquina rotativa com discos rígidos e eixo flexível. O intuito do trabalho era garantir precisa correlação teórico-experimental ao atualizar o modelo FEM utilizando dados de FRFs experimentais. O diferencial apresentado pela versão auto-adaptativa reside na capacidade do algoritmo de atualizar, a cada iteração, os parâmetros de controle do algoritmo como taxa de *crossover*, fator de escala de mutação e número de indivíduos a fim de

evitar convergência prematura e adaptar o algoritmo ao problema em questão. A função objetivo empregada foi bem semelhante aquela aplicada por Sanches (2015) e os valores identificados pelo SADEA garantiram excelente correlação teórico-experimental, até mesmo ao comparar as amplitudes teóricas e experimentais da órbita do rotor em funcionamento.

Greco e Vanzi (2019) utilizaram o DEA com o intuito de realizar uma identificação estrutural em uma viga bi-apoiada. O procedimento experimental foi conduzido em uma viga de alumínio com 3 m de comprimento e seção transversal retangular. Via rota experimental, foi aplicada uma carga de 5N em uma determinada posição da viga e a resposta temporal foi medida em posição diferente da aplicação. Diante disso, o algoritmo foi utilizado a fim de identificar a magnitude da carga, bem como o local da aplicação da mesma utilizando os dados experimentais. Como função objetivo, foi definida a subtração de dois vetores, onde um deles continha a amplitude da resposta experimental e o outro a amplitude da resposta teórica para uma determinada carga e local de aplicação. Diante disso, o algoritmo foi capaz de identificar com altíssima precisão o local e a magnitude da carga aplicada no experimento.

Casciati (2008) utilizou o DEA para fins de monitoramento da integridade estrutural de uma viga em balanço de comprimento 101.6 mm e altura 50.8 mm utilizando parâmetros modais. O procedimento foi realizado via rota teórica para assegurar que o algoritmo pudesse ser amplamente utilizado nesse tipo de problema. Diante disso, a viga foi discretizada em 16 elementos (8 no comprimento e 2 na espessura) e os dados experimentais foram simulados com alguns elementos tendo a matriz de rigidez multiplicada por um coeficiente α entre 0 e 1 para representar o dano estrutural em locais distintos da estrutura. Foram realizadas 7 configurações, onde em cada uma delas uma combinação diferente de elementos foi danificada. Com isso, a ideia principal era que o algoritmo identificasse o valor dos coeficientes de cada elemento, fornecendo assim a intensidade do dano e a localização do mesmo. Para tal fim, a função objetivo foi designada como a raiz quadrada do erro entre as frequências naturais, em formato matricial, utilizando também uma matriz de ponderação para priorizar as baixas frequências, bem como a subtração dos autovetores ao quadrado. Dessa forma, o algoritmo foi capaz de identificar com alta precisão os valores dos coeficientes para as 7 configurações estabelecidas.

Savoia e Vincenzi (2008) utilizaram o DEA em um problema de identificação estrutural considerando um pórtico de três andares com altura total de 900 mm e largura de 500 mm. A proposta do trabalho era identificar o módulo de elasticidade e a densidade das vigas que consistiam o pórtico utilizando parâmetros modais. O procedimento realizado via rota teórica alme-

java também comparar o desempenho de diferentes funções objetivo: considerando somente os dois primeiros autovalores, considerando os três primeiros autovalores e, por fim, considerando os dois primeiros autovalores bem como os correspondentes autovetores. Em todos dos casos, a função objetivo foi definida como a soma do quadrado da diferença entre os parâmetros modais simulados e aqueles obtidos via elementos finitos. Diante disso, foi verificado que o desempenho do algoritmo em termos de minimização apresentou melhores resultados considerando tanto autovalores quanto autovetores, principalmente nos valores com relação à densidade. Portanto, conclui-se que a escolha da função objetivo influencia diretamente na convergência do algoritmo e deve ser cuidadosamente analisada a fim de obter resultados fisicamente coerentes.

Liao *et al.* (2020) realizaram um estudo no âmbito da técnica de subestruturação baseada em FRFs (*FRF-Based Substructuring Method*) considerando acoplamento rígido entre as subestruturas via rota teórica. Os autores apresentaram toda a fundamentação matemática do método em questão, derivando a equação que prediz a matriz de FRFs da estrutura acoplada a partir da resposta individual de cada subestrutura isolada. Como resultados, a técnica foi aplicada em um sistema massa mola de 6 graus de liberdade, sendo este dividido em dois subsistemas com 3 graus de liberdade cada. Diante disso, os autores compararam a resposta obtida via FBSM com a FRF gerada pelo modelo FEM diretamente e obtiveram resultados excelentes na predição do comportamento do sistema acoplado com 6 graus de liberdade. Ainda nos resultados, a mesma metodologia foi aplicada em uma situação de duas placas conectadas por molas. A resposta de cada placa foi obtida individualmente e a partir da aplicação do método e comparação direta com o modelo FEM, a correlação foi perfeita.

Mirza *et al.* (2017) propuseram um estudo teórico-experimental utilizando o método FBSM em uma estrutura de viga de alumínio. A intenção dos autores era investigar principalmente o efeito da ausência das FRFs rotacionais na qualidade dos resultados obtidos, uma vez que via rota experimental as FRFs relacionadas com graus de liberdade rotacionais representam um desafio de medição. A viga foi particionada ao meio em duas subestruturas e, via rota teórica, utilizaram um modelo sólido 3D para fins de modelagem. Em termos de resultados, as FRFs da viga acoplada foram medidas experimentalmente e, em um primeiro cenário, as FRFs das subestruturas foram obtidas via rota teórica. Através da aplicação da técnica, foi possível perceber por comparação direta que a ausência das FRFs rotacionais prejudicou bastante a qualidade dos resultados, reforçando a necessidade de inclusão da parcela rotacional no acoplamento. Mais adiante, os autores realizaram a medição experimental das FRFs translacionais das

subestruturas e aplicaram novamente a técnica, porém considerando FRFs translacionais experimentais e FRFs rotacionais via modelo FEM. Essa junção teórico-experimental apresentou resultados muito mais promissores que aqueles previamente obtidos.

Pagnacco *et al.* (2009) conduziram um estudo teórico-experimental da aplicação do método FBSM em estruturas de viga com comprimentos distintos sem a inserção de FRFs rotacionais. O procedimento experimental foi conduzido ao medir as FRFs de cada subestrutura isoladamente e, posteriormente, as duas subestruturas foram coladas a fim de gerar a estrutura acoplada. Para contornar o problema relacionado com os graus de liberdade rotacionais, os autores propuseram uma técnica denominada *Equivalent Multi-Point Connection - EMPC*, que se baseia no fato de realizar várias medições translacionais na região de acoplamento a fim de suprir a ausência das FRFs rotacionais. Em termos de resultados, primeiramente foram considerada somente FRFs translacionais sem a aplicação da técnica EMPC e os resultados não foram satisfatórios, como já era esperado. Mais adiante então, ao incluir as medições adicionais nos pontos de conexão das vigas, os resultados foram significativamente melhorados e a correlação teórico-experimental foi bastante satisfatória.

Silva e Pereira (2018) realizaram um estudo via rota teórica utilizando a formulação do método FBSM e apresentaram uma alternativa viável para contornar as dificuldades provenientes dos graus de liberdade rotacionais no âmbito da subestruturação. O método proposto pelos autores é denominado Método de Kidder Modificado e se baseia na expansão dos graus de liberdade translacionais para obter, por aproximação, a resposta rotacional da estrutura em um mesmo nó. O procedimento foi aplicado em uma estrutura de viga, a qual foi modelada considerando 2 graus de liberdade por nó. Diante disso, ao gerar somente as FRFs translacionais via modelo FEM, aplicou-se o Método de Kidder Modificado para obtenção das FRFs rotacionais de cada um dos nós das subestruturas de viga. Dessa forma, foi possível aplicar a técnica FBSM utilizando uma matriz de FRFs completa, que gerou resultados muito promissores.

3.1 Contribuições do grupo de pesquisa

Como primeiro trabalho nesta linha de pesquisa dentro do Laboratório de Mecânica Aplicada - UFLA, Santos e Silveira (2020) apresentaram um estudo teórico-experimental das características dinâmicas de uma estrutura de placa de aço. A estrutura foi modelada pelo Método dos Elementos Finitos e os modelos espacial, modal e de resposta foram obtidos. Via rota experimental, foram realizados testes modais utilizando tanto *shaker* quanto martelo de

impacto, onde foi possível evidenciar a ocorrência do fenômeno de *mass loading*. Através das FRFs experimentais, a técnica de Ewins-Gleeson foi aplicada a fim de regenerar as curvas experimentais por meio dos polinômios que as descrevem. Devido às discrepâncias encontradas entre a predição numérica e os resultados experimentais, um procedimento de *model updating* foi realizado utilizando um método baseado em matriz de sensibilidade a fim de atualizar parâmetros como módulo de elasticidade e rigidez de suspensão. Todavia, os autores não consideraram a atualização do amortecimento estrutural uma vez que o método escolhido não apresentava bom desempenho em lidar com sistemas amortecidos. Quanto aos resultados, a aplicação da técnica de atualização melhorou a correlação teórico-experimental, entretanto as imperfeições geométricas da estrutura de placa afetaram significativamente o ajuste, uma vez que não foram consideradas no modelo FEM.

Em trabalho posterior publicado no 26º Congresso Internacional de Engenharia Mecânica, Martins e Silveira (2021) conduziram um estudo com abordagem teórico-experimental utilizando a mesma estrutura de placa de aço do trabalho citado anteriormente, porém aplicando diferentes métodos de atualização de modelo. Via rota teórica, a estrutura foi modelada pelo Método dos Elementos Finitos e a partir do teste modal utilizando o martelo de impacto as FRFs experimentais foram obtidas. Os autores realizaram o procedimento de *model updating* utilizando dois algoritmos bastante robustos e baseados em procedimentos evolucionários e de seleção natural, denominados Algoritmo de Evolução Diferencial e Algoritmo de Abelhas. Ao realizar a atualização de modelo, uma função objetivo foi definida através da relação entre amplitudes das FRFs teóricas e experimentais em todo o espectro de frequência analisado, de forma que os algoritmos fossem capazes de encontrar a melhor solução possível para o problema. Foram atualizados módulo de elasticidade, rigidez e amortecimento da suspensão utilizada na condição livre-livre no teste modal e o amortecimento estrutural histerético da placa. Quanto aos resultados, ambos os algoritmos operando isoladamente retornaram os mesmos valores para os parâmetros, que foram por sinal bastante consistentes com valores apresentados na literatura. Mesmo diante das imperfeições geométricas, o ajuste das curvas foi bastante promissor tanto em frequência quanto em amplitude ao longo de todo o intervalo de frequência.

3.2 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentados alguns conceitos de dinâmica estrutural, voltados para a modelagem de estruturas de engenharia visando estabelecer modelos teóricos atualiza-

dos mais fidedignos à realidade através de ajustes com base em dados experimentais. Diversos trabalhos foram citados, desde a modelagem de sistemas discretos via rota teórica para estabelecer um conhecimento sólido acerca dos métodos e suas limitações, até estruturas de grande porte como treliças, painéis solares e máquinas rotativas. Muitos desses trabalhos utilizam os algoritmos BA e DEA como ferramentas de identificação estrutural de parâmetros incertos ou regiões de difícil modelagem que geram discrepâncias significativas na correlação teórico-experimental e invalidam a utilização do modelo teórico em aplicações mais avançadas pelo fato do mesmo não representar com acurácia o verdadeiro comportamento dinâmico do componente, estrutura ou máquina. Diante disso, os algoritmos têm a função de identificar os parâmetros desconhecidos e fornecer os valores mais propícios dentro de um certo intervalo, sempre respeitando as condições do problema, bem como sua física. Foi apresentada também uma breve discussão sobre aplicações do método FBSM no âmbito da subestruturação e suas principais características, além de evidenciar técnicas que auxiliam na execução do procedimento ao contornar o problema relacionado com graus de liberdade rotacionais. No próximo capítulo, serão apresentados os alicerces para a compreensão da modelagem de estruturas de placas pelo método dos elementos finitos, bem como o embasamento teórico e prático necessário para aplicar as técnicas de análise dinâmica e o detalhamento dos aspectos teóricos acerca dos algoritmos de atualização.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 Introdução

Neste capítulo será exposta toda a fundamentação teórica necessária para realização do trabalho. Aspectos sobre a modelagem matemática por Elementos Finitos e hipóteses adotadas no modelo para simular o experimento serão discutidas. A partir da obtenção do modelo FEM, será discutido o procedimento de Análise Modal para representar o sistema de forma equivalente através das propriedades modais. Mais adiante, de posse do modelo modal, será explicitada a obtenção dos modelos de resposta que serão posteriormente utilizados nas técnicas de identificação paramétrica e atualização de modelo. Por fim, serão explicitadas as características fundamentais da técnica de identificação paramétrica que permite a comparação teórico-experimental dos modos de vibrar, bem como dos algoritmos de atualização utilizados no trabalho, evidenciando cada uma das etapas que acontecem no processo de minimização da função objetivo com o intuito de comparar as formulações envolvidas.

4.2 Modelagem matemática por Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico para resolução de problemas em diversas áreas da engenharia. As análises típicas que utilizam tal método são: análise estrutural, transferência de calor, escoamento de fluidos, transferência de massa e eletromagnetismo (LOGAN, 2016).

Nos problemas que envolvem geometrias e carregamentos complexos, geralmente não é possível obter soluções analíticas, que são aquelas dadas por uma expressão matemática que retorna os valores das incógnitas do problema para qualquer ponto na estrutura. A obtenção dessas soluções analíticas usualmente requer a solução de equações diferenciais parciais (EDP) ou ordinárias (EDO) que, devido às complexidades do modelo, não são facilmente obtidas. Portanto, deve-se recorrer aos métodos numéricos, tal como o MEF, para soluções aceitáveis (LOGAN, 2016).

Quando se trata de uma análise estrutural estática, a formulação do MEF resulta em um sistema de equações algébricas, obtidas através da EDP que governa o comportamento do componente em questão, para serem resolvidas simultaneamente. A obtenção dessas equações algébricas é devido ao fato da discretização do domínio em pequenas unidades (elementos finitos) que interconectadas em pontos específicos em comum (nós do modelo) formam a malha de

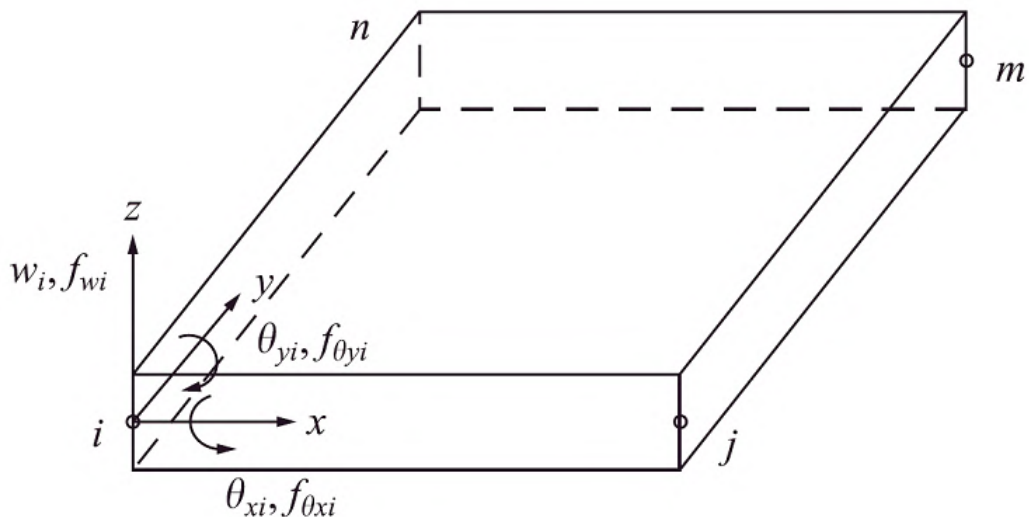
elementos. Já na aplicação do MEF em análises estruturais dinâmicas, o sistema de equações resultante consiste em um conjunto de EDOs que também devem ser resolvidas simultaneamente. De maneira análoga, as EDOs são obtidas através da fragmentação do contínuo em elementos, onde cada unidade dessa discretização é representada por uma dessas equações. É importante ressaltar que, tanto para o caso estático como dinâmico, como se trata de uma discretização em um número finito de elementos, a solução obtida para as equações é normalmente aproximada (LOGAN, 2016; BITTENCOURT, 2010).

4.2.1 Modelo de Elementos Finitos da estrutura de placa

O modelo matemático da estrutura de placa foi baseado na teoria de placas finas e é conhecido por *Kirchhoff-Love plate model*, sendo uma extensão da teoria de viga de *Euler-Bernoulli* para problemas bidimensionais. O modelo assume um estado plano de tensão na direção de menor espessura da placa (REDDY, 2006).

A Figura (4.1) traz a representação esquemática do elemento de placa, onde pode ser evidenciado que cada nó possui três graus de liberdade: uma translação ao longo do eixo z e duas rotações ao longo dos eixos x e y . Ainda de acordo com a Figura (4.1), os graus de liberdade para o nó i são: w_i , θ_{xi} e θ_{yi} como translação ao longo do eixo z , rotação ao longo do eixo x e rotação ao longo do eixo y , respectivamente. Para os nós j , m e n o procedimento é análogo. Desta forma, cada elemento de placa possui 12 graus de liberdade: w_i , θ_{xi} , θ_{yi} , w_j , θ_{xj} , θ_{yj} , w_n , θ_{xn} , θ_{yn} , w_m , θ_{xm} e θ_{ym} (LOGAN, 2016).

Figura 4.1 – Elemento de placa com três graus de liberdade por nó.



Fonte: Logan (2016).

Por meio da utilização do polinômio de interpolação, como apresentado na Equação (4.1), é possível determinar as matrizes de massa e rigidez do elemento (LOGAN, 2016; SHAMES; DYM, 1995).

$$w(x,y) = \gamma_1 + \gamma_2x + \gamma_3y + \gamma_4x^2 + \gamma_5xy + \gamma_6y^2 + \gamma_7x^3 + \gamma_8x^2y + \gamma_9xy^2 + \gamma_{10}y^3 + \gamma_{11}x^3y + \gamma_{12}xy^3 \quad (4.1)$$

Sendo $w(x,y)$ o polinômio de interpolação e γ_i as constantes relacionadas a cada monômio. Devido ao fato do elemento possuir 12 graus de liberdade, um polinômio contendo 12 monômios, onde cada um possui uma constante a ser determinada, foi escolhido em x e y . Embora o polinômio apresentado na Equação (4.1) seja considerado incompleto segundo a metodologia do triângulo de Pascal, que requer a presença de termos como $w(x,y)$: x^2y^2 , x^3y^2 , x^2y^3 e x^3y^3 para garantir que os resultados aproximados obtidos via elementos finitos sejam precisos, não há indícios de que a falta desses monômios prejudique a obtenção do modelo espacial. Além disso, a escolha dos dois últimos termos como sendo x^3y e xy^3 garante que haja continuidade de deslocamentos na conexão entre os elementos, uma vez que se termos como x^4 , y^4 fossem escolhidos, essa continuidade não seria satisfatória (LOGAN, 2016; BITTENCOURT, 2010).

As constantes γ_1 até γ_{12} podem ser obtidas ao expressar as 12 equações simultâneas que relacionadas aos graus de liberdade elementares. Considerando que $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ e $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$,

pode-se obter a Equação (4.2).

$$\begin{cases} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{cases} \quad (4.2)$$

Para os nós n , m e j o raciocínio é análogo e basta substituir o nó correspondente na Equação (4.2). Na forma reduzida, obtém-se a Equação (4.3) para todos os nós do elemento (LOGAN, 2016; SHAMES; DYM, 1995)

$$\{a\}_{12 \times 1} = [A]_{12 \times 12} \{\gamma\}_{12 \times 1} \quad (4.3)$$

Sendo que $\{a\}$ representa o vetor de coordenadas generalizadas, segundo Equação (4.4)

$$\{a\} = \{w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ w_n \ \theta_{xn} \ \theta_{yn} \ w_m \ \theta_{xm} \ \theta_{ym}\}^T \quad (4.4)$$

E $\{\gamma\}$ o vetor das 12 constantes do polinômio de interpolação $w(x,y)$, conforme Equação (4.5)

$$\{\gamma\} = \{\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4 \ \gamma_5 \ \gamma_6 \ \gamma_7 \ \gamma_8 \ \gamma_9 \ \gamma_{10} \ \gamma_{11} \ \gamma_{12}\}^T \quad (4.5)$$

A Equação (4.6) apresenta a expansão da matriz $[A]$ para todo o elemento

$$[A]^e = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & x_j^3 & x_j^2 y_j & x_j y_j^2 & y_j^3 & x_j^3 y_j & x_j y_j^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 2y_j & 0 & x_j^2 & 2x_j y_j & 3y_j^2 & x_j^3 & 3x_j y_j^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_j & -y_j & 0 & -3x_j^2 & -2x_j y_j & -y_j^2 & 0 & -3x_j^2 y_j & -y_j^3 \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & x_n^3 & x_n^2 y_n & x_n y_n^2 & y_n^3 & x_n^3 y_n & x_n y_n^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_n & 2y_n & 0 & x_n^2 & 2x_n y_n & 3y_n^2 & x_n^3 & 3x_n y_n^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_n & -y_n & 0 & -3x_n^2 & -2x_n y_n & -y_n^2 & 0 & -3x_n^2 y_n & -y_n^3 \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & x_m y_m & y_m^2 & x_m^3 & x_m^2 y_m & x_m y_m^2 & y_m^3 & x_m^3 y_m & x_m y_m^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_m & 2y_m & 0 & x_m^2 & 2x_m y_m & 3y_m^2 & x_m^3 & 3x_m y_m^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_m & -y_m & 0 & -3x_m^2 & -2x_m y_m & -y_m^2 & 0 & -3x_m^2 y_m & -y_m^3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Ainda nesse raciocínio, as deformações elementares $\{\varepsilon\}$ podem ser expressadas de acordo com a Equação (4.7), relacionando-as com o vetor $\{a\}$ (SHAMES; DYM, 1995).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Nesse contexto, a partir da Equação (4.7), pode ser definida a matriz $[H]$ que relaciona as deformações elementares com as constantes do polinômio, como apresentado na Equação (4.8)

(LOGAN, 2016; SHAMES; DYM, 1995).

$$\{\varepsilon\}_{3 \times 1} = [H]_{3 \times 12} \{\gamma\}_{12 \times 1} \quad (4.8)$$

Dessa forma, a matriz de gradiente $[B]$ pode ser determinada utilizando as matrizes $[H]$ e $[A]$, de acordo com a Equação (4.9) (LOGAN, 2016).

$$[B]_{3 \times 12} = [H]_{3 \times 12} [A]_{12 \times 12}^{-1} \quad (4.9)$$

Diante da obtenção dessas matrizes, a matriz de rigidez $[K]$ do elemento de placa pode ser obtida segundo a Equação (4.10) (BITTENCOURT, 2010).

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.10)$$

onde a matriz constitutiva $[D]$ para os elementos de placa é apresentada na Equação (4.11).

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material, ν o coeficiente de Poisson e h a espessura da placa (SHAMES; DYM, 1995).

De maneira análoga, a matriz de massa $[M]$ do elemento de placa pode ser obtida através da Equação (4.12) (BITTENCOURT, 2010).

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (4.12)$$

onde ρ representa a densidade do material e $[N]$ é definida como a matriz de funções de forma do elemento e é dada pela relação entre o polinômio de interpolação e as constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_{12}$, conforme Equação (4.13) (BITTENCOURT, 2010; SHAMES; DYM, 1995).

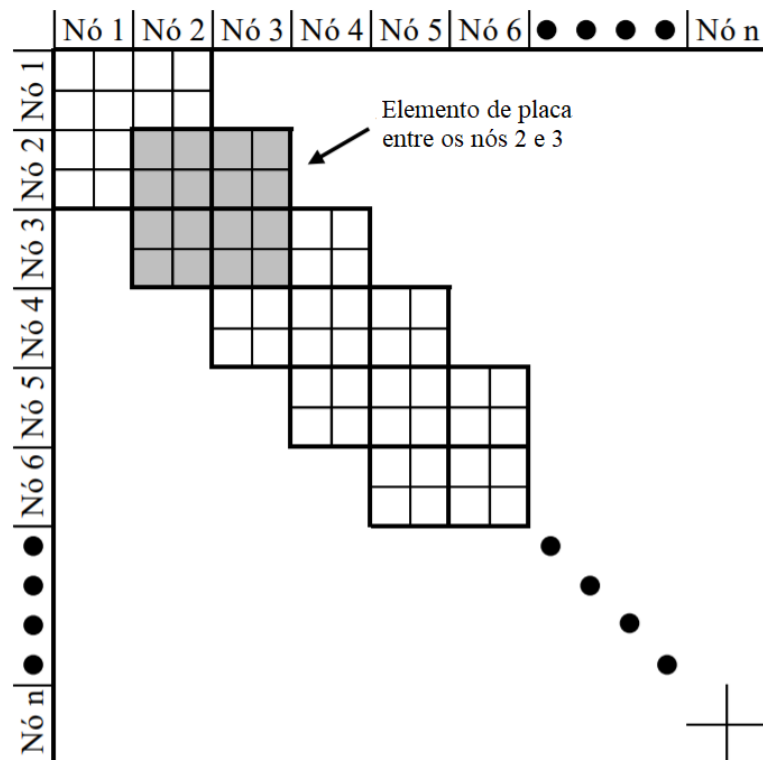
$$[N]_{1 \times 12} = [R]_{1 \times 12} [A]_{12 \times 12}^{-1} \quad (4.13)$$

sendo $[R]$ apresentada na Equação (4.14).

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A partir da definição das matrizes de rigidez e massa elementares, é possível obter as matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento, sendo que esta última se trata de um caso particular que será abordado logo adiante. De acordo com a discretização utilizada na malha de elementos finitos, a obtenção das matrizes globais ocorre através de um processo de montagem por meio da superposição das matrizes elementares nos graus de liberdade de incidência, como evidenciado na Figura (4.2). As matrizes globais representam todos os graus de liberdade do modelo adotado para o problema discretizado.

Figura 4.2 – Esquema de arranjo das matrizes elementares na composição das matrizes globais.



Fonte: Adaptado de Martin (2016).

Com relação à matriz de amortecimento do modelo, do ponto de vista prático, é muito difícil, se não impossível, determinar para a montagem geral dos elementos, as características de amortecimento de cada elemento isoladamente, pois as propriedades de amortecimento dependem da frequência. O amortecimento em estruturas ocorre devido a histereses no material e movimentos nas juntas, que são mecanismos não completamente compreendidos e difíceis de

serem incorporados nas equações da dinâmica estrutural. Assim, o amortecimento presente nas estruturas é aproximado como sendo viscoso. Um esquema bastante utilizado para avaliação da matriz de amortecimento é o **Amortecimento de Rayleigh** ou **Amortecimento Proporcional** que contabiliza a matriz como uma combinação linear das matrizes globais de massa e rigidez, de acordo com a Equação 4.15 (FILHO, 2005; EWINS, 2000).

$$[C] = \beta [K] + \eta [M] \quad (4.15)$$

sendo β e η chamadas de, respectivamente, constantes de amortecimento proporcionais de rigidez e massa.

Diante das matrizes $[M]$, $[K]$ e $[C]$ é possível obter uma descrição completa das características físicas de uma estrutura e esse conjunto de matrizes representa o chamado modelo espacial (LOGAN, 2016).

4.3 Análise modal

A partir das matrizes do modelo espacial e considerando amortecimento histerético proporcional e viscoso não proporcional, o equacionamento do sistema dinâmico pode ser representado pela Equação (4.16) (EWINS, 2000).

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C_v] \{\dot{q}\} + ([K] + i[C_h]) \{q\} = \{f(t)\} \quad (4.16)$$

onde $\{\ddot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{q\}$, $\{f(t)\}$ são os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e forças externas associados às coordenadas generalizadas, respectivamente. A matriz $[C_h]$ representa o amortecimento histerético proporcional da placa e pode ser obtida através da Equação (4.15), enquanto a matriz $[C_v]$ representa o amortecimento viscoso não proporcional presente no modelo. A adição dessa matriz na equação de movimento é uma forma de modelar as propriedades de amortecimento de um fio de nylon flexível utilizado no teste modal experimental para representar a condição livre-livre da estrutura.

A técnica de análise modal permite representar o sistema através do modelo modal. Esse modelo descreve o sistema em suas propriedades modais, que são as frequências naturais (ω_n), fatores de amortecimento (ξ) e modos de vibrar (Ψ) e pode ser obtido ao resolver um problema de autovalor-autovetor que origina as matrizes espectral $[\lambda_r]$ e modal $[\Psi]$, onde a primeira é uma matriz diagonal que contém o quadrado dos autovalores e a segunda apresenta

os correspondentes modos de vibrar em análise, que são os autovetores. Para realizar a análise modal no sistema, é necessário recorrer à formulação de estados do tipo (EWINS, 2000)

$$[A] \{\dot{x}\} + [B] \{x\} = \{0\} \quad (4.17)$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [C_v] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [K] + i[C_h] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

sendo que o vetor $\{x\}$ contém as coordenadas generalizadas de estado e as matrizes $[A]$ e $[B]$ são as matrizes do espaço de estados. A solução da Equação (4.17) resulta nas matrizes modal e espectral, nas quais os autovetores e autovalores aparecem em pares complexos conjugados e são do tipo (MAIA; SILVA, 1997; EWINS, 2000)

$$[\lambda_r] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2N} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

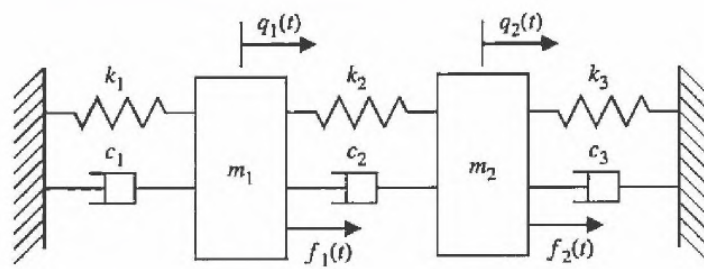
$$[\Psi] = \left[\{\Psi_1\} \quad \{\Psi_2\} \quad \{\Psi_{2N-1}\} \quad \{\Psi_{2N}\} \right] \quad (4.22)$$

sendo N o número de graus de liberdade do sistema.

4.3.1 Aplicação numérica em um sistema 2GL

Para fins de ilustração da técnica de análise modal, as equações citadas acima serão utilizadas para determinar a vibração livre de um sistema discreto com 2 graus de liberdade, ou seja, serão determinados os autovalores e autovetores complexos do sistema apresentado na Figura (4.3).

Figura 4.3 – Sistema massa mola amortecedor 2 graus de liberdade.



Fonte: Friswell *et al.* (2010).

De maneira similar ao que foi apresentado pela Equação (4.16), porém adequando os termos ao sistema discreto em questão, temos que a equação de movimento pode ser compreendida a partir da Equação (4.23).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

onde há uma força f aplicada em cada grau de liberdade. Para que seja possível resolver numericamente, serão considerados valores de massa, rigidez e amortecimento como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros do sistema 2 GL.

Parâmetro	Valor	Unidade
m_1	10	kg
m_2	15	kg
k_1	100	kN/m
k_2	200	kN/m
k_3	300	kN/m
c_1	10	N.s/m
c_2	10	N.s/m
c_3	15	N.s/m
f_1	100	N
f_2	200	N

Fonte: Do autor (2021).

Substituindo os valores apresentados na Tabela (4.1), obtém-se a Equação (4.24).

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 300000 & -200000 \\ -200000 & 500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 200 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

A fim de determinar a vibração livre do sistema, deve-se considerar que as forças externas f_1 e f_2 são nulas, resultando então na Equação (4.25).

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 300000 & -200000 \\ -200000 & 500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Como serão considerados os efeitos dos amortecedores presentes no sistema, deve-se então recorrer à formulação de estados para obter os autovalores e autovetores complexos. Diante disso, as matrizes serão dispostas como apresentado na Equação (4.17), utilizando as matrizes $[A]$ e $[B]$ de estado, resultando na Equação (4.26).

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 10 & 0 \\ -10 & 25 & 0 & 15 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 300000 & -200000 & 0 & 0 \\ -200000 & 500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Assumindo uma solução do tipo exponencial complexa para $\{x\}$ da forma $\{x\} = \{\psi\} e^{\lambda t}$, onde $\{\psi\}$ é um vetor e λ é um escalar, ambos complexos. Se essa função tentativa é solução da Equação (4.26), então sua forma complexa conjugada também é, porque as matrizes $[A]$ e $[B]$ são reais. Substituindo a solução na Equação (4.26), em forma compacta temos a Equação (4.27) (EWINS, 2000).

$$[\lambda A + B] \{\psi\} e^{\lambda t} = \{0\} \quad (4.27)$$

Como a função exponencial nunca será igual a zero, temos que

$$[\lambda A + B] \{\psi\} = \{0\} \quad (4.28)$$

Diante disso, a Equação (4.28) é um problema de autovalor-autovetor que possui $2N$ soluções, onde N é o número de graus de liberdade do sistema, que ocorrem em pares complexos conjugados. Para o caso subamortecido, os autovalores são da forma como apresentado na

Equação (4.29).

$$\lambda_r = -\xi_r \omega_r \pm i \omega_{dr} \quad (4.29)$$

Onde ω_{dr} é a frequência natural amortecida do modo r . Enquanto os autovetores aparecem na forma como apresentado na Equação (4.30).

$$\{\psi_r\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_r\} \\ \{\psi_r\} \lambda_r \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Desta forma, resolvendo o problema de autovalor-autovetor previamente citado, obtém-se as matrizes modal $[\Psi]$ e espectral $[\lambda]$ como apresentado nas Equações (4.31) e (4.32).

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} -8.3534 \cdot 10^{-5} + 0.00804i & -8.3534 \cdot 10^{-5} - 0.00804i & -2.8199 \cdot 10^{-5} + 0.00455i & -2.8199 \cdot 10^{-5} - 0.00455i \\ -5.0437 \cdot 10^{-5} + 0.0059i & -5.0437 \cdot 10^{-5} - 0.0059i & 3.926 \cdot 10^{-5} - 0.0041i & 3.926 \cdot 10^{-5} + 0.0041i \\ 0.99386 + 0.00613i & 0.99386 - 0.00613i & 0.99981 + 0.000190i & 0.99981 - 0.000190i \\ 0.73289 + 0.0031i & 0.73289 - 0.0031i & -0.90388 - 0.00319i & -0.90388 + 0.00319i \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} -0.51899 - 123.5i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.51899 + 123.5i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3143 - 219.27i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.3143 + 219.27i \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

As matrizes previamente evidenciadas podem ser facilmente obtidas pelo MATLAB© através do comando "**eig()**", utilizando a sintaxe $[\Psi, \lambda] = \text{eig}(B, -A)$.

4.4 Modelo de resposta

O modelo de resposta do sistema é aquele representado pelas funções de resposta em frequência (FRF). Pode-se obter a receptância $\alpha_{j,k}(\omega)$ para um sistema com N graus de liberdade a partir da análise de resposta forçada do sistema, por meio das matrizes modal e espectral, de acordo com a Equação (4.33) (AVITABILE, 2017):

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{(\phi_{jr})(\phi_{kr})}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right) \quad (4.33)$$

onde $\{\phi_{jr}\}$ e $\{\phi_{kr}\}$ os componentes j e k de um determinado modo r da matriz de autovetores complexa $\{\Psi\}$ normalizada pela matriz de massa e λ_r corresponde aos autovalores complexos do mesmo modo r , que contêm as frequências naturais do sistema.

A receptância $\alpha_{j,k}(\omega)$ é definida como a resposta de deslocamento na coordenada j , devido a uma excitação na coordenada k , com todas as outras forças sendo nulas. Realizando o procedimento de excitação para todos os graus de liberdade do sistema, é possível construir a matriz de receptância que contém as características dinâmicas do sistema completo. Um outro modelo de resposta muito comumente utilizado é a aceleração $I_{j,k}(\omega)$ que, por definição, é a resposta em termos de aceleração na coordenada j , devido a uma excitação na coordenada k , com todas as outras forças sendo nulas. A aceleração pode ser obtida como se segue (MAIA; SILVA, 1997):

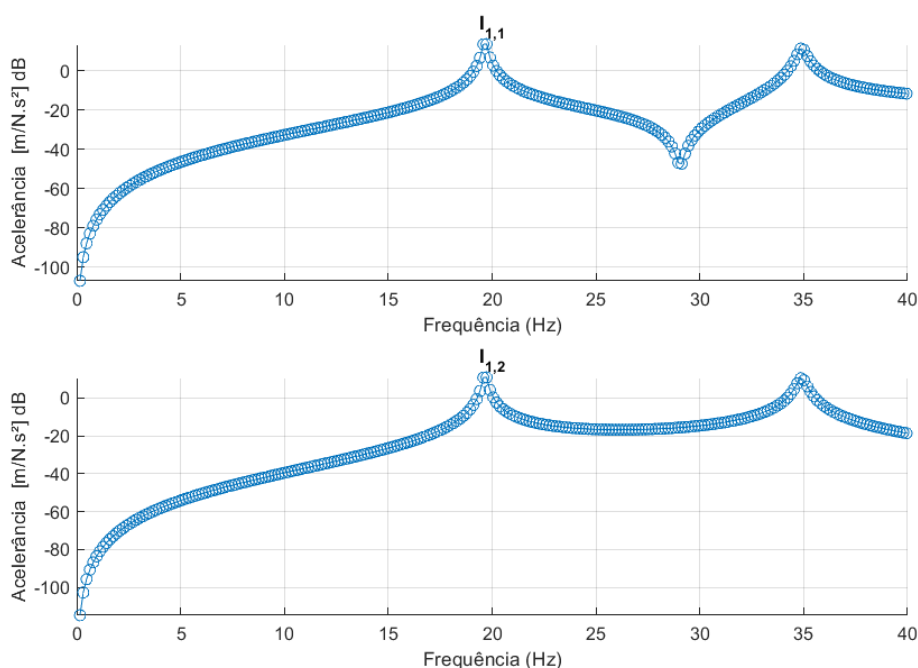
$$I_{j,k}(\omega) = -\omega^2 \alpha_{j,k}(\omega) \quad (4.34)$$

onde ω é a frequência de excitação.

4.4.1 Aplicação numérica em um sistema 2GL

A partir do modelo modal obtido pelas Equações (4.31) e (4.32), pode-se obter o modelo de resposta do sistema de 2 graus de liberdade a partir das Equações (4.33) e (4.34). É importante ressaltar que como se trata de um sistema amortecido que foi resolvido pela formulação de estados, o somatório apresentado na Equação (4.33) deve ser até $2N$. Diante disso, as funções de resposta em frequência do tipo aceleração $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ são apresentadas na Figura (4.4). Como pode ser notado, o sistema possui duas regiões de ressonância que ocorrem por volta de 19 e 35Hz.

Figura 4.4 – FRFs do tipo aceleração $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ para o sistema 2GL.

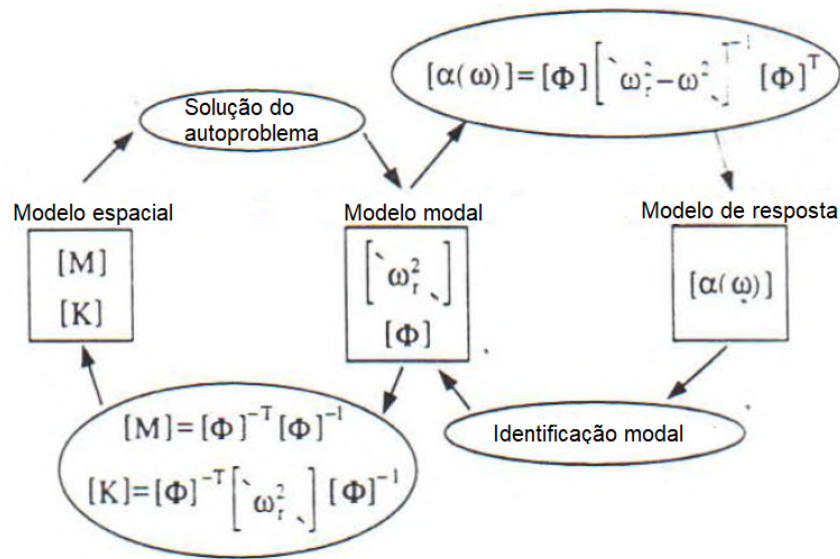


Fonte: Do Autor (2021).

4.5 Identificação paramétrica

O modelo de resposta experimental de estruturas e máquinas pode ser representado pelos modelos citados previamente, tanto aceleração como receptância. Porém, em diversas aplicações de engenharia, somente o modelo de resposta experimental não é suficiente e então aplicam-se técnicas de identificação paramétrica a fim de obter o modelo modal experimental derivado do modelo de resposta, ou seja, obter o polinômio capaz de descrever as curvas experimentais (FRF's) e, com isso, ter posse das matrizes modal e espectral experimentais. Teoricamente, diante do modelo modal experimental, é possível ainda derivar o modelo espacial, representado pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Entretanto, essa não é uma tarefa trivial, uma vez que diversos modelos espaciais podem ser originados do mesmo modelo modal. A equivalência de modelos pode ser visualizada de forma mais clara a partir da Figura (4.5). Além disso, a técnica de identificação paramétrica é essencial para realizar a comparação teórico-experimental dos autovetores através do cálculo do número *MAC* (*Modal Assurance Criterion*), que será discutido posteriormente (MAIA, 1988; EWINS, 2000; AVITABILE, 2017).

Figura 4.5 – Visualização da equivalência dos modelos.



Fonte: Adaptado de Maia (1997).

Os parâmetros modais podem ser obtidos a partir de ajustes de curva e neste tópico será abordado um método conhecido como *Ewins-Gleeson Method*, o qual se aplica muito bem em estruturas com amortecimento desprezível. Diferentemente de outras técnicas mais avançadas, este método é relativamente simples e fornece resultados bem promissores para várias aplicações, dentro da hipótese de amortecimento negligenciável (EWINS; GLEESON, 1982a).

A partir do numerador da Equação (4.33), podem ser definidas as constantes modais ou resíduos das FRFs de acordo com a Equação (4.35) (EWINS, 2000).

$${}_r A_{j,k} = ({}_r \phi_j)({}_r \phi_k) \quad (4.35)$$

Dessa forma, a Equação (4.33) pode ser reescrita em função dos resíduos de acordo com a Equação (4.36).

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r A_{j,k}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right) \quad (4.36)$$

Usualmente, a variável complexa λ_r é expressa em termos da contribuição real e imaginária, como pode ser visto na Equação (4.37) (EWINS; GLEESON, 1982a).

$$\lambda_r = \omega_r^2(1 + i\xi_r) \quad (4.37)$$

sendo ω_r a frequência natural e ξ_r o fator de amortecimento associados ao modo de vibrar r .

Dessa forma, é conveniente reescrever a Equação (4.36) de acordo com a Equação (4.38) (EWINS; GLEESON, 1982a).

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{j,k}}{\omega_r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} \right) + i\xi_r \right]} \quad (4.38)$$

A Equação (4.38) pode ainda ser reescrita em termos de aceleração, de acordo com a Equação (4.39).

$$I_{j,k}(\omega) = \frac{\ddot{X}_j}{F_k} = -\omega^2 \alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{j,k}}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 (1 + i\xi_r)} \quad (4.39)$$

A representação gráfica da Equação (4.39) é facilmente obtida através do teste modal experimental e, a partir da identificação paramétrica, é possível identificar os parâmetros modais e encontrar o polinômio que descreve tal representação gráfica (AVITABILE, 2017).

Os resíduos ${}_r A_{j,k}$, para estruturas onde o amortecimento é desprezível, podem ser obtidos diretamente da Equação (4.39) supondo que $\xi_r = 0$. Dessa forma, pode-se reescrever a aceleração conforme a Equação (4.40).

$$I_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{j,k}}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2} \quad (4.40)$$

Ao selecionar N frequências discretas amostradas na FRF, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ nas proximidades das ressonâncias de cada modo, pode-se reescrever a Equação (4.40) em formato matricial conforme a Equação (4.41). Deve-se garantir que as frequências selecionadas sejam diferentes das frequências naturais para evitar problemas numéricos associados à indeterminação, porém ao mesmo tempo que sejam próximas o suficiente para providenciar informações corretas sobre os resíduos dos modos (EWINS; GLEESON, 1982a; EWINS, 2000).

$$\begin{Bmatrix} I_{j,k}(\Omega_1) \\ I_{j,k}(\Omega_2) \\ \vdots \\ I_{j,k}(\Omega_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega_1^2/\Omega_1^2)^{-1} & (1 - \omega_2^2/\Omega_1^2)^{-1} & \dots & (1 - \omega_N^2/\Omega_1^2)^{-1} \\ (1 - \omega_1^2/\Omega_2^2)^{-1} & (1 - \omega_2^2/\Omega_2^2)^{-1} & \dots & (1 - \omega_N^2/\Omega_2^2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - \omega_1^2/\Omega_N^2)^{-1} & (1 - \omega_2^2/\Omega_N^2)^{-1} & \dots & (1 - \omega_N^2/\Omega_N^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1A_{j,k} \\ 2A_{j,k} \\ \vdots \\ NA_{j,k} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Na forma reduzida, tem-se a Equação (4.42).

$$\{I_{j,k}(\Omega)\}_{N,1} = [R]_{N,N} \{A_{j,k}\}_{N,1} \quad (4.42)$$

A matriz $[R]$ contém termos que dependem exclusivamente das frequências naturais e das frequências de amostragem, que são conhecidos. Logo, os resíduos $rA_{j,k}$ dos polinômios que descrevem as FRF's podem ser obtidos invertendo a Equação (4.42), conforme Equação (4.43).

$$\{A_{j,k}\} = [R]^{-1} \{I_{j,k}(\Omega)\} \quad (4.43)$$

A matriz modal $[\Psi]$ completa de uma estrutura pode ser obtida diretamente a partir de uma linha ou coluna da matriz de FRF's experimentalmente, dependendo se o teste modal é realizado utilizando *shaker* ou martelo de impacto. Porém, para que seja possível regenerar a matriz modal por completo é necessário que a faixa de frequência do experimento contemple todas as frequências naturais relacionadas ao grau de liberdade da estrutura discretizada, ou seja, supondo uma malha real da estrutura de placa com 80 elementos e 99 nós, a matriz modal completa é obtida somente se na faixa de frequência analisada existirem 99 frequências naturais. Caso contrário, o número de linhas da matriz será diferente do número de colunas e está será classificada como incompleta (EWINS; GLEESON, 1982a).

