

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS – UFLA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – ICET
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA –
DFM

RENAN LUCAS

FORMALISMO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL:
UNIFICAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS

LAVRAS

2021

RENAN LUCAS

**FORMALISMO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL:
UNIFICAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Física, para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Dr. Rodrigo Santos Bufalo
Coorientador: Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo

LAVRAS

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Lucas, Renan

Formalismo Algébrico-Geométrico das Equações de Maxwell:

Unificação e Consequências / Renan Lucas. - Lavras, 2021.

118 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Rodrigo Santos Bufalo.

Coorientador: Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo.

Monografia (Graduação) - Universidade Federal de Lavras, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática, Lavras, 2021.

1. Equações de Maxwell do Eletromagnetismo. 2. Álgebra do Espaço-Tempo. 3. Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo. I. Santos Bufalo, Dr. Rodrigo . II. Cardoso e Bufalo, Dra. Tatiana . III. Universidade Federal de Lavras, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática. IV. Título.

RENAN LUCAS

**FORMALISMO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL:
UNIFICAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Física, para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Dr. Rodrigo Santos Bufalo

Coorientador: Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Rodrigo Santos Bufalo
Universidade Federal de Lavras

Membros:

Dr. Helvécio G. F. Filho
Universidade Federal de Lavras

Dr. Roldão da Rocha Jr.
Universidade Federal do ABC

Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo
Universidade Federal de Lavras

Lavras, 07 de Junho de 2021

Dedico este trabalho aos meus afilhados Gabriel e Joaquim e às milhões de vidas que deixaram de existir, em decorrência da pandemia de COVID-19, neste minúsculo planeta, um ínfimo ponto da imensidão do Universo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha querida mãe Maria Teresa e meu padrasto Lourival pelo apoio incondicional.

À minha amada e futura esposa Sabrina, pela paciência, consideração e amor, me fazendo uma das pessoas mais sortudas deste mundo e a todos de sua família que me receberam de braços abertos.

Aos meus irmãos mais novos, Mateus e José, os quais cuidei quando criança para nossa mãe ir trabalhar, nunca nos deixando faltar nada e, ao carinhoso e esperto Luke, o caçula da família, que sempre procura me lembrar a hora de colocar sua ração ou brincar de pegar bolinha.

Às minhas tias Lúcia, Cristina, Maristela, Luiza, Maria Helena, meu tio Edson, e a minha falecida tia Naninha que nos deixou, mas que sempre guardarei comigo seu sorriso e as boas lembranças que vivemos juntos, onde quer que ela esteja.

Aos meus primos mais próximos Alana, Eluana, Ewelyn, Ewerton, Luan, Rafael, Ramon e Ryan, os quais, alguns deles, quando criança sempre estávamos em pé de guerra, mas que hoje, quando lembramos de nossas peripécias, caímos em gargalhadas.

À minha memorável tia avó Judith, com quem sempre passava meus finais de semana quando criança, que não sabia ler e nem escrever, mas que sabia que estudar era importante, me presenteando uma vez com um livro antigo de Biologia, mal sabendo ela o caminho que eu queria seguir: estudar as leis fundamentais da Natureza.

Aos amigos que fiz durante a adolescência e que carrego até hoje: André, Guto e Ícaro que, por questões na natureza humana, seguimos caminhos diferentes, porém sempre que possível nos reunimos para tomar umas cervejas, comer churrasco, discutir sobre metal e jogar conversa fora.

Aos colegas que fiz em Volta Redonda, quando ainda estava em outra instituição, e àqueles que fiz em Lavras e na UFLA.

Ao Prof. Dr. Antônio Marcelo do DFM/ICET/UFLA, pela primeira orientação que tive no PIBID.

Ao meu estimado orientador Prof. Dr. Rodrigo do DFI/ICN/UFLA, quem tive a

felicidade de conhecer. Inspirando-me, aconselhando-me em nossos encontros semanais de Iniciação Científica (IC), nas discussões sobre física, sobre os percalços durante a graduação e na continuação dos estudos. À Prof(a). Dra. Tatiana do DFI/ICN/UFLA pela cordialidade, os quais receberam a tarefa de me ajudar a lapidar este trabalho.