4.6 Comparação dos autovetores: *Modal Assurance Criterion*

A partir da técnica de identificação paramétrica e obtenção da matriz modal regenerada, é conveniente utilizar o número *MAC* como fator de correlação entre os modos de vibrar teóricos e experimentais. Para que seja possível utilizar a ferramenta, deve-se obter a matriz modal via rota teórica e experimental e, em posse de ambas, a correlação pode ser facilmente determinada. O número *MAC* entre um autovetor analítico ϕ_{ak} e um autovetor experimental ϕ_{mj} é apresentado na Equação (4.44) (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013).

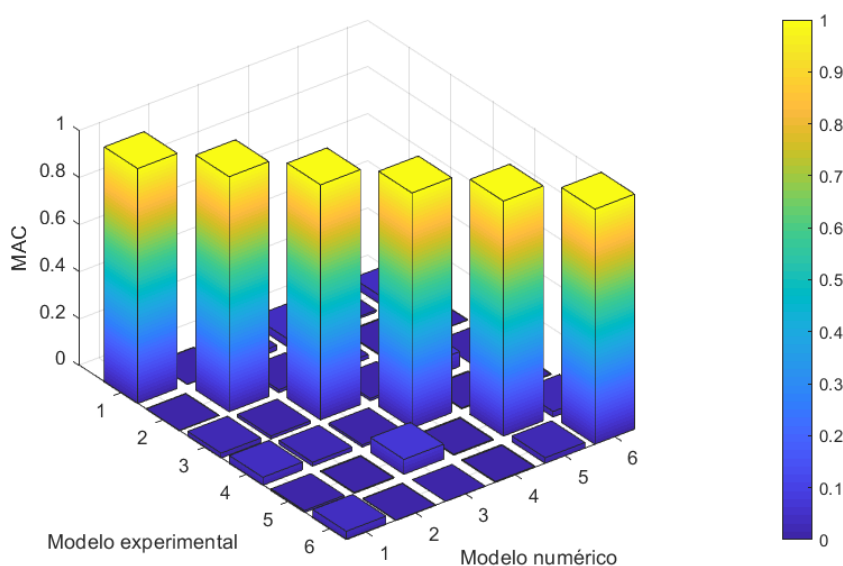
$$MAC_{jk} = \frac{\left\| \phi_{mj}^T \phi_{ak} \right\|^2}{(\phi_{ak}^T \phi_{ak})(\phi_{mj}^T \phi_{mj})} \quad (4.44)$$

O valor do número *MAC* varia entre 0 e 1. Se o valor retornado for 1, significa que um autovetor é múltiplo do outro e eles estão correlacionados (correspondem ao mesmo modo). Em contrapartida, um valor de 0 significa que não há correlação teórico-experimental entre os autovetores. Para realizar a comparação, os autovetores analíticos e experimentais devem ter o mesmo número de elementos, embora a normalização não influencie nos resultados. Geral-

mente, os resultados são agrupados em uma matriz para melhor visualização. Se os modos forem correlacionados, a matriz MAC terá valores próximos a 1 na diagonal principal e próximos de zero em qualquer outra posição (FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; PÁSTOR; BINDA; HARČARIK, 2012).

Em uma análise simulada considerando um sistema com 6 graus de liberdade, na qual a matriz modal analítica e experimental são exatamente iguais espera-se, pela Equação (4.44) que os termos da diagonal principal sejam iguais a 1 e o restante da matriz igual a zero, conforme apresentado na Figura (4.6).

Figura 4.6 – MAC de um sistema 6 GDL simulando perfeita correlação dos modos.



Fonte: Do Autor (2021).

Como pode ser notado, a visualização da matriz em formato gráfico é bastante intuitiva e permite verificar facilmente se há ou não correlação entre os modos. Além disso, é possível identificar modos "trocados" caso haja algum termo pontual fora da diagonal principal apresentando valores próximos a 1 (PÁSTOR; BINDA; HARČARIK, 2012).

4.7 Métodos de atualização de modelo (*model updating*)

4.7.1 Algoritmo de Evolução Diferencial (DEA)

O Algoritmo de Evolução Diferencial, um método iterativo inicialmente proposto por Storn e Price (1995) e que desde então vem sendo amplamente utilizado para lidar com problemas de otimização em diversas áreas. A popularidade atual do método em questão na área

de otimização estrutural é baseada na sua simplicidade e efetividade em encontrar soluções globais ótimas (máximos ou mínimos) através de um processo de seleção natural, como observado por Darwin. Neste contexto, em uma população, os indivíduos (possíveis soluções) são selecionados de acordo com sua aptidão e o algoritmo busca pelos mais aptos em cada geração para encontrar a melhor solução possível para o problema. Ou seja, a cada iteração o algoritmo busca por parâmetros que minimizem de forma mais eficiente e consistente a discrepância teórico-experimental até que um dos critérios de parada sejam satisfeitos (ZAHARIE, 2012).

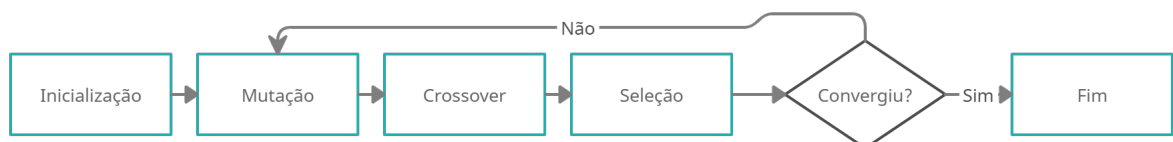
Diante disso, nesse trabalho, a função objetivo que será minimizada é a soma das diferenças entre os vetores de FRFs teóricas e experimentais, cuja discrepância deve ser reduzida para obter parâmetros confiáveis dentro de um certo intervalo. A Equação (4.45) define a função objetivo (FO) em termos matemáticos.

$$FO = \sum_{r=1}^n \frac{\|FRF_{exp,r} - FRF_{teo,r}\|}{\|FRF_{exp,r}\|} \quad (4.45)$$

Como pode ser visto, as amplitudes das FRFs teóricas são subtraídas das experimentais em cada frequência da discretização e a norma dessa operação é comparada com a norma da amplitude da FRF experimental na mesma frequência para todo o intervalo de frequências analisado, considerando múltiplas FRFs no processo.

Basicamente, o DEA possui 4 etapas principais: inicialização, mutação, *crossover* e seleção. A Figura (4.7) evidencia a sequência lógica de acontecimento de cada uma através de um fluxograma.

Figura 4.7 – Fluxograma do Algoritmo de Evolução Diferencial.



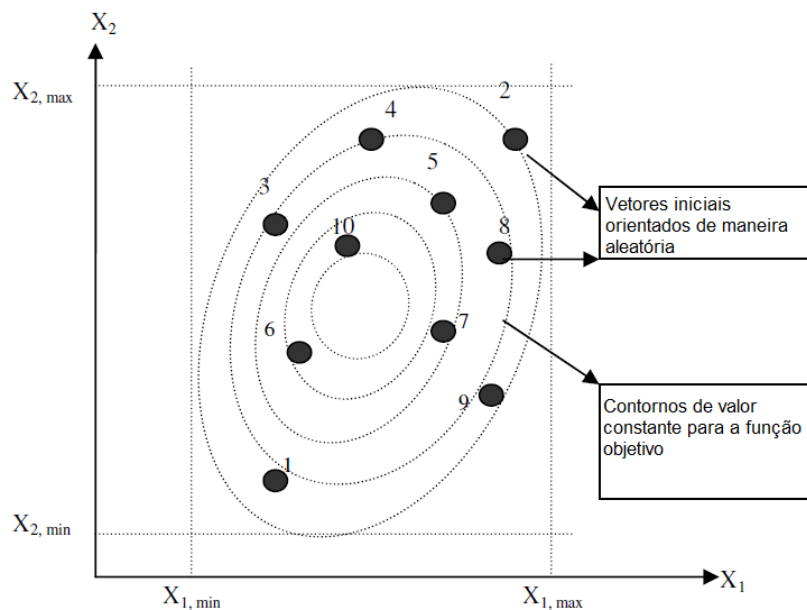
Fonte: Adaptado de Ho-Huu *et al.* (2016).

Na etapa de inicialização, primeiramente devem ser especificados os vetores das variáveis de atualização, os quais contêm o intervalo de busca permitido que o algoritmo possa variar esses parâmetros visando minimizar a função objetivo especificada. Uma vez definidos, se o *j*-ésimo parâmetro tem o limite mínimo e máximo dado por $x_{min,j}$ e $x_{max,j}$, respectivamente e se

$rand_{i,j}(0,1)$ representa a componente j de um vetor i de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1, pode-se inicializar a j -ésima componente da i -ésima população de acordo com a Equação (4.46). A Figura (4.8) apresenta a distribuição randômica dos vetores iniciais gerados pelo algoritmo de forma genérica (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009).

$$x_{i,j} = x_{min,j} + rand_{i,j}(0,1)(x_{max,j} - x_{min,j}) \quad (4.46)$$

Figura 4.8 – Representação esquemática genérica da etapa de inicialização.



Fonte: Adaptado de Das, Abraham e Konar (2009).

Uma vez gerada a população inicial, o algoritmo inicia o esquema de mutação. Uma das grandes vantagens do DEA é possuir diversos esquemas de mutação, como apresentado na Figura (4.9). O mecanismo de mutação utilizado nesse trabalho refere-se a estratégia 7: DE/RAND/1/BIN (DE representa a sigla para *Differential Evolution*, RAND se refere a estratégia randômica de escolha dos vetores na mutação, 1 representa o número de pares de vetores utilizados no esquema de mutação e BIN é para representar que a estratégia de *crossover* é binomial) (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009; LOBATO, 2008).

Figura 4.9 – Representação das estratégias de mutação do DEA.

Estratégia	Representação	Mecanismo de Mutação
1	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_\beta^j - x_\gamma^j)$	DE/BEST/1/EXP
2	$x^{j+1} = x_\alpha^j + F(x_\beta^j - x_\gamma^j)$	DE/RAND/1/EXP
3	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/RAN-TO-BEST/2/EXP
4	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_\alpha^j - x_\beta^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/BEST/2/EXP
5	$x^{j+1} = x_\alpha^j + F(x_\rho^j - x_\beta^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/RAND/2/EXP
6	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_\beta^j - x_\gamma^j)$	DE/BEST/1/BIN
7	$x^{j+1} = x_\alpha^j + F(x_\beta^j - x_\gamma^j)$	DE/RAND/1/BIN
8	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/RAND-TO-BEST/2/BIN
9	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_\alpha^j - x_\beta^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/BEST/2/BIN
10	$x^{j+1} = x_\alpha^j + F(x_\rho^j - x_\beta^j) + F(x_\gamma^j - x_\delta^j)$	DE/RAND/2/BIN

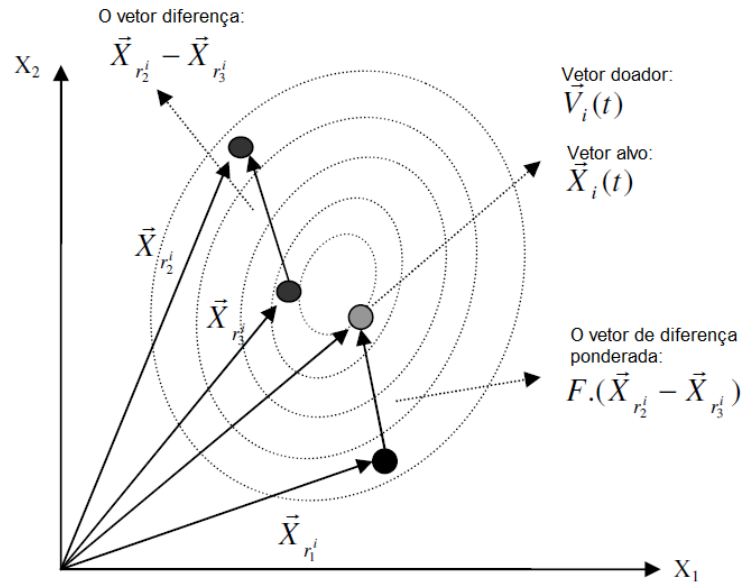
Fonte: Lobato (2008).

Para gerar um vetor doador para cada membro da população atual, três outros vetores de parâmetros, distintos entre si, $x_{1,j}$, $x_{2,j}$ e $x_{3,j}$ são aleatoriamente selecionados dentre aqueles da população em questão. A diferença entre dois desses vetores é ponderada por um escalar F e essa diferença é adicionada ao terceiro para gerar o vetor doador, como pode ser visto na Equação (4.47).

$$v_{i,j} = x_{3,j} + F(x_{1,j} - x_{2,j}) \quad (4.47)$$

onde o escalar F é um número real positivo entre 0 e 1 denominado fator de escala de mutação. A Figura (4.10) apresenta de forma esquemática o resultado da operação de mutação considerando os três vetores selecionados aleatoriamente (LOBATO, 2008).

Figura 4.10 – Representação esquemática genérica da etapa de mutação.



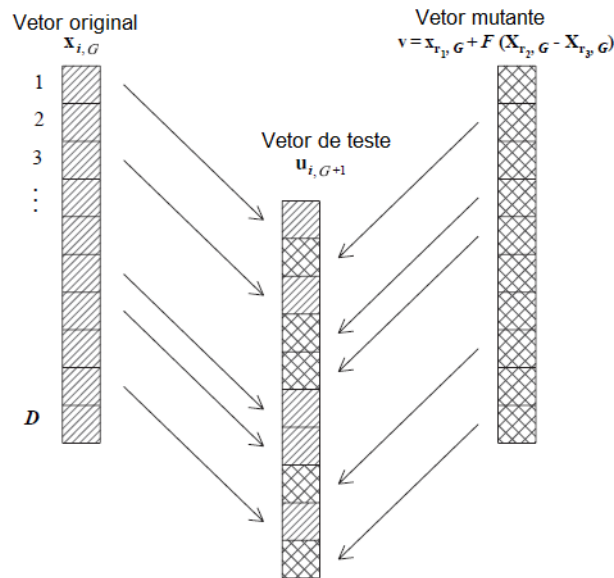
Fonte: Adaptado de Das, Abraham e Konar (2009).

Para aumentar a diversidade da população, o algoritmo utiliza uma operação de *crossover* após gerar o vetor doador pelo esquema de mutação. No *crossover* binomial, basicamente o vetor doador permuta componentes com o vetor alvo da população com o intuito de gerar um vetor de teste. Essa troca de componentes ocorre sempre que um número aleatório selecionado entre 0 e 1 for menor ou igual ao escalar *CR*, denominado taxa de *crossover* (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009).

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j}, & \text{se } (rand_{i,j}(0,1) \leq CR \text{ ou } j = j_{rand}) \\ x_{i,j} \end{cases} \quad (4.48)$$

onde j_{rand} é um índice do vetor aleatoriamente selecionado para garantir que o vetor teste obtenha pelo menos uma componente do vetor doador e *CR* é geralmente escolhido entre 0,8 e 1. A Figura (4.11) apresenta uma representação esquemática do esquema de *crossover* e a permuta de componentes entre os vetores (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009).

Figura 4.11 – Representação esquemática genérica da etapa de *crossover*.



Fonte: Adaptado de Savoia e Vincenzi (2008).

Por fim, o último estágio do algoritmo é chamado de seleção. Nesse ponto, o algoritmo decide quem entre o vetor alvo $x_{i,j}$ e o recém formado vetor teste $u_{i,j}$ irá permanecer para a próxima geração. Se o vetor teste for mais apto que o vetor alvo, será realizada a reposição e o primeiro estará na próxima geração. No caso de uma minimização da função objetivo, o esquema de seleção pode ser visto na Equação (4.49).

$$x_{i,j+1} = \begin{cases} u_{i,j}, & \text{se } f(u_{i,j}) \leq f(x_{i,j}) \\ x_{i,j} \end{cases} \quad (4.49)$$

Como forma de condensar cada uma das etapas apresentadas, foi gerado um pseudocódigo para implementação do algoritmo de acordo com a Figura (4.12).

Figura 4.12 – Pseudocódigo para implementação do DEA.

Algorithm 1 The general structure of DEA

```

1: Population initialization  $X(0) \rightarrow \{x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)\}$ 
2:  $j = 0$ 
3: Compute  $\{f(x_1(j)), f(x_2(j)), \dots, f(x_n(j))\}$ 
4: while the stopping condition is false do
5:   for  $i = 1, n$  do
6:      $v_{i,j} \rightarrow generateMutant(X(j))$ 
7:      $u_{i,j} \rightarrow crossover(x_{i,j}, v_{i,j})$ 
8:     Compute  $f(u_{i,j})$ 
9:     if  $f(u_{i,j}) \leq f(x_{i,j})$  then
10:       $x_{i,j+1} = u_{i,j}$ 
11:     else
12:       $x_{i,j+1} = x_{i,j}$ 
13:     end if
14:   end for
15:    $j = j + 1$ 
16: end while

```

Fonte: Do Autor (2021).

4.7.1.1 Aplicação numérica: minimização de somatório

Para ilustrar a aplicação do Algoritmo de Evolução Diferencial numericamente, serão utilizadas as equações previamente citadas a fim de tonar mais claras as etapas do algoritmo. Como exemplo, a função objetivo a ser minimizada é apresentada na Equação (4.50).

$$f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \quad (4.50)$$

Como o processo de minimização do somatório apresentado pode levar algumas iterações, apenas a primeira iteração será abordada ao longo do texto, visto que o procedimento para as outras iterações é completamente análogo e não necessita ser repetido. Supondo uma população inicial $NP = 5$ e que o intervalo de busca para cada componente dos vetores é de $x_{min} = -10$ até $x_{max} = 10$, o segundo indivíduo pode ser inicializado aplicando a Equação (4.46), como apresentado na Equação (4.51).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2,1}(0) = -10 + rand_{2,1}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.621)(20) \\ x_{2,2}(0) = -10 + rand_{2,2}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.519)(20) \\ x_{2,3}(0) = -10 + rand_{2,3}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.982)(20) \\ x_{2,4}(0) = -10 + rand_{2,4}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.279)(20) \\ x_{2,5}(0) = -10 + rand_{2,5}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.025)(20) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2.42 \\ 0.38 \\ 9.64 \\ -4.42 \\ -9.50 \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

Repetindo esse procedimento para os outros 4 indivíduos, a Equação (4.52) apresenta os 5 vetores inicializados.

$$\begin{pmatrix} \vec{X}_1^T \\ \vec{X}_2^T \\ \vec{X}_3^T \\ \vec{X}_4^T \\ \vec{X}_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.82 & 4.78 & -9.34 & 5.36 & -3.77 \\ 2.42 & 0.38 & 9.64 & -4.42 & -9.50 \\ 2.76 & 8.41 & -0.92 & -5.09 & -1.32 \\ 9.12 & 7.93 & -3.27 & -2.08 & -9.26 \\ 5.72 & -8.52 & -5.04 & 3.36 & 2.51 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

A partir dos 5 vetores inicializados, é possível realizar a etapa de mutação. Nessa etapa, para cada um dos 5 vetores, um vetor mutante é gerado. Dessa forma, para o primeiro indivíduo, considerando a estratégia de mutação 7 da Figura (4.9), o algoritmo seleciona outros três vetores, diferentes de \vec{X}_1 e diferentes entre si, para compor o esquema de mutação. Supondo que o algoritmo fez a escolha dos vetores \vec{X}_3 , \vec{X}_4 e \vec{X}_2 e que a constante de mutação $F = 0.8$, o vetor doador $\vec{V}_1(0)$ referente a \vec{X}_1 é apresentado na Equação (4.53).

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}(0) \\ v_{1,2}(0) \\ v_{1,3}(0) \\ v_{1,4}(0) \\ v_{1,5}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.76 \\ 8.41 \\ -0.92 \\ -5.09 \\ -1.32 \end{pmatrix} + 0.8 \left[\begin{pmatrix} 9.12 \\ 7.93 \\ -3.27 \\ -2.08 \\ -9.26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.42 \\ 0.38 \\ 9.64 \\ -4.42 \\ -9.50 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 8.12 \\ 14.45 \\ -11.24 \\ -3.22 \\ -1.12 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Como os elementos $v_{1,2}(0)$ e $v_{1,3}(0)$ excederam os limites estabelecidos por x_{max} e x_{min} , respectivamente, seus valores são substituídos pelo limite mais próximo, como apresentado na Equação (4.54).

$$\vec{V}_1(0) = \begin{pmatrix} 8.12 \\ 10 \\ -10 \\ -3.22 \\ -1.12 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

De posse do vetor doador para o indivíduo $\vec{X}_1(0)$, pode-se realizar o esquema de *crossover* binomial como apresentado na Equação (4.48). Supondo que $CR = 0.8$ e $j_{rand} = 3$ (este valor é gerado aleatoriamente pelo algoritmo de acordo com o número de componentes do vetor). Para cada componente do vetor $\vec{X}_1(0)$ será computado um número aleatório $rand_{1,j}(0,1)$ que

será comparado com a taxa de *crossover* $CR = 0.8$. Se o número gerado for menor que CR , ou se $j = j_{rand}$, o correspondente componente de $\vec{X}_1(0)$ é substituído pelo mesmo componente de $\vec{V}_1(0)$. A Tabela (4.2) apresenta os componentes dos vetores, bem como os números aleatórios gerados para cada componente.

Tabela 4.2 – *crossover* binomial para o indivíduo $\vec{X}_1(0)$.

\vec{X}_1	\vec{V}_1	$rand_{1,j}(0,1)$	$\vec{U}_1(0)$
3.82	8.12	0.85	3.82
4.78	10	0.81	4.78
-9.34	-10	0.89	-9.34
5.36	-3.22	0.12	-3.22
-3.77	-1.12	0.63	-1.12

Fonte: Do autor (2021).

É importante ressaltar que embora $rand_{1,3} = 0.89$ é maior que CR , para este caso $j = j_{rand}$ e, por isso, o componente 3 do vetor doador foi permutado para o vetor de teste.

Na última etapa do algoritmo, que é a seleção, o valor da função objetivo retornado pelo vetor de teste $\vec{U}_1(0)$ é diretamente comparado àquele retornado pelo vetor $\vec{X}_1(0)$ e, o vetor que retornar a menor função objetivo permanece para a próxima geração. Diante disso, tal procedimento é computado nas Equações (4.55) e (4.56).

$$f(\vec{X}_1(0)) = (3.82)^2 + (4.78)^2 + (-9.34)^2 + (5.36)^2 + (-3.77)^2 = 167.62 \quad (4.55)$$

$$f(\vec{U}_1(0)) = (3.82)^2 + (4.78)^2 + (-9.34)^2 + (-3.22)^2 + (-1.12)^2 = 136.29 \quad (4.56)$$

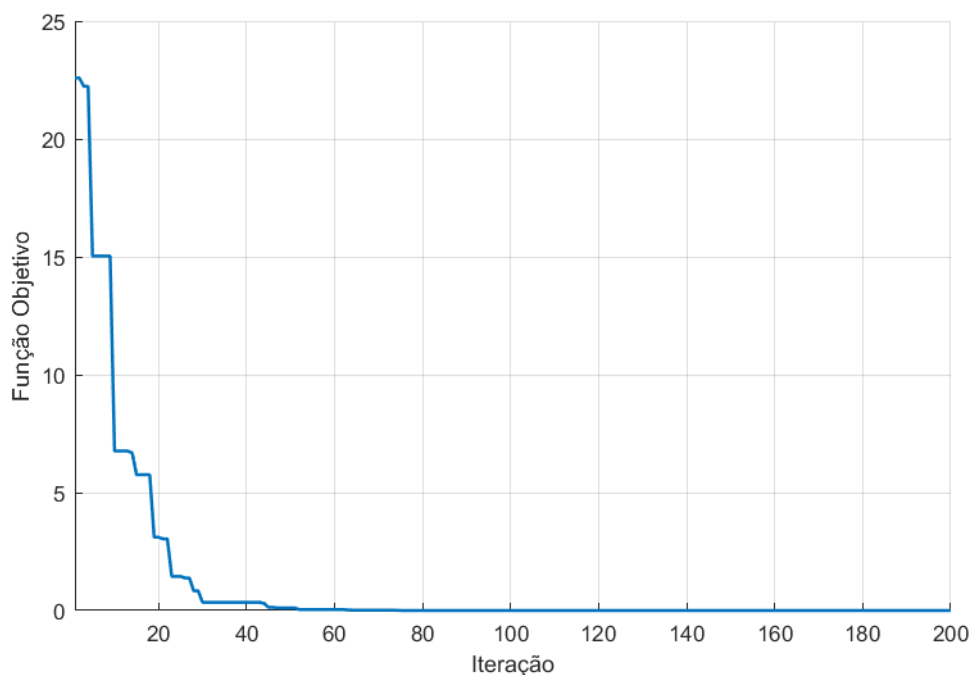
Dessa forma, como $f(\vec{U}_1(0)) < f(\vec{X}_1(0))$ então temos que o vetor $\vec{X}_1(1)$ é apresentado na Equação (4.57).

$$\vec{X}_1(1) = \left\{ \begin{array}{c} 3.82 \\ 4.78 \\ -9.34 \\ -3.22 \\ -1.12 \end{array} \right\} \quad (4.57)$$

O procedimento apresentado para obtenção do vetor $\vec{X}_1(1)$ é realizado para todos os outros indivíduos e, dessa forma, se completa uma iteração do algoritmo. A Figura (4.13) apresenta

a convergência do algoritmo após 200 iterações, atingindo um valor de função objetivo $FO = 5e^{-9}$.

Figura 4.13 – Convergência do DEA na minimização do somatório.



Fonte: Do autor (2021).

4.7.2 Algoritmo de Abelhas (BA)

Algoritmos de inteligência de enxames são inspirados no comportamento instintivo do trabalho coletivo entre grupos de animais ou insetos, tais como: pássaros, peixes, abelhas, formigas, entre outros. Esses algoritmos podem ser fundamentados por dois principais conceitos: auto-organização e divisão do trabalho (BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999).

A auto-organização corresponde ao conjunto de mecanismos dinâmicos que institui, de modo hierárquico, todo um sistema e é formado por regras básicas de relacionamentos entre cada parte. Nesse conceito, existem quatro importantes propriedades: análise quantitativa sobre as fontes de alimentos encontradas, informações de saturação de alimento em determinadas fontes, busca aleatória por novas fontes de alimento e quantidade mínima de indivíduos para interações aleatórias (BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999).

A divisão de trabalho é um conceito que estabelece que cada indivíduo é direcionado para a realização de somente uma tarefa, tornando-se um indivíduo especializado, permitindo que todas as tarefas sejam realizadas simultaneamente, tornando assim o sistema mais eficiente

do que se as tarefas fossem executadas em sequência (BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999).

Com relação ao algoritmo propriamente dito, cada colônia de abelhas possui as chamadas abelhas exploradoras que buscam de maneira aleatória por fontes de comida. Quando encontram, voltam para a colmeia e qualificam as fontes encontradas de acordo com certos índices. Depois de qualificados, as abelhas exploradoras devem repassar a informação para o restante da colônia e isso é feito através de uma dança. Ao realizar uma série de movimentos em forma de dança, as abelhas informam a direção, distância e quantidade de comida das fontes encontradas. Diante disso, as abelhas seguidoras voam até as fontes identificadas, sendo que mais abelhas são enviadas para locais com mais néctar, permitindo que a colônia reúna comida de maneira mais eficiente. Em termos de implementação, das N soluções aleatórias, N_1 soluções que retornam os menores valores de função objetivo (no caso de uma minimização) são consideradas as melhores. Dentre elas, N_2 soluções com os menores valores de funções objetivo são selecionadas como elites. Visando melhores soluções a cada iteração, são realizadas buscas ao redor das $N_1 + N_2$ soluções, sendo que um número n_1 de buscas corresponde às melhores soluções e n_2 diz respeito às elites, onde $n_2 > n_1$. Ademais, as $N - N_1$ soluções restantes são selecionadas aleatoriamente. Depois de cada iteração, a nova geração possui duas partes: soluções encontradas a partir da busca na vizinhança das melhores soluções e aquelas aleatoriamente selecionadas a partir das $N - N_1$ restantes. As iterações continuam até que algum critério de parada seja alcançado, seja pela convergência ou número máximo de iterações. A Equação (4.58) evidencia como são geradas as N soluções aleatórias (MORADI; FATAHI; RAZI, 2010; BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999; MORADI; ALIMOURI; CHINI-PARDAZ, 2018).

$$x_{rand} = x_{min} + \alpha(x_{max} - x_{min}) \quad (4.58)$$

onde α representa um vetor de números randômicos distribuídos entre 0 e 1, x_{min} e x_{max} são os limites de cada parâmetro a ser atualizado. A busca por novas fontes de comida ao redor das melhores soluções é realizada como mostra a Equação (4.59) (MORADI; FATAHI; RAZI, 2010).

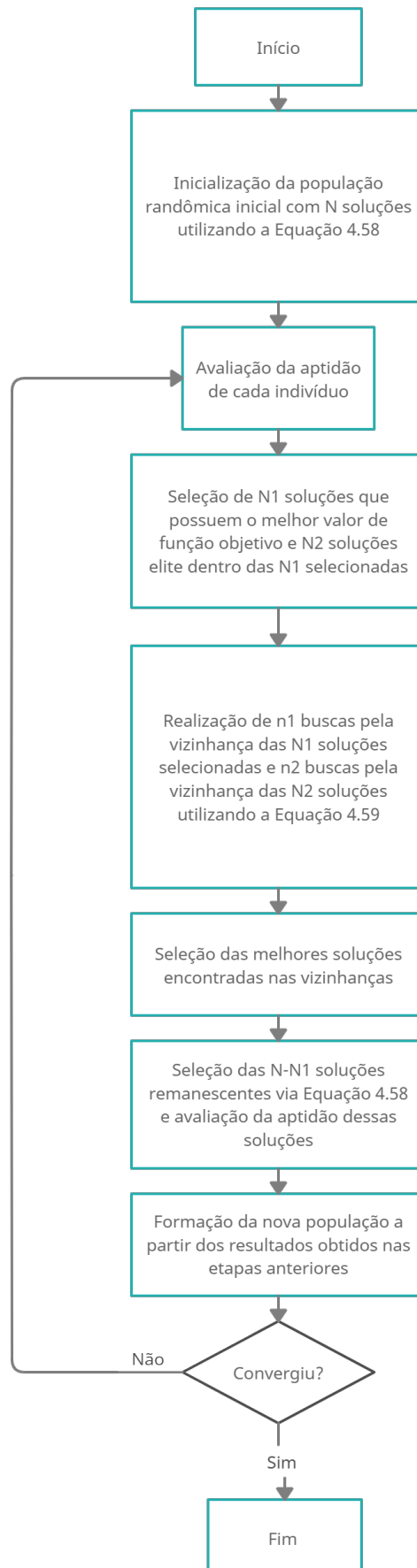
$$xp_i = x_i + f(-r, r) \quad (4.59)$$

onde x_{p_i} é a nova solução obtida a partir da vizinhança de x_i considerando um raio de busca r e f representa um valor obtido a partir de uma distribuição uniforme no intervalo de $(-r, r)$. O raio de busca r normalmente é calculado a partir da Equação (4.60).

$$r = 0.1(x_{max} - x_{min}) \quad (4.60)$$

A Figura (4.14) apresenta o fluxograma do Algoritmo de Abelhas considerando cada uma das etapas já discutidas (MORADI; FATAHI; RAZI, 2010).

Figura 4.14 – Fluxograma do Algoritmo de Abelhas.



4.7.2.1 Aplicação numérica: minimização de somatório

Para ilustrar a aplicação do Algoritmo de Abelhas numericamente, serão utilizadas as equações previamente citadas a fim de tornar mais claras as etapas do algoritmo na minimização do mesmo exemplo anterior, como apresentado na Equação (4.61).

$$f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \quad (4.61)$$

Como o processo de minimização do somatório apresentado pode levar algumas iterações, apenas a primeira iteração será abordada ao longo do texto, visto que o procedimento para as outras iterações é completamente análogo e não necessita ser repetido. Supondo uma população inicial $N = 5$ e que o intervalo de busca para cada componente dos vetores é de $x_{min} = -10$ até $x_{max} = 10$, o segundo local pode ser inicializado aplicando a Equação (4.46), como apresentado na Equação (4.62).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2,1}(0) = -10 + rand_{2,1}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.550)(20) \\ x_{2,2}(0) = -10 + rand_{2,2}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.584)(20) \\ x_{2,3}(0) = -10 + rand_{2,3}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.919)(20) \\ x_{2,4}(0) = -10 + rand_{2,4}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.377)(20) \\ x_{2,5}(0) = -10 + rand_{2,5}(0,1) \{10 - (-10)\} = -10 + (0.592)(20) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1.00 \\ 1.68 \\ 8.38 \\ -2.46 \\ 1.84 \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

Repetindo esse procedimento para os outros 4 locais, a Equação (4.63) apresenta os 5 vetores inicializados.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{X}_1^T \\ \vec{X}_2^T \\ \vec{X}_3^T \\ \vec{X}_4^T \\ \vec{X}_5^T \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 6.67 & -1.77 & -2.22 & 8.78 & 7.87 \\ 1.00 & 1.68 & 8.38 & -2.46 & 1.84 \\ 1.13 & 8.91 & 8.35 & 2.95 & -3.97 \\ 1.80 & -4.06 & 5.86 & -8.55 & -7.17 \\ 2.49 & 0.46 & -3.68 & 5.06 & 2.27 \end{array} \right\} \quad (4.63)$$

Com os vetores inicializados, será realizado o procedimento chamado *waggle dance*, que corresponde a aplicação da Equação (4.59), para o local 5. Para isso, deve ser calculado o raio de busca como segue na Equação (4.64).

$$r = 0.1(x_{max} - x_{min}) = 0.1(20) = 2 \quad (4.64)$$

O procedimento da Equação (4.59) consiste em modificar um dos componentes de cada um dos locais inicializados e, posteriormente, comparar o novo local gerado com o local anterior em termos de função objetivo. Para isso, uma posição i do vetor é selecionada aleatoriamente pelo algoritmo para ser modificada. Considerando $i = 3$ para o local 5, temos que essa posição no vetor \vec{X}_5 será perturbada através da soma de um valor obtido por uma distribuição uniforme no intervalo de $(-2,2)$, como mostra a Equação (4.65).

$$x_{5,3} = x_{5,3} + f(-r, r) = -3.68 + 1.94 = -1.74 \quad (4.65)$$

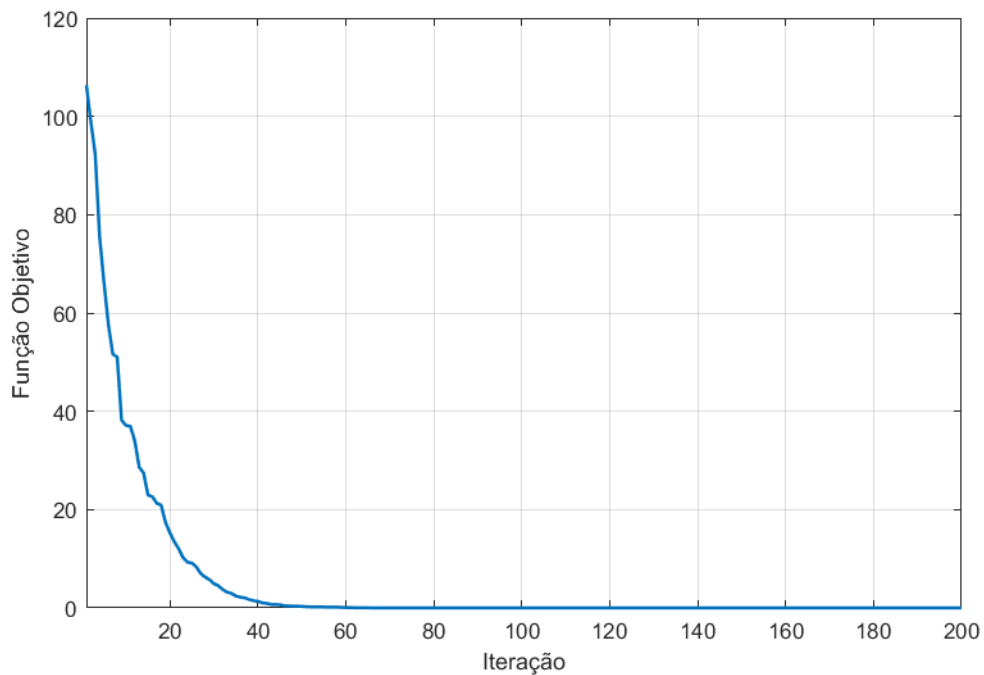
Diante disso, tem-se um novo vetor denominado \vec{X}_{5n} que será diretamente comparado ao antigo \vec{X}_5 em termos de função objetivo. Além disso, vale destacar que se o procedimento realizado pela Equação (4.65) resultar em uma componente que extrapole os limites especificados por x_{min} e x_{max} , o valor será substituído pelo limite mais próximo. Realizando então a comparação dos dois vetores, tem-se as Equações (4.66) e (4.67).

$$f(\vec{X}_5(0)) = (2.49)^2 + (0.46)^2 + (-3.68)^2 + (5.06)^2 + (2.27)^2 = 50.71 \quad (4.66)$$

$$f(\vec{X}_{5n}(0)) = (2.49)^2 + (0.46)^2 + (-1.74)^2 + (5.06)^2 + (2.27)^2 = 40.19 \quad (4.67)$$

Como o vetor \vec{X}_{5n} retornou menor valor de função objetivo, ele representa o novo local 5 dessa iteração até o momento, já que esse procedimento realizado pela Equação (4.65) acontece de acordo com o número de abelhas n_2 designadas para os locais elite e como será abordado no texto somente para a primeira abelha, pode ser que as próximas encontrem um valor ainda menor de função objetivo. Esse procedimento é realizado para as $N_1 + N_2$ posições selecionadas, sendo n_1 vezes para os locais N_1 e n_2 vezes para os locais elite N_2 e, com isso, tem-se uma iteração do algoritmo. A Figura (4.15) apresenta a convergência do algoritmo após 200 iterações, atingindo um valor de função objetivo $FO = 4e^{-11}$.

Figura 4.15 – Convergência do BA na minimização do somatório.



Fonte: Do autor (2021).

4.8 Contaminação das FRFs experimentais com ruído

Ainda no âmbito de *model updating*, o propósito deste tópico é detalhar o processo de contaminação das FRFs experimentais com ruído branco para avaliar como os níveis de ruído no sinal influenciam na convergência dos algoritmos de atualização. Para isso, serão abordados três cenários: 10%, 20% e 30% de ruído branco em todas as FRFs que serão utilizadas na atualização de modelo. Ao contaminar as curvas com níveis de ruído exagerados, percebe-se que não se trata mais da realidade do experimento, uma vez que as FRFs se tornam bem alteradas. Para isso, a Equação (4.68) apresenta a forma como as curvas foram contaminadas.

$$I_{j,k}(\omega) = I_{j,k}(\omega) + (randn/\gamma)I_{j,k}(\omega) \quad (4.68)$$

Onde $I_{j,k}$ representa uma FRF do tipo aceleração na frequência ω , $randn$ é uma função do MATLAB que retorna um escalar aleatório proveniente de uma distribuição normal padrão e γ representa a porcentagem de ruído. Dessa forma, para cada um dos cenários, o valor de γ varia de acordo com a quantidade de ruído desejada.

4.9 Subestruturação

Atualmente, as estruturas e componentes mecânicos estão se tornando cada vez maiores e complexos devido aos avanços tecnológicos direcionados para a área de dinâmica estrutural. Diante desse fato, a modelagem de tais elementos torna-se demorada por apresentar elevado custo computacional ou até mesmo pela dificuldade de executar medições experimentais em estruturas demasiadamente grandes como, por exemplo, o conjunto fuselagem-motor dos aviões. Entretanto, o referido problema pode ser solucionado com o auxílio de técnicas de subestruturação já bastante disseminadas e discutidas em livros que abordam temas de dinâmica estrutural (MAIA; SILVA, 1997; EWINS, 2000; CRAIG; KURDILA, 2011; ALLEMANG; CLERCK; WICKS, 2013).

Primeiramente, é importante ressaltar que técnicas de acoplamento em geral estão fundamentadas na hipótese de que uma estrutura complexa pode ser entendida como uma composição de várias subestruturas mais simples. Segundo esse raciocínio, análises individuais, computacionais e experimentais podem ser executadas independentemente para cada uma das subestruturas, de modo que a resposta da estrutura complexa seja determinada em função das anteriores (KLERK; RIXEN; VOORMEEREN, 2008).

Do ponto de vista matemático, as técnicas de subestruturação auxiliam na redução de vastas regiões excessivamente preenchidas por zeros nas matrizes de massa e rigidez, característica comum em estruturas complexas e/ou com grande número de graus de liberdade. A presença dessas regiões nas matrizes tem por finalidade aumentar o custo computacional das operações sem agregar nenhuma informação relevante. Ao dividir as estruturas complexas em subestruturas mais simples, obtém-se matrizes de massa e rigidez não tão esparsas, reduzindo assim o custo computacional. Diante disso, observa-se que o emprego das técnicas de subestruturação tem por finalidade evitar o armazenamento excessivo de informação, contribuindo para operações mais rápidas e otimização de tempo (EWINS, 2000; KLERK; RIXEN; VOORMEEREN, 2008).

De acordo com Maia (1997), os principais passos que devem ser seguidos para aplicação de técnicas de subestruturação, em geral, correspondem a:

- Particionar todo o sistema físico em um número de subestruturas com a escolha adequada das coordenadas internas e de conexão.

- Derivar o modelo das respectivas subestruturas, seja via rota teórica ou experimental. Sempre que possível, avaliar o efeito de negligenciar certas coordenadas e modos como, por exemplo, graus de liberdade rotacionais.
- Formular as equações de compatibilidade e equilíbrio de esforços utilizando coordenadas físicas ou modais e, se possível, sem exigir o conhecimento das propriedades dinâmicas dos demais componentes.
- Construir o modelo reduzido para a estrutura completa através da compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças previamente estabelecidos.

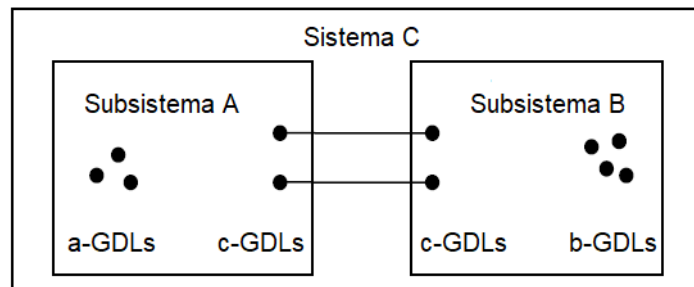
O principal objetivo do processo de acoplamento é obter um modelo para a estrutura acoplada sem a necessidade que a mesma esteja previamente montada. A ordem das matrizes utilizadas na formulação das equações de movimento da estrutura acoplada depende da ordem utilizada para descrever cada subestrutura que a compõe. Mais especificamente, esta ordem está intimamente relacionada com o número de coordenadas internas e de conexão entre duas subestruturas adjacentes. Diante disso, as técnicas de subestruturação podem ser classificadas em dois grandes grupos: acoplamento por impedância, que se beneficia da redução nos submodelos em termos de coordenadas e acoplamento modal, que utiliza a redução nos submodelos em termos de modos vibracionais. Com relação ao acoplamento por impedância, este lida basicamente com situações nas quais o modelo espacial ou modelo de resposta estão disponíveis, via rota teórica ou experimental. Já o acoplamento modal utiliza, de modo geral, o modelo modal como recurso de aplicação, seja esse modelo obtido através de um autoproblema ou por meio de identificação paramétrica de curvas experimentais (MAIA; SILVA, 1997).

Visando estabelecer um melhor embasamento sobre a técnica de acoplamento por impedância, tem-se que a estrutura completa é subdividida em subestruturas, de modo que a resposta da estrutura completa é obtida através da soma das impedâncias relacionadas às subestruturas individuais, considerando conectividade, de maneira análoga ao procedimento realizado no método dos elementos finitos na etapa de montagem das matrizes globais. Em seguida, as FRFs podem ser obtidas através da inversão da impedância total. Entretanto, tal procedimento pode apresentar problemas, uma vez que a inversão de matrizes que normalmente apresentam um número de condicionamento grande resulta em adversidades numéricas. Desta forma, para evitar a inversão da impedância global do sistema, uma técnica alternativa foi proposta, a qual utiliza a operação de inversa somente na impedância relacionada com os graus de liberdade de conexão

entre as subestruturas. O embasamento matemático necessário para utilização desta técnica será abordado nos parágrafos seguintes (MAIA; SILVA, 1997; LIAO et al., 2020).

Considerando um sistema C que pode ser subdividido em dois subsistemas (subestruturas) A e B, como apresentado na Figura (4.16), no qual os graus de liberdade (GDLs) são classificados como internos e de conexão. Para o subsistema A, os a-GDLs representam os graus de liberdade internos relacionados com aquele subsistema, enquanto os b-GDLs desempenham a mesma função para a subestrutura B. Como pode ser visto, os c-GDLs aparecem nas duas subestruturas e representam os graus de liberdade de conexão e devem ser iguais em ambas.

Figura 4.16 – Diagrama esquemático do sistema C subdividido em A e B.



Fonte: Do autor (2021).

Segundo esse raciocínio, as matrizes de FRFs dos subsistemas A e B podem ser escritas de acordo com as Equações (4.69) e (4.70), onde os subscritos i e c representam os GDLs interno e conexão, respectivamente.

$$[H_A] = \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$[H_B] = \begin{bmatrix} H_{B_c B_c} & H_{B_c B_i} \\ H_{B_i B_c} & H_{B_i B_i} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

A resposta dos subsistema A devido a uma força excitadora nos graus de liberdade internos e de conexão pode ser expressa a partir da Equação (4.71), sendo o procedimento análogo para o subsistema B.

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i} \\ X_{A_c} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

Considerando o caso que as forças externas dadas por F_A são aplicadas no sistema acoplado AB, a resposta da subestrutura A será diferente daquela apresentada pela Equação (4.71) devido às interferências causadas pela subestrutura B. Quando os efeitos do acoplamento estão sendo considerados, pela Terceira Lei de Newton, a subestrutura B exerce uma força adicional sobre a subestrutura A através dos graus de liberdade de conexão. Dessa forma, a resposta de A no sistema acoplado AB nesse caso pode ser escrita de acordo com a Equação (4.72).

$$X_A^{C,f_A} = \begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} + \Delta F \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

Onde ΔF representa a parcela de forças adicionais exercida pela subestrutura B na subestrutura A no sistema acoplado AB. O sobrescrito f_A indica que a resposta está sendo causada somente pelas forças externas F_A . Considerando que a subestrutura A também exerce forças sobre a subestrutura B, tem-se que a equação de resposta de B pela aplicação das forças externas F_A pode ser vista na Equação (4.73).

$$\begin{Bmatrix} X_{B_c}^{C,f_A} \\ X_{B_i}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{B_c B_c} & H_{B_c B_i} \\ H_{B_i B_c} & H_{B_i B_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

Expandindo a Equação (4.73), tem-se as Equações (4.74) e (4.75).

$$X_{B_c}^{C,f_A} = -H_{B_c B_c} \Delta F \quad (4.74)$$

$$X_{B_i}^{C,f_A} = -H_{B_i B_c} \Delta F \quad (4.75)$$

Considerando que as subestruturas estão rigidamente conectadas, os graus de liberdade de conexão de A e B possuem a mesma resposta, ou seja, $X_{A_c}^{C,f_A} = X_{B_c}^{C,f_A}$. Segundo esse raciocínio, a Equação (4.74) pode ser reescrita de acordo com a Equação (4.76), que expressa as forças de conexão de B aplicadas em A em termos da resposta dos graus de liberdade de conexão.

$$\Delta F = -H_{B_c B_c}^{-1} X_{A_c}^{C,f_A} \quad (4.76)$$

Inserindo a Equação (4.76) na Equação (4.75), tem-se a Equação (4.77).

$$X_{B_i}^{C,f_A} = H_{B_i B_c} H_{B_c B_c}^{-1} X_{A_c}^{C,f_A} \quad (4.77)$$

Substituindo a Equação (4.76) na Equação (4.72), tem-se então a Equação (4.78).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{B_c B_c}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

A Equação (4.78) pode ser reescrita na forma da Equação (4.79).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \left([I] + \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{B_c B_c}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

Onde $[I]$ representa uma matriz identidade. Simplificando a Equação (4.79) utilizando a Equação (4.71), tem-se a Equação (4.80).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \left([I] + \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{B_c B_c}^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} X_{A_i} \\ X_{A_c} \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

Realizando as operações matriciais da Equação (4.80), tem-se então a Equação (4.81).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_c B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{A_i} \\ X_{A_c} \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

Expandindo a segunda linha da Equação (4.81) e substituindo na Equação (4.77), pode-se obter a Equação (4.82).

$$X_{B_i}^{C,f_A} = H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} X_{A_c} \quad (4.82)$$

Agrupando a Equação (4.82) na Equação (4.81), obtém-se a Equação (4.83).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,f_A} \\ X_{A_c}^{C,f_A} \\ X_{B_i}^{C,f_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_c B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{A_i} \\ X_{A_c} \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Diante desse raciocínio, a resposta do sistema acoplado AB devido às forças externas F_A pode ser obtida através da Equação (4.83). De maneira análoga, o mesmo procedimento pode ser realizado para obter a resposta do sistema AB devido às forças externas F_B , de acordo com a Equação (4.84).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,fB} \\ X_{A_c}^{C,fB} \\ X_{B_i}^{C,fB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{A_iA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ H_{A_cA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ -H_{B_iB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{B_c} \\ X_{B_i} \end{Bmatrix} \quad (4.84)$$

Dessa forma, de acordo com o princípio da superposição para sistemas lineares, a resposta do sistema C pode ser escrita em função da soma das respostas dos subsistemas A e B devido as forças aplicadas em cada um, considerando a partição dos graus de liberdade de cada subsistema, como mostrado na Equação (4.85).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^C \\ X_{A_c}^C \\ X_{B_i}^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,fA} \\ X_{A_c}^{C,fA} \\ X_{B_i}^{C,fA} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{A_i}^{C,fB} \\ X_{A_c}^{C,fB} \\ X_{B_i}^{C,fB} \end{Bmatrix} \quad (4.85)$$

Ao expandir a Equação (4.85) pode-se obter a Equação (4.86).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^C \\ X_{A_c}^C \\ X_{B_i}^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_iA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & H_{A_iA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ 0 & H_{B_cB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & H_{A_cA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ 0 & H_{B_iB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & -H_{B_iB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{A_i} \\ X_{A_c} \\ X_{B_c} \\ X_{B_i} \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

Reorganizando a Equação (4.86) em termos da Equação (4.71) para os dois subsistemas, obtém-se a Equação (4.87).

$$\begin{Bmatrix} X_{A_i}^C \\ X_{A_c}^C \\ X_{B_i}^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_iA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_cB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_iB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{A_iA_i} & H_{A_iA_c} \\ H_{A_cA_i} & H_{A_cA_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} H_{A_iA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ H_{A_cA_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & 0 \\ -H_{B_iB_c}(H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{B_cB_c} & H_{B_cB_i} \\ H_{B_iB_c} & H_{B_iB_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{B_c} \\ F_{B_i} \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

Nota-se que existem dois termos F_{A_c} e F_{B_c} que dizem respeito às forças externas aplicadas aos graus de liberdade de conexão. Esses termos devem ser combinados em um só quando a estrutura acoplada for considerada, uma vez que não haverá distinção entre A e B no sistema C. Seguindo o mesmo raciocínio adotado para a resposta do sistema C, tem-se que as forças

externas podem ser reescritas como $\{F_{A_i} \ F_{A_c} \ F_{B_i}\}^T$, onde todas as forças externas aplicadas aos graus de liberdade de conexão estão denotadas por F_{A_c} . Dessa forma, considerando $F_{B_c} = 0$ na Equação (4.87), tem-se a Equação (4.88).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_{A_i}^C \\ X_{A_c}^C \\ X_{B_i}^C \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_c B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ H_{A_c A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ -H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H_{B_c B_i} \\ 0 & H_{B_i B_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{B_i} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Rearranjando a Equação (4.88) de forma que a relação entre a resposta do sistema C e as forças externas seja explícita, obtém-se a Equação (4.89).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_{A_i}^C \\ X_{A_c}^C \\ X_{B_i}^C \end{Bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} [I] & -H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_c B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} & 0 \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ H_{A_c A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ -H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{B_c B_i} \\ 0 & 0 & H_{B_i B_i} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} F_{A_i} \\ F_{A_c} \\ F_{B_i} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Dessa forma, a matriz de FRF da estrutura acoplada pode ser expressa através da Equação (4.90), a partir da relação obtida pela Equação (4.89).

$$\begin{aligned} H_{AB}^C &= \begin{bmatrix} [I] & -H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_c B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \\ 0 & H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{A_i A_i} & H_{A_i A_c} & 0 \\ H_{A_c A_i} & H_{A_c A_c} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} H_{A_i A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ H_{A_c A_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & 0 \\ -H_{B_i B_c} (H_{A_c A_c} + H_{B_c B_c})^{-1} & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{B_c B_i} \\ 0 & 0 & H_{B_i B_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.90)$$

É possível ainda reorganizar a Equação (4.90) a fim de obter uma expressão mais direta, onde somente uma operação de inversa é calculada, dada pela Equação (4.91).

$$H_{AB}^C = \begin{bmatrix} H_{A_iA_i} & H_{A_iA_c} & 0 \\ H_{A_cA_i} & H_{A_cA_c} & 0 \\ 0 & 0 & H_{B_iB_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{A_iA_c} \\ H_{A_cA_c} \\ -H_{B_iB_c} \end{bmatrix} (H_{A_cA_c} + H_{B_cB_c})^{-1} \begin{bmatrix} H_{A_iA_c} \\ H_{A_cA_c} \\ -H_{B_iB_c} \end{bmatrix}^T \quad (4.91)$$

A partir da Equação (4.91) é possível perceber que a operação inversa é tomada somente nas FRFs que correspondem ao ponto de conexão das subestruturas, reduzindo bastante os erros provenientes de condicionamento numérico. A técnica de subestruturação apresentada é baseada em FRFs e é comumente citada na literatura como *FRF-Based Substructuring Method* (FBSM). Tal técnica pode ser aplicada tanto via rota teórica quanto experimental. Entretanto, é muito comum utilizar as duas rotas em problemas que envolvem subestruturação devido a dificuldade de lidar com medições de FRFs rotacionais (LIAO et al., 2020; MAIA; SILVA, 1997; MIRZA et al., 2017).

4.9.1 Método de Kidder Modificado

Com respeito à dificuldade de obter FRFs que possuem graus de liberdade rotacionais envolvidos, foram desenvolvidas técnicas de expansão de modelo para permitir que sejam medidas somente as curvas relacionadas com graus de liberdade translacionais e, a partir do procedimento de expansão, as FRFs rotacionais podem ser estimadas utilizando os dados medidos experimentalmente. A aplicação dessas técnicas se faz necessária uma vez que os graus de liberdade rotacionais são essenciais para a formulação adequada de restrições entre componentes adequados. O sucesso da técnica de subestruturação em prever o comportamento de uma estrutura acoplada depende fortemente de como as coordenadas de conexão são medidas e incluídas no processo. Tal fato torna-se evidente quando o modelo de resposta é levado em consideração, já que as FRFs relacionadas com graus de liberdade rotacionais representam 75% dos componentes na matriz de FRF. Dessa forma, devido a impossibilidade de medição das FRFs rotacionais, a utilização conjunta da técnica de subestruturação FBSM e de um método de expansão permite que, em um procedimento experimental, somente 25% da matriz de FRF seja medida (MAIA; SILVA, 1997; SILVA; PEREIRA, 2018; AVITABILE; O'CALLAHAN, 2003; D'AMBROGIO; SESTIERI, 2004; ALLEMANG; CLERCK; WICKS, 2013).

Ainda nesse raciocínio, o método de expansão abordado neste trabalho é denominado Método de Kidder Modificado. Esta técnica se baseia na medição translacional realizada em um nó para obtenção de informações rotacionais desse mesmo nó de medição, ou seja, a partir da FRF translacional medida em um determinado nó, é possível estimar com precisão a resposta rotacional. Entretanto, uma desvantagem muito comum entre os métodos de expansão é a necessidade de possuir um modelo FEM da estrutura em questão, o que certamente limita sua utilização. Considerando a equação de equilíbrio dinâmico particionada em graus de liberdade primários (medidos) e secundários (não medidos), tem-se a Equação (4.92) (SILVA; PEREIRA, 2018; ALLEMANG; CLERCK; WICKS, 2013).

$$\left(\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} H_{pq}(\omega) \\ H_{sq}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

Onde os termos K_{ij} e M_{ij} representam a partição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, ω é a frequência de excitação, $H_{pq}(\omega)$ e $H_{sq}(\omega)$ representam as FRFs medida e estimada com excitação em um mesmo nó, respectivamente. Por fim, F_q representa a força de excitação no nó q . A partir da Equação (4.92), pode-se obter o vetor de FRF expandido para os graus de liberdade não medidos de acordo com a Equação (4.93).

$$H_{sq}(\omega) = -(K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1} (K_{sp} - \omega^2 M_{sp}) H_{pq}(\omega) \quad (4.93)$$

Dessa forma, o procedimento de expansão da matriz de FRF deve ser realizado para cada nó individualmente a fim de obter a matriz completa (SILVA; PEREIRA, 2018; ALLEMANG; CLERCK; WICKS, 2013).

4.10 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as estratégias de modelagem proposta para a estrutura de placa, bem como todo o embasamento teórico necessário para aplicação das técnicas de análise modal, identificação paramétrica, correlação teórico-experimental e atualização de modelo FEM. Foi proposto inicialmente para fins de modelagem da estrutura de placa um modelo de elementos finitos conhecido por *Kirchhoff-Love* como uma extensão da teoria de viga de *Euler-Bernoulli* para problemas bidimensionais. A partir do modelo espacial da estrutura, foram apresentados conceitos da técnica de análise modal via rota teórica, evidenciando aspectos a formulação de estados e a obtenção dos autovalores e autovetores complexos pela

presença do amortecimento no sistema. Diante do modelo modal, foram expostos meios de obtenção do modelo de resposta que dá origem as funções de resposta em frequência. Ademais, via rota experimental, foram apresentados conceitos da técnica de identificação paramétrica de *Ewins-Gleeson* que se aplica muito bem em estruturas levemente amortecidas a fim de regenerar os polinômios que descrevem as curvas experimentais e permitir realizar a correlação teórico-experimental dos modos de vibrar a partir da matriz modal experimental. Ambos os algoritmos de atualização estudados neste trabalho (DEA e BA) foram detalhadamente explicados em cada uma de suas etapas e diversos aspectos teóricos foram elencados a fim de tornar mais clara a ideia de minimização da função objetivo e estabelecer uma ligação entre a matemática aplicada no método e a otimização estrutural. Com o intuito de facilitar a compreensão dos tópicos abordados neste capítulo, foram realizados exemplos numéricos de problemas simples. Por fim, o procedimento de subestruturação utilizando funções de resposta em frequência (FBSM) foi detalhadamente explicado através de um embasamento matemático por trás da técnica. Além disso, o Método de Kidder Modificado também foi exposto para auxiliar na predição de graus de liberdade rotacionais a partir de medições de translação. No próximo capítulo, será apresentado o *setup* experimental, bem como as propriedades e dimensões da placa de alumínio tratada neste trabalho.

5 METODOLOGIA

O principal objeto de estudo deste trabalho consiste em uma placa fina retangular de alumínio, com dimensões $(0.400) \times (0.500) \times (0.0095)$ m (x,y,z) . As propriedades físicas do material da placa podem ser vistas na Tabela (5.1) (NORTON, 2004; CALLISTER; RETHWISCH, 2016).

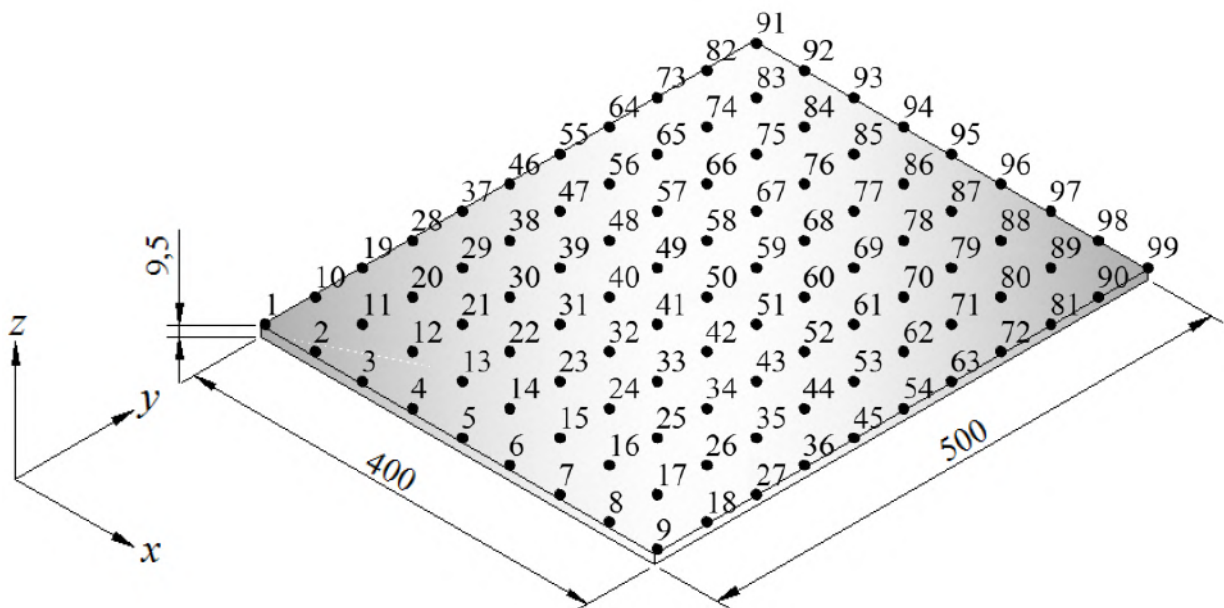
Tabela 5.1 – Propriedades do material da placa.

Parâmetro	Valor	Unidade
E	70	GPa
ν	0.33	-
ρ	2710	kg/m ³

Fonte: Callister, Rethwisch (2016); Norton (2004).

A placa foi discretizada em 80 elementos, sendo 10 na direção y , 8 na direção x e 1 elemento ao longo de toda a espessura da mesma, como pode ser visto no esquema da Figura (5.1), a qual evidencia os 80 elementos e 99 nós, bem como o sistema de coordenadas de referência utilizado nas medições.

Figura 5.1 – Placa retangular de alumínio e malha de medição.



Fonte: Gevinski (2014).

O procedimento experimental foi realizado utilizando excitação com o *shaker*. A análise modal experimental foi realizada na condição livre-livre e, para isso, a placa foi suspensa por

fios de nylon pelos nós 2 e 8 de acordo com a malha da Figura (5.1). O *shaker* foi apoiado sobre a bancada estrutural e a placa foi excitada inicialmente em no ponto que se refere ao nó 25 da malha. A abordagem experimental teve por finalidade fornecer os dados numéricos necessários para a estimação de parâmetros modais, a fim de ser comparado com o modelo FEM, além de garantir recursos para alimentar a atualização de modelo. (AVITABILE, 2017).

O esquema de montagem do teste experimental pode ser visto na Figura (5.2), a qual evidencia a placa suspensa por fios de nylon e o *stinger* já acoplado ao nó 25 da malha. As acelerações foram medidas na superfície da placa na direção z , perpendicular à superfície da placa não deformada, em 99 pontos igualmente espaçados. Para isso, foi utilizado um acelerômetro DeltaTron tipo 4508 piezoelétrico de sensibilidade $10.06\text{mV}/\text{ms}^{-2}$ e massa de 4.8 gramas. As medições experimentais foram realizadas no Laboratório de Vibrações Mecânicas da UNICAMP (GEVINSKI, 2014).

Figura 5.2 – *Setup* do teste modal experimental utilizando *shaker*.



Fonte: Gevinski (2014).

5.1 Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentada a bancada de ensaios experimentais e suas características, bem como detalhes sobre a instrumentação e os equipamentos de medição utilizados. Foram

realizadas considerações de discretização da estrutura e as propriedades elásticas, inerciais e geométricas também foram elencadas. No próximo capítulo serão apresentados os resultados e discussões das simulações numéricas via rota teórica, dos dados obtidos experimentalmente e da correlação de ambos.

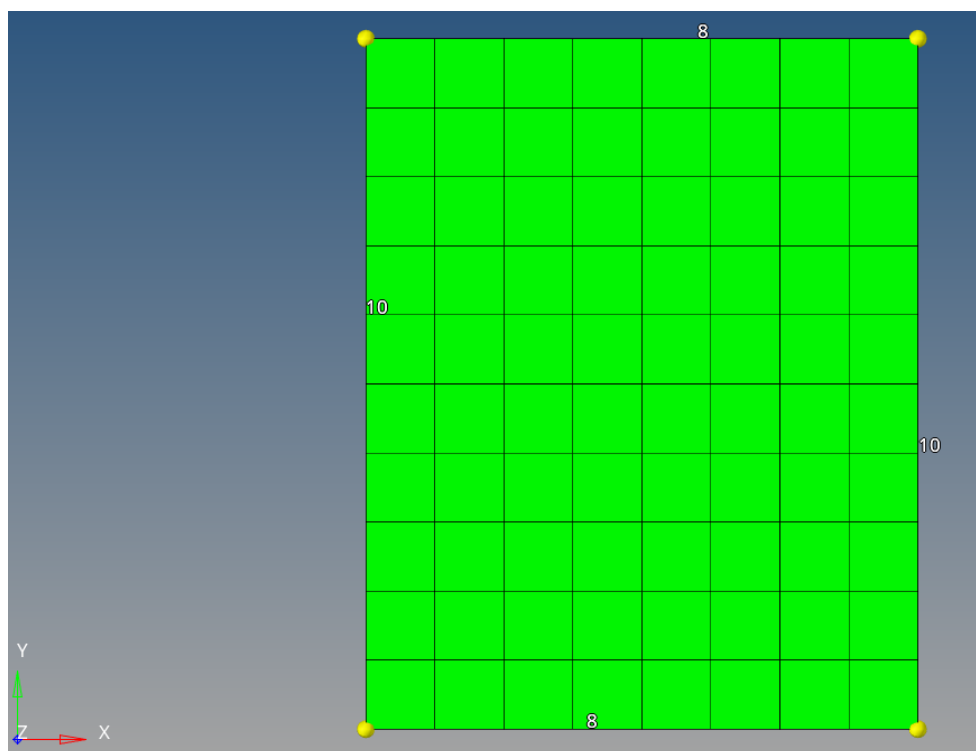
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 Abordagem teórica

6.1.1 Modelo de elementos finitos

A fim de validar a compatibilidade entre as matrizes que foram deduzidas na Seção 4.2.1, as frequências naturais obtidas pelo modelo implementado em MATLAB foram comparadas com resultados obtidos no software Altair, HyperWorks 2021 em sua versão estudantil, dentro da mesma faixa de análise considerada, 0 a 1000 Hz. A simulação no software foi realizada na condição livre-livre utilizando a mesma discretização do modelo FEM implementado em MATLAB, ou seja, 80 elementos, como é evidenciado na Figura (6.1). As propriedades do material utilizadas são as mesmas apresentadas na Tabela (5.1) e as dimensões geométricas são aquelas da Figura (5.1).

Figura 6.1 – Modelo de elementos finitos da estrutura de placa retangular no software HyperWorks 2021.



Fonte: Do autor (2021).

Comparando as frequências naturais de corpo flexível, a Tabela (6.1) apresenta os 9 modos presentes até 1000 Hz obtidos por ambas as modelagens. É possível perceber uma certa discrepância entre os dois modelos em termos de erro relativo, principalmente para o 9º modo, com 6.21%. Aumentando a discretização do modelo no software para 32000 elementos, pode-se

perceber uma melhora considerável em termos de erro relativo, visto que a maior discrepância nessa segunda discretização é do 7º modo, 1.08%, como fica claro na Tabela (6.2). Tendo em vista a magnitude do erro relativo apresentado, conclui-se que o modelo implementado em MATLAB a partir da dedução das matrizes de massa e rigidez representa de fato o comportamento dinâmico da placa. Vale ressaltar que para obter os resultados via HyperWorks 2021, foram utilizadas matrizes de massa consistentes, diferentemente do padrão do software que é utilizar matrizes concentradas.

Tabela 6.1 – Comparação das frequências naturais da estrutura de placa de 0 a 1000 Hz pelo MATLAB e HyperWorks 2021. Ambos modelos possuem 80 elementos.

Modo	MATLAB [Hz]	HyperWorks [Hz]	Erro relativo, %
1	154.95	154.19	0.49
2	197.57	199.38	0.91
3	329.23	334.98	1.75
4	374.54	375.44	0.24
5	439.57	442.89	0.75
6	580.60	604.44	4.11
7	730.32	747.90	2.41
8	743.17	752.62	1.27
9	895.98	951.58	6.21

Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.2 – Comparação das frequências naturais da estrutura de placa de 0 a 1000 Hz pelo MATLAB e HyperWorks 2021. Os modelos possuem 80 e 32000 elementos, respectivamente.

Modo	MATLAB [Hz]	HyperWorks [Hz]	Erro relativo, %
1	154.95	153.41	0.99
2	197.57	197.19	0.19
3	329.23	328.28	0.29
4	374.54	370.74	1.01
5	439.57	435.82	0.85
6	580.60	577.21	0.58
7	730.32	722.46	1.08
8	743.17	736.63	0.88
9	895.98	888.43	0.84

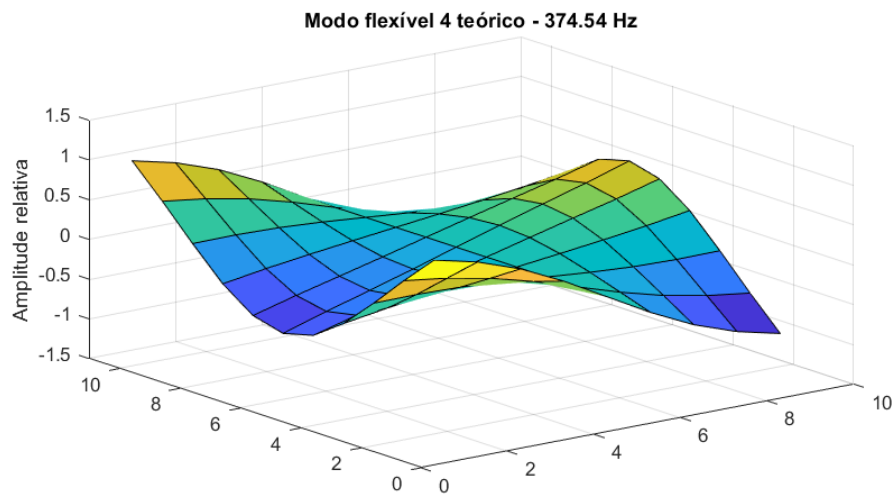
Fonte: Do autor (2021).

6.1.2 Modos de vibração

Diante da solução do autoproblema, como visto na Seção 4.3, obtêm-se os autovalores e autovetores do sistema em questão. A partir dos autovalores, são obtidas as frequências

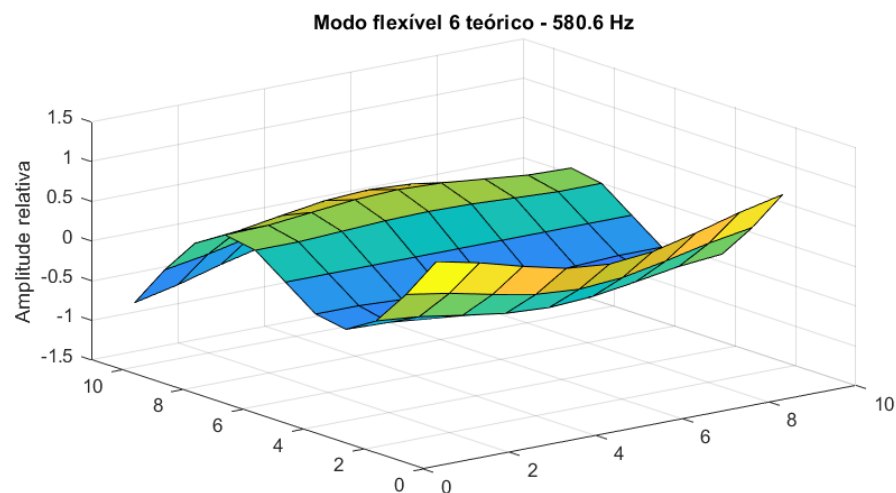
naturais da placa, que foram previamente apresentadas na Tabela (6.1) e diante dos autovetores são obtidos os padrões de deformação da estrutura relacionados com os graus de liberdade translacionais, ainda na rota teórica. As Figuras (6.2), (6.3) e (6.4) apresentam os padrões de vibração da estrutura de placa simulados em MATLAB para os modos flexíveis 4, 6 e 8, respectivamente. Os três primeiros modos são de corpo rígido e não serão apresentados pelo fato de não serem o foco principal do estudo.

Figura 6.2 – Modo flexível 4 teórico.



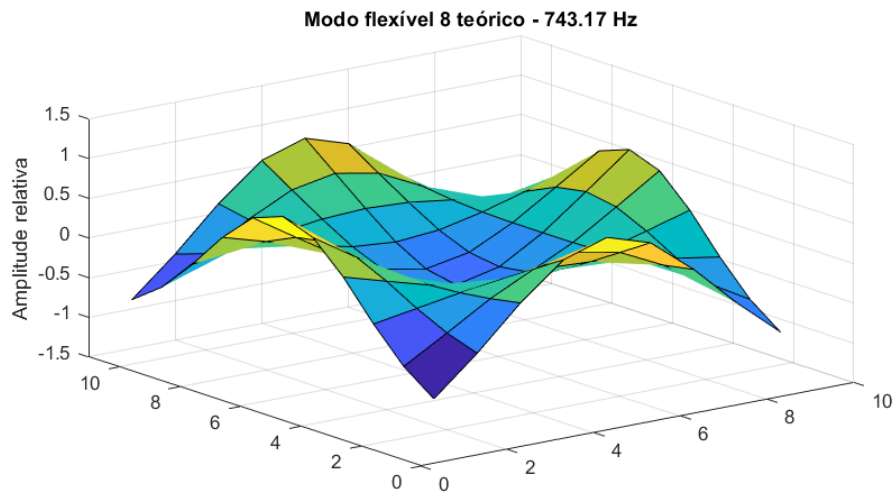
Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.3 – Modo flexível 6 teórico.



Fonte: Do autor (2021).

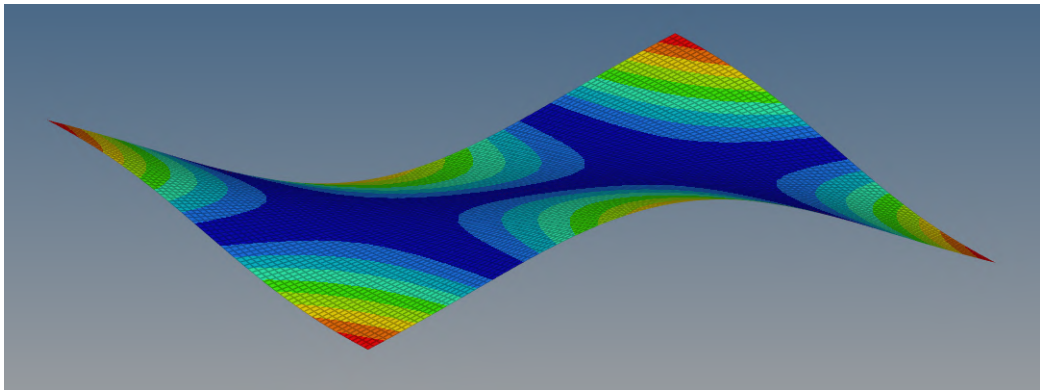
Figura 6.4 – Modo flexível 8 teórico.



Fonte: Do autor (2021).

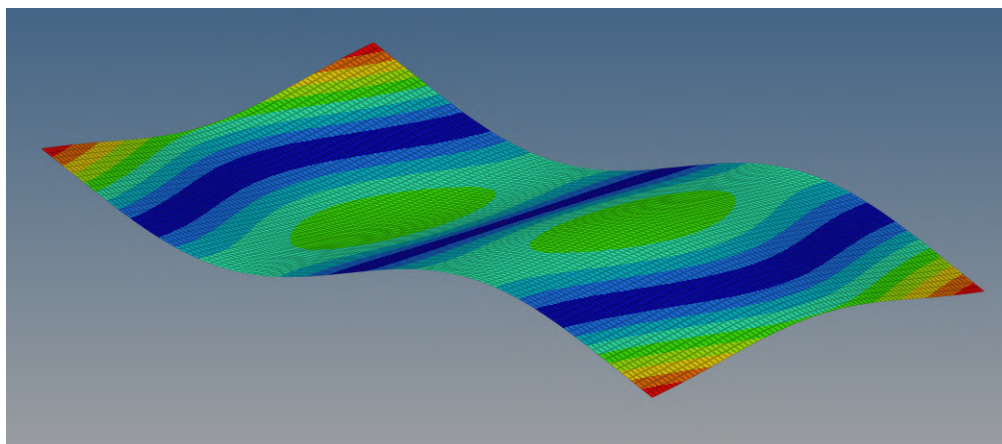
Ainda para fins de comparação, as Figuras (6.5), (6.6) e (6.7) apresentam os mesmos modos de vibrar obtidos a partir do modelo no software HyperWorks 2021. Como pode ser observado, os dois modelos resultam em padrões de vibração bastante similares.

Figura 6.5 – Modo flexível 4 teórico HyperWorks 2021.



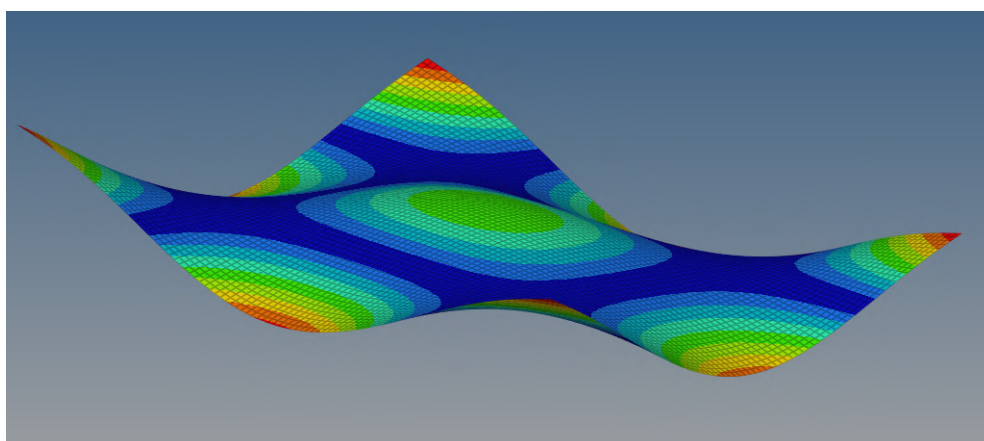
Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.6 – Modo flexível 6 teórico HyperWorks 2021.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.7 – Modo flexível 8 teórico HyperWorks 2021.



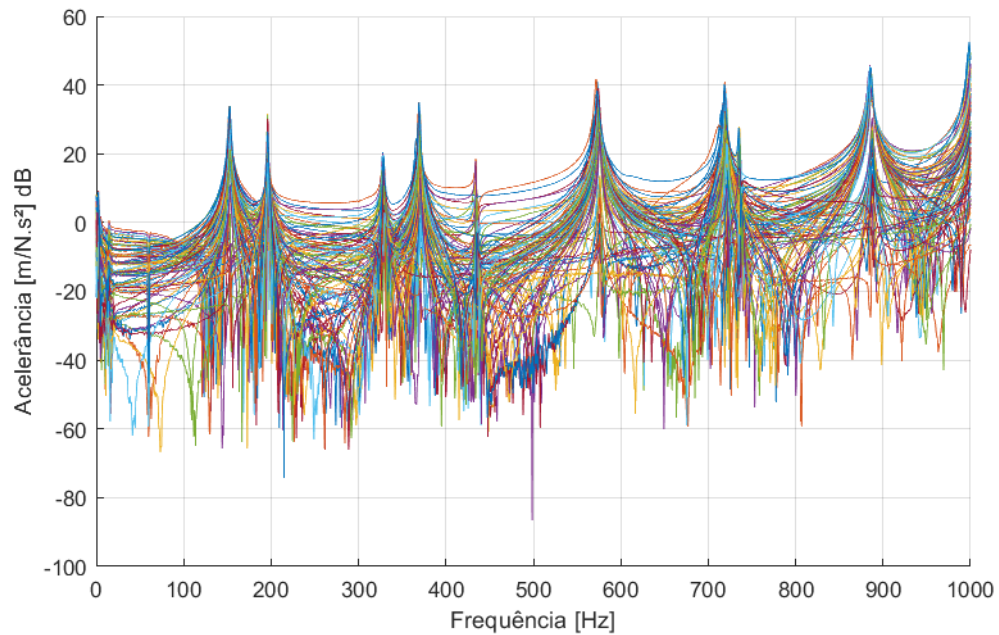
Fonte: Do autor (2021).

6.2 Abordagem experimental

6.2.1 Funções de resposta em frequência (FRFs)

Como mencionado anteriormente, foram realizadas 99 medições ao longo da malha da placa utilizando o *shaker* e, portanto, foram obtidas 99 FRFs experimentais que podem ser visualizadas na Figura (6.8).

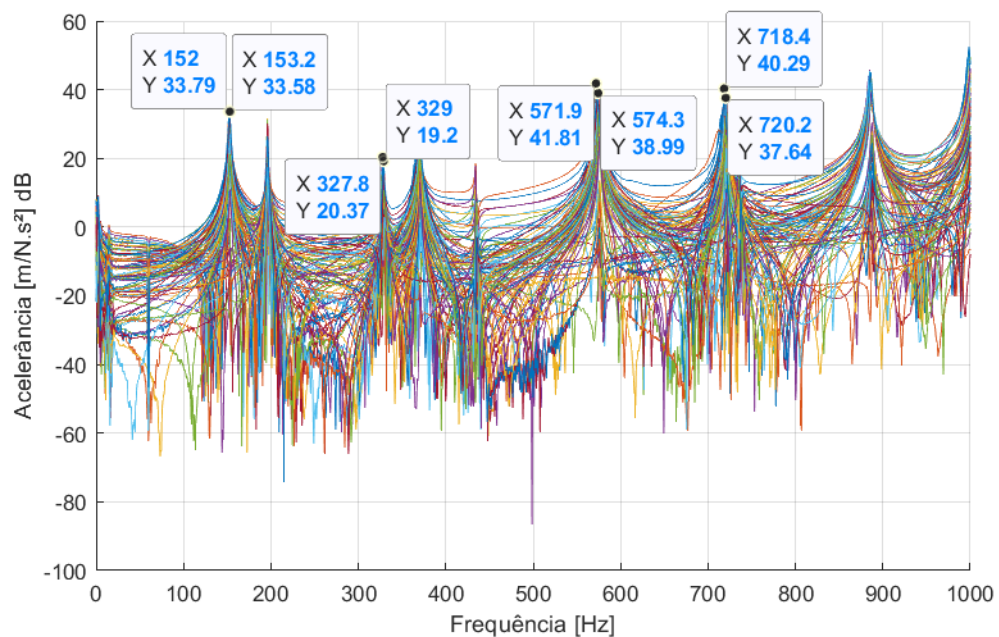
Figura 6.8 – FRFs obtidas através da excitação com *shaker* no nó 25.



Fonte: Do autor (2021).

Diante das FRFs experimentais obtidas com *shaker*, observa-se uma discrepância na frequência natural de alguns modos de até 2.4 Hz, aproximadamente, como pode ser visto na Figura (6.9).

Figura 6.9 – Discrepâncias em frequência das FRFs obtidas através da excitação com *shaker* no nó 25.

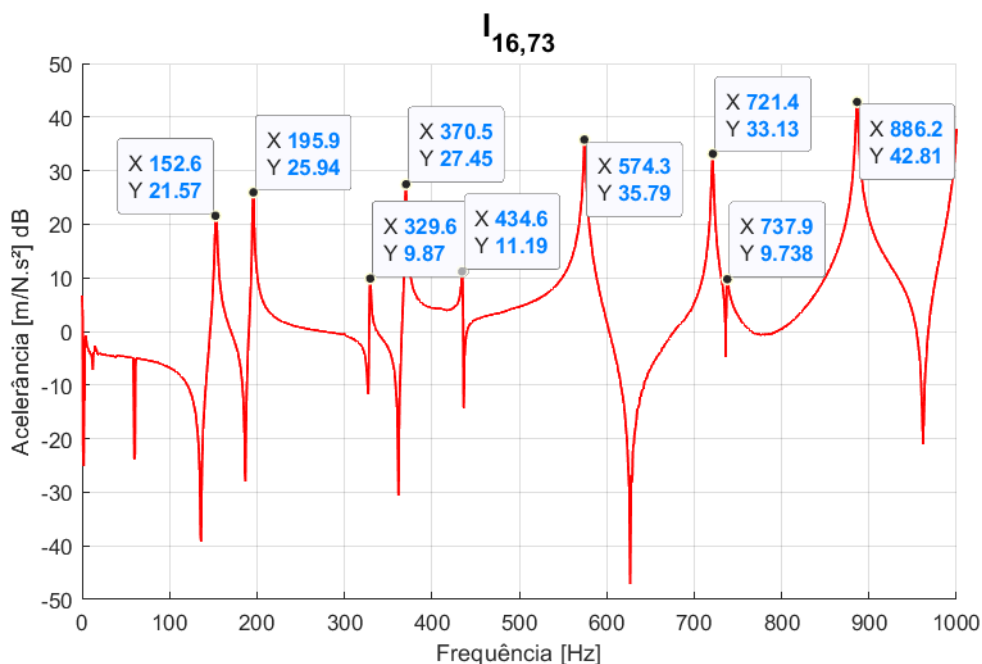


Fonte: Do autor (2021).

Tal fato ocorre devido a mudança de posição do acelerômetro na malha da placa para realizar as medições em diferentes nós, enquanto o *shaker* permanece no mesmo local. O acelerômetro, por menor e mais leve que seja, ao percorrer os nós da malha adiciona em cada medição uma massa localizada que altera as propriedades de inércia para cada uma das medições, causando assim uma leve discrepância na frequência natural de alguns modos. Esse fenômeno denominado *mass loading* é ainda mais presente ao realizar medições de estruturas relativamente leves, que é o caso da placa de alumínio, uma vez que a massa do acelerômetro representa algo em torno de 0.1% da massa total da placa. Além disso, outro fenômeno muito comum em testes modais utilizando *shaker* é a inserção de rigidez local no ponto de acoplamento entre o *stinger* e a estrutura. Essa rigidez é contabilizada em todas as FRFs aferidas, uma vez que este acoplamento permanece inalterado ao longo de todas as medições (AVITABILE, 2017; MAIA; SILVA, 1997).

A partir dos picos, ou ressonâncias, das FRFs obtidas experimentalmente, é possível determinar de forma direta as frequências naturais experimentais da estrutura de placa de alumínio. A Figura (6.10) apresenta a FRF com medição no nó 6 e excitação no nó 25 que, em termos de graus de liberdade, pode ser representada por $I_{16,73}$, sendo I uma FRF do tipo aceleração. Os *data tips* evidenciam as frequências dos modos de corpo flexível, bem como a amplitude.

Figura 6.10 – Frequências naturais experimentais dos modos de corpo flexível da estrutura de placa, FRF $I_{16,73}$.

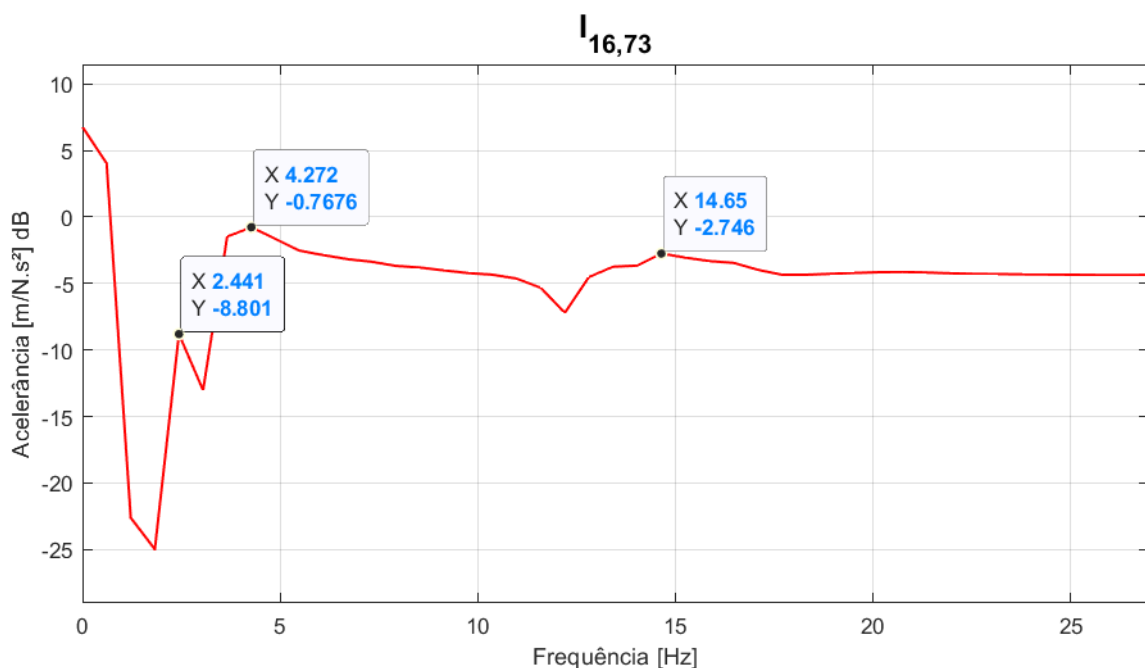


Fonte: Do autor (2021).

Como pode ser observado pela Figura (6.10), a placa de alumínio retangular não apresenta elevada densidade modal, uma vez que apenas 9 modos de corpo flexível (FBM) estão presentes no intervalo de 0 a 1000 Hz. Outra vantagem da placa em estudo é seu formato retangular que quebra a simetria da estrutura, evita a presença de modos muito próximos e garante ressonâncias bem definidas, facilitando a visualização e aplicação das técnicas utilizadas nesse trabalho.