Ao *Black Label Society* e ao *Alice in Chains* pelas composições fenomenais, das mais antigas e às mais novas, fazendo-me *headbandear* e esquecer da tarefa difícilíssima que foi escrever este trabalho. Aos desenvolvedores do *Overleaf* e *Lyx* por disponibilizar acesso livre a estas ferramentas de edição de texto e equações em Latex.

Aos caminhoneiros e viajantes que me davam carona para ir e voltar para casa seguro.

Ao CNPq, CAPES, FAPEMIG e a UFLA pelo suporte financeiro.

“Lembre-se do seguinte mito. Na ilha grega de Creta, nos tempos antigos, lá vivia o monstro Minotauro, meio humano e meio touro, em um labirinto. A cada nove anos, sete virgens e sete jovens tinham que ser sacrificados para o Minotauro. Ariadne, filha do Rei Minos de Creta e Pasífaa que apaixonou-se por um dos sete jovens - o príncipe ateniense Teseu. Para salvar sua vida, Ariadne deu a Teseu um fio de lã que, cujo início, foi preso na entrada do labirinto. Depois de uma luta dura, Teseu matou o Minotauro, escapando do labirinto com a ajuda do fio de Ariadne. Para um trabalho científico duro, é bom ter uma espécie de fio de Ariadne em mãos.” (Eberhard Zeidler)

RESUMO

As Equações de Maxwell do Eletromagnetismo implicam que a luz e a propagação dos efeitos de interação entre os campos elétricos e magnéticos no espaço-tempo são ambos reflexos de uma mesma estrutura geral e fundamental. Tal estrutura pode ser decomposta em seus constituintes básicos para tratarmos problemas em situação mais convencionais ou pode ser generalizada para atingirmos problemas mais elementares. A unificação da linguagem matemática – ferramenta indispensável para tratarmos os problemas físicos, e a interpretação geométrica dos constituintes básicos da teoria, podem ser um dos elementos-chaves para alcançar tal generalização. Assim, o modo como descrevemos as simetrias, as leis, os princípios, as equações e os elementos subjacentes que uma teoria física apresenta, é extremamente importante no tratamento de problemas mais específicos, tais como a inexistência de monopolos magnéticos, a covariância adequada das leis da física, entre outros. Portanto, neste trabalho buscamos apresentar como a descrição das leis do eletromagnetismo são formuladas de maneira natural e generalizadora, usando a Álgebra do Espaço-Tempo, a qual emerge do Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo, e como esta pode ser uma alternativa interessante para descrevermos a Natureza e seus fenômenos físicos.

Palavras-chave: Equações de Maxwell do Eletromagnetismo. Álgebra do Espaço-Tempo. Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo.

ABSTRACT

Maxwell's Equations of Electromagnetism imply that light and the propagation of the effects of the interaction between electric and magnetic fields in space-time are both reflections of the same general and fundamental structure. This structure can be broken down into its basic components to address problems in more conventional situations, or it can be generalized to address more elementary problems. The unification of the mathematical language, an indispensable tool for dealing with physical problems, and the geometric interpretation of the basic components of the theory, can be one of the key elements to achieve such generalization. Thus, the way we describe the symmetries, laws, principles, equations and underlying elements that a physical theory presents, is extremely important in dealing with more specific problems, such as the non-existence of magnetic monopoles, the appropriate covariance of the laws of physics, among others. Therefore, in this paper we seek to present how the description of the laws of electromagnetism are formulated in a natural and generalizing way, using the Space-Time Algebra, which emerges from the Clifford Bundle of Space-Time, and how this can be an interesting alternative to describe Nature and its physical phenomena.