Quanto aos modos de corpo rígido (RBM) que não foram destacados, a Figura (6.11) apresenta uma ampliação a região inicial (baixa frequência) da mesma FRF $I_{16,73}$, evidenciando as ressonâncias que acontecem em 2.44, 4.27 e 14.65 Hz. De acordo com o *setup* do experimento, como foi mostrado na Figura (5.2), os RBM apresentados tem movimento pendular, visto que a placa está suspensa por dois fios de nylon na direção vertical e flexional, uma vez que o *shaker* está situado perto de uma das extremidades da placa. Como pode ser observado, a frequência natural do terceiro RBM representa em torno de 9.6% da frequência natural do primeiro FBM, o que garante que os primeiros FBM foram pouco afetados pelos RBM, uma vez que a relação das frequências citadas acima está próxima do intervalo desejável de 10 a 20%, como recomendado pela literatura (EWINS, 2000; AVITABILE, 2017; MAIA; SILVA, 1997). Dessa forma, as frequências naturais experimentais podem ser listadas como apresentado na Tabela (6.3).

Figura 6.11 – Frequências naturais experimentais dos modos de corpo rígido da estrutura de placa, FRF $I_{16,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.3 – Frequências naturais experimentais da estrutura de placa obtidas pela excitação com *shaker*.

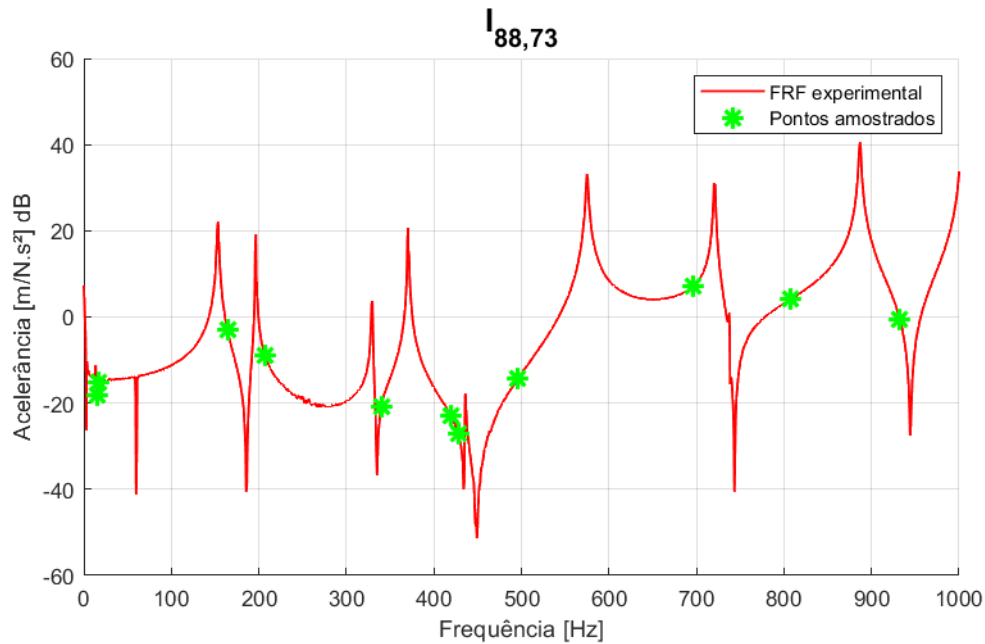
Modo	Frequência natural [Hz]
1	2.4
2	4.3
3	14.6
4	152.6
5	195.9
6	329.6
7	370.5
8	434.6
9	574.3
10	721.4
11	737.9
12	886.2

Fonte: Do autor (2021).

6.2.2 Identificação Paramétrica

A partir da realização do teste modal experimental é possível obter as funções de resposta em frequência (FRF's) experimentais. Diante dessa curva, ao aplicar o método de *Ewins-Glesson* pode-se obter os resíduos $rA_{j,k}$ e posteriormente as matrizes modal e espectral regeneradas. De acordo com a metodologia apresentada na Seção (4.5), sugere-se que as frequências de amostragem sejam o mais longe possível de anti ressonâncias. Desta forma, há a minimização da interferência de modos de vibrar adjacentes ao modo analisado, ainda mais para estruturas com alta densidade modal. Como a placa em questão possui modos mais espaçados, foi possível escolher os pontos de amostragem com uma maior liberdade. Para a escolha das frequências amostradas, foi implementada uma rotina de forma que para cada frequência natural o algoritmo teria a liberdade de variar o ponto de amostragem desde a frequência natural anterior até a frequência do próximo modo, realizando esse procedimento para todos os modos presentes na FRF de forma a garantir que a FRF regenerada representasse com precisão a curva experimental, ou seja, que o polinômio encontrado fosse, de fato, a resposta esperada. Dessa forma, para algumas ressonâncias o ponto amostrado é anterior e para outras é posterior, dependendo da escolha do algoritmo implementado para melhor representar a curva. A Figura (6.12) apresenta a FRF $I_{88,73}$, sendo (*) os pontos amostrados (EWINS; GLEESON, 1982b).

Figura 6.12 – Pontos amostrados da FRF $I_{88,73}$ para aplicação do método de identificação paramétrica de Ewins-Gleeson.



Fonte: Do autor (2021).

A partir da amostragem das FRFs utilizando o critério previamente estabelecido, foram determinados os resíduos $rA_{j,k}$ de cada uma das FRFs experimentais na faixa de frequência analisada (0 a 1000 Hz). Os resíduos para a FRF $I_{88,73}$ são apresentados na Tabela (6.4), na qual fica evidente a superioridade da ordem de grandeza da parte real quando comparada com a parte imaginária, o que era de se esperar para estruturas pouco amortecidas (PRANDHAN; MODAK, 2012).

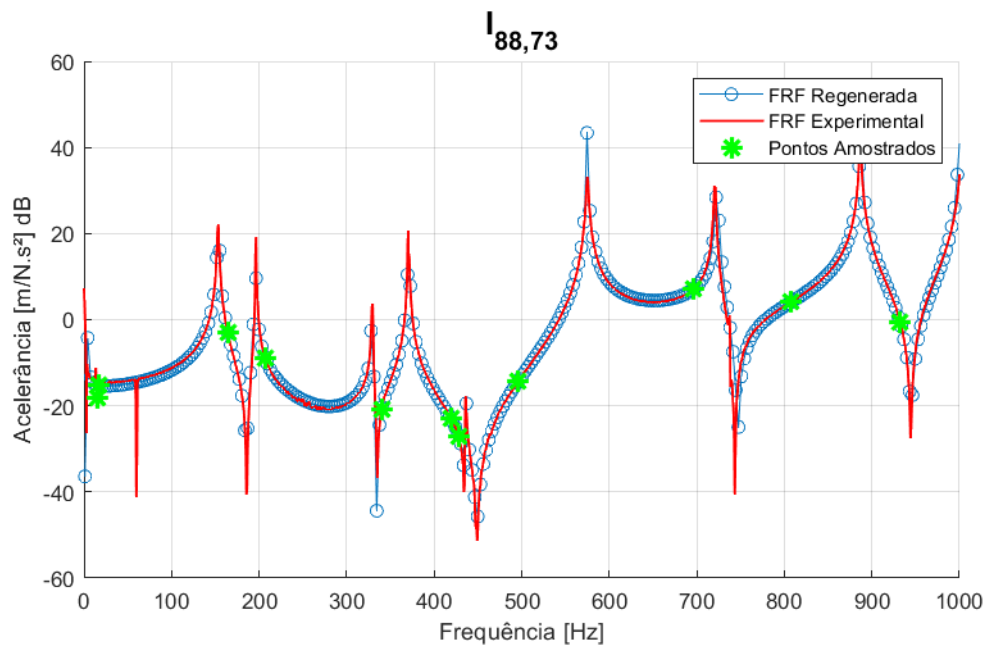
Tabela 6.4 – Resíduos experimentais da estrutura de placa, FRF $I_{88,73}$.

Modo	Parte real	Parte imaginária
1	0.16	0.01
2	0.00	0.00
3	-0.12	0.00
4	-0.02	0.00
5	0.00	0.00
6	0.02	0.00
7	0.00	0.00
8	0.17	-0.04
9	-0.08	0.03
10	-0.22	0.09
11	-0.22	0.09

Fonte: Do autor (2021).

Diante da determinação dos resíduos experimentais, aplicou-se a Equação (4.40) variando a frequência ω na faixa de interesse e considerando para cada modo r as respectivas frequências naturais ω_r a fim de obter o polinômio que representa a FRF $I_{88,73}$. Esse procedimento pode ser realizado para cada uma das FRFs aferidas. A Figura (6.13) apresenta a FRF $I_{88,73}$ regenerada, os pontos amostrados e a curva experimental.

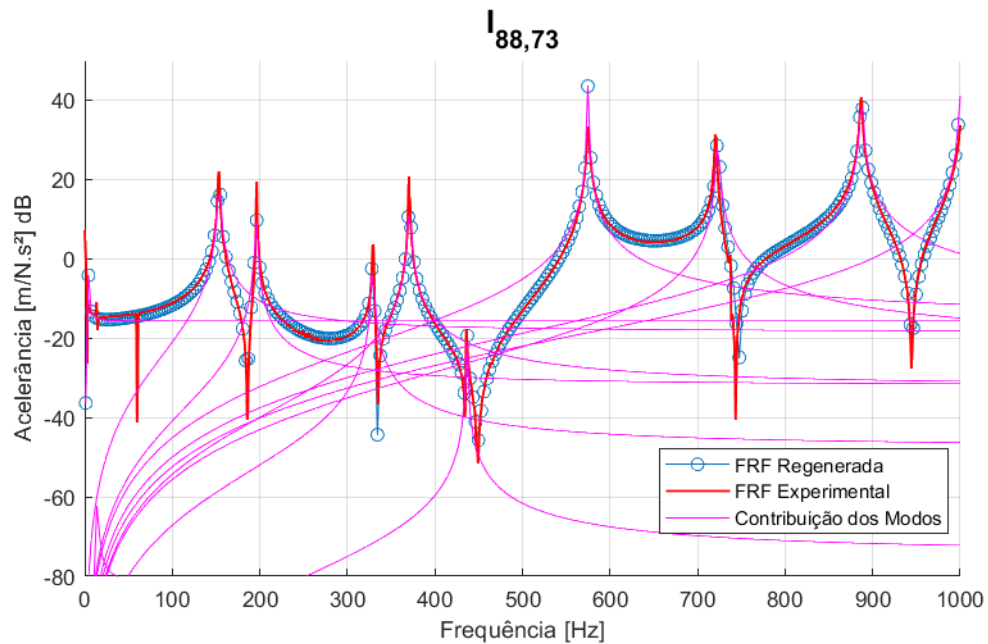
Figura 6.13 – FRF experimental e regenerada $I_{88,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

Pode-se perceber a partir da FRF regenerada apresentada que o ajuste de curva descreve com precisão a curva experimental em todos os modos na faixa de frequência analisada e, portanto, conclui-se que o polinômio regenerado representa de fato a resposta da estrutura, uma vez que tanto em frequência quanto em amplitude a FRF regenerada reproduz com acurácia o experimental. Na Figura (6.14) é apresentada a contribuição individual dos modos, bem como a FRF regenerada e experimental. As demais FRFs regeneradas estão apresentadas no APÊNDICE C.

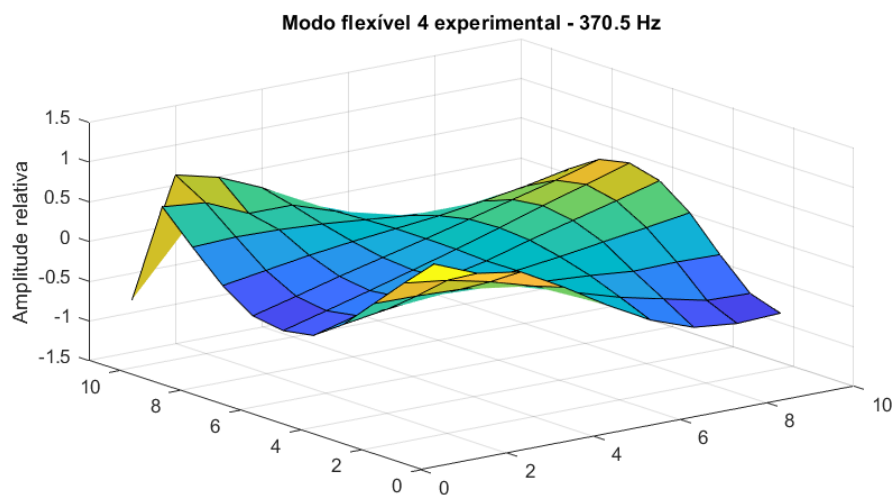
Figura 6.14 – Contribuição individual dos modos, FRF regenerada e experimental $I_{88,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

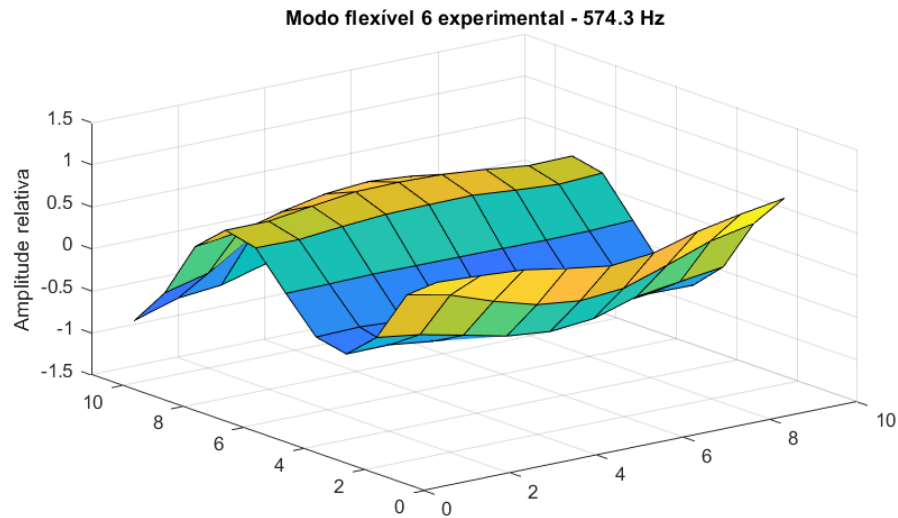
Diante dos resíduos, é possível regenerar a matriz modal e, com isso, obter a visualização experimental dos modos, bem como realizar a correlação entre os modos teóricos e experimentais via número *MAC*, que será abordado mais adiante. As Figuras (6.15), (6.16) e (6.17) apresentam os padrões de vibração obtidos experimentalmente a partir da regeneração da matriz modal. Os demais modos teóricos e experimentais estão apresentados nos APÊNDICES A e B, respectivamente.

Figura 6.15 – Modo flexível 4 experimental.



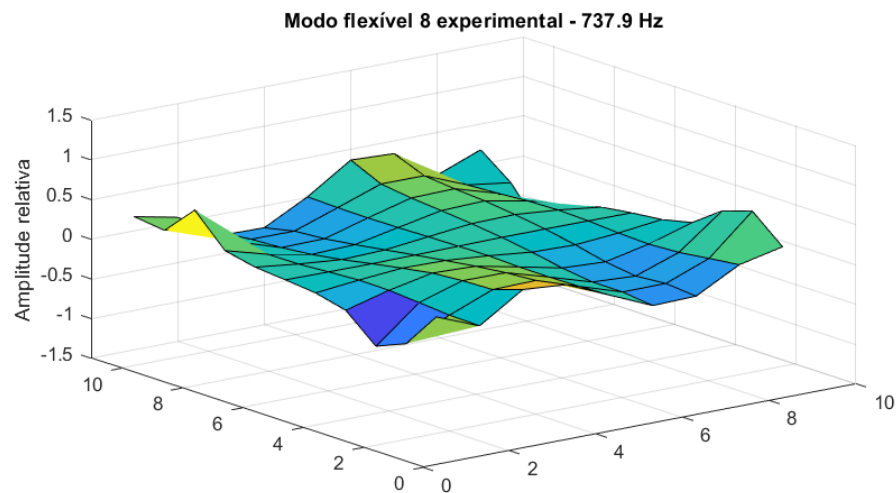
Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.16 – Modo flexível 6 experimental.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.17 – Modo flexível 8 experimental.



Fonte: Do autor (2021).

6.2.3 *Model updating*

A atualização de modelo de elementos finitos é o processo que resulta em modelos que refletem melhor os dados medidos do que o modelo inicialmente proposto e faz parte da verificação e validação de modelos numéricos. É a partir dessa técnica que as características incertas do experimento como, por exemplo, propriedades de materiais, condições de contorno e regiões de difícil modelagem são ajustadas no modelo teórico com base nos resultados experimentais (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009; FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013; ABDULLAH et al., 2015).

Conforme apresentado na Tabela (6.5), nota-se discrepâncias de até 1.52% em termos de frequências naturais ao comparar o modelo teórico com o experimental. Vale ressaltar que as frequências naturais dos modos de corpo rígido dos dois modelos não foram comparadas porque, no modelo teórico, as propriedades do fio de *nylon* não foram modeladas, já que o maior RBM representa 9.6% da frequência do primeiro FBM e, portanto, os modos flexíveis não são tão afetados pelos RBM a ponto de se fazer necessária a modelagem do *nylon*.

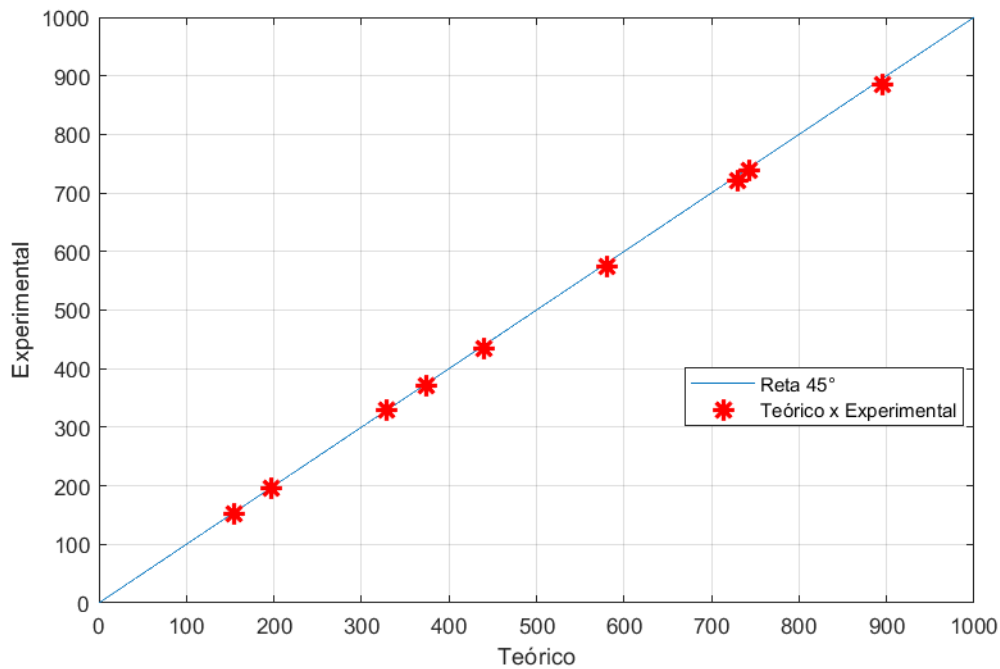
Tabela 6.5 – Frequências naturais teóricas e experimentais dos modos flexíveis da estrutura de placa.

Modo	Teórico [Hz]	Experimental [Hz]	Erro relativo, %
1	154.95	152.6	1.52
2	197.57	195.9	0.84
3	329.23	329.6	0.79
4	374.54	370.5	1.08
5	439.57	434.6	1.13
6	580.6	574.3	1.09
7	730.32	721.4	1.22
8	743.17	737.9	0.71
9	895.98	886.2	1.09

Fonte: Do autor (2021).

É importante ressaltar que embora o maior erro relativo esteja associado ao primeiro modo flexível, em termos de unidade de frequência (Hz) a maior discrepância entre os modelos reside no 9º modo flexível, em torno de 9.8 Hz. Além disso, vale destacar que em quase todos os modos flexíveis, com exceção do 3º, as frequências do modelo teórico estão maiores que aquelas correspondentes no experimental, o que indica que a rigidez do primeiro está mais elevada do que deveria, causando assim um aumento nas frequências naturais. Esse fenômeno pode ser visto através de uma estratégia de comparação que consiste em gerar um gráfico dentro da faixa de frequência analisada e traçar uma reta a 45°, sendo que o eixo horizontal se refere ao modelo teórico e o eixo vertical ao experimento (MAIA; SILVA, 1997). Desta forma, os pares ordenados de frequências naturais podem ser confrontados com a inclinação da reta a fim de determinar informações importantes acerca da correlação. A Figura (6.18) apresenta o gráfico com a reta de 45° e os pares ordenados pelos marcadores em vermelho.

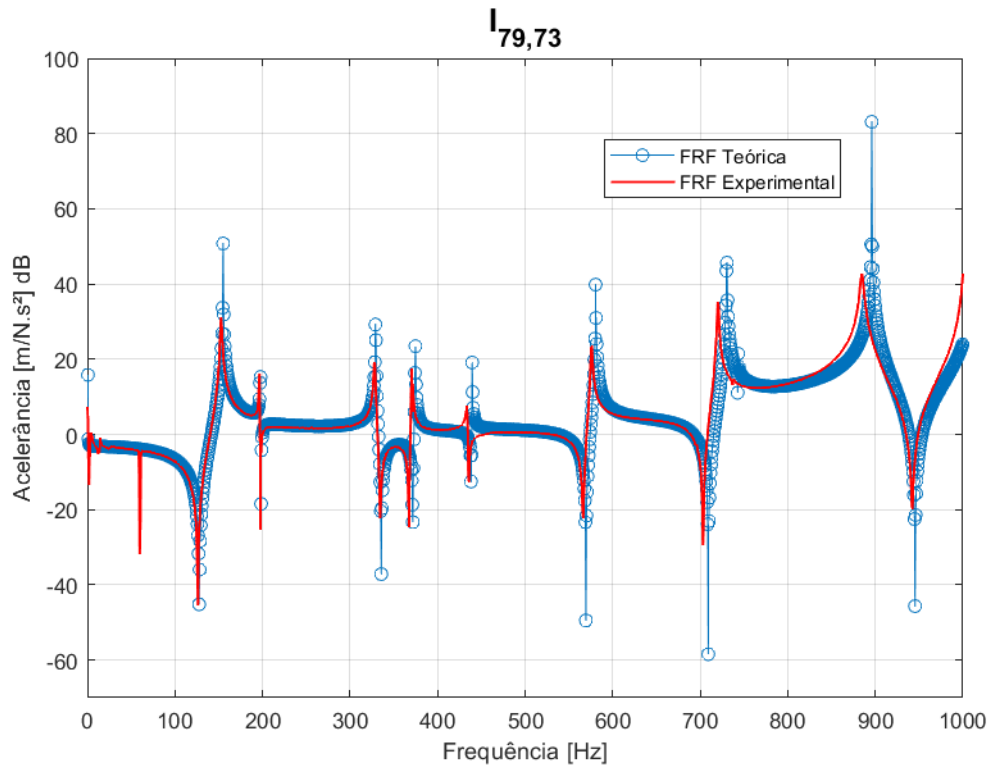
Figura 6.18 – Comparação das frequências naturais teóricas e experimentais da estrutura de placa.



Fonte: Do autor (2021).

A perfeita correlação teórico-experimental consiste em todos os marcadores estarem alinhados sobre a reta de 45° , como aconteceu com os primeiros modos (1 a 4). O que pode ser percebido a partir do 4º modo é que os marcadores estão ligeiramente localizados a direita da reta, indicando que a rigidez do modelo FEM está elevada, como foi visto na Tabela (6.5). Além da discrepância em frequência, a Figura (6.19) evidencia considerável discordância em termos de amplitude quando as FRFs teórica e experimental são sobrepostas no mesmo gráfico. Tal fato ocorre pois o modelo FEM inicialmente foi proposto sem a presença do amortecimento, que é uma aproximação válida até certo ponto e que gera discordância em termos de amplitude ao passo que, na realidade, todas as estruturas possuem certo grau de amortecimento. Diante dos fatos citados, fica clara a evidente necessidade de atualizar o modelo teórico a fim de obter uma melhor correlação teórico-experimental.

Figura 6.19 – Comparação das amplitudes e frequências naturais teóricas e experimentais da estrutura de placa. FRF $I_{79,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

Com relação aos aspectos práticos gerais do processo de atualização de modelo, retomando a Equação (4.45), foram consideradas ao todo 20 FRFs simultaneamente na faixa de 0 a 1000 Hz e os parâmetros do modelo para serem atualizados foram o módulo de elasticidade do alumínio e a constante de amortecimento histerético proporcional à rigidez. Os intervalos de busca de cada parâmetro utilizados por ambos os algoritmos podem ser vistos na Tabela (6.6).

Tabela 6.6 – Intervalo de busca para cada parâmetro de atualização.

Parâmetro	Valor máximo	Valor mínimo
E , GPa	80	60
β	$9e^{-3}$	$9e^{-8}$

Fonte: Do autor (2021).

Já com relação aos aspectos individuais de cada algoritmo, tratando primeiramente do DEA, devem ser escolhidos os parâmetros F e CR que representam a escala de mutação e taxa de *crossover*, respectivamente. A escolha dessas constantes influencia diretamente no comportamento da convergência do algoritmo e, para problemas de dinâmica estrutural complexos onde há uma certa dependência entre os parâmetros de atualização, ou seja, a mudança de um

deles gera efeito sobre os outros, estima-se que valores entre 0.8 e 1 sejam ideais para ambas as constantes (DAS; ABRAHAM; KONAR, 2009).

Além das constantes, faz-se necessário definir também o tamanho da população NP . Estudos mostram que uma boa escolha gira em torno de $5d$ até $10d$, onde d representa o número de variáveis de atualização, ou seja, 4 (STORN; PRICE, 1995). Diante disso, os dados de aspectos práticos individuais para o DEA podem ser vistos na Tabela (6.7).

Tabela 6.7 – Aspectos práticos individuais para o DEA.

Aspecto	Valor
F	0.8
CR	0.8
NP	40

Fonte: Do autor (2021).

Para o BA, deve-se definir o número de soluções aleatórias N , N_1 e N_2 melhores soluções, sendo N_2 totalmente dependente da quantidade N_1 , as constantes n_1 e n_2 que ditam as buscas ao redor das soluções N_1 e N_2 selecionadas, respectivamente. Além disso, o raio de busca r também é uma constantes que influencia diretamente no funcionamento do algoritmo. Para número de soluções aleatórias ou população inicial N , seguindo o mesmo raciocínio utilizado para o DEA, foi escolhido $7.5d$. Quanto às melhores soluções, estima-se que $N_1 = 0.5N$ e $N_2 = 0.4N_1$ sejam boas escolhas. Com relação a quantidade de buscas ao redor de N_1 e N_2 , acredita-se que $n_1 = 0.5N$ e $n_2 = 2n_1$ sejam os mais indicados. Por fim, o raio de busca ideal gira em torno de 0.9 até 1. Vale ressaltar que, com exceção do raio de busca, todas as constantes devem ser números inteiros e, para isso, utiliza-se arredondamento para o inteiro superior mais próximo, caso necessário. Os dados de aspectos práticos individuais para o BA podem ser vistos na Tabela (6.8) (MORADI; FATAHI; RAZI, 2010; BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999; MORADI; ALIMOURI; CHINIPARDAZ, 2018).

Tabela 6.8 – Aspectos práticos individuais para o BA.

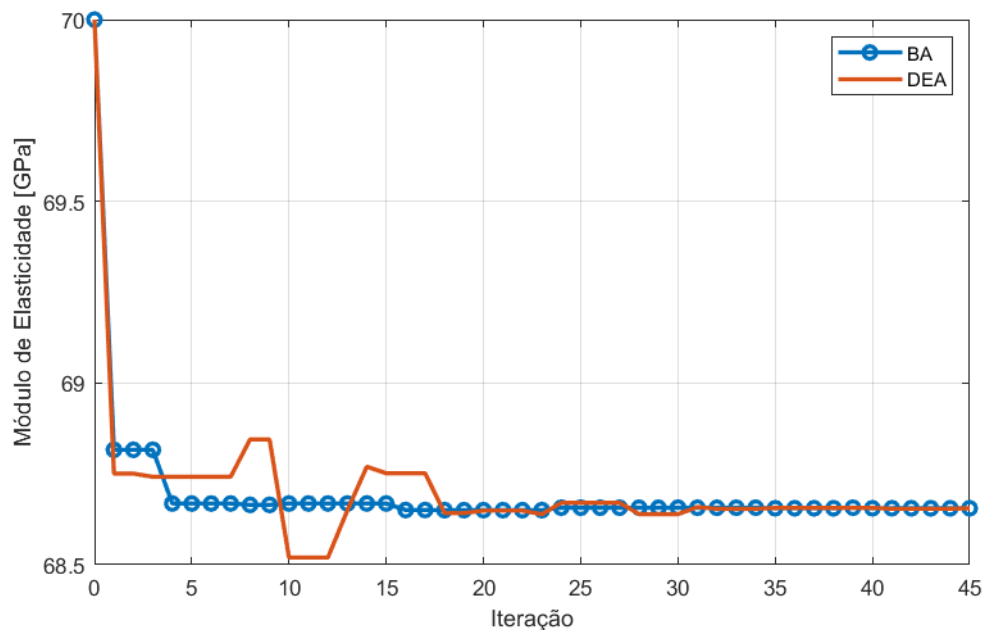
Aspecto	Valor
N	30
N_1	15
N_2	6
n_1	15
n_2	30
r	0.95

Fonte: Do autor (2021).

Em termos práticos, os valores apresentados na Tabela (6.8) podem ser interpretados como se na colmeia de abelhas, uma abelha fosse designada para cada localidade N_1 de néctar, já que $n_1 = N_1$ e cinco abelhas designadas para cada localidade elite N_2 , já que $n_2 = 5N_2$. Esse fato se justifica ao passo que as localidades elite apresentam maior quantidade disponível de néctar ou, em termos computacionais, apresentam menores valores de função objetivo.

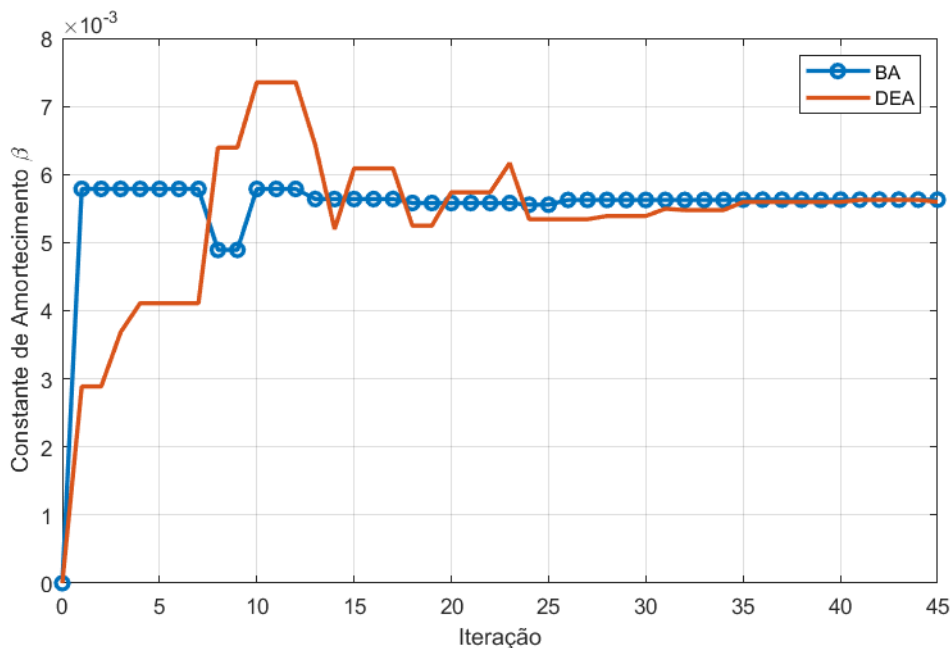
Ambos os algoritmos foram alimentados com os aspectos gerais e práticos citados anteriormente e a comparação do desempenho em termos de resultados para cada parâmetro pode ser vista nas Figuras (6.20) e (6.21). Foram realizadas 45 iterações com os dois métodos e cada uma das figuras citadas evidencia a convergência do parâmetro em questão em função das iterações.

Figura 6.20 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.21 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações.



Fonte: Do autor (2021).

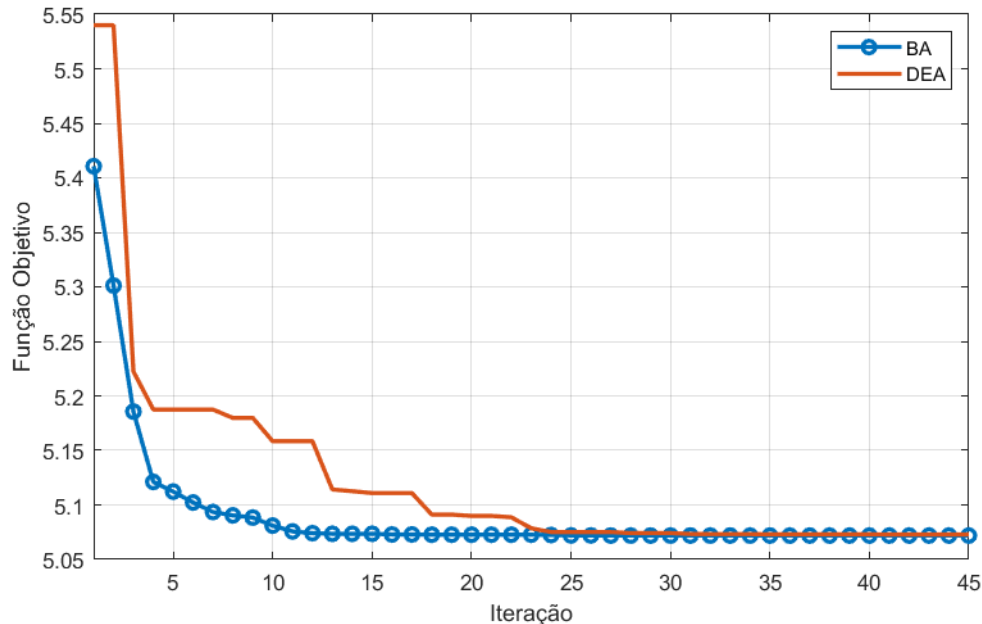
Ao analisar o resultado exposto pela Figura (6.20), verifica-se como foi previsto pela análise feita da reta de 45° , a rigidez do modelo teórico foi reduzida através do Módulo de Elasticidade, que sofreu redução de 70 para 68.6 GPa. É importante notar que ambos os algoritmos convergiram, após 31 iterações, para o mesmo resultado deste parâmetro, que está totalmente coerente com valores da literatura para estruturas de alumínio. Além disso, observa-se que o BA é capaz de convergir mais rápido que o DEA, oscilando menos em torno do valor final.

Quanto ao resultado mostrado pela Figura (6.21), tem-se que inicialmente, na iteração 0, o amortecimento histerético do modelo teórico era considerado nulo e os algoritmos foram capazes de identificar um valor de $5.6e^{-3}$ após 35 iterações, que também é muito coerente do ponto de vista físico e possui bastante influência na amplitude das FRFs, como será mostrado mais adiante. Novamente, o BA foi capaz de convergir mais rápido que o DEA e oscilar menos em torno do valor final.

A fim de comparar os dois algoritmos em termos de função objetivo (FO), a Figura (6.22) apresenta a evolução dos valores da FO em função as iterações. Como pode ser visto, ambos os algoritmos retornaram o mesmo valor após 24 iterações, sendo que o BA novamente convergiu bem mais rápido que o DEA. É interessante notar também que o padrão de convergência do BA é contínuo e não apresenta pontos de estagnação, enquanto o DEA converge em saltos, estagnando por algumas iterações. Embora o BA apresente convergência mais rápida, o

custo computacional associado é bem mais elevado e o algoritmo gasta mais tempo por iteração quando comparado ao DEA para uma mesma máquina.

Figura 6.22 – Convergência do DEA e BA em função das iterações.



Fonte: Do autor (2021).

A Tabela (6.9) apresenta os resultados retornados pelos algoritmos, bem como os valores de FO associados. Pode-se observar que o desempenho de ambos é bem similar e o valor de função objetivo retornado ao final das iterações é o mesmo, evidenciando assim que o resultado encontrado seja, de fato, um mínimo global. Além disso, os parâmetros retornados são bastante coerentes com a literatura para estruturas de alumínio.

Tabela 6.9 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização.

Parâmetro	DEA	BA
E , GPa	68.6	68.6
β	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$
FO	5.07	5.07

Fonte: Do autor (2021).

Ao utilizar os valores retornados pelos algoritmos da última iteração, é possível reatualizar o modelo teórico de elementos finitos, agora atualizado, para verificar os resultados em termos de frequências naturais e FRFs. Com relação às frequências naturais, serão considerados os valores retornados pelo algoritmo de abelhas (BA), porém vale ressaltar que a comparação é

idêntica utilizando aqueles retornados pelo DEA. A Tabela (6.10) apresenta a comparação entre o modelo atualizado e o experimental. Como pode ser observado em comparação com os dados apresentados na Tabela (6.5), com exceção da terceira frequência natural, todas as outras se tornaram mais próximas do experimental a partir da atualização, com redução significativa no erro relativo. Ou seja, 88% das frequências naturais apresentaram melhora, sendo que o maior erro relativo foi diminuído de 1.52% para 1.08%. Diante disso, verifica-se forte correlação teórico-experimental em termos de frequências.

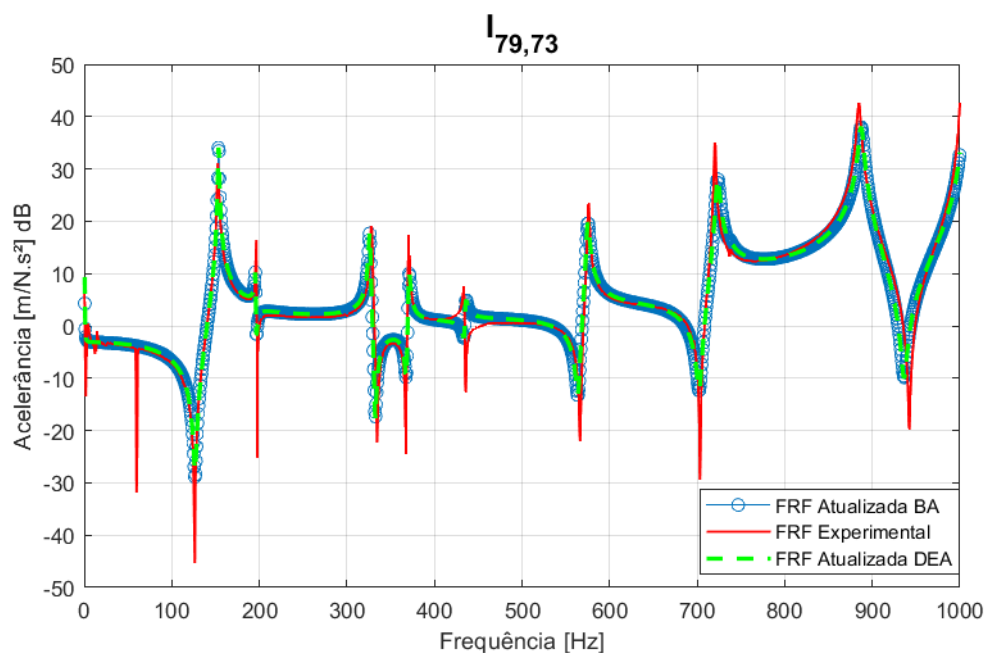
Tabela 6.10 – Frequências naturais teóricas e experimentais dos modos flexíveis da estrutura de placa.

Modo	Atualizado [Hz]	Experimental [Hz]	Erro relativo, %
1	153.46	152.6	0.56
2	195.66	195.9	0.12
3	326.05	329.6	1.08
4	370.93	370.5	0.11
5	435.33	434.6	0.16
6	575	574.3	0.12
7	723.27	721.4	0.25
8	736	737.9	0.25
9	887.33	886.2	0.12

Fonte: Do autor (2021).

Ao comparar os valores retornados pelos algoritmos em termos de FRF, como é evidenciado na Figura (6.23), observa-se uma melhora significativa tanto em frequência quanto em amplitude, uma vez que os picos das ressonâncias e antirressonâncias tiveram suas amplitudes amortecidas e, com isso, melhoraram a correlação teórico-experimental ao longo de todo o intervalo de frequência analisado para todos os modos e FRFs. Foram atualizadas 20 FRFs simultaneamente, porém somente a FRF $I_{79,73}$ será discutida ao longo do texto. As demais FRFs serão apresentadas no APÊNDICE D.

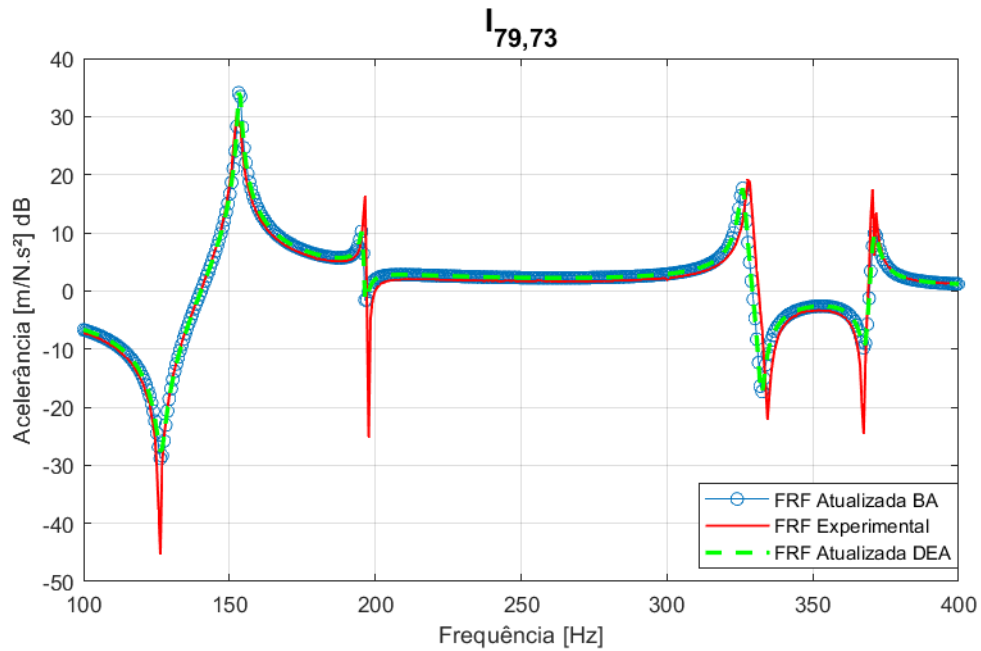
Figura 6.23 – Comparação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa. FRF $I_{79,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

A partir da Figura (6.23) é possível perceber que as curvas "FRF Atualizada BA" e "FRF Atualizada DEA" se apresentam sobrepostas, evidenciando que os valores retornados na atualização para ambos os algoritmos geram a mesma FRF, o que era de se esperar já que os parâmetros identificados foram muito similares. Além disso, após a atualização de modelo, verifica-se que o modelo atualizado é levemente mais amortecido que o experimental. Tal comportamento é de fato esperado ao realizar esse tipo de procedimento, uma vez que os algoritmos tem a tendência de fornecer a melhor minimização de todos os pontos ao longo da discretização, resultando em uma resposta ligeiramente mais amortecida. Diante disso, conclui-se que tanto quantitativamente quanto qualitativamente o modelo atualizado se aproximou de forma acurada do teste modal, retornando resultados excelentes. A Figura (6.24) apresenta uma ampliação da mesma FRF $I_{79,73}$ no intervalo de 100 até 400 Hz. Nota-se que os 4 primeiros modos flexíveis (153.46, 195.66, 326.05, 370.93) apresentaram excelente correlação, apesar dos 3.6 Hz de discrepância relacionado ao modo de 326.05 Hz.

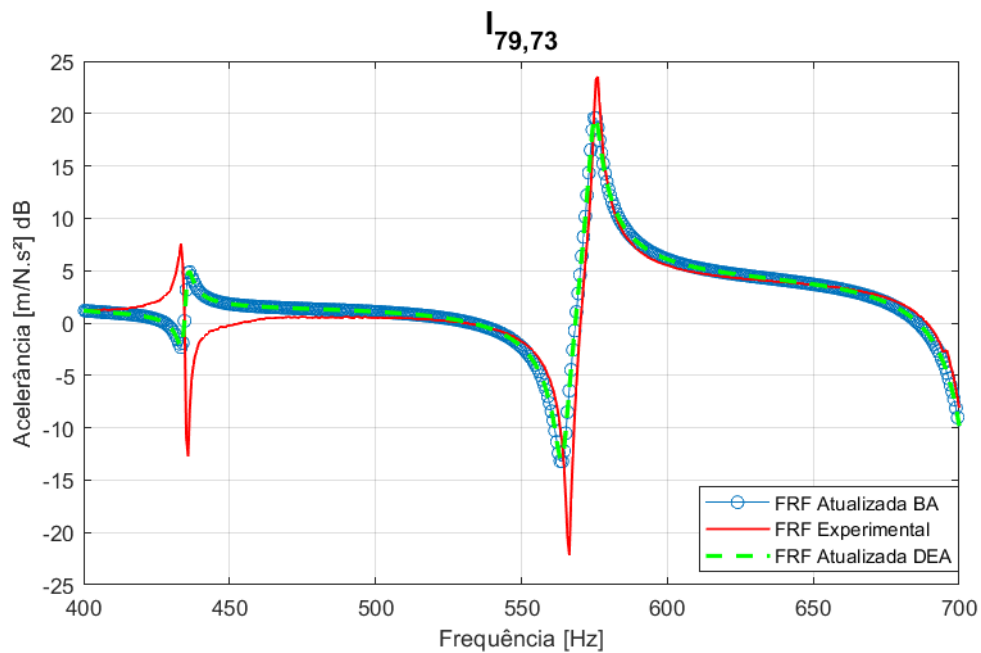
Figura 6.24 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 100 a 400 Hz. FRF $I_{79,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

Na faixa de 400 até 700 Hz, como mostra a Figura (6.25), é possível verificar também uma ótima correlação teórico-experimental, com os modos de 435.33 e 575 Hz bem próximos ao teste modal, apesar da tendência dos picos estarem levemente mais amortecidos.

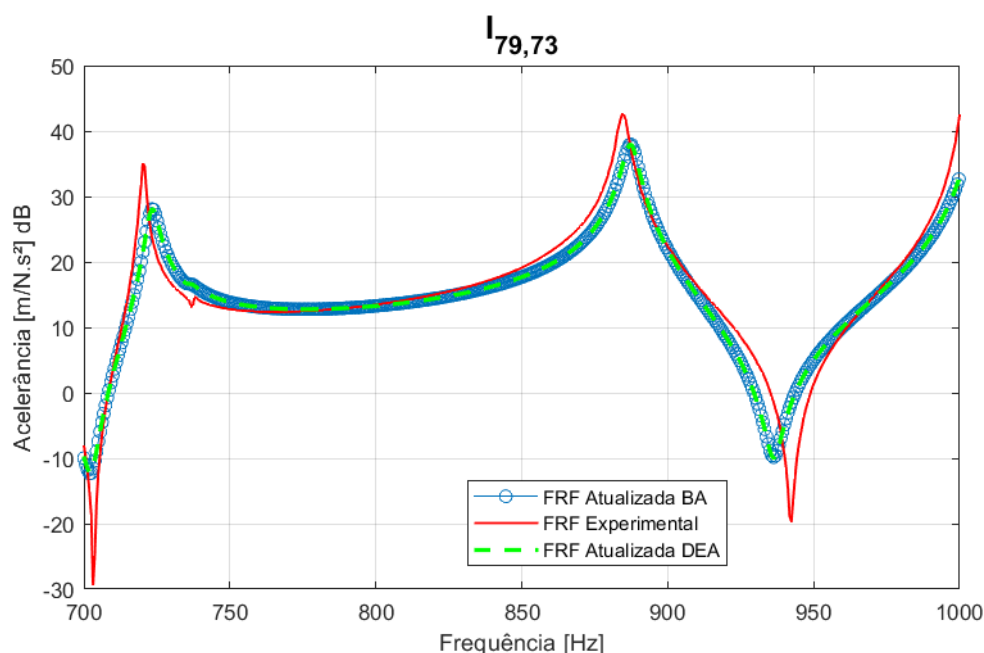
Figura 6.25 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 400 a 700 Hz. FRF $I_{79,73}$.



Fonte: Do autor (2021).

Por fim, na faixa de 700 até 1000 Hz como pode ser visto na Figura (6.26), é possível perceber um leve *shift* de frequência nos modos de 723.27 e 887.33 Hz, embora também estejam muito bem correlacionados. Além disso, a antirressonância que aparece logo antes do último modo também se apresenta ligeiramente deslocada para a esquerda. Essas discrepâncias pontuais tendem a ocorrer pelo fato do algoritmo não encontrar um único valor para o parâmetro atualizado (módulo de elasticidade) que satisfaça ao mesmo tempo a física do problema e os critérios de convergência e intervalos de busca. Diante do que foi apresentado em detalhes pelas ampliações, considera-se que todos os modos foram bem ajustados em todo o intervalo de frequências e quanto às amplitudes, sabe-se que modelar fenômenos de amortecimento em estruturas reais é algo nitidamente complexo, uma vez que o modelo histerético aqui assumido representa uma aproximação do que realmente acontece e, portanto, é tarefa árdua determinar de fato o comportamento amortecido da estrutura devido às diversas incertezas acerca deste tópico, embora a atualização de modelo seja uma das técnicas mais recomendadas (EWINS, 2000; FILHO, 2005; MAIA; SILVA, 1997).

Figura 6.26 – Ampliação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de placa na faixa de 700 a 1000 Hz. FRF $I_{79,73}$.

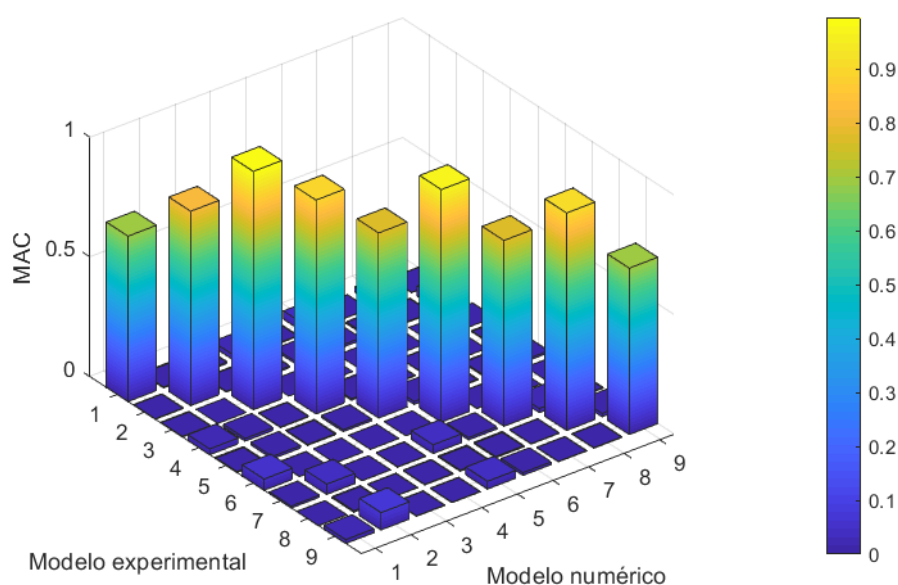


Fonte: Do autor (2021).

Pode-se ainda realizar uma comparação quantitativa com relação ao modelo atualizado e experimental, através da utilização da Equação (4.44), o número *MAC*. Porém, a comparação a ser realizada não é direta, uma vez que os dois modelos são numericamente incompatíveis, já que no teste modal somente os graus de liberdade (GL) translacionais foram aferidos e isso

representa somente um terço do total de GL do modelo teórico atualizado. Diante disso, somente os graus de liberdade translacionais são considerados no modelo teórico para fins de comparação. Portanto, são calculados os autovetores do modelo teórico atualizado utilizando somente GL translacionais e estes são diretamente comparados aos autovetores regenerados do teste modal a partir da técnica de *Ewins-Gleeson*. Dessa forma, aplicando a Equação (4.44) a matriz *MAC* é obtida e representada na forma tridimensional na Figura (6.27).

Figura 6.27 – *Modal assurance criterion*.



Fonte: Do autor (2021).

A Tabela (6.11) apresenta os valores da diagonal de interesse da matriz *MAC*. Teoricamente, a perfeita correlação entre o modelo teórico e o teste modal acontece quando os valores da diagonal são iguais a 1, porém acredita-se que, na prática, valores próximos a 0.75 correspondam a modos bem correlacionados (EWINS, 2000). Diante dos valores apresentados na diagonal de interesse, conclui-se que dos 9 modos flexíveis analisados, somente 2 estão abaixo do valor de referência (primeiro e último). Entretanto, acredita-se que quantitativamente os modos teóricos estejam representando bem o experimento com valores de *MAC* variando de 0.69 até 0.99 (BRANDT; SINGHAL, 2016; FRISWELL; MOTTERSHEAD, 2013).

Tabela 6.11 – Número MAC entre modelo experimental e numérico atualizado.

Modo	MAC
1	0.69
2	0.81
3	0.99
4	0.89
5	0.77
6	0.97
7	0.77
8	0.91
9	0.69

Fonte: Do autor (2021).

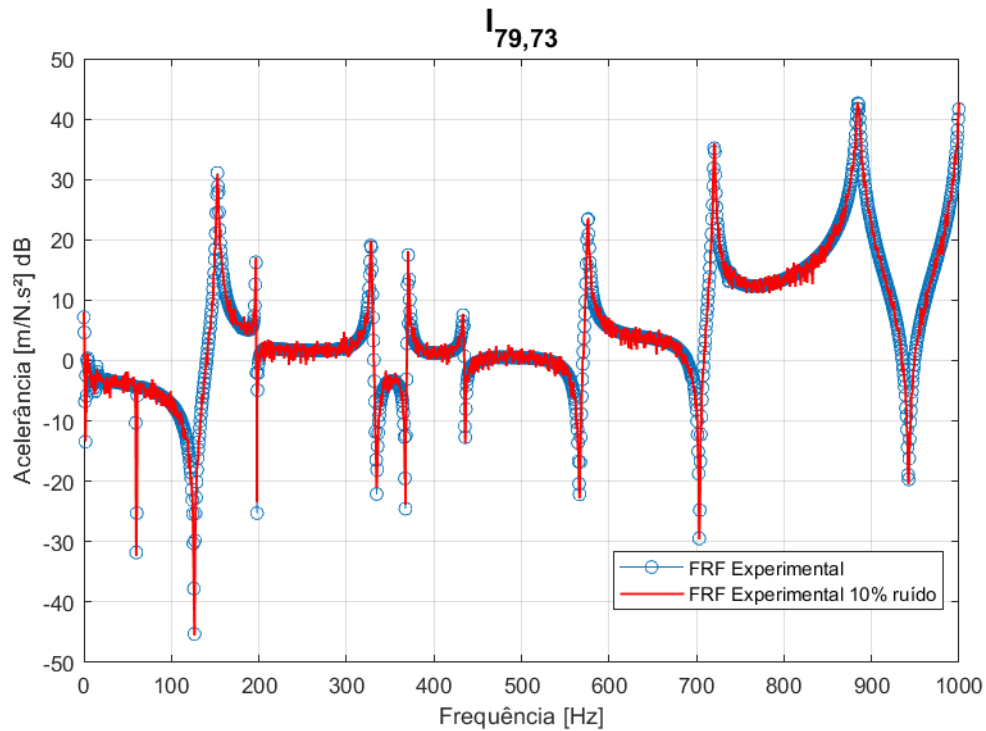
6.3 Contaminação das FRFs experimentais com ruído

Os resultados de atualização de modelo apresentados neste tópico tem como referência FRFs contaminadas com ruído branco e que eventualmente possam estar presentes na medição experimental. O intuito é unicamente verificar a influência do ruído nos resultados de atualização retornados pelos algoritmos.

6.3.1 Cenário 1: 10% de ruído

Utilizando a Equação (4.68) e variando ω em todo o intervalo de frequências, tem-se que a FRF $I_{79,73}$ contaminada com 10% de ruído branco é apresentada na Figura (6.28).

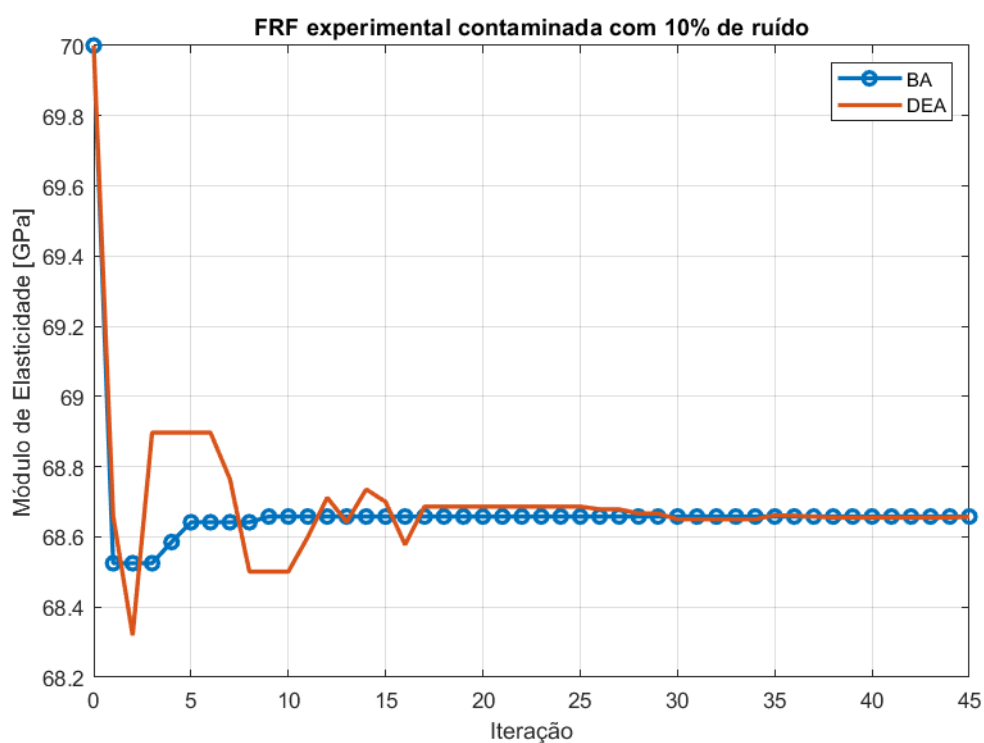
Figura 6.28 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 10% de ruído em comparação com a curva experimental.



Fonte: Do autor (2021).

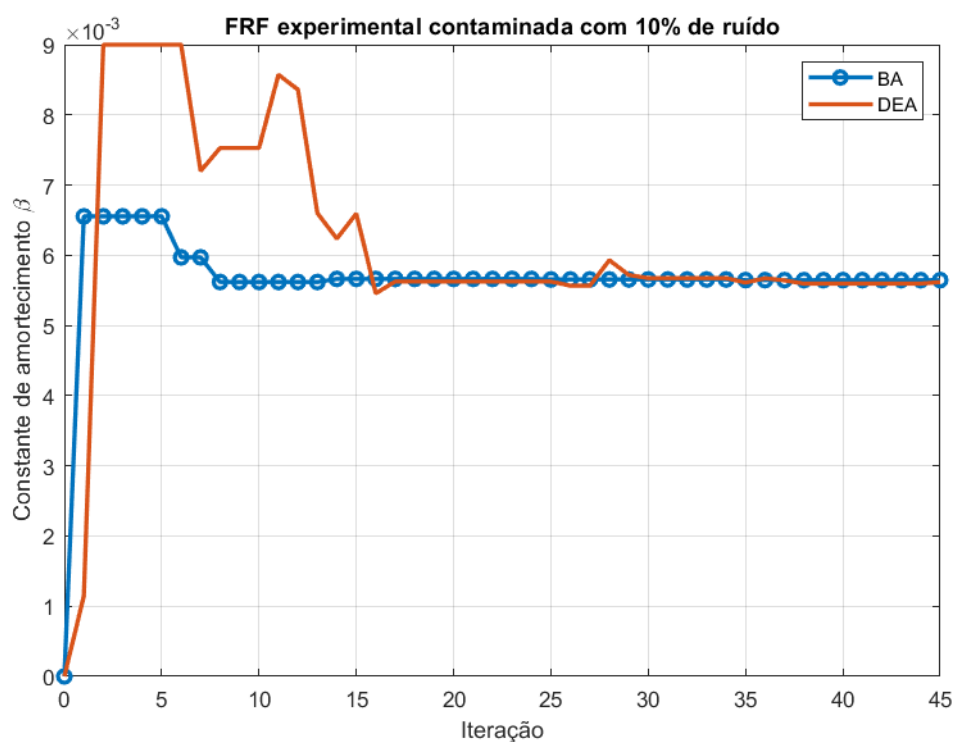
Verifica-se pela Figura (6.28) que as regiões entre as ressonâncias são as mais afetadas pelo ruído, distorcendo a amplitude. Diante das FRFs contaminadas, o processo de atualização foi realizado utilizando ambos os algoritmos e as mesmas 20 FRFs da atualização conduzida sem nenhum ruído. Com relação aos resultados, as Figuras (6.29) e (6.30) apresentam a convergência do módulo de elasticidade e do amortecimento estrutural hysterético, respectivamente. Como pode ser observado, ambos os algoritmos retornaram o mesmo valor para os dois parâmetros e o algoritmo de abelhas (BA) apresentou convergência mais rápida que o DEA, como aconteceu na atualização sem nenhum nível de contaminação.

Figura 6.29 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 10% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.30 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 10% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

A comparação dos resultados obtidos nesta atualização com aqueles obtidos sem nenhum nível de ruído é apresentada na Tabela (6.12). Como pode ser observado, os valores identificados dos parâmetros são os mesmos, porém com um aumento no parâmetro FO que já era esperado, uma vez que curva experimental está alterada e isso afeta a minimização da função objetivo. Diante desse resultado, conclui-se que os 10% de ruído inseridos nas FRFs experimentais não afetam a convergência do algoritmo ao utilizar 20 FRFs na atualização, já que quanto maior o número de FRFs contabilizadas, menor é a influência do ruído sobre o resultado do ajuste. Acredita-se que esses resultados seriam fortemente alterados se poucas FRFs fossem utilizadas.

Tabela 6.12 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 10% de ruído nas FRFs experimentais.

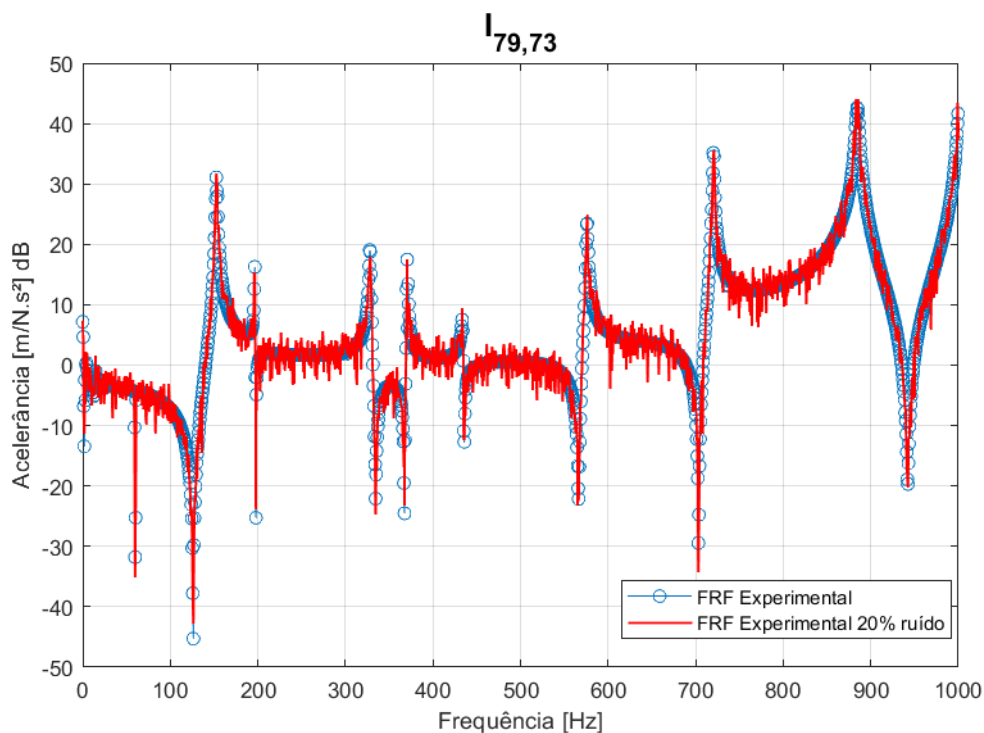
Parâmetro	DEA [referência]	BA [referência]	DEA [10% ruído]	BA [10% ruído]
E , GPa	68.6	68.6	68.6	68.6
β	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$
FO	5.07	5.07	5.24	5.24

Fonte: Do autor (2021).

6.3.2 Cenário 2: 20% de ruído

Utilizando novamente a Equação (4.68) e variando ω em todo o intervalo de frequências, tem-se que a FRF $I_{79,73}$ contaminada com 20% de ruído branco é apresentada na Figura (6.31).

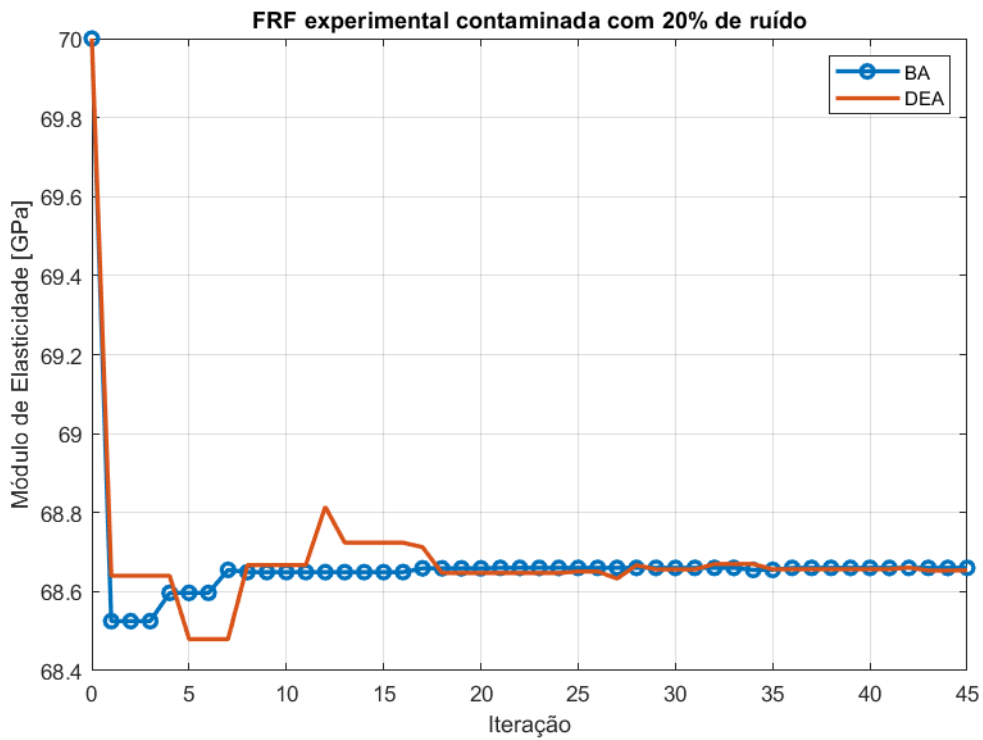
Figura 6.31 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 20% de ruído em comparação com a curva experimental.



Fonte: Do autor (2021).

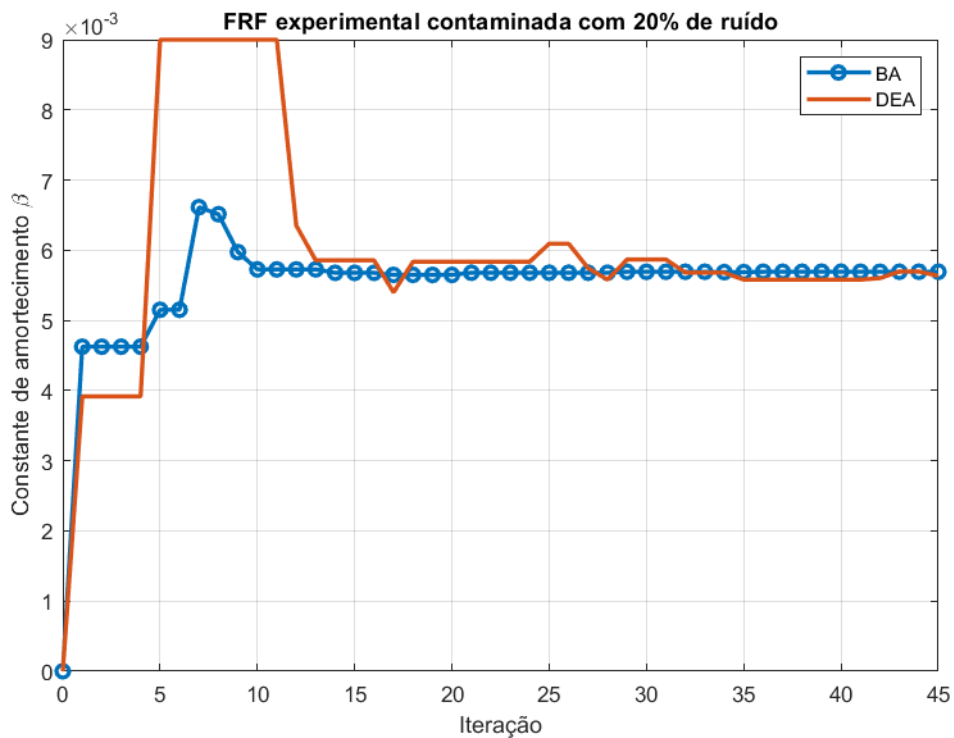
Nota-se pela Figura (6.31) que as regiões entre as ressonâncias são as mais afetadas pelo ruído, distorcendo bastante a amplitude. Diante das FRFs contaminadas, o processo de atualização foi realizado utilizando ambos os algoritmos e as mesmas 20 FRFs da atualização conduzida sem nenhum ruído. Com relação aos resultados, as Figuras (6.32) e (6.33) apresentam a convergência do módulo de elasticidade e do amortecimento estrutural hysterético, respectivamente. Mais uma vez, ambos os algoritmos retornaram os mesmos valores para os parâmetros e o algoritmo de abelhas convergiu mais rapidamente e de maneira mais contínua que o DEA.

Figura 6.32 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 20% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.33 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 20% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

A comparação dos resultados obtidos nesta atualização com aqueles obtidos sem nenhum nível de ruído é apresentada na Tabela (6.13). Como pode ser observado, os valores identificados dos parâmetros são praticamente idênticos e constam com um aumento ainda maior no parâmetro FO que já era esperado, uma vez que curva experimental está mais alterada e isso afeta a minimização da função objetivo. Diante desse resultado, conclui-se que os 20% de ruído inseridos nas FRFs experimentais também não afetam a convergência do algoritmo ao utilizar 20 FRFs na atualização, já que quanto maior o número de FRFs contabilizadas, menor é a influência do ruído sobre o resultado do ajuste. Acredita-se que esses resultados seriam fortemente alterados se poucas FRFs fossem utilizadas.

Tabela 6.13 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 20% de ruído nas FRFs experimentais.

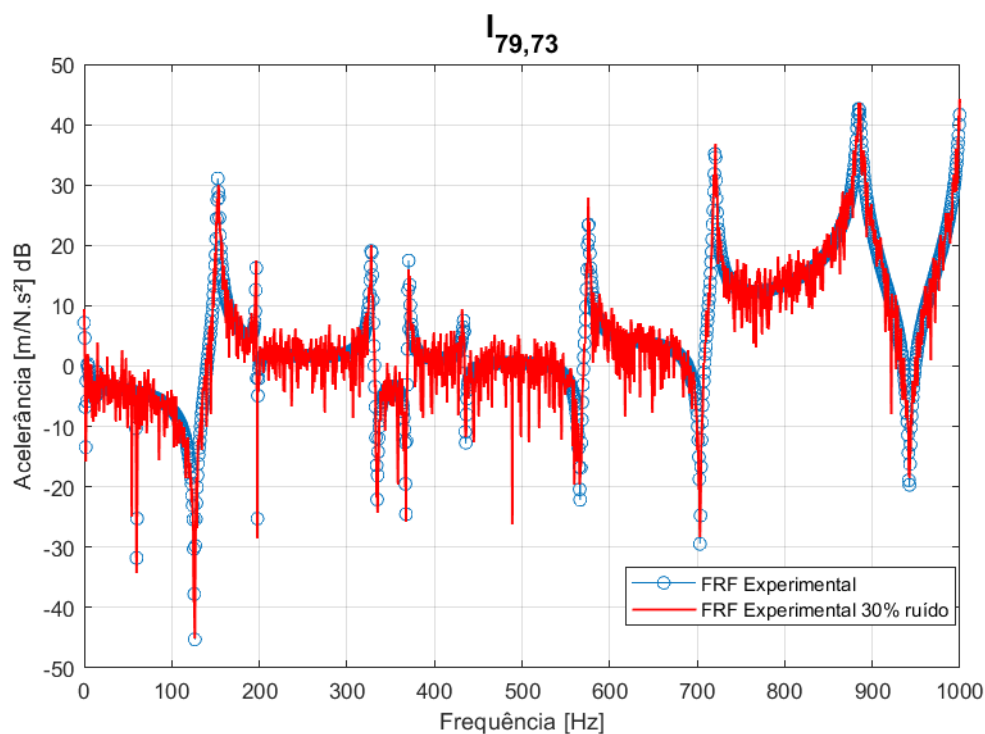
Parâmetro	DEA [referência]	BA [referência]	DEA [20% ruído]	BA [20% ruído]
E , GPa	68.6	68.6	68.7	68.7
β	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$
FO	5.07	5.07	5.79	5.79

Fonte: Do autor (2021).

6.3.3 Cenário 3: 30% de ruído

Utilizando novamente a Equação (4.68) e variando ω em todo o intervalo de frequências, tem-se que a FRF $I_{79,73}$ contaminada com 30% de ruído branco é apresentada na Figura (6.34).

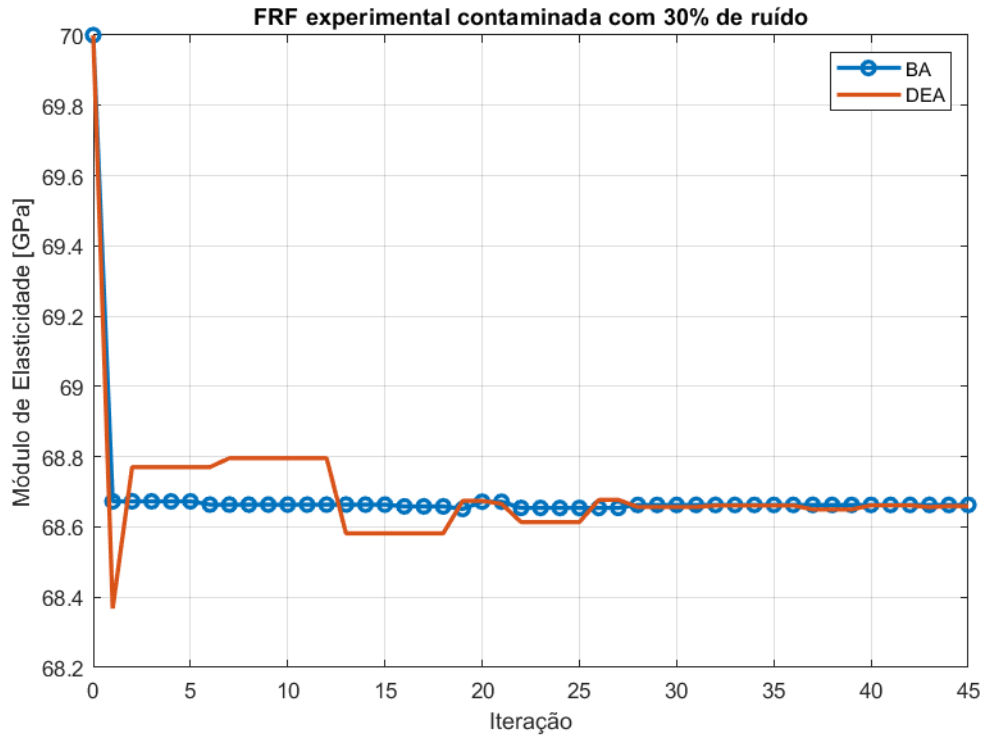
Figura 6.34 – FRF $I_{79,73}$ contaminada com 30% de ruído em comparação com a curva experimental.



Fonte: Do autor (2021).

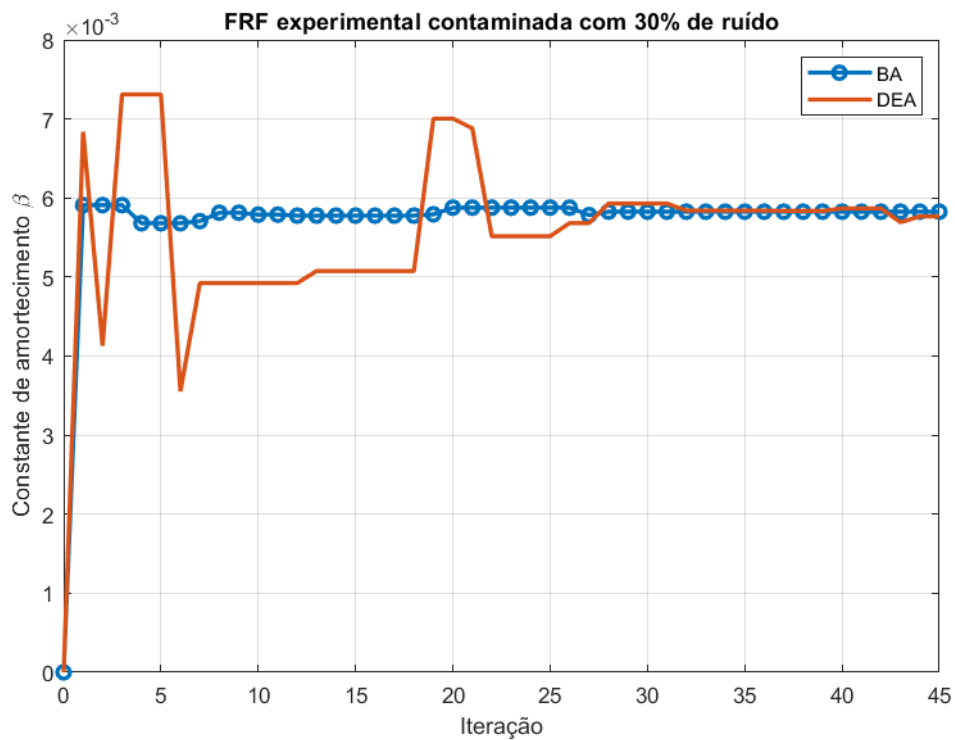
Observa-se pela Figura (6.31) que as regiões entre as ressonâncias são as mais afetadas pelo ruído, distorcendo exageradamente a amplitude e fugindo completamente da realidade do experimento. Diante das FRFs contaminadas, o processo de atualização foi realizado utilizando ambos os algoritmos e as mesmas 20 FRFs da atualização conduzida sem nenhum ruído. Com relação aos resultados, as Figuras (6.35) e (6.36) apresentam a convergência do módulo de elasticidade e do amortecimento estrutural hysterético, respectivamente. Mais uma vez, ambos os algoritmos retornaram os mesmos valores para os parâmetros e o algoritmo de abelhas convergiu mais rapidamente e de maneira mais contínua que o DEA. É interessante verificar que mesmo com uma FRF completamente desfigurada como apresentado pela Figura (6.34), a *performance* do algoritmo de abelhas é bastante precisa já nas primeiras iterações.

Figura 6.35 – Convergência do Módulo de elasticidade em função das iterações com 30% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.36 – Convergência da constante de amortecimento β em função das iterações com 30% de ruído nas FRFs experimentais.



Fonte: Do autor (2021).

A comparação dos resultados obtidos nesta atualização com aqueles obtidos sem nenhum nível de ruído é apresentada na Tabela (6.14). Como pode ser observado, os valores identificados dos parâmetros são praticamente idênticos e também constam com um aumento ainda maior no parâmetro FO que já era esperado, uma vez que curva experimental está mais alterada e isso afeta a minimização da função objetivo. Diante desse resultado, conclui-se que os 30% de ruído inseridos nas FRFs experimentais também não afetam a convergência do algoritmo ao utilizar 20 FRFs na atualização, já que quanto maior o número de FRFs contabilizadas, menor é a influência do ruído sobre o resultado do ajuste. Acredita-se que esses resultados seriam fortemente alterados se poucas FRFs fossem utilizadas.

Tabela 6.14 – Valores dos parâmetros retornados pelos algoritmos de atualização com 30% de ruído nas FRFs experimentais.

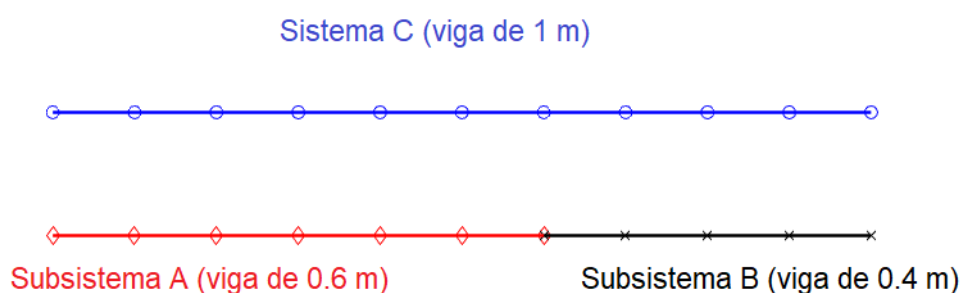
Parâmetro	DEA [referência]	BA [referência]	DEA [30% ruído]	BA [30% ruído]
E , GPa	68.6	68.6	68.7	68.7
β	$5.6e^{-3}$	$5.6e^{-3}$	$5.7e^{-3}$	$5.6e^{-3}$
FO	5.07	5.07	6.86	6.85

Fonte: Do autor (2021).

6.4 Subestruturação

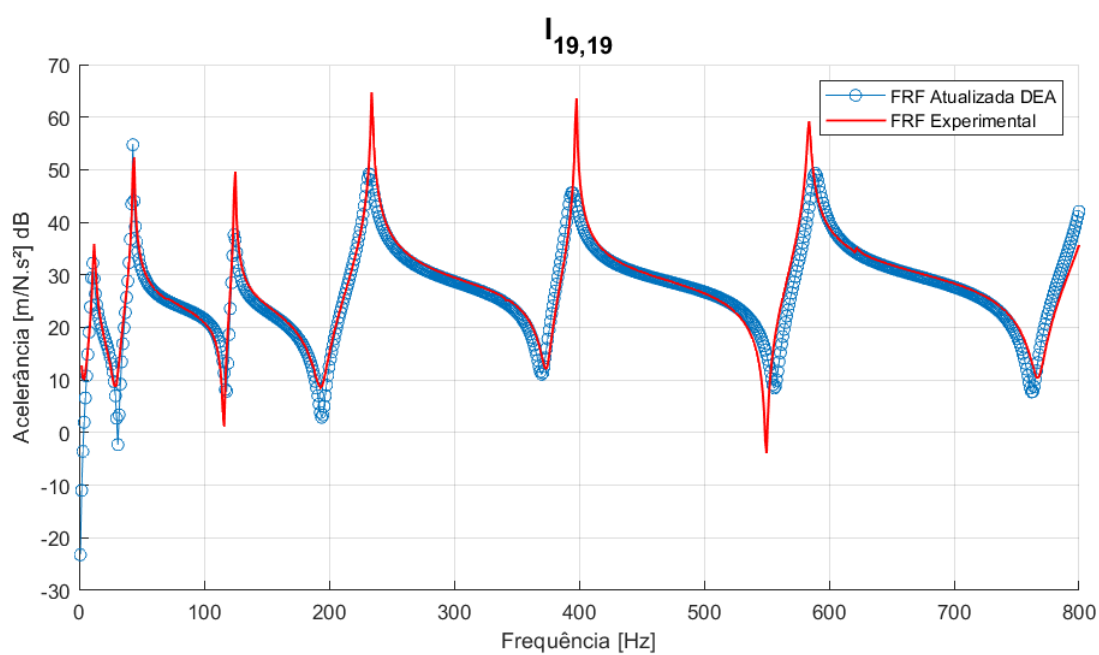
Para fins de ilustração numérica da técnica de subestruturação, foi utilizado como objeto de estudo uma viga de alumínio com 1 m de comprimento, 0.0254 m de largura e 0.003175 m de altura. Para manter a coerência com o que foi exposto na Seção (4.9), o sistema C (acoplado) foi discretizado em 10 elementos de viga segundo a teoria de *Euler-Bernoulli*, considerando 2 graus de liberdade por nó (uma translação e uma rotação). Os subsistemas A e B são representados também por elementos de viga, sendo o primeiro discretizado com 6 elementos e o segundo com 4, como fica evidente na Figura (6.37). As subestruturas A e B representam a partição da viga de 1 m em duas com tamanhos diferentes e conectadas rigidamente no nó 7. A Tabela (6.15) apresenta as propriedades físicas do material das vigas de alumínio, onde a densidade foi aferida através do cálculo do volume e medição da massa experimentalmente e o módulo de elasticidade foi obtido através de um procedimento de atualização de modelo similar ao que foi realizado para a placa, como é mostrado na Figura (6.38).

Figura 6.37 – Diagrama esquemático das vigas utilizadas na aplicação da técnica de subestruturação.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 6.38 – Comparação das amplitudes e frequências naturais atualizadas e experimentais da estrutura de viga. FRF $I_{19,19}$.



Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.15 – Propriedades do material da viga.

Parâmetro	Valor	Unidade
E	67.98	GPa
ν	0.33	-
ρ	2710	kg/m ³

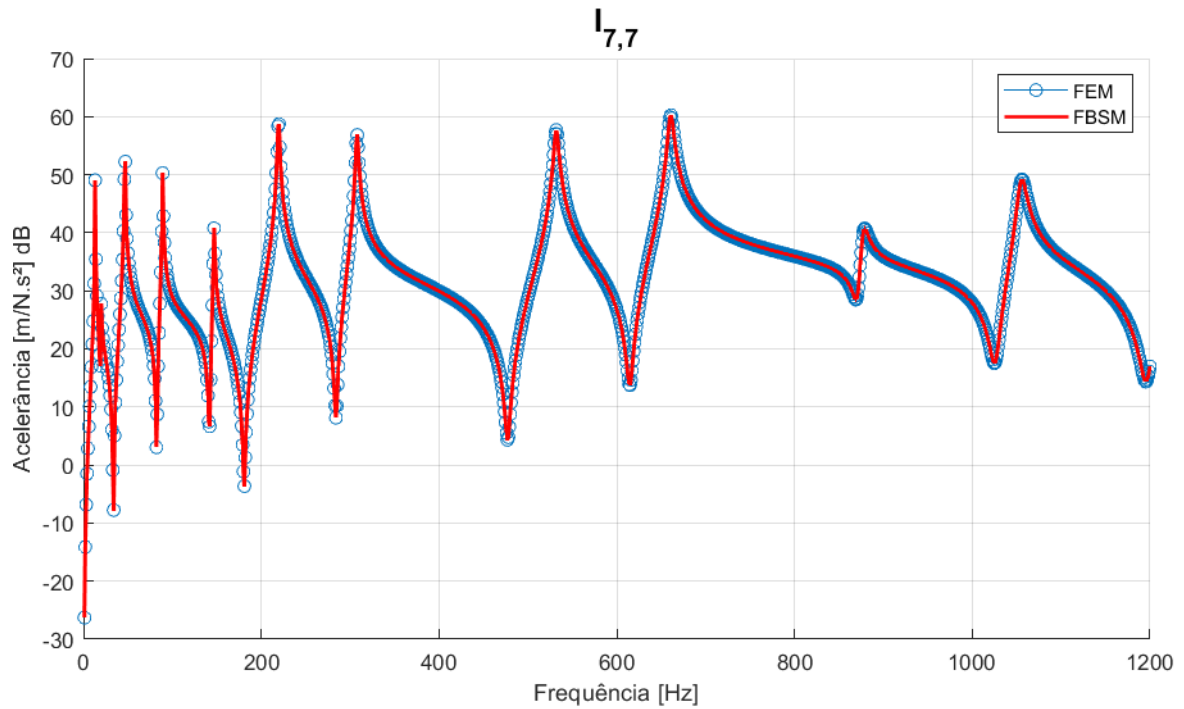
Fonte: Do autor (2021).

Primeiramente, foram apurados os resultados da aplicação da técnica via rota teórica sem a presença de ruído nas FRFs. Diante do modelo FEM das subestruturas A e B, as matrizes de FRFs foram geradas. Para a subestrutura A, os graus de liberdade internos são representados de 1 até 12 e os graus de liberdade de conexão são aqueles correspondentes ao nó 7, ou seja, 13 e 14. Para a subestrutura B, os graus de liberdade internos são representados por 3 até 10 e os graus de liberdade de conexão correspondem aqueles do nó 1, ou seja, 1 e 2. Além disso, a subestrutura A foi suspensa por fios de nylon no modelo através da inserção de rigidez local nos nós 3 e 5, enquanto a subestrutura B foi suspensa pelos nós 2 e 4 para evitar problemas numéricos. A partir da determinação dos GDLs, o procedimento apresentado na Seção (4.9) pode ser aplicado ao particionar as matrizes de FRF e aplicar a Equação (4.91). A seguir, serão apresentados alguns cenários de resultados gerados a partir da aplicação da técnica FBSM. Para o primeiro deles, nenhum nível de ruído foi considerado a fim de validar o funcionamento via rota teórica. Para os demais casos, níveis diferentes de ruídos foram inseridos somente nas FRFs translacionais, uma vez que seriam medidas experimentalmente via teste modal, e o Método de Kidder Modificado foi utilizado para obter as demais FRFs com o intuito de simular um procedimento experimental.

6.4.1 Cenário 1: 0% de ruído

Para este cenário, nenhum nível de ruído foi considerado nas FRFs translacionais do modelo. Desta forma, diante das matrizes de FRFs de cada subestrutura, realizou-se a aplicação direta da Equação (4.91) a fim de obter as FRFs do sistema C acoplado a partir de informações em frequência de cada subestrutura isolada. Nesse raciocínio, a Figura (6.39) apresenta a comparação direta das FRFs $I_{7,7}$ obtidas via FEM e FBSM, no intervalo de 0 a 1200 Hz. Nota-se que a correlação entre as curvas é perfeita, evidenciando o sucesso da técnica de FBSM em reproduzir com exatidão o modelo da viga acoplada em todo o intervalo de frequência a partir de informações isoladas das subestruturas.