Keywords: Maxwell's Equations of Electromagnetism. Space-Time Algebra. Clifford Bundle of Space-Time.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A constante de estrutura C_{kl}^j mede a quantidade pela qual campos e seus deslocamentos infinitesimais falham em formar um paralelogramo.	22
Figura 2 – Ilustração de um fibrado vetorial E sobre um aberto $U \in M$ e uma seção transversal s (generalização de uma função).	32
Figura 3 – Fluxo de energia-momento S^μ que atravessa um hiperplano Σ ortogonal a uma direção γ^μ do espaço-tempo.	58
Figura 4 – Onda eletromagnética circularmente polarizada a direita propagando-se na direção $z > 0$ do ponto de vista da fonte.	69
Figura 5 – Plano magnético-elétrico definido pelos campos magnético (eixo horizontal) e elétrico (eixo vertical). Podemos considerar duas realidades independentes, uma correspondendo a “Realidade A” e a outra correspondendo a “Realidade B”. Se na realidade A existe um cientista realizando um experimento para tentar medir a força elétrica entre duas cargas elétricas, em B deve haver um cientista, um pouco diferente, fazendo um experimento para tentar medir a força magnética entre duas cargas magnéticas, de tal forma que o plano magnético-elétrico de ambas as realidades A e B formam um $\phi = \pi/2$, uma em relação à outra. O mesmo argumento pode ser usado para as densidades de carga e corrente (elétrica e magnética).	72
Figura 6 – Rotação da uma 1-forma x por um ângulo $\beta = 2\alpha$, em que α é o ângulo entre as 1-formas a e b .	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela dos k -vetores sobre o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{3,0}$	26
Tabela 2 – Tabela dos k -vetores sobre o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{1,3}$	27
Tabela 3 – Tabela das k -formas sobre o ETM de acordo com a teoria de fibrados.	34
Tabela 4 – Operações identidade, involução graduada, reversão e conjugação de Clifford.	39
Tabela 5 – Automorfismo, antiautomorfismo e pseudoautomorfismo da AET e suas relações com as simetrias C , P , T , e CPT	88

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Álgebra de Clifford
ACE	Álgebra de Clifford do Espaço
ACET	Álgebra de Clifford do Espaço-Tempo
AET	Álgebra do Espaço-Tempo
AE	Álgebra Exterior
AG	Álgebra de Grassmann
AL	Álgebra de Lie
AT	Álgebra Tensorial
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
BNS	Buraco Negro Supermassivo
CL	Colchete de Lie
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CPT	Carga-Paridade-Tempo
EME	Equações de Maxwell do Eletromagnetismo
ETM	Espaço-Tempo de Minkowski
FAPEMIG	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais
FC	Fibrado de Clifford
FCET	Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo
FMD	Fibrado de Multiformas Diferenciais
GL	Grupo de Lie
IC	Iniciação Científica
IJ	Identidade de Jacobi
LHC	Large Hadron Collider

MOEDAL	Monopole and Exotics Detector at the LHC
MP	Modelo Padrão
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
Rb	Rubídio
RE	Relatividade Especial
RG	Relatividade Geral
SI	Sistema Internacional de Unidades
UFLA	Universidade Federal de Lavras

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	18
2.1	ÁLGEBRAS DE LIE E DE CLIFFORD	19
2.2	ÁLGEBRAS DE CLIFFORD DO ESPAÇO E DO ESPAÇO-TEMPO	26
2.3	DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO E ROTAÇÕES	28
2.4	FIBRADO DE MULTIFORMAS DIFERENCIAIS	31
2.5	FIBRADO DE CLIFFORD DO ESPAÇO-TEMPO	34
2.6	OPERAÇÕES E RELAÇÕES NOTÁVEIS	37
3	EQUAÇÕES DE MAXWELL DO ELETROMAGNETISMO	41
3.1	FORMALISMO VETORIAL	41
3.2	FORMALISMO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO	46
3.3	FORMALISMO TENSORIAL	49
3.4	FORMALISMO DE FORMAS DIFERENCIAIS E POTENCIAIS	51
3.5	ENERGIA ELETROMAGNÉTICA E INVARIANTES	56
3.6	ONDA PLANA E POLARIZAÇÃO CIRCULAR	63
4	SIMETRIAS	70
4.1	SIMETRIA DE DUALIDADE	70
4.2	SIMETRIA DE <i>GAUGE</i>	73
4.3	SIMETRIA DE LORENTZ	77
4.4	SIMETRIA <i>CPT</i>	85
4.5	SIMETRIA CONFORME	88
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A –	104
	APÊNDICE B –	108
	APÊNDICE C –	113
	APÊNDICE D –	116

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da Física Teórica é estabelecer uma teoria unificada que possa descrever todas as interações fundamentais (SALAM; TAYLOR, 1990). Dentre as ideias principais de unificação, em particular, temos a íntima relação entre o eletromagnetismo e a radiação. A formulação matemática das leis que permitiram unificar estes dois fenômenos em uma única teoria foi proposta por James Clerk Maxwell por volta de 1880, baseando-se em observações (LIMA, 2019). Com esta teoria, foi possível verificar experimentalmente que uma carga elétrica acelerada libera energia na forma de radiação eletromagnética. Assim, também foi possível relacionar as propriedades elétricas e magnéticas do vácuo (e também da matéria) com a luz, cujas consequências práticas são sentidas até hoje (UNESCO, 2015).