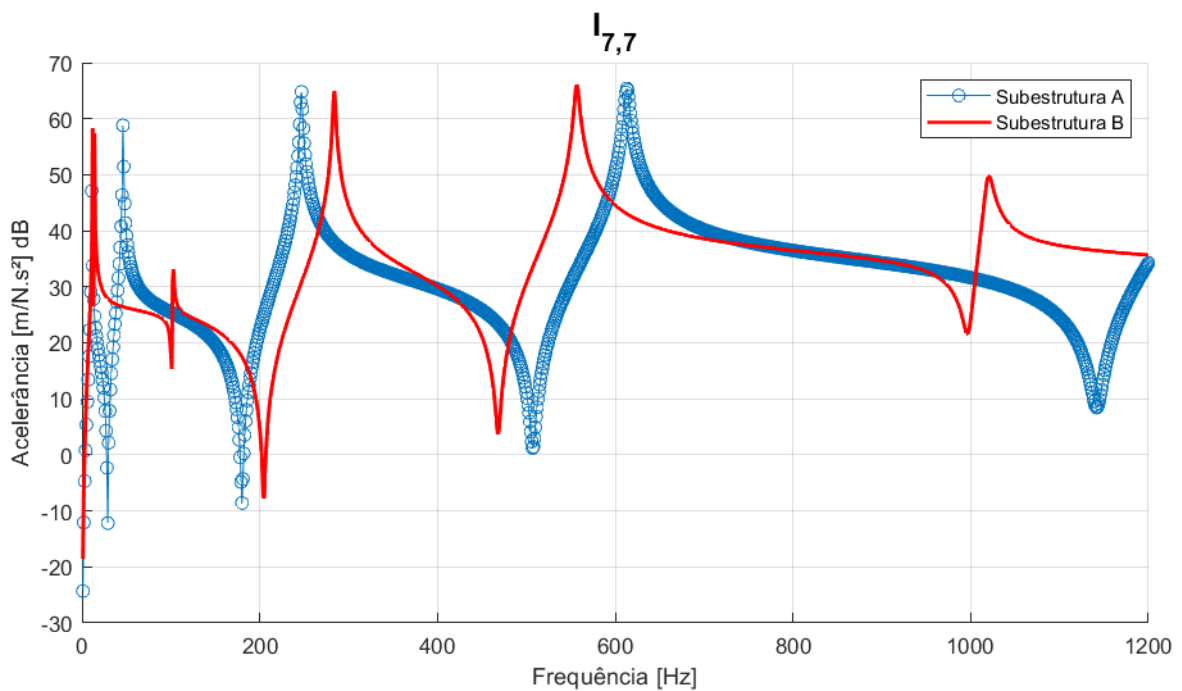
Figura 6.39 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM sem a presença de ruído.



Fonte: Do autor (2021).

Ainda nesse raciocínio, a Figura (6.40) apresenta uma comparação direta da FRF $I_{7,7}$ das subestruturas individuais, evidenciando comportamento dinâmico bem distinto entre as subestruturas e a estrutura acoplada.

Figura 6.40 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ das subestruturas individuais.

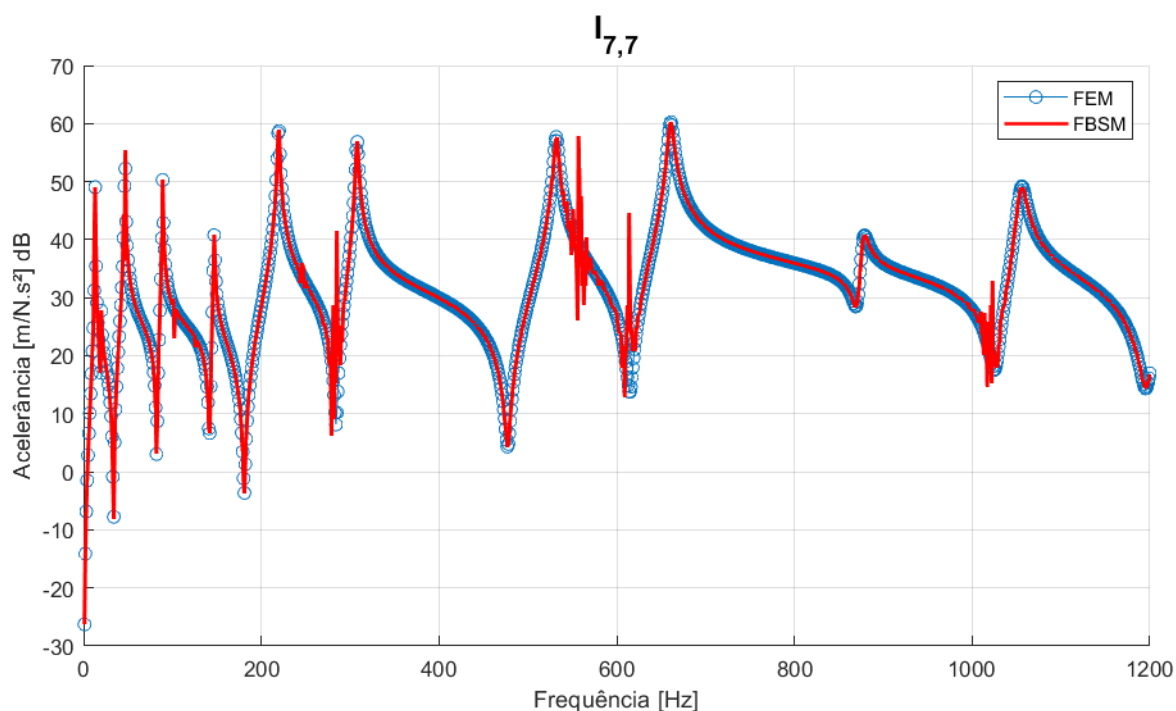


Fonte: Do autor (2021).

6.4.2 Cenário 2: 5% de ruído

Neste cenário, as FRFs translacionais foram contaminadas com 5% de ruído branco através da Equação (4.68) a fim de simular um procedimento experimental no qual somente as FRFs translacionais são diretamente medidas. Diante das curvas contaminadas, o procedimento do Método de Kidder Modificado foi implementado para estimar as demais FRFs a partir daquelas consideradas experimentais, utilizando a Equação (4.93). Nesse contexto, a Figura (6.41) apresenta a comparação direta das FRFs $I_{7,7}$ obtidas via FEM e FBSM, no intervalo de 0 a 1200 Hz. Observa-se, neste cenário, que há certas divergências entre o resultado gerado pelo modelo FEM e aquele obtido via FBSM devido a presença do ruído. Essas adversidades se manifestam em forma de picos, fornecendo a falsa impressão da presença de modos vibracionais adicionais. Este fenômeno já foi evidenciado na literatura por Beards e Ren (1995) e Avitabile e Nicgorski (2010), onde os autores classificaram tal ocorrência como sendo *reading peaks*. Em análise mais aprofundada, foi descoberto que o surgimento desses picos está intimamente relacionado com o condicionamento da operação de inversa na Equação (4.91), uma vez que este é alterado com a inserção do ruído. Ademais, também foi evidenciado pelos autores que esses picos coincidem com as frequências naturais das subestruturas isoladas, facilitando assim uma possível identificação de falsos modos vibracionais.

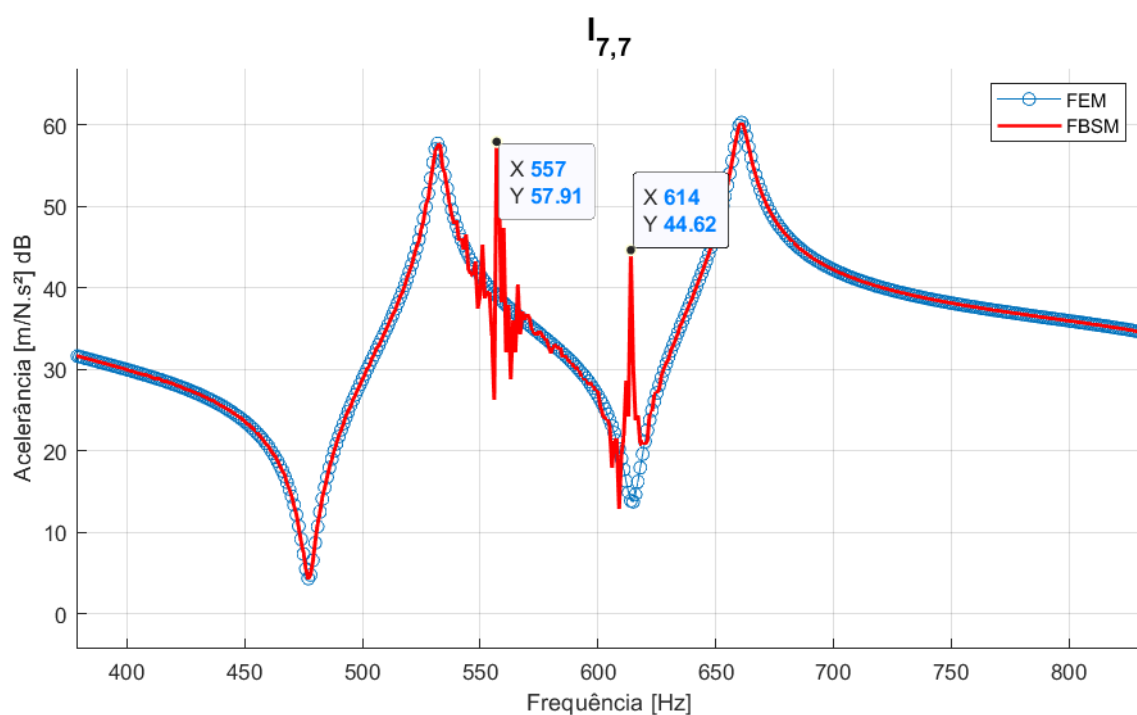
Figura 6.41 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 5% de ruído.



Fonte: Do autor (2021).

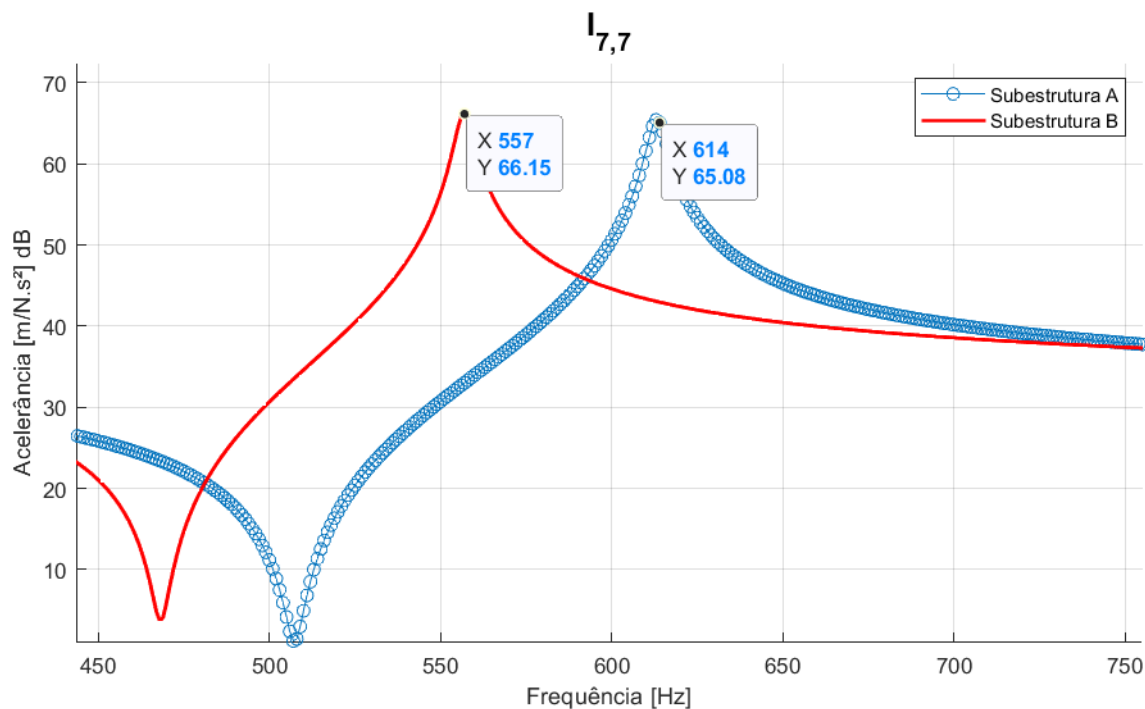
A Figura (6.42) apresenta uma ampliação da região de 400 até 800 Hz da Figura (6.41), na qual nota-se a presença de dois picos entre duas ressonâncias. Ao analisar as frequências naturais das subestruturas isoladas, tem-se que o pico de 557 Hz é devido a um modo da subestrutura B e o pico de 614 Hz é proveniente de um modo da subestrutura A, como observa-se na Figura (6.43) na qual é mostrada a FRF $I_{7,7}$ das subestruturas isoladas, evidenciando a origem dos *reading peaks*.

Figura 6.42 – Ampliação da região de 400 até 800 Hz da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 5% de ruído.



Fonte: Do autor (2021).

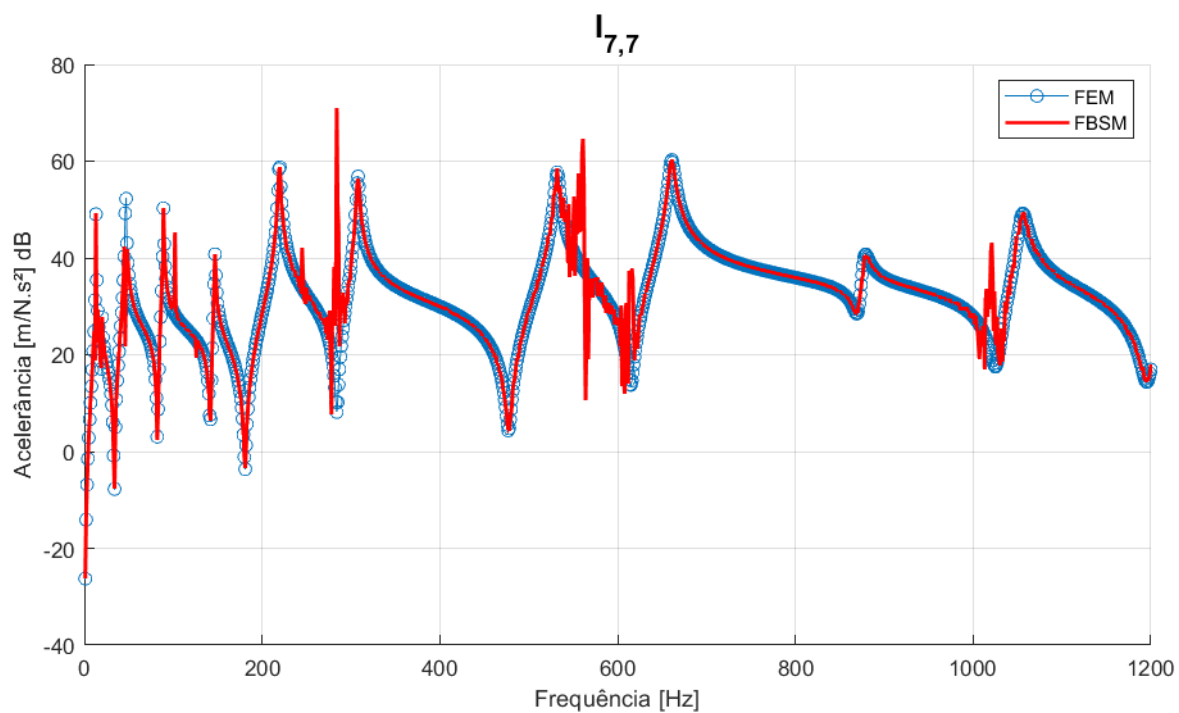
Figura 6.43 – Ampliação da região de 450 até 750 Hz da FRF $I_{7,7}$ das subestruturas isoladas.



Fonte: Do autor (2021).

6.4.3 Cenário 3: 15% de ruído

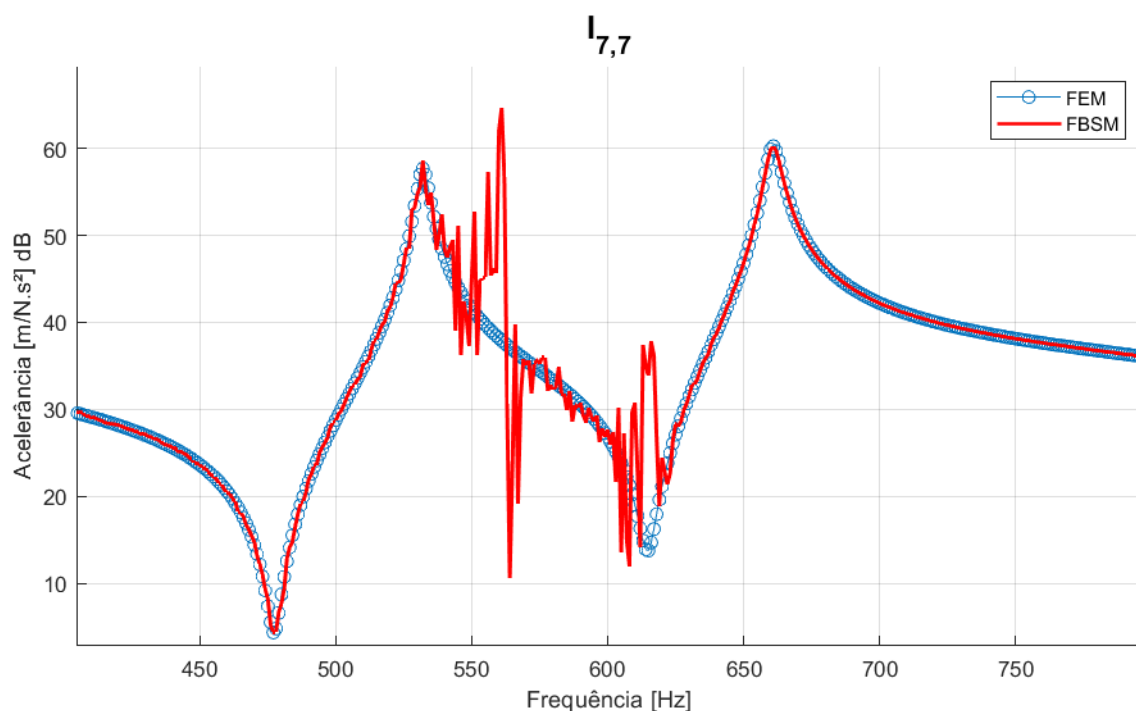
Neste cenário, as FRFs translacionais foram contaminadas com 15% de ruído branco através da Equação (4.68) a fim de simular um procedimento experimental no qual somente as FRFs translacionais são diretamente medidas. Diante das curvas contaminadas, o procedimento do Método de Kidder Modificado foi implementado para estimar as demais FRFs a partir daquelas consideradas experimentais, utilizando a Equação (4.93). Nesse contexto, a Figura (6.44) apresenta a comparação direta das FRFs $I_{7,7}$ obtidas via FEM e FBSM, no intervalo de 0 a 1200 Hz. Verifica-se, neste cenário, que as divergências já apresentadas na Figura (6.41) estão ainda mais acentuadas, com a presença de *reading peaks* ainda mais relevantes. Tal comportamento evidencia que o método em questão é extremamente sensível a qualquer nível de ruído de medição. Embora os testes modais experimentais não apresentem altos níveis de ruído, verificou-se a presença de pequenos *reading peaks* até mesmo com 1% de ruído branco em simulações que não foram discutidas ao longo do texto.

Figura 6.44 – Comparação direta da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 15% de ruído.

Fonte: Do autor (2021).

A Figura (6.45) apresenta uma ampliação da região de 400 até 800 Hz da Figura (6.44), na qual tem-se a presença dos dois picos já discutidos no cenário anterior, porém neste caso com uma distorção ainda maior devido ao aumento no nível do ruído de 5% para 15%.

Figura 6.45 – Ampliação da região de 400 até 800 Hz da FRF $I_{7,7}$ obtida via FEM e FBSM com 15% de ruído.



Fonte: Do autor (2021).

6.5 Resumo do capítulo

Neste capítulo foram apresentados diversos resultados obtidos via simulação numérica e correlação teórico experimental dos modelos. Via rota teórica o modelo FEM proposto e implementado em MATLAB foi diretamente comparado em termos de frequências naturais com um modelo de placa através do software Altair, HyperWorks 2021. A comparação foi realizada dentro da mesma faixa de frequências (0 a 1000 Hz) e foi avaliado o efeito do aumento da discretização do modelo no software em comparação com o modelo MATLAB de 80 elementos, onde foi possível concluir que os dois modelos retornam praticamente as mesmas frequências naturais para a estrutura de placa. Além disso, os padrões de vibração teóricos foram também comparados, evidenciando correlação entre os modelos.

Via rota experimental, foram obtidas as frequências naturais experimentais da estrutura através das FRFs medidas e, com isso, aplicou-se a técnica de identificação paramétrica a fim de regenerar os polinômios que descrevem as curvas experimentais e obter, por conseguinte, a matriz modal experimental. Foram feitas considerações sobre os pontos de amostragem e a influência dos mesmos na regeneração da curva. Diante da matriz modal experimental, os padrões de vibração experimentais foram regenerados e percebe-se boa correlação com aqueles teóricos

gerados anteriormente. Com relação à atualização de modelo, os algoritmos foram utilizados a fim de realizar ajustes no módulo de elasticidade e amortecimento estrutural e retornaram valores idênticos e fisicamente coerentes. As FRFs atualizadas descreveram com altíssima precisão o teste modal em toda a faixa de frequência considerando todos os 9 modos flexíveis. Ademais, a correlação teórico-experimental dos modos a partir do número *MAC* evidenciou ótimos resultados. No que diz respeito à influência do ruído branco nas FRFs experimentais, os valores retornados pelos três cenários avaliados foram completamente coerentes com àqueles da atualização de referência e o desempenho dos algoritmos foi muito satisfatório, até mesmo para o caso extremo de 30% de ruído. Por fim, realizou-se a aplicação a técnica de subestruturação FBSM, na qual a estrutura de viga foi dividida em duas subestruturas de comprimentos diferentes e o método foi utilizado para obter a resposta da viga acoplada diante das respostas em frequência de cada subestrutura isolada. A partir dos resultados, foi possível constatar perfeita correlação na ausência de ruído branco, o que não acontece nos demais cenários devido ao surgimento dos chamados *reading peaks* que acabam gerando discrepâncias entre a predição pelo modelo FEM e o método FBSM. O próximo capítulo apresenta as conclusões do trabalho.

7 CONCLUSÕES

Via rota teórica, foram propostos dois modelos de elementos finitos para modelar a estrutura de placa, inicialmente com amortecimento nulo. A ideia de comparar os modelos foi uma forma de validação teórica do modelo de *Kirchhoff-Love* proposto e implementado em MATLAB simulando o teste modal com *shaker*. Ao verificar os resultados em termos de frequências naturais e modos de vibrar, percebeu-se que foram extremamente similares, apresentando maior erro relativo de 1.10% no sétimo modo. Via rota experimental, a partir do teste modal utilizando o *shaker* como excitador, foi possível obter as funções de resposta em frequência experimentais da estrutura de placa. Ao analisar todas as FRFs em um mesmo gráfico simultaneamente, foram percebidas algumas discrepâncias de até 2.4 Hz em alguns modos e, com isso, foi constatado o fenômeno de *mass loading* que comumente ocorre em estruturas relativamente leves e defasa algumas ressonâncias. Diante das curvas experimentais, foi possível determinar de forma direta as frequências naturais experimentais da placa no intervalo de 0 até 1000 Hz, contando com a presença de 9 modos de corpo flexível (FBM). Ademais, um fato muito importante e que facilitou a aplicação das técnicas do trabalho foi a geometria retangular da placa, que quebra a simetria da estrutura e evita a presença de modos muito próximos, garantindo ressonâncias bem definidas.

A partir das FRFs experimentais e através da técnica de identificação paramétrica de *Ewins-Gleeson* foi possível obter os polinômios que descrevem o comportamento das curvas experimentais, ou seja, as FRFs regeneradas da estrutura de placa. Essa informação é de grande valia, uma vez que os polinômios são puramente experimentais e representam a dinâmica da placa referente àquele experimento em questão, além de permitir a regeneração dos modos experimentais e correlação teórico-experimental dos mesmos. A partir do polinômio, foi possível obter as contribuições individuais de cada modo para uma dada FRF e determinar a contribuição dos modos em termos de parte real e imaginária.

O procedimento de atualização foi proposto para dois parâmetros: módulo de elasticidade e amortecimento estrutural histerético. Foram utilizados dois algoritmos de atualização muito robustos e efetivos para lidar com o problema e a função objetivo foi definida a partir da soma das diferenças entre os vetores de FRFs que posteriormente é dividida pela amplitude da FRF experimental na mesma frequência. No procedimento, foram atualizadas 20 FRFs simultaneamente na faixa de 0 até 1000 Hz e dos 9 modos contemplados, 8 foram otimizados em termos de frequência natural e todos apresentaram amplitudes reduzidas pelo amortecimento

identificado. Com relação aos parâmetros identificados, ambos os algoritmos retornaram os mesmos valores em 45 iterações, que foram fisicamente coerentes e esperados para estruturas metálicas de alumínio. Já se tratando sobre o desempenho dos algoritmos, percebeu-se que embora tenham retornado os mesmos valores, o BA apresentou em todos os casos convergência mais rápida e contínua quando comparado ao DEA, que por sua vez converge em saltos. Em contrapartida, o custo computacional apresentado pelo BA é muito superior àquele do DEA para uma mesma máquina. Apesar das diferenças, ambos apresentaram desempenho excelente e se provaram mais uma vez aptos a lidar com problemas de otimização estrutural.

No que diz respeito à técnica de subestruturação, a estrutura original de viga foi particionada em duas subestruturas distintas que foram o foco principal do estudo. A partir das FRFs dos subsistemas, aplicou-se o método FBSM e a matriz de FRFs completa da viga acoplada foi obtida. No primeiro cenário, nenhum nível de ruído foi considerado nas FRFs translacionais e os resultados constataram perfeita correlação entre a predição pelo modelo FEM e a técnica FBSM para todo o intervalo de frequência analisado. Entretanto, para os demais casos, diferentes níveis de ruído foram considerados somente nas FRFs translacionais para simular um procedimento experimental. Diante disso, verificou-se que o método em questão é extremamente sensível à presença de ruídos, uma vez que surgem discrepâncias denominadas *reading peaks*, que são modos individuais das subestruturas isoladas que não compõem a resposta da estrutura acoplada.

De maneira geral, o estudo teórico-experimental da estrutura de placa utilizando técnicas avançadas de otimização foi bem sucedido, uma vez que os procedimentos de atualização aplicados retornaram resultados fidedignos com a literatura. Além disso, a aplicação da técnica de subestruturação via rota teórica na estrutura de viga destacou pontos importantes que podem facilitar a aplicação do método via rota experimental, principalmente com relação à interpretação dos resultados.

Como trabalhos futuros, sugere-se a utilização do modelo FEM atualizado em análises mais profundas com investigação, implementação e validação de técnicas de subestruturação e modificação estrutural via rota experimental, uma vez que são análises muito importantes e necessárias em diversas aplicações de engenharia.

REFERÊNCIAS

- ABDULLAH, N. et al. A review on model updating in structural dynamics. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 100, p. 012015, 12 2015.
- ALLEMANG, R.; CLERCK, J. D.; WICKS, A. **Special Topics in Structural Dynamics**. [S.l.]: Springer, New York, NY, 2013.
- ATALLA, M. J.; INMAN, D. J. On model updating using neural networks. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 12, n. 1, p. 135–161, 1998.
- AVITABILE, P. **Modal Testing: A Practitioner's Guide**. [S.l.]: Wiley, 2017. ISBN 9781119222958.
- AVITABILE, P.; O'CALLAHAN, J. Frequency response function expansion for unmeasured translation and rotation dofs for impedance modelling applications. **Mechanical Systems and Signal Processing - MECH SYST SIGNAL PROCESS**, v. 17, p. 723–745, 07 2003.
- BITTENCOURT, M. **Análise Computacional De Estruturas: COM APLICAÇÃO DO METODO DE ELEMENTOS FINITOS**. [S.l.]: UNICAMP, 2010. ISBN 9788526809116.
- BONABEAU, E.; DORIGO, M.; THERAULAZ, G. **Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems**. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. (Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity). ISBN 9780198030157.
- BRANDT, A.; SINGHAL, R. **Shock & Vibration, Aircraft/Aerospace, Energy Harvesting, Acoustics & Optics, Volume 9: Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2016**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. (Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series). ISBN 9783319300870.
- CALLISTER, W.; RETHWISCH, D. **Fundamentals of Materials Science and Engineering: An Integrated Approach, 5th Edition**. [S.l.]: Wiley, 2016. ISBN 9781119127666.
- CASCIATI, S. Stiffness identification and damage localization via differential evolution algorithms. **STRUCTURAL CONTROL AND HEALTH MONITORING**, p. 436–449, 01 2008.
- CAVALINI, A. et al. Model updating of a rotating machine using the self-adaptive differential evolution algorithm. **Inverse Problems in Science and Engineering**, v. 24, 06 2015.
- COOK, R. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. [S.l.]: Wiley, 2001. ISBN 9780471212072.
- CRAIG, R.; KURDILA, A. **Fundamentals of Structural Dynamics**. [S.l.]: Wiley, 2011. ISBN 9781118174449.
- D'AMBROGIO, W.; SESTIERI, A. A unified approach to substructuring and structural modification problems. **Shock and Vibration**, v. 11, p. 295–309, 01 2004.
- DAS, S.; ABRAHAM, A.; KONAR, A. **Metaheuristic Clustering**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. (Studies in Computational Intelligence). ISBN 9783540921721.

- EWINS, D. **Modal testing: theory, practice, and application**. [S.l.]: Research Studies Press, 2000. (Mechanical engineering research studies: Engineering dynamics series). ISBN 9780863802188.
- EWINS, D.; GLEESON, P. A method for modal identification of lightly damped structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 84, n. 1, p. 57–79, 1982. ISSN 0022-460X.
- EWINS, D. J.; GLEESON, P. T. A method for modal identification of lightly damped structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 84, n. 1, p. 57–79, 1982.
- FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE/Análise Dinâmica**. [S.l.]: Ed. Érica, 2005. ISBN 9788536500508.
- FRISWELL, M.; MOTTERSHEAD, J. **Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2013. (Solid Mechanics and Its Applications). ISBN 9789401585088.
- FRISWELL, M. et al. **Dynamics of Rotating Machines**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- FU, Z.; HE, J. **Modal Analysis**. [S.l.]: Elsevier Science, 2001. ISBN 9780080511788.
- GEVINSKI, J. R. **Dynamic strain determination on surface using vibrational parameters**. Tese (Doutorado) — University of Campinas, 2014.
- GRECO, R.; VANZI, I. New few parameters differential evolution algorithm with application to structural identification. **Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)**, v. 6, n. 1, p. 1–14, 2019. ISSN 2095-7564.
- HO-HUU, V. et al. Optimal design of truss structures with frequency constraints using improved differential evolution algorithm based on an adaptive mutation scheme. **Automation in Construction**, v. 68, p. 81–94, 05 2016.
- IMREGUN, M.; VISSER, W. J.; EWINS, D. J. Finite element model updating using frequency response function data - theory and initial investigation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 9, n. 2, p. 187–202, 1995.
- KLERK, D.; RIXEN, D.; VOORMEEREN, S. General framework for dynamic substructuring: History, review, and classification of techniques. **AIAA Journal**, v. 46, p. 1169–1181, 05 2008.
- KOH, C.; CHEN, Y.; LIAW, C.-Y. A hybrid computational strategy for identification of structural parameters. **Computers and Structures**, v. 81, n. 2, p. 107–117, 2003. ISSN 0045-7949.
- LACERDA, M. et al. A systematic literature review on general parameter control for evolutionary and swarm-based algorithms. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 60, 09 2020.
- LIAO, X. H. et al. Response prediction and dynamic substructuring for coupled structures in the frequency domain. **Journal of Mechanics**, Cambridge University Press, v. 36, n. 6, p. 867–879, 2020.
- LIN, R. M.; ZHU, J. Model updating of damped structures using frf data. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, p. 2200–2218, 2006.

LOBATO, F. S. **Otimização multi-objetivo para o projeto de sistemas de engenharia**. Tese (Doutorado) — UFU, 2008.

LOGAN, D. **A First Course in the Finite Element Method**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. ISBN 9781305635111.

MAIA, N. **Extraction of Valid Modal Properties from Measured Data in Structural Vibrations**. [S.l.]: University of London, 1988.

MAIA, N.; SILVA, J. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. [S.l.]: Research Studies Press, 1997. ISBN 9780863802089.

MARTIN, L. B. **Controle de vigas flexíveis em balanço**. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2016.

MARTINS, Y.; SILVEIRA, H. Differential evolution method applied in parameter identification and model updating of flexible plate fem model. **Proceedings of 26th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM**, p. 1–10, 2021.

MARWALA, T. **Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques: Applications to Structural Dynamics**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 978-1-84996-322-0.

MIRZA, W. et al. Frequency based substructuring method for the investigation of the dynamic behaviour of a beam structure. **Journal of Mechanical Engineering**, p. 142–154, 10 2017.

MORADI, S.; ALIMOURI, P.; CHINIPARDAZ, R. Updating finite element model using stochastic subspace identification method and bees optimization algorithm. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 2, 2018.

MORADI, S.; FATAHI, L.; RAZI, P. Finite element model updating using bees algorithm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, p. 283–291, 08 2010.

NICGORSKI, D.; AVITABILE, P. Experimental issues related to frequency response function measurements for frequency-based substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24, n. 5, p. 1324–1337, 07 2010.

NORTON, R. **Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. [S.l.]: Bookman, 2004. ISBN 9788536302737.

PAGNACCO, E. et al. Frequency based substructuring without r-dof measurements: A two-beam test case. **Proceedings of 20th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM**, p. 1–10, 2009.

PRANDHAN, S.; MODAK, S. V. A review of damping matrix identification methods in structural dynamics. **Proceedings of the ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress & Exposition**, p. 1–15, 2012.

PáSTOR, M.; BINDA, M.; HARČARIK, T. Modal assurance criterion. **Procedia Engineering**, v. 48, p. 543–548, 12 2012.

RAO, S. **The Finite Element Method in Engineering**. [S.l.]: Elsevier Science, 2011. ISBN 9780080470504.

REDDY, J. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2006. (Series in Systems and Control). ISBN 9780849384158.

REN, Y.; BEARDS, C. On substructure synthesis with frf data. **Journal of Sound and Vibration**, v. 185, n. 5, p. 845–866, 1995. ISSN 0022-460X.

SANCHES, F. D. **Identificação simultânea de desbalanceamento e empeno de eixo em rotores através de análise de correlações**. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2015.

SANTOS, V.; SILVEIRA, H. Model updating de modelo de elementos finitos e identificacao de parametros modais experimentais pelo metodo de ewins-gleeson. **Universidade Federal de Lavras**, 2020.

SAVOIA, M.; VINCENZI, L. Differential evolution algorithm for dynamic structural identification. **Journal of Earthquake Engineering**, v. 12, p. 800–821, 06 2008.

SEYEDPOOR, S.; SHAHBANDEH, S.; YAZDANPANA, O. An efficient method for structural damage detection using a differential evolution algorithm based optimization approach. **Civil Engineering and Environmental Systems**, 06 2015.

SHAMES, I.; DYM, C. **Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**. [S.l.]: New Age International Publishers Limited, 1995. ISBN 9788122407495.

SILVA, T.; PEREIRA, J. Coupling of structures using frequency response functions. **MATEC Web of Conferences**, v. 211, 01 2018.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 23, 01 1995.

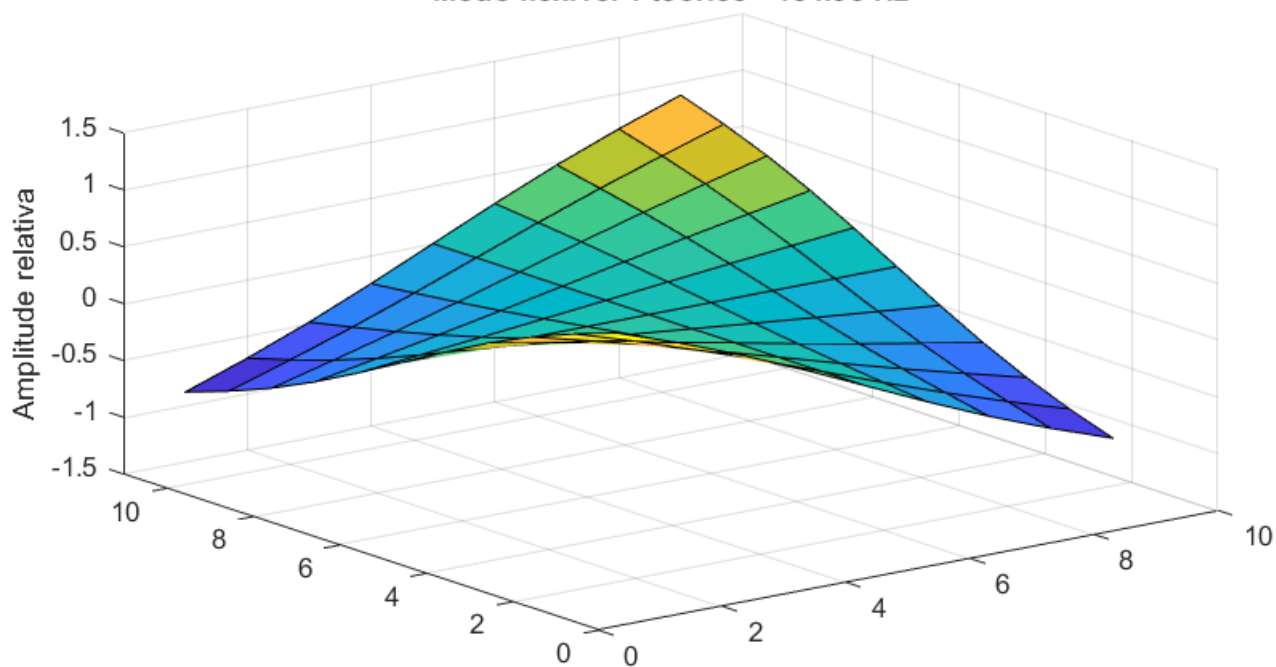
TANG, H.-S.; XUE, S.; FAN, C. Differential evolution strategy for structural system identification. **Computers and Structures**, v. 86, p. 2004–2012, 11 2008.

ZAHARIE, D. Differential evolution: From theoretical analysis to practical insights. **Mendel**, p. 126–131, 01 2012.

ZAHEDI, R. K.; ALIMOURI, P. Finite element model updating of a large structure using multi-setup stochastic subspace identification method and bees optimization algorithm. **Frontiers of Structural and Civil Engineering**, Front. Struct. Civ. Eng., v. 13, n. 4, p. 965, 2019.

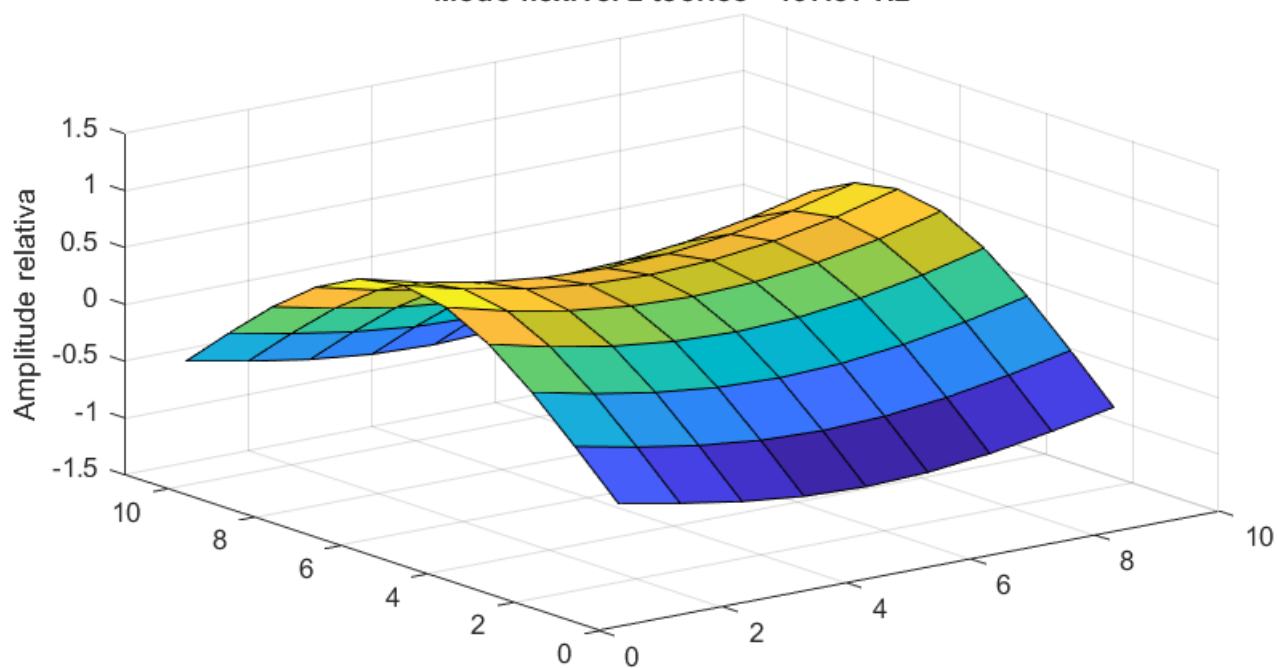
APÊNDICE A – Modos de vibrar teóricos da estrutura de placa

Figura 1 – Modo flexível 1 teórico.

Modo flexível 1 teórico - 154.95 Hz

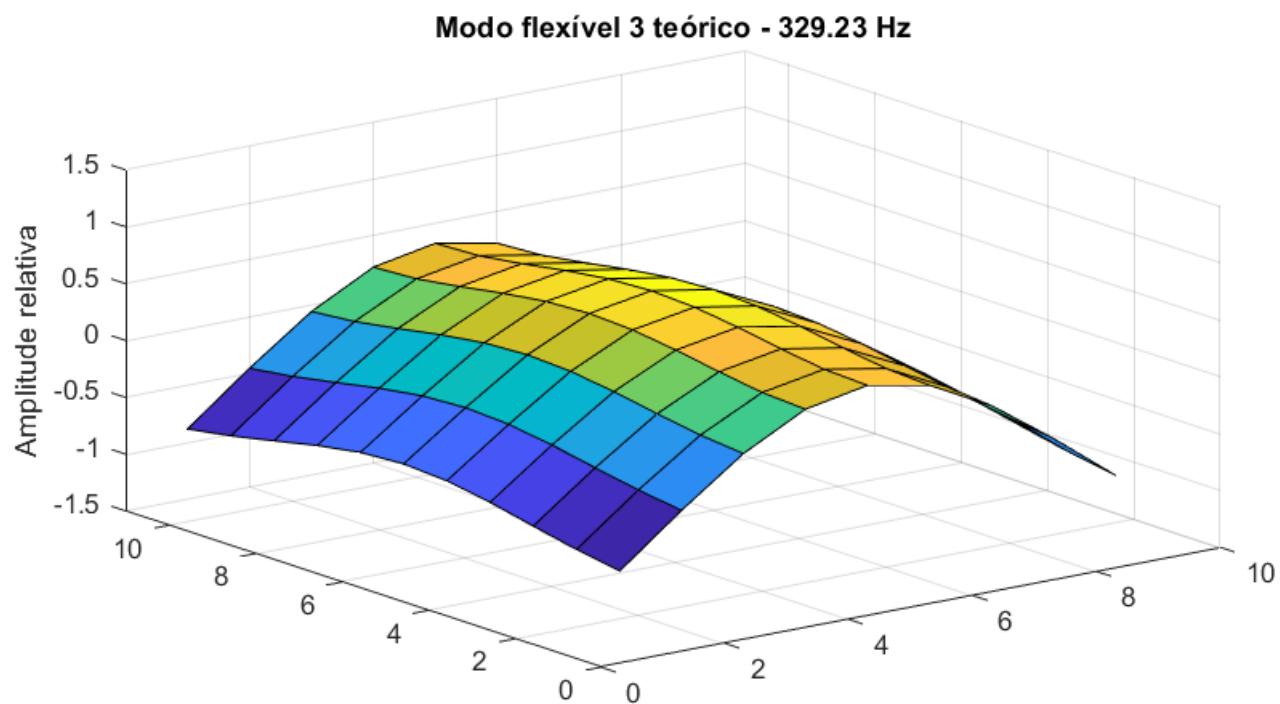
Fonte: Do autor (2021).

Figura 2 – Modo flexível 2 teórico.

Modo flexível 2 teórico - 197.57 Hz

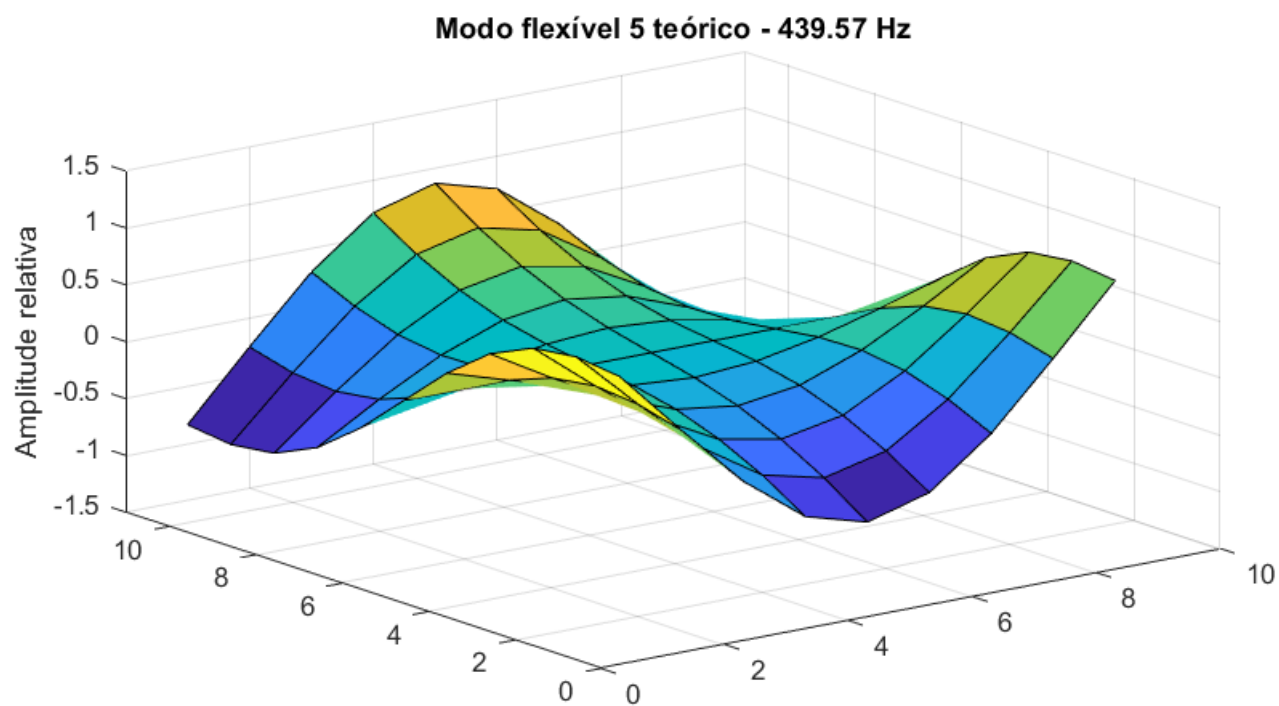
Fonte: Do autor (2021).

Figura 3 – Modo flexível 3 teórico.



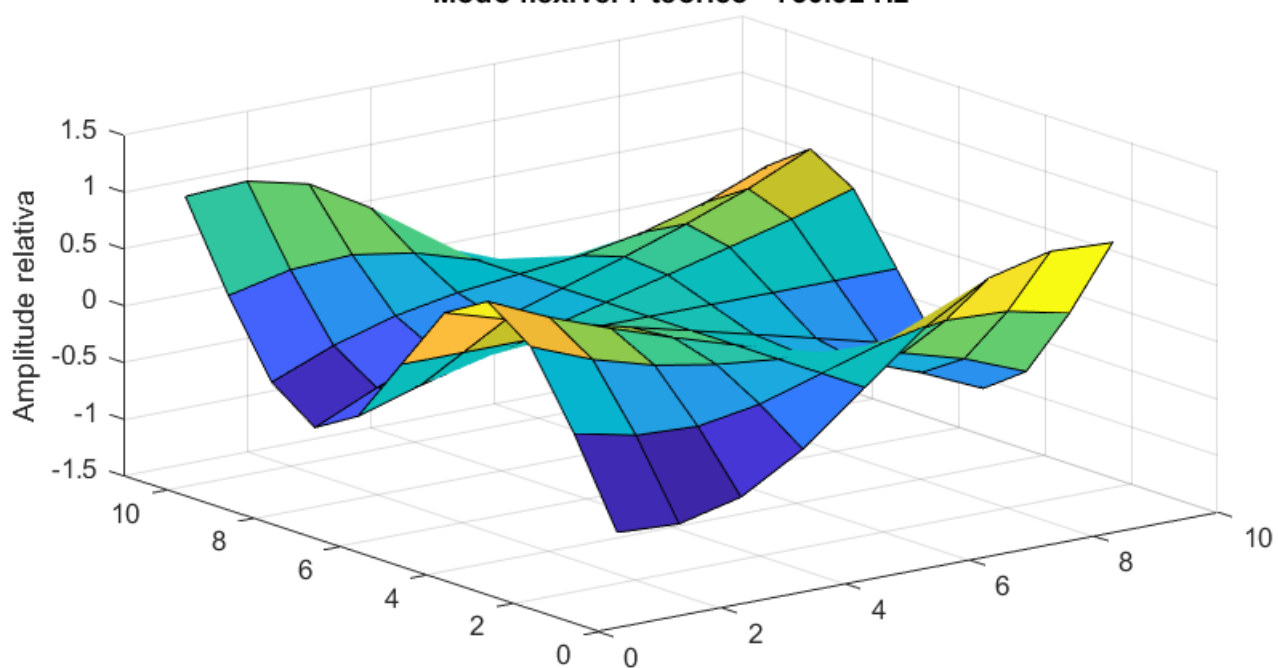
Fonte: Do autor (2021).

Figura 4 – Modo flexível 5 teórico.



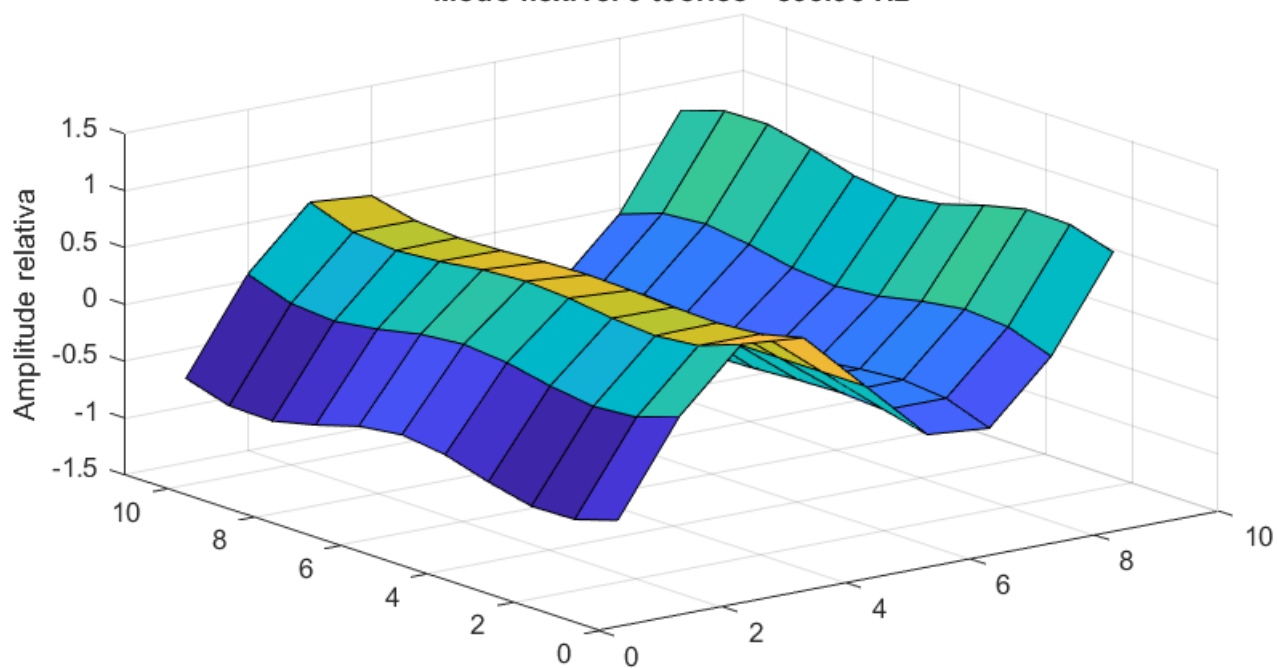
Fonte: Do autor (2021).

Figura 5 – Modo flexível 7 teórico.

Modo flexível 7 teórico - 730.32 Hz

Fonte: Do autor (2021).

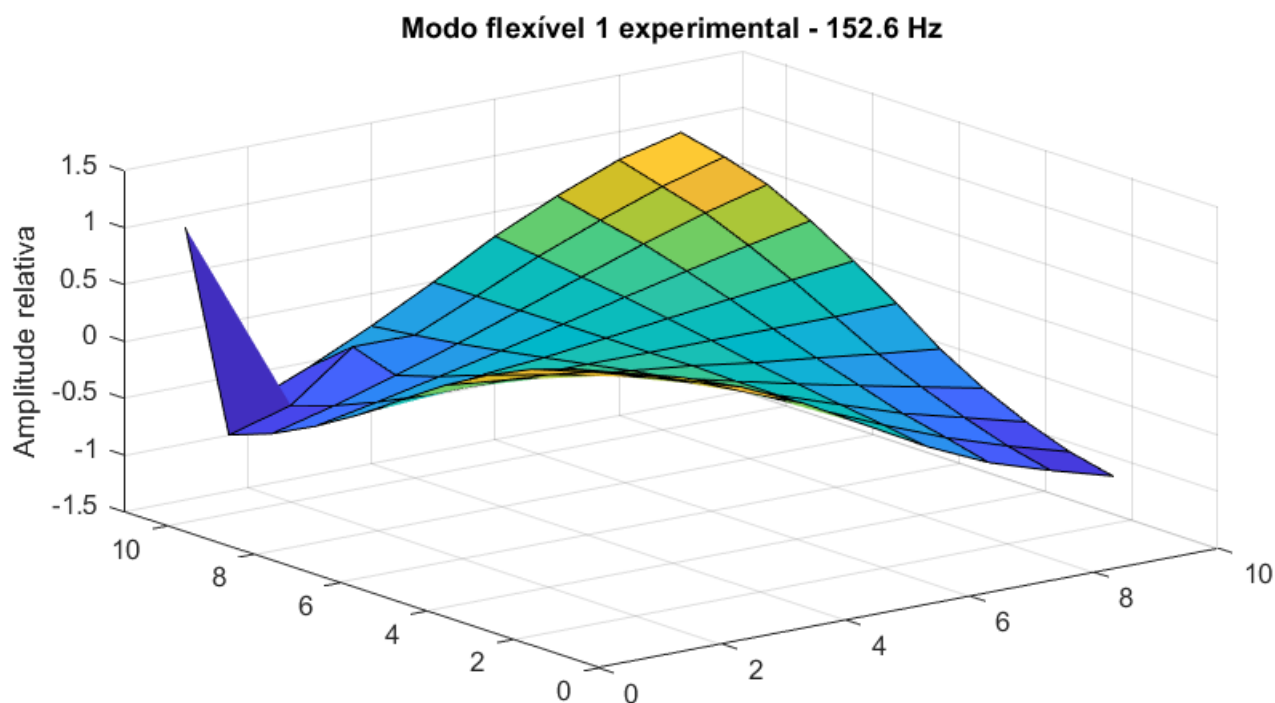
Figura 6 – Modo flexível 9 teórico.

Modo flexível 9 teórico - 895.98 Hz

Fonte: Do autor (2021).

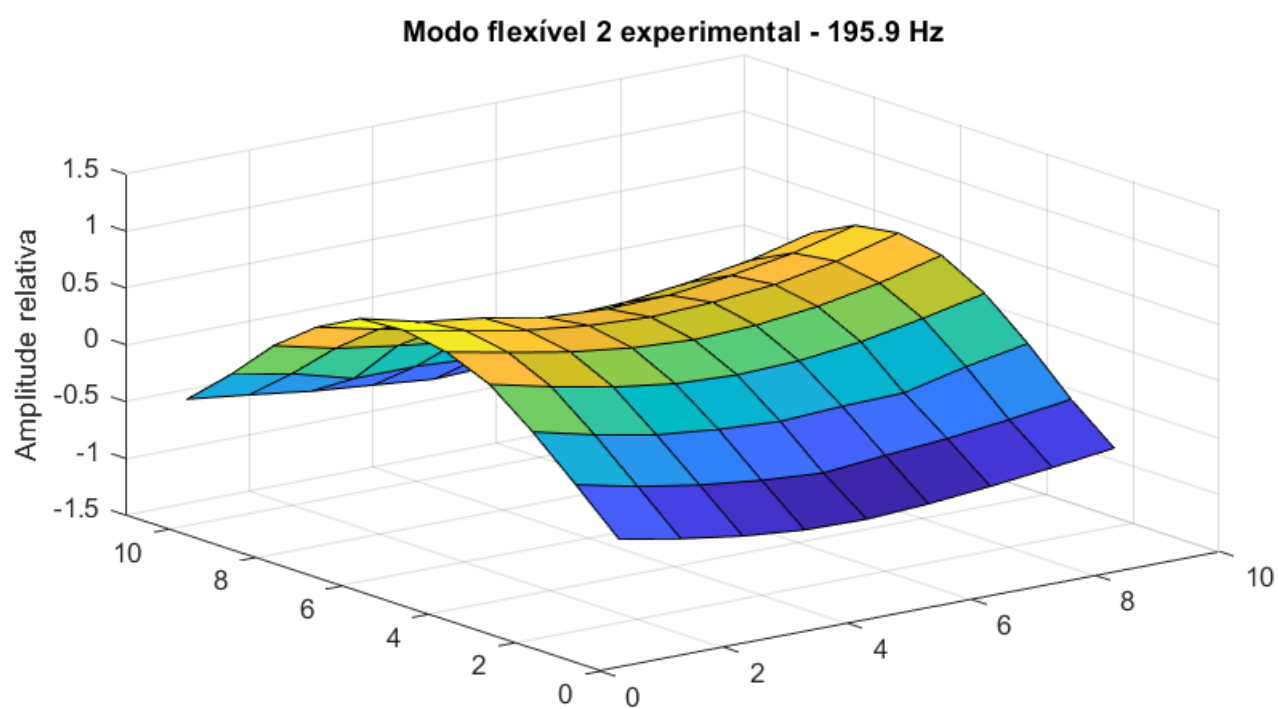
APÊNDICE B – Modos de vibrar experimentais da estrutura de placa

Figura 7 – Modo flexível 1 experimental.



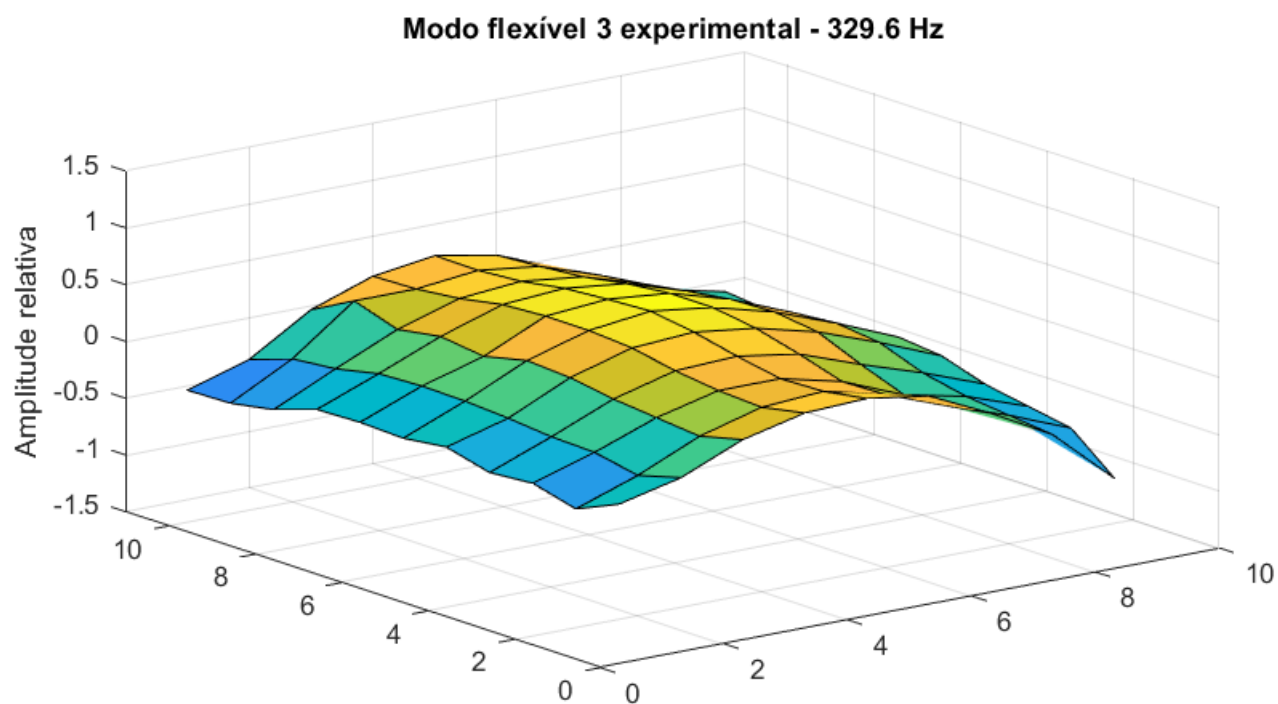
Fonte: Do autor (2021).

Figura 8 – Modo flexível 2 experimental.



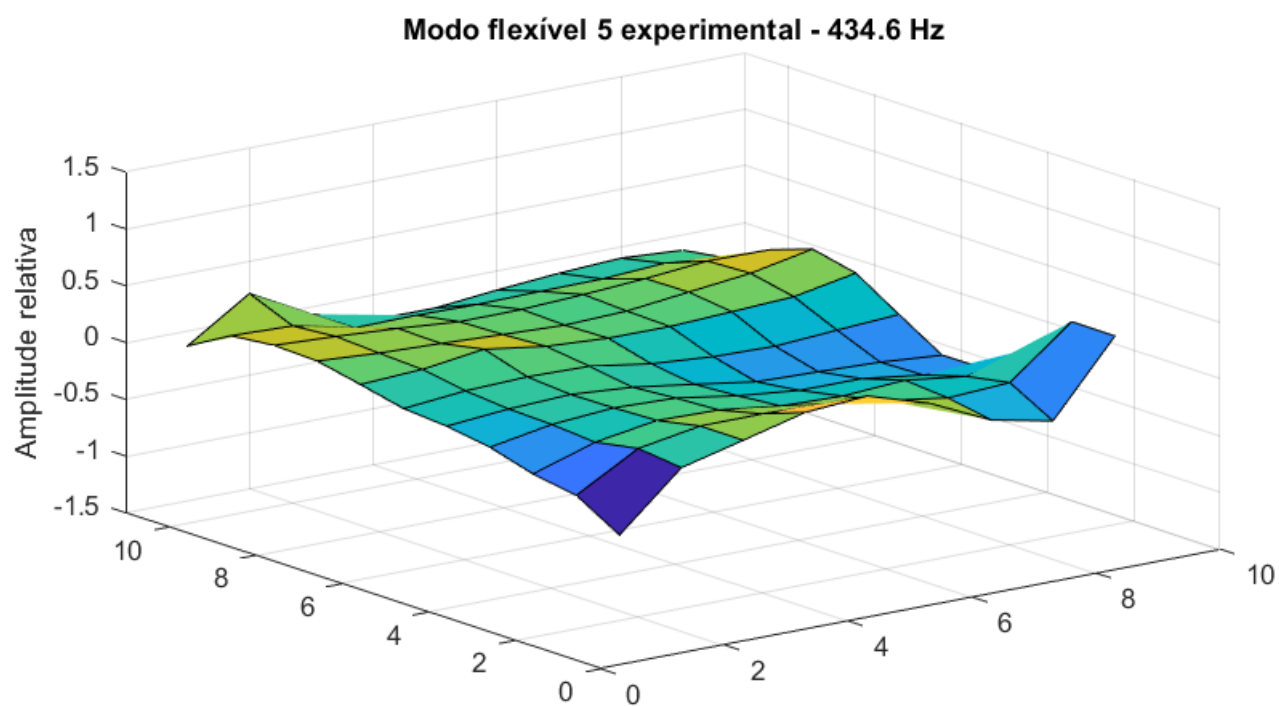
Fonte: Do autor (2021).

Figura 9 – Modo flexível 3 experimental.



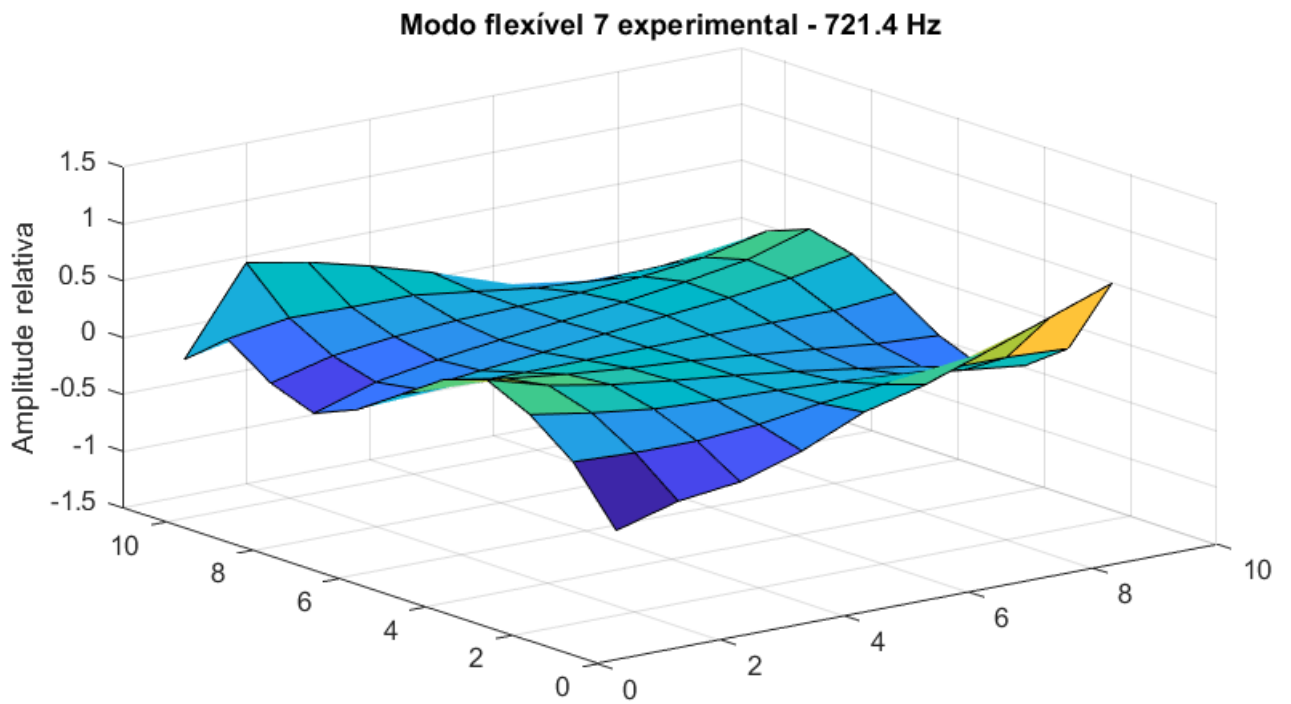
Fonte: Do autor (2021).

Figura 10 – Modo flexível 5 experimental.



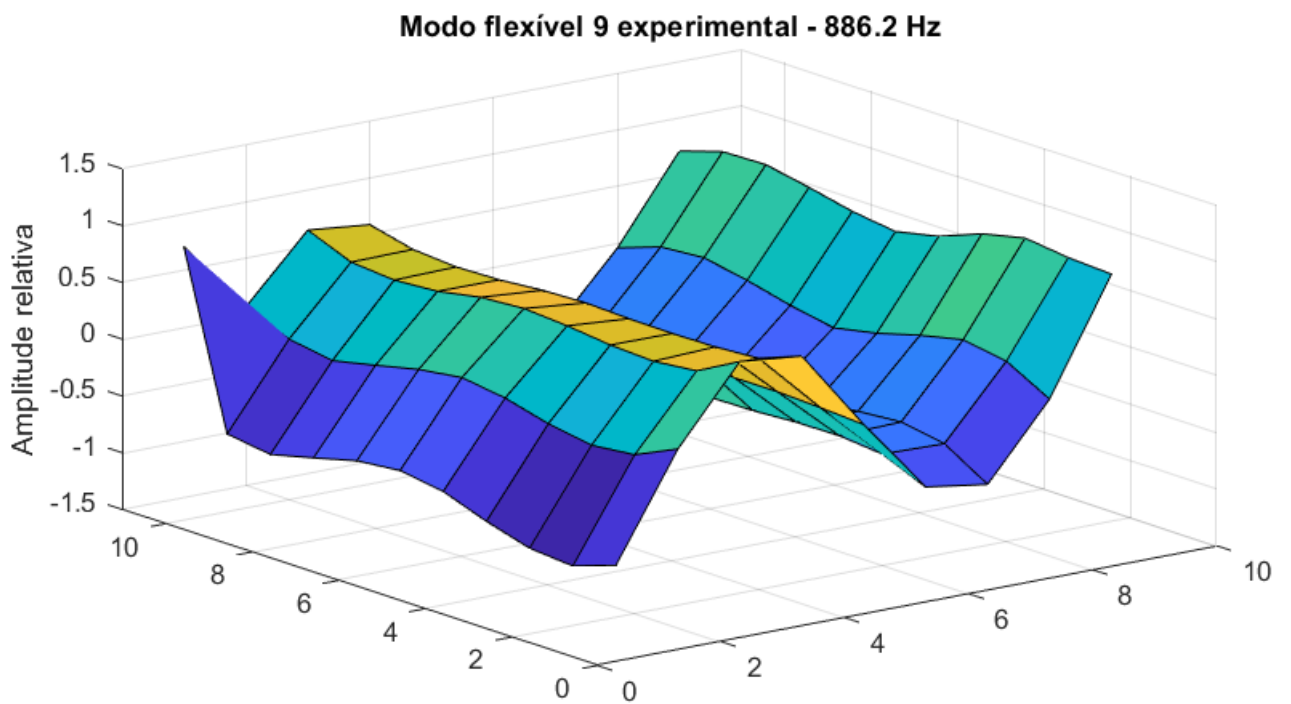
Fonte: Do autor (2021).

Figura 11 – Modo flexível 7 experimental.



Fonte: Do autor (2021).

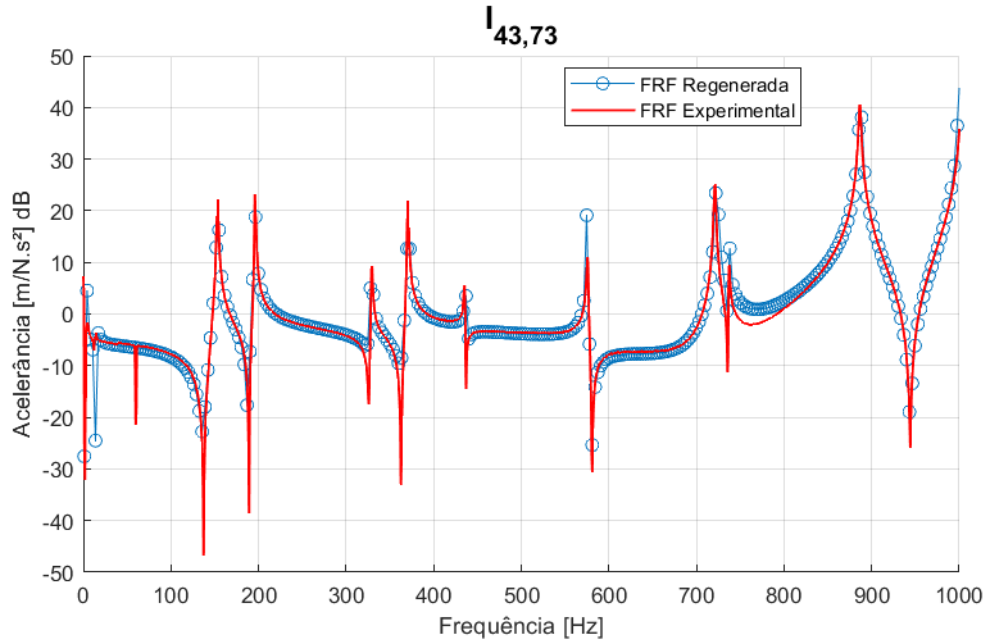
Figura 12 – Modo flexível 9 experimental.



Fonte: Do autor (2021).

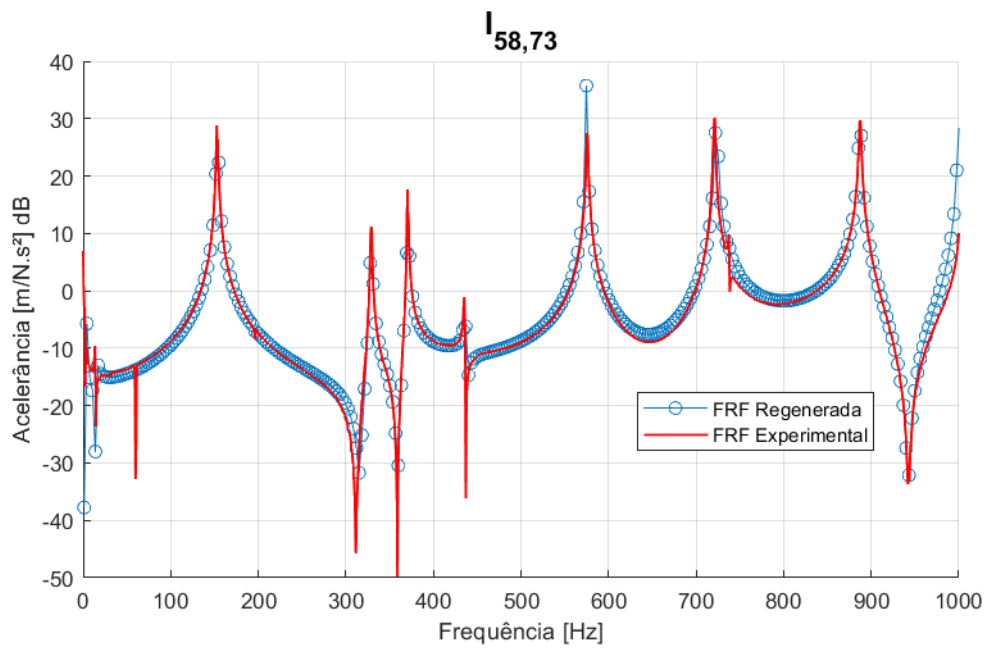
APÊNDICE C – FRFs experimentais e regeneradas da estrutura de placa

Figura 13 – FRF experimental e regenerada $I_{43,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 14 – FRF experimental e regenerada $I_{58,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 15 – FRF experimental e regenerada $I_{61,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

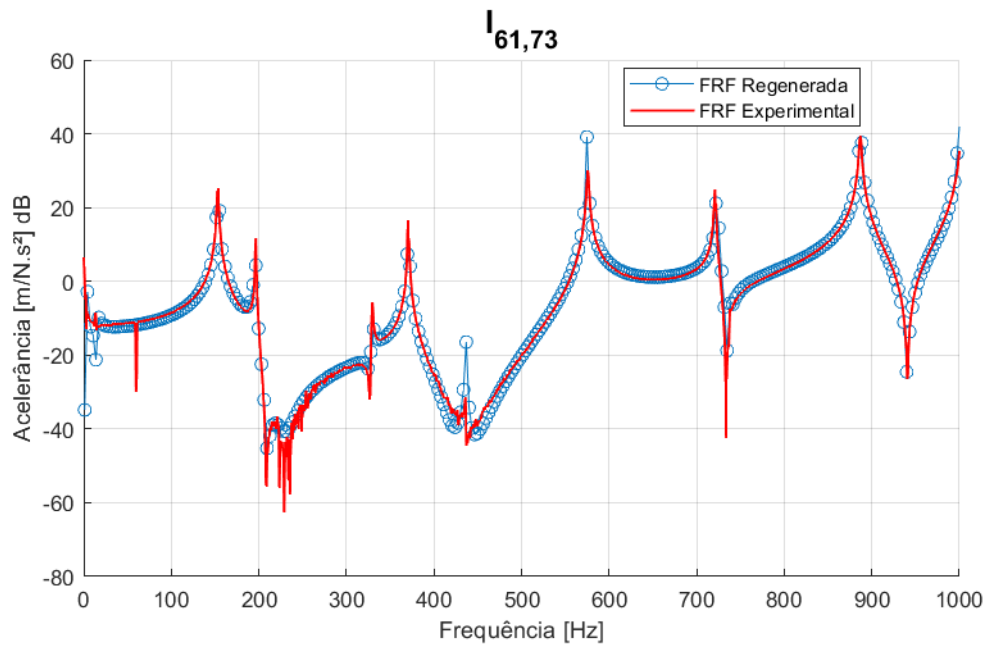


Figura 16 – FRF experimental e regenerada $I_{79,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

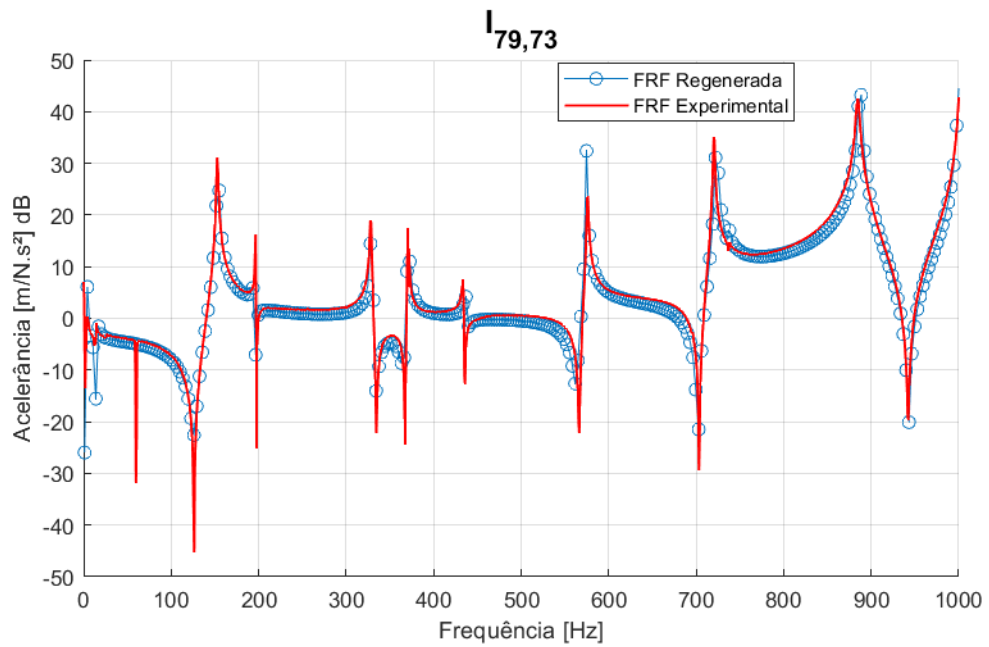
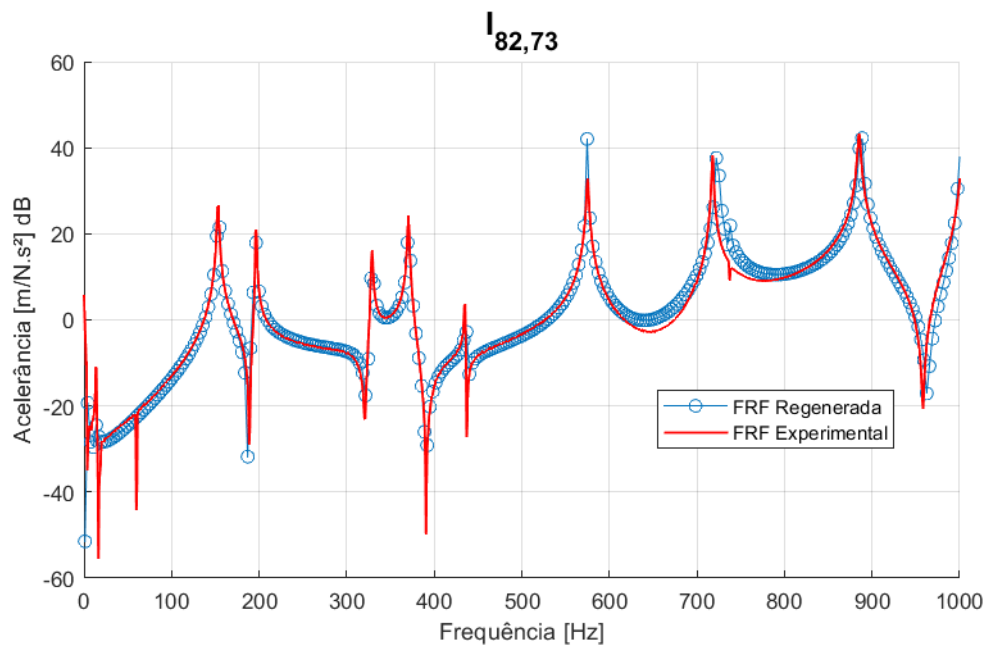
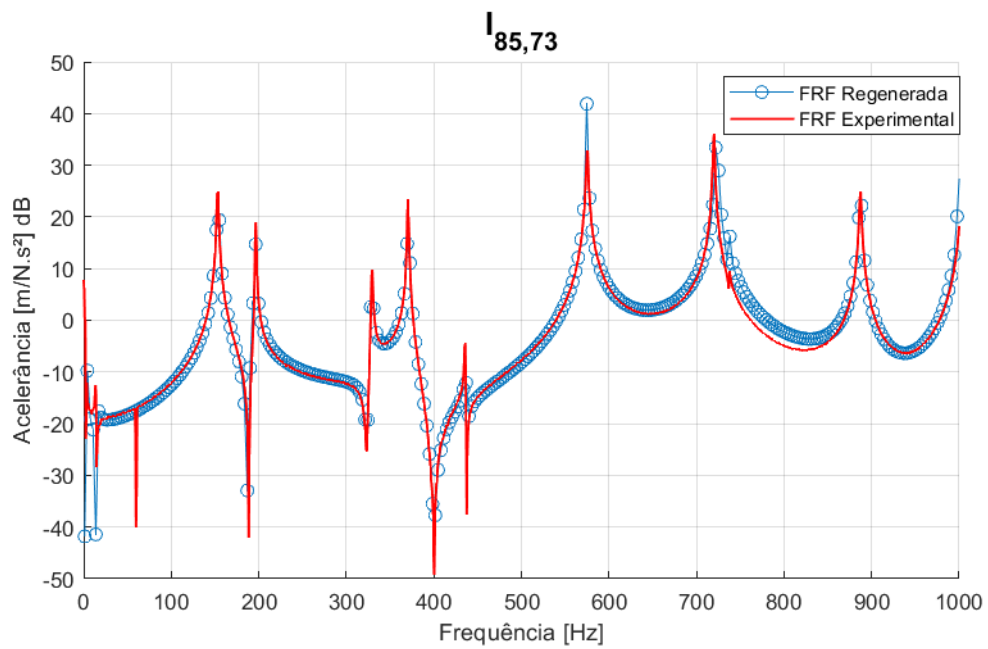


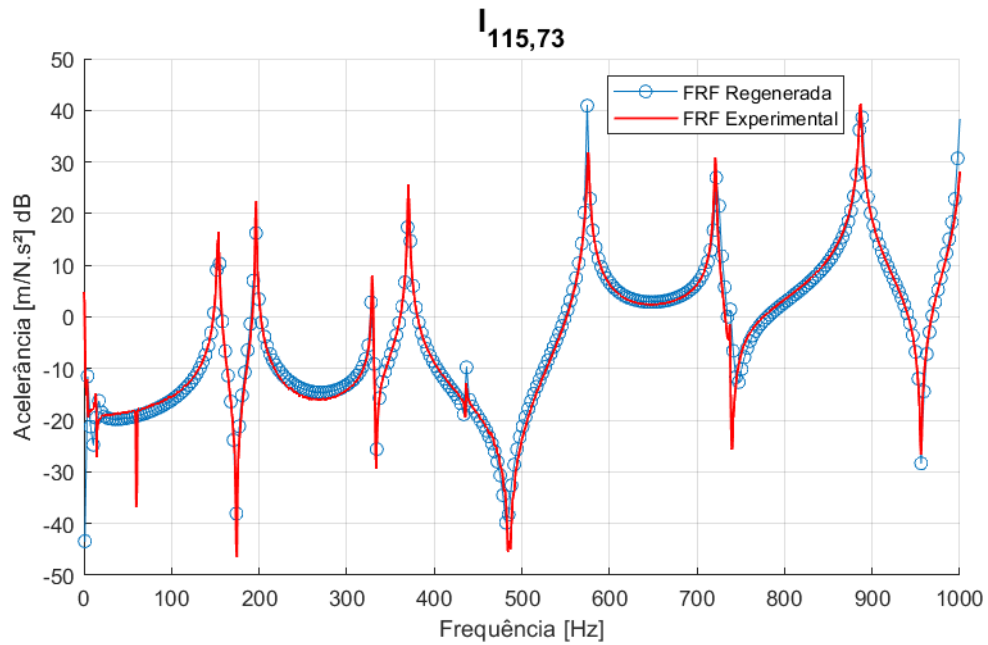
Figura 17 – FRF experimental e regenerada $I_{82,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

Fonte: Do autor (2021).

Figura 18 – FRF experimental e regenerada $I_{85,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

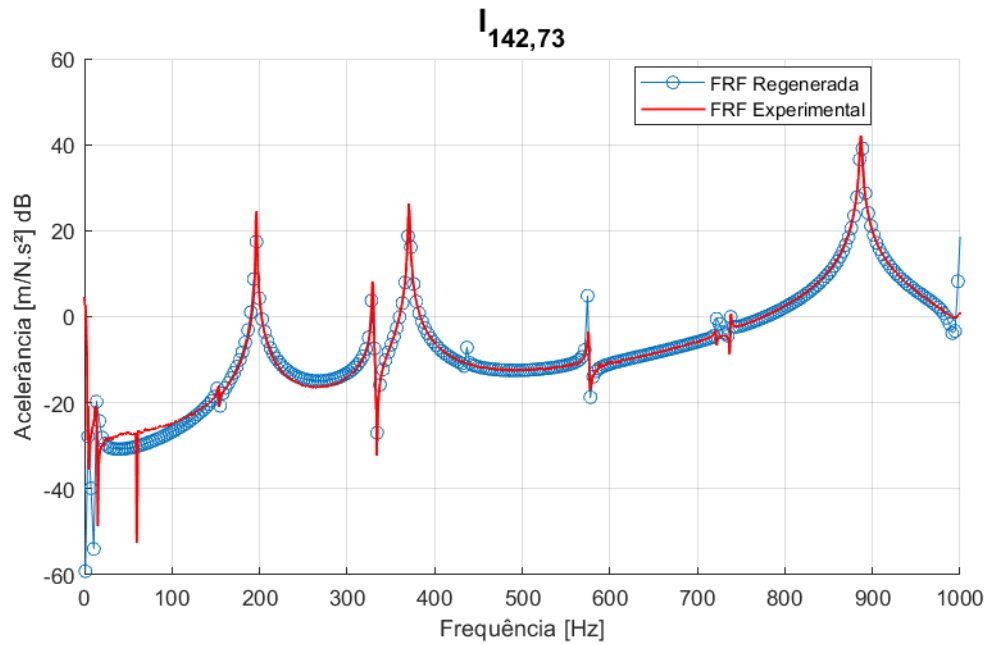
Fonte: Do autor (2021).

Figura 19 – FRF experimental e regenerada $I_{115,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.



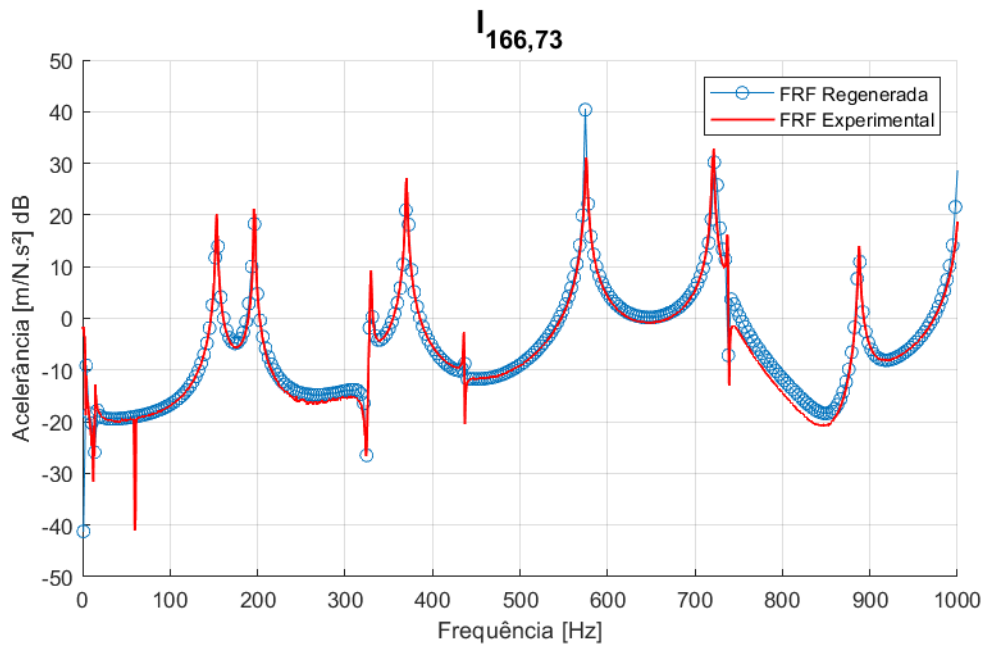
Fonte: Do autor (2021).

Figura 20 – FRF experimental e regenerada $I_{142,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.



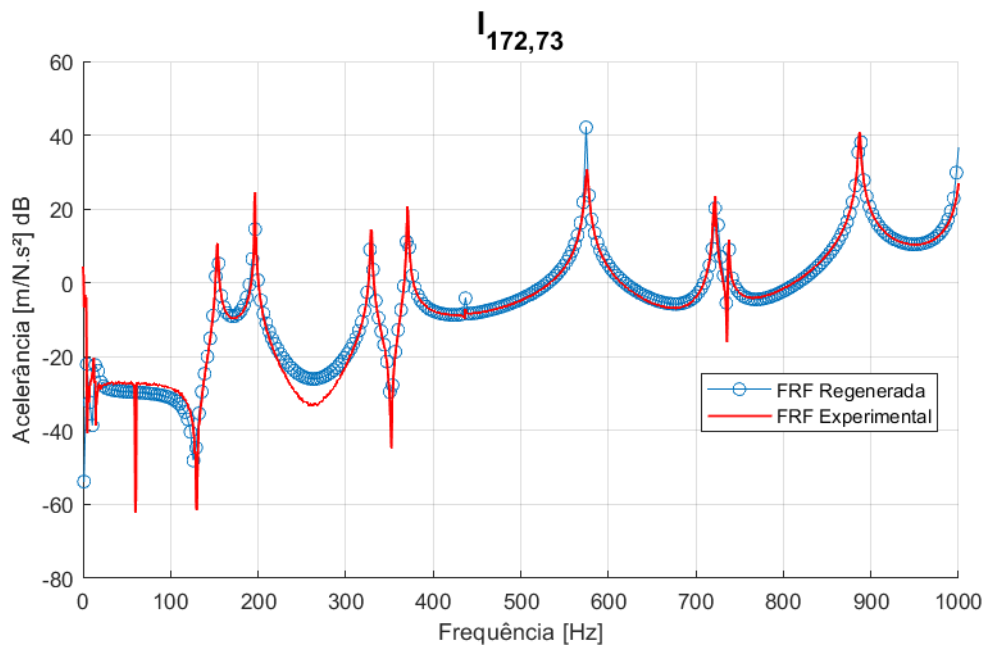
Fonte: Do autor (2021).

Figura 21 – FRF experimental e regenerada $I_{166,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

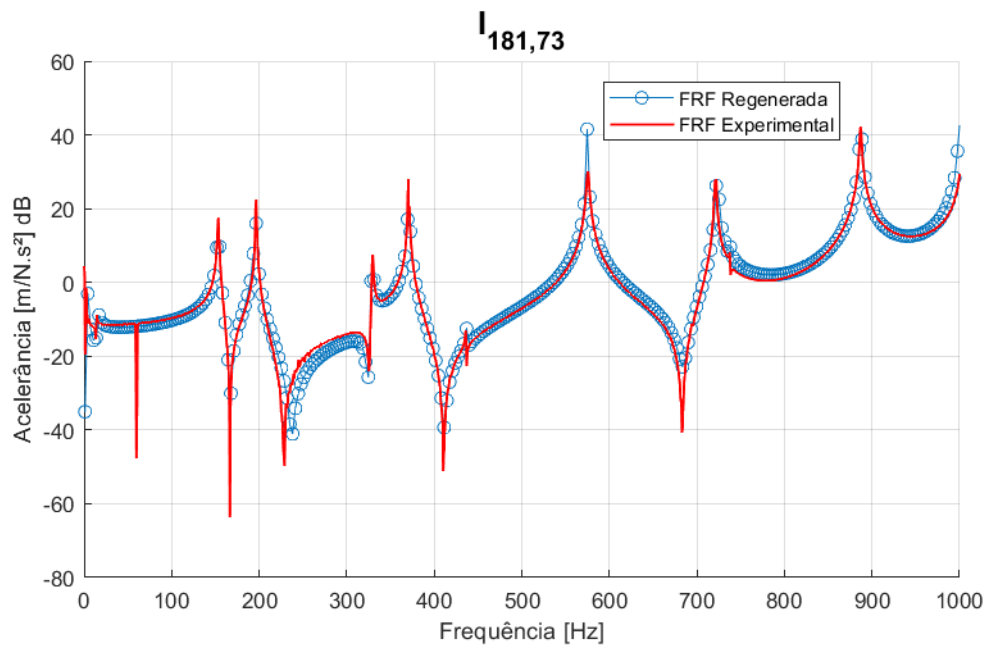


Fonte: Do autor (2021).

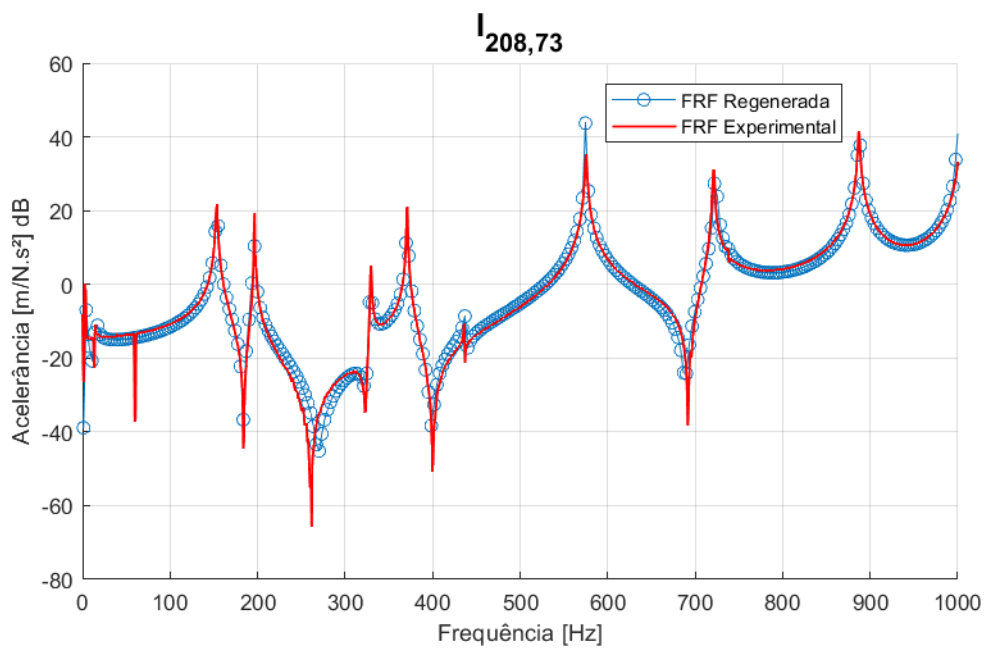
Figura 22 – FRF experimental e regenerada $I_{172,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.



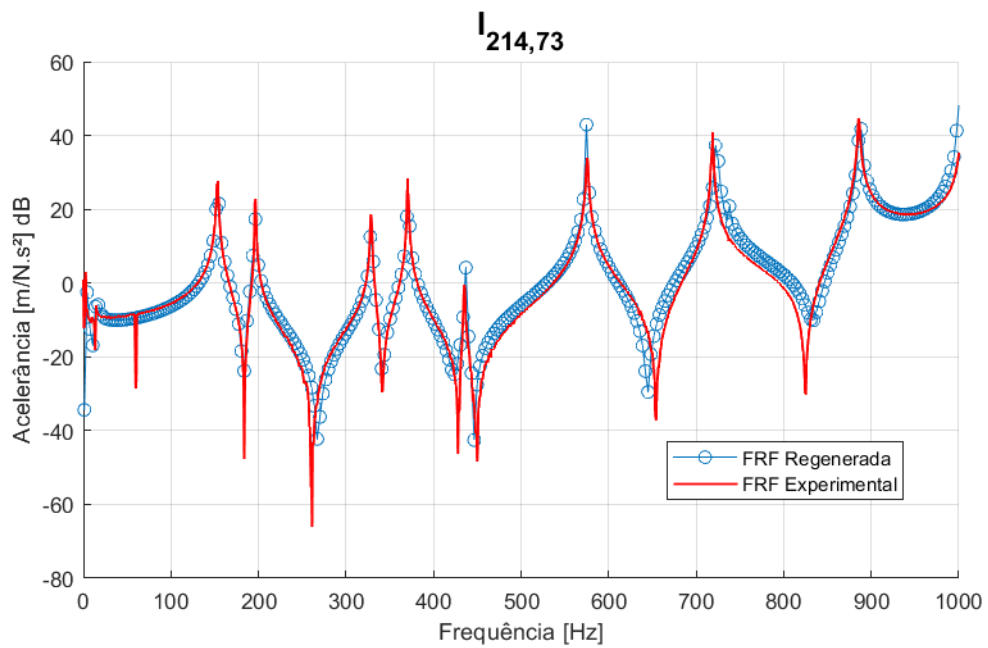
Fonte: Do autor (2021).

Figura 23 – FRF experimental e regenerada $I_{181,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

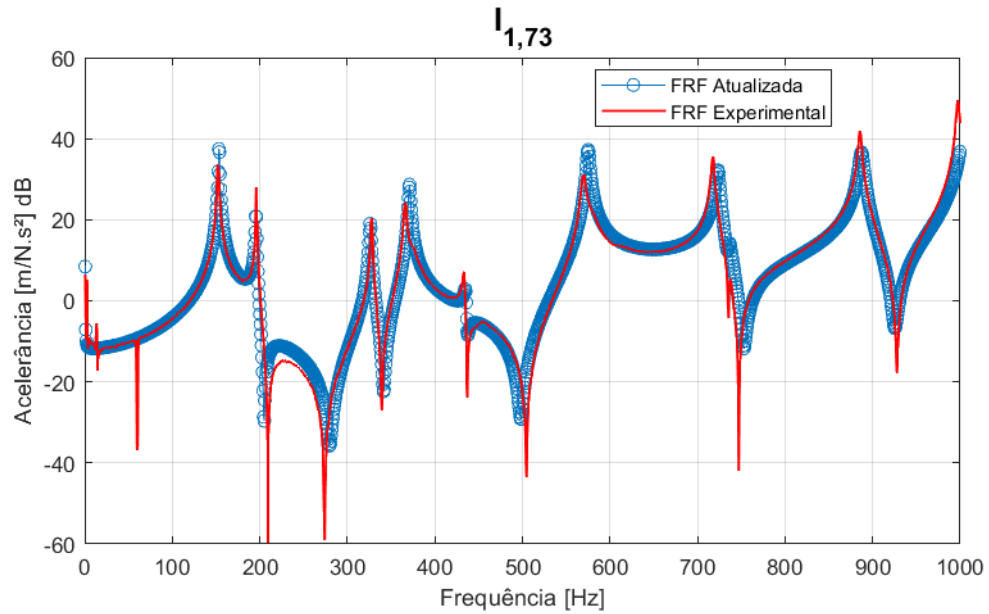
Fonte: Do autor (2021).

Figura 24 – FRF experimental e regenerada $I_{208,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

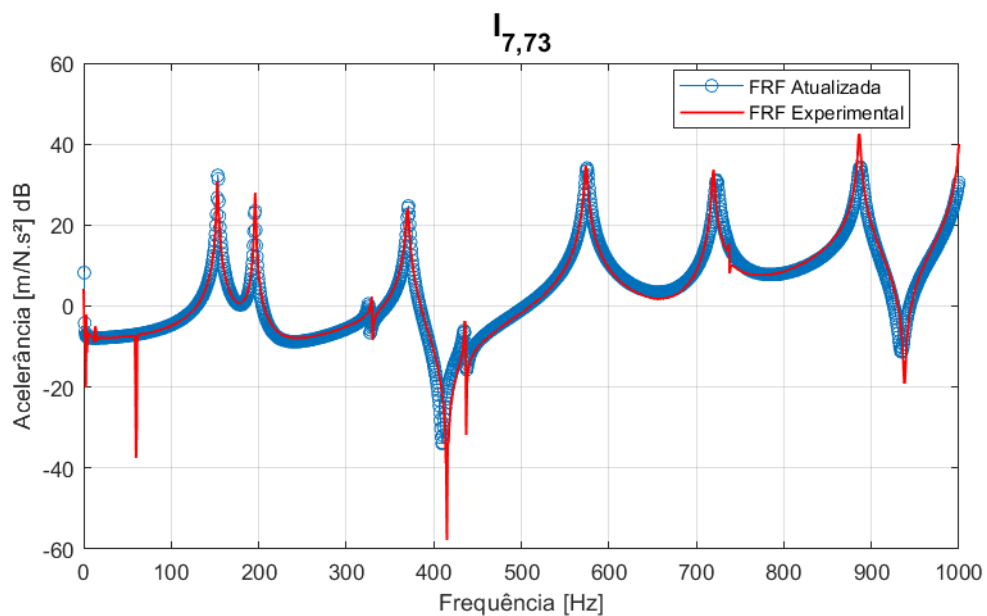
Fonte: Do autor (2021).

Figura 25 – FRF experimental e regenerada $I_{214,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

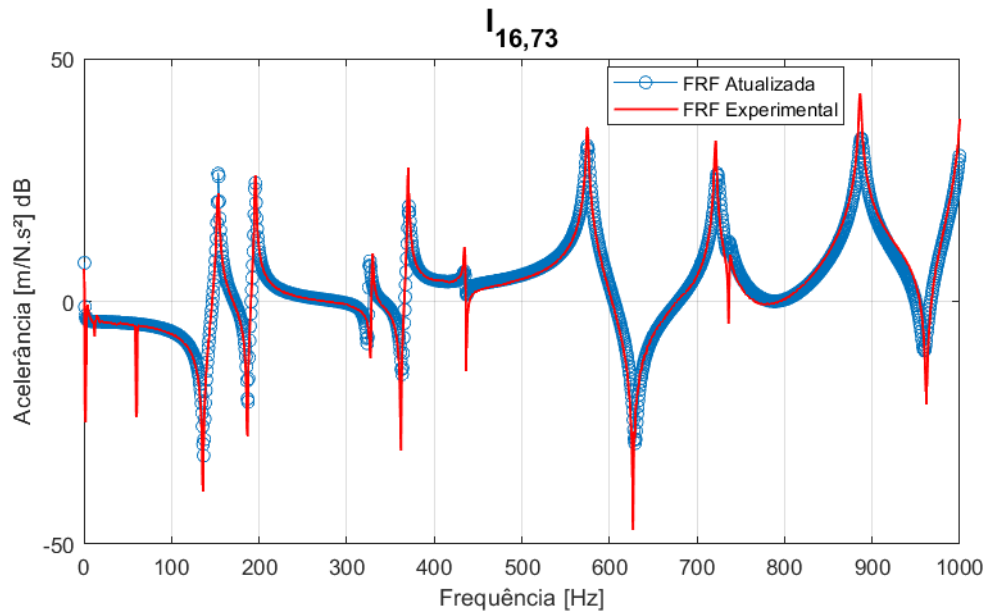
Fonte: Do autor (2021).

APÊNDICE D – FRFs experimentais e atualizadas da estrutura de placaFigura 26 – FRF experimental e atualizada $I_{1,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

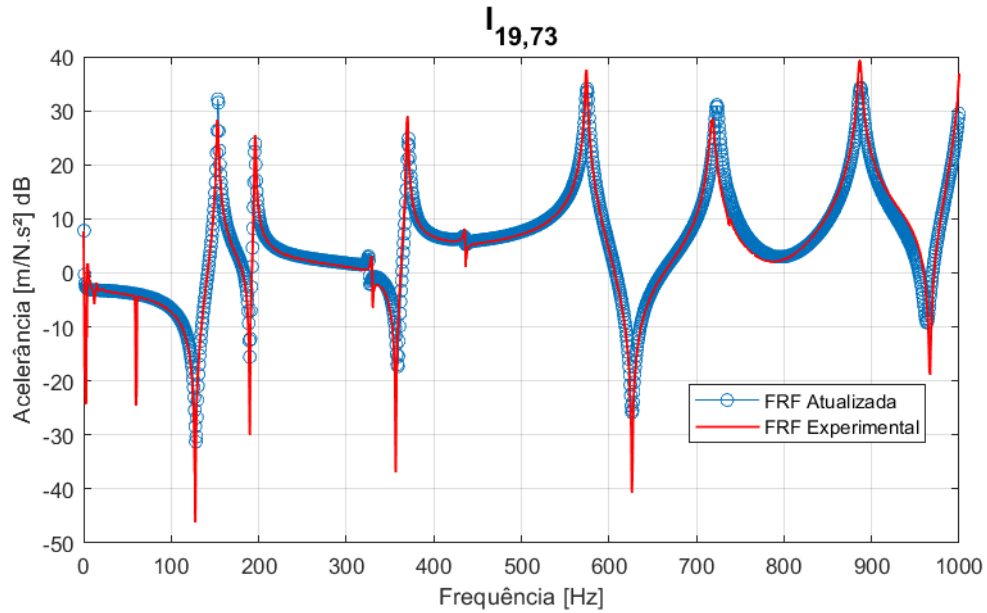
Fonte: Do autor (2021).

Figura 27 – FRF experimental e atualizada $I_{7,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

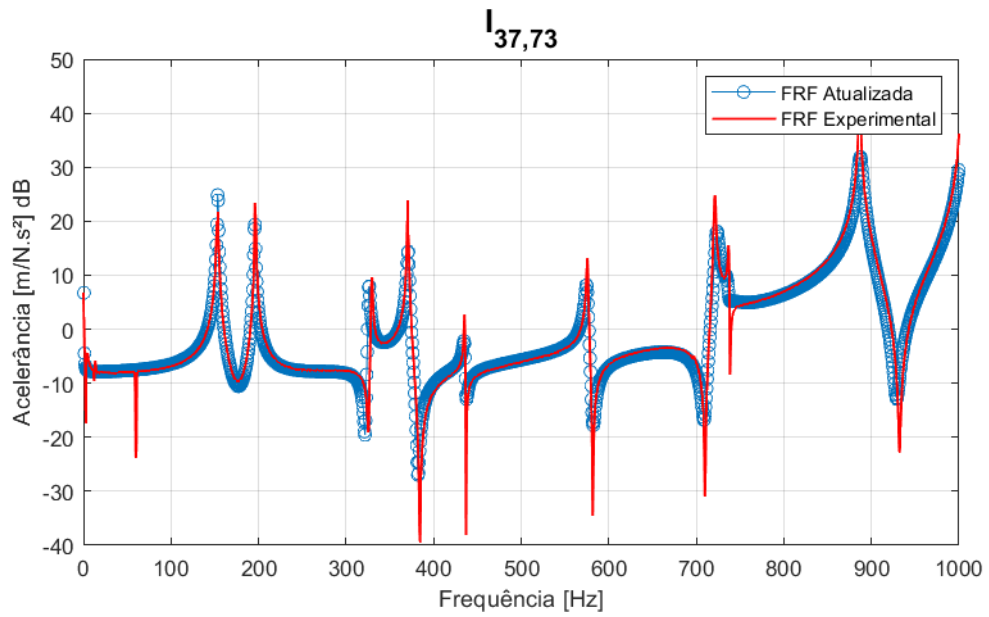
Fonte: Do autor (2021).

Figura 28 – FRF experimental e atualizada $I_{16,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

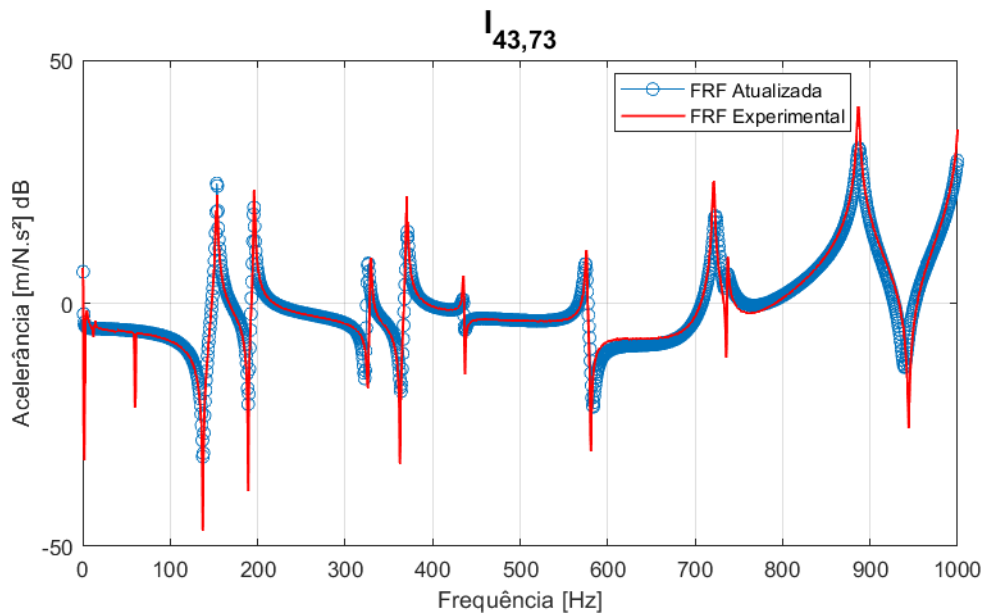
Fonte: Do autor (2021).

Figura 29 – FRF experimental e atualizada $I_{19,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

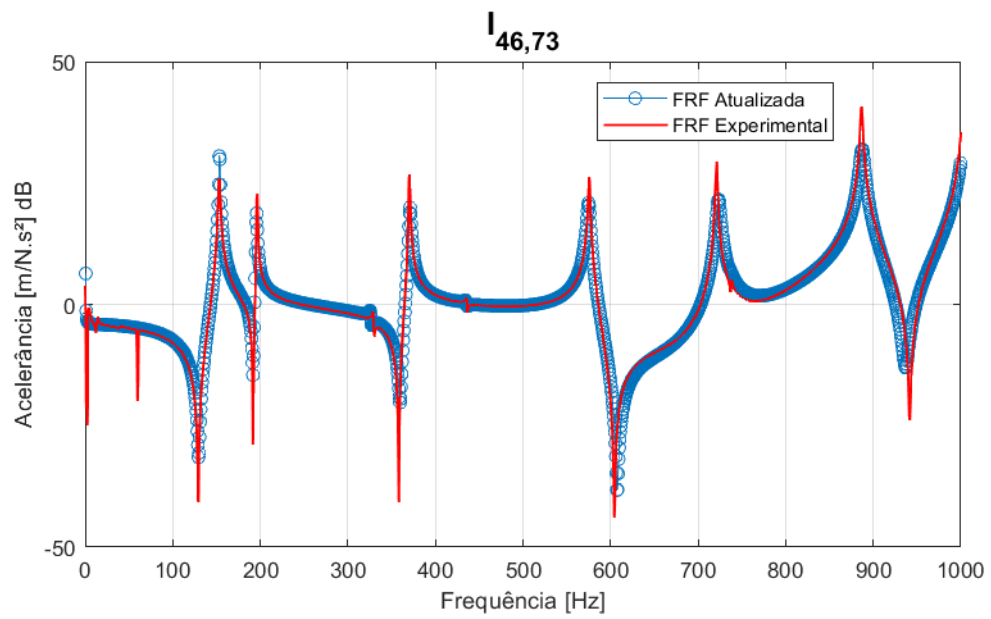
Fonte: Do autor (2021).

Figura 30 – FRF experimental e atualizada $I_{37,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

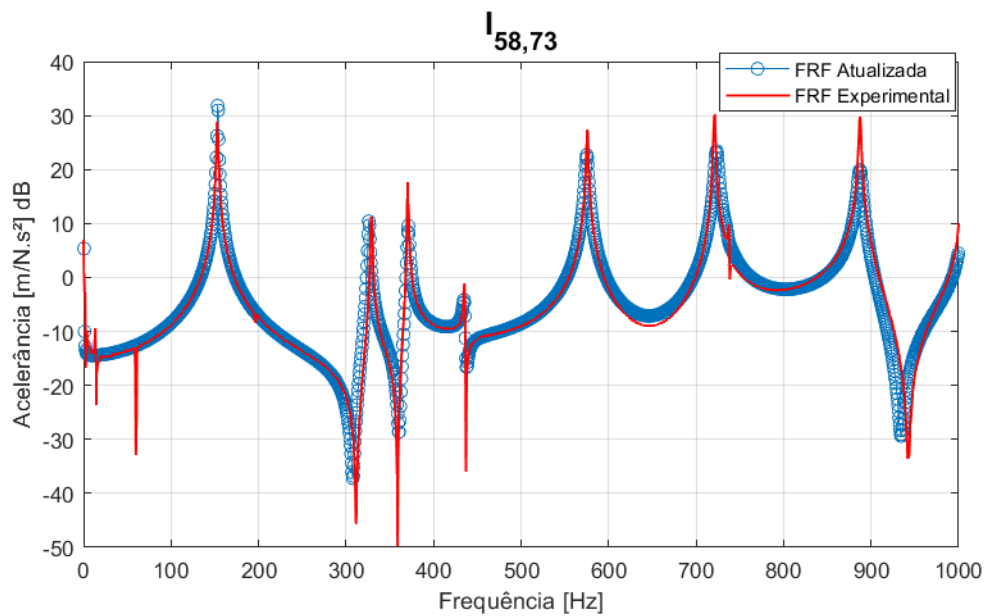
Fonte: Do autor (2021).

Figura 31 – FRF experimental e atualizada $I_{43,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

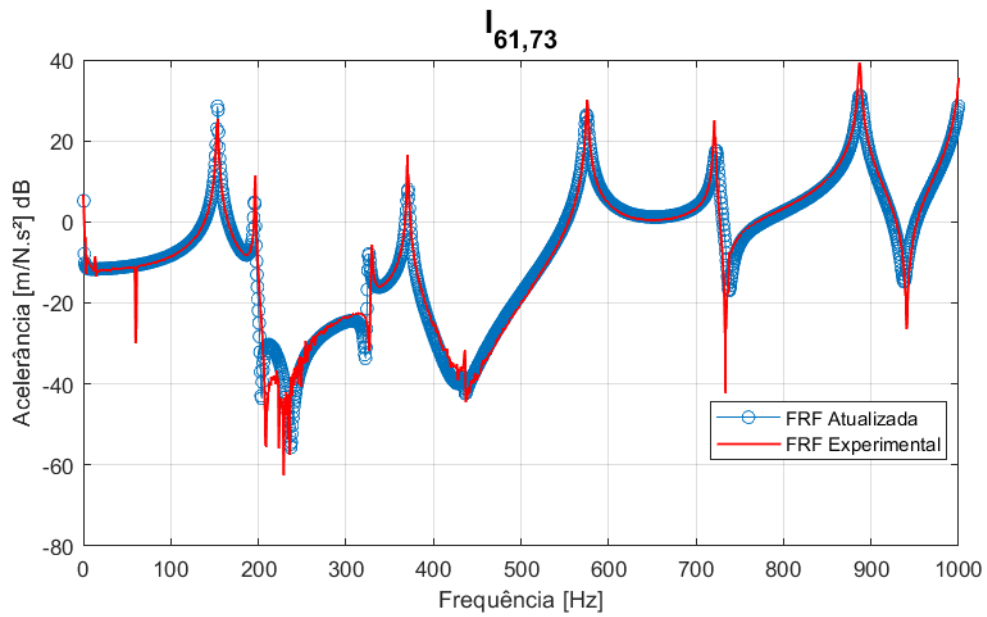
Fonte: Do autor (2021).

Figura 32 – FRF experimental e atualizada $I_{46,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

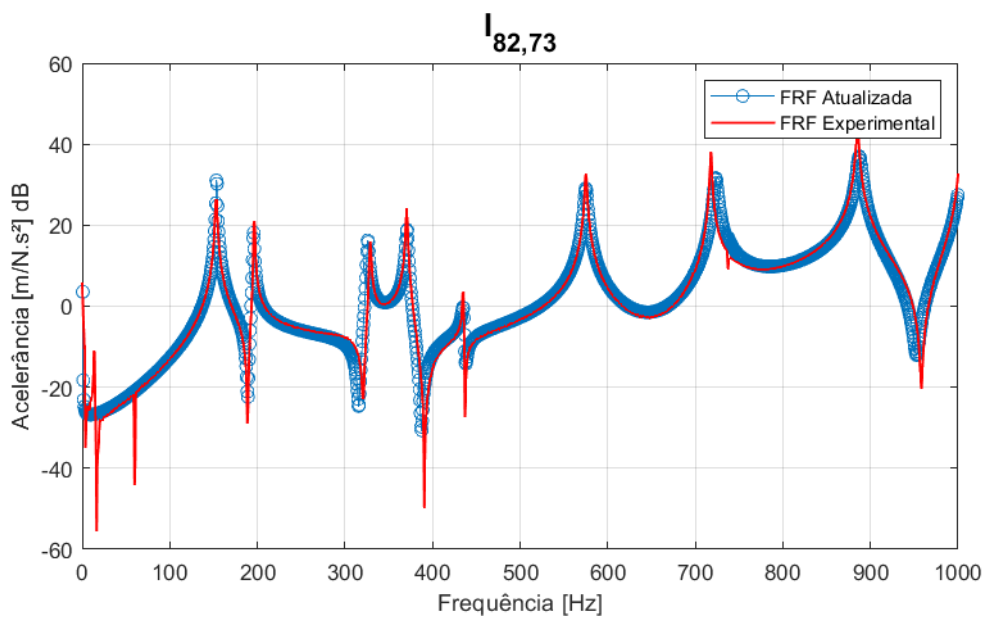
Fonte: Do autor (2021).

Figura 33 – FRF experimental e atualizada $I_{58,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

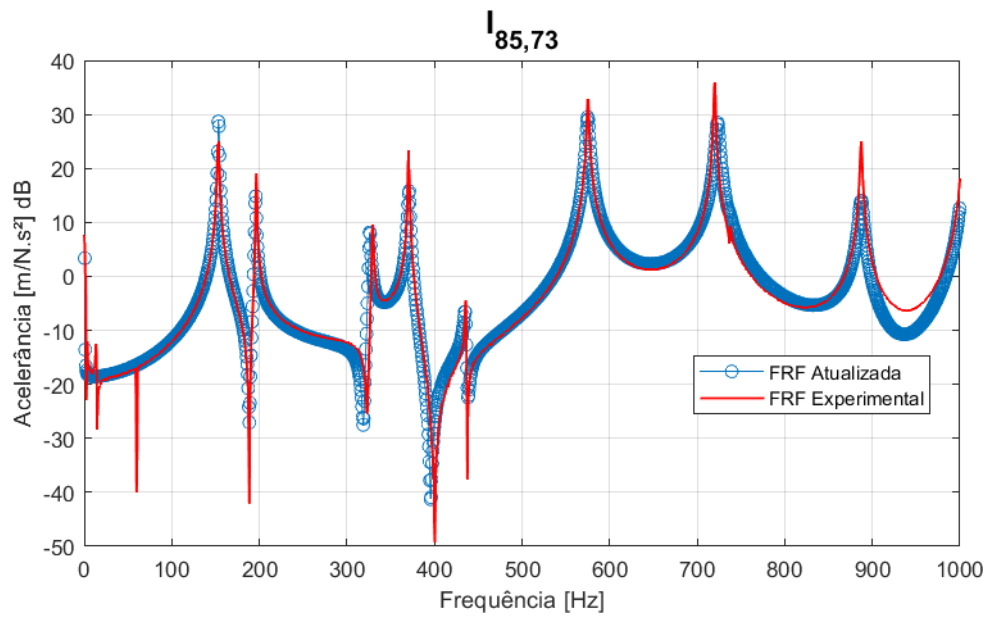
Fonte: Do autor (2021).

Figura 34 – FRF experimental e atualizada $I_{61,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

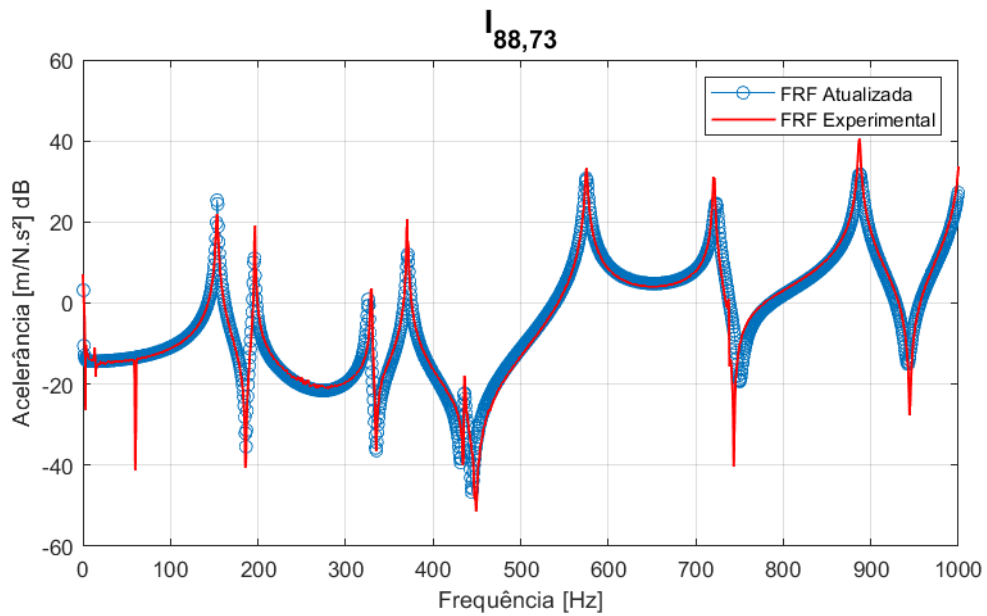
Fonte: Do autor (2021).

Figura 35 – FRF experimental e atualizada $I_{82,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

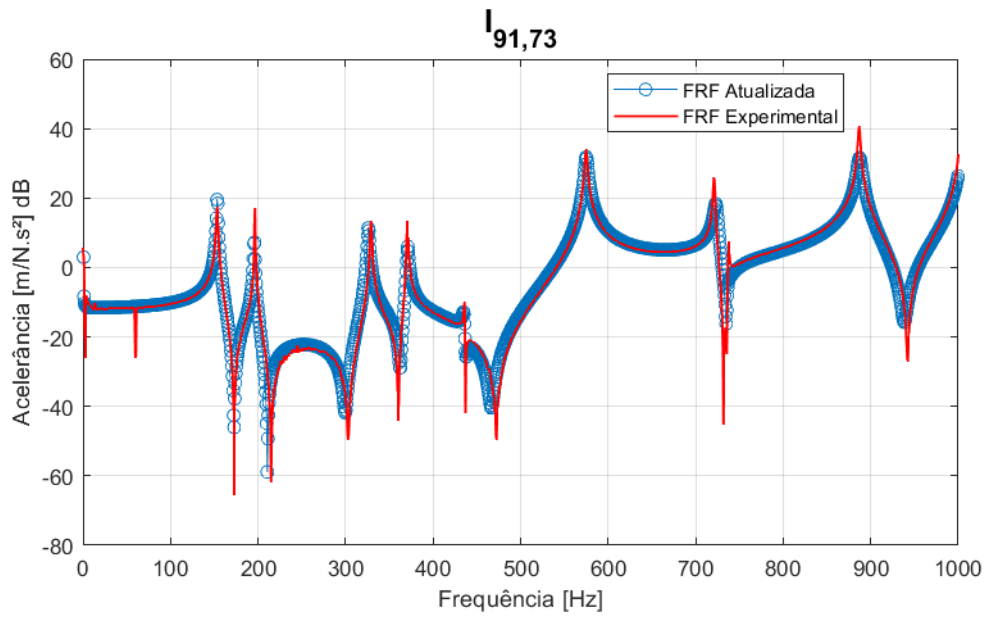
Fonte: Do autor (2021).

Figura 36 – FRF experimental e atualizada $I_{85,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

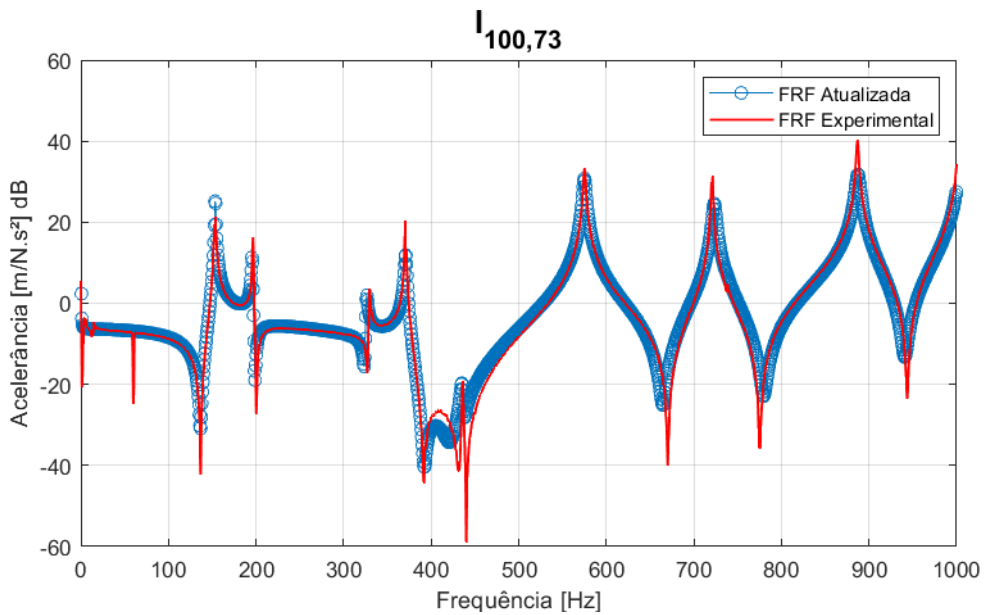
Fonte: Do autor (2021).

Figura 37 – FRF experimental e atualizada $I_{88,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

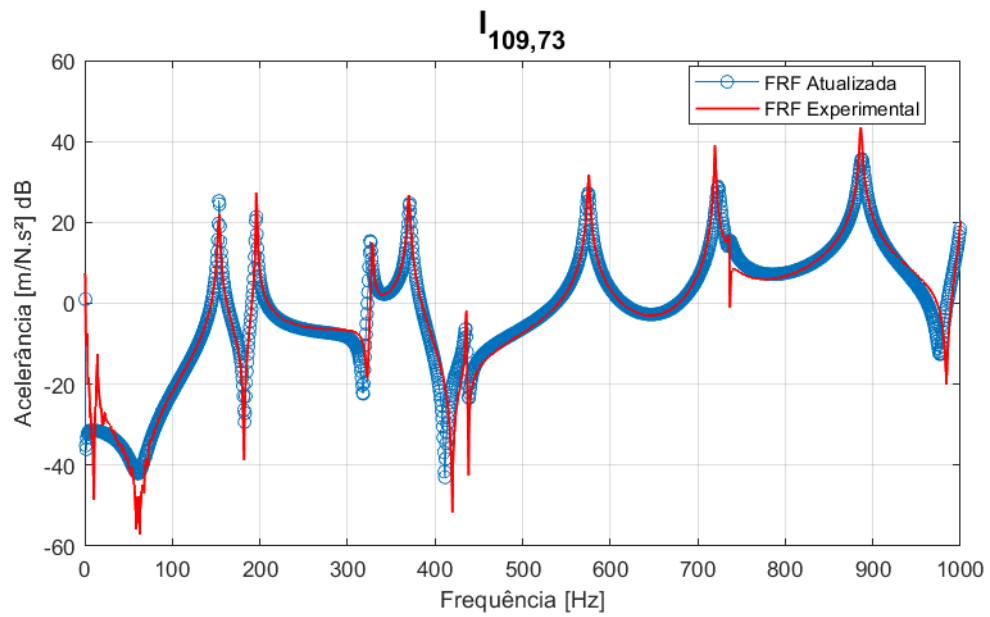
Fonte: Do autor (2021).

Figura 38 – FRF experimental e atualizada $I_{91,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

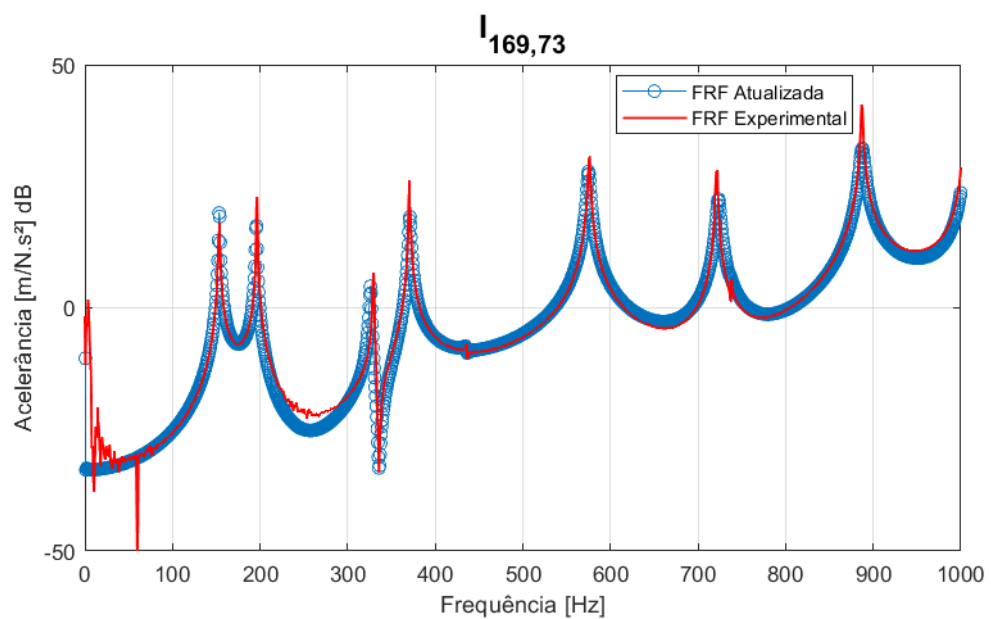
Fonte: Do autor (2021).

Figura 39 – FRF experimental e atualizada $I_{100,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

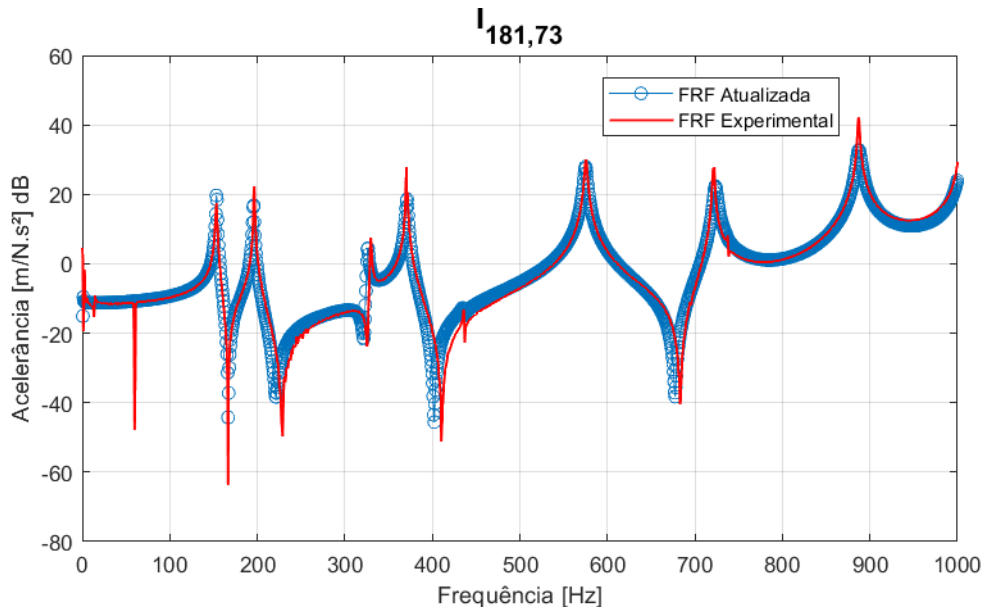
Fonte: Do autor (2021).

Figura 40 – FRF experimental e atualizada $I_{109,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

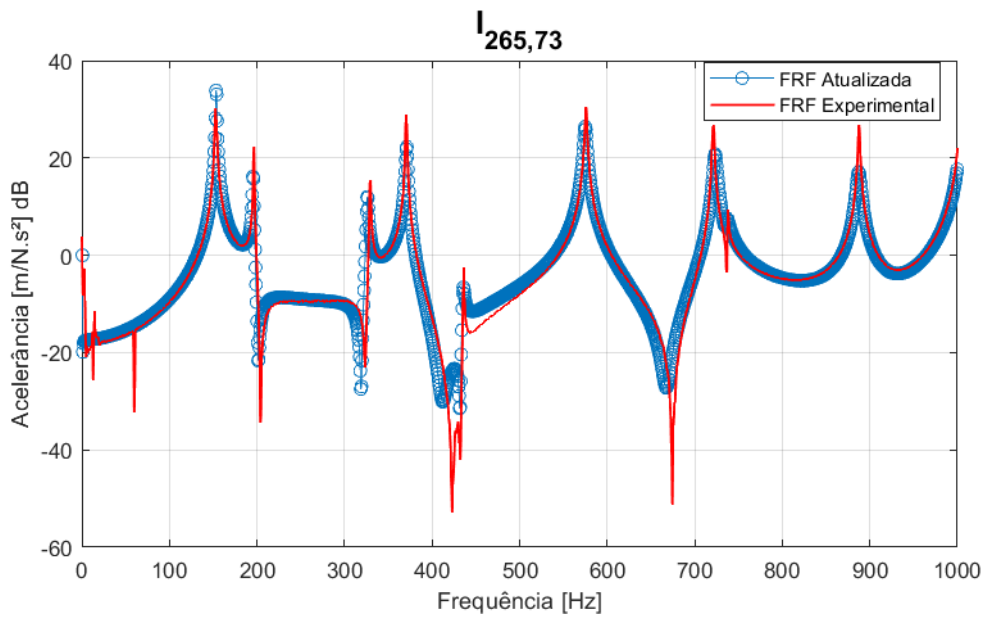
Fonte: Do autor (2021).

Figura 41 – FRF experimental e atualizada $I_{169,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

Fonte: Do autor (2021).

Figura 42 – FRF experimental e atualizada $I_{181,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

Fonte: Do autor (2021).

Figura 43 – FRF experimental e atualizada $I_{265,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.

Fonte: Do autor (2021).

Figura 44 – FRF experimental e atualizada $I_{280,73}$. Teste modal realizado com *shaker*.