A afirmação de Maxwell de que a luz é uma perturbação eletromagnética que se propaga por meio de campos, respeitando as leis do eletromagnetismo, foi publicada no tratado *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*¹, em 1865. E, desde então, motivou descobertas científicas e inovações tecnológicas, mudando para sempre nossa relação com o mundo onde vivemos. Descobriu-se, por exemplo, que ondas eletromagnéticas e ópticas podem ser confeccionadas, manipuladas e controladas dentro da matéria, abrindo novos ramos na engenharia e na ciência dos materiais com a produção de dispositivos digitais e físico-médicos. Recentes áreas do conhecimento como a nanociência e a física da matéria condensada, têm permitido inúmeros avanços na confecção de materiais em um nível de controlabilidade que vai até a escala atômica, com propriedades nunca antes vistas (ENGHETA, 2015).

Do ponto de vista da física da escala astronômica, em particular, na proximidade de um campo gravitacional bastante intenso como o de um Buraco Negro Supermassivo (BNS), tem-se observado pela primeira vez, a partir de imagens telescópicas de um BNS, no interior da Galáxia M87, jatos altamente energéticos de luz polarizada emergindo de seu entorno. De fato, tais jatos seguem linhas de campo magnético formado ao redor destes objetos extraordinários. A ideia é que este fenômeno poderá fornecer pistas sobre a

¹ Para mais detalhes, veja a ref. (MAXWELL, 1865).

explicação do mecanismo que permite a matéria escapar do interior deles (AKIYAMA et al., 2021).

Todavia, a procura por uma teoria de campos unificada e o desenvolvimento de aplicações tecnológicas que desta podem ser derivadas, tanto em escala microscópica como em escala astronômica, envolvem também aspectos relacionados à linguagem que utilizamos para descrever a Natureza e seus fenômenos físicos (HESTENES, 2015). Uma vez que leis físicas são invariantes por determinadas simetrias, os Grupos e Álgebras de Lie – estruturas matemáticas que permitem estudá-las – desempenham um papel importante neste contexto. Pois, com elas podemos analisar em maior profundidade leis de conservação, atributos indispensáveis em Física Teórica (SUNDERMEYER, 2014).

Em relação às Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME), relações matemáticas entre os campos elétrico e de indução magnética com as densidades de carga e corrente (as fontes dos campos), é possível lançar mão de alguns dos ramos da Matemática, por exemplo, a Geometria Diferencial e a Álgebra Abstrata, e formulá-las a partir de um ponto de vista moderno, independente de coordenadas e unificador (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007).

Neste sentido, mais especificamente, a teoria de fibrados combinada com a Álgebra de Clifford², permite expressar as EME, na presença de cargas elétricas e magnéticas³, em uma única expressão por meio da definição de uma Álgebra do Espaço-Tempo (AET) em cada ponto (ou evento) de uma variedade⁴ diferenciável quadridimensional. Isso, por sua vez, serve de base para fundamentar um Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET). Nesta formulação, por exemplo, o campo eletromagnético é entendido como uma seção local de um FCET de dimensão 6. Isto significa que tais equações nos formalismos vetorial, tensorial e de formas diferenciais são casos particulares do formalismo algébrico-geométrico da AET.

² Para uma breve discussão histórica envolvendo o surgimento da Álgebra de Clifford, veja por exemplo, (LOUNESTO, 2001) e (CHAPPELL et al., 2016).

³ Embora estas sejam até o momento propostas teóricas.

⁴ Uma variedade é um espaço matemático abstrato que localmente se assemelha a um espaço vetorial euclidiano. Quando ela é suave, infinitamente diferenciável, é possível definir as operações de diferenciação e integração do cálculo, para uma discussão mais aprofundada, veja por exemplo (LEE, 2013).

Assim, podemos destacar os objetivos gerais que nortearam o presente trabalho: i) realizar estudos da AET; ii) do FCET; iii) da descrição das leis do eletromagnetismo nesta formulação algébrica e; iv) de algumas simetrias associadas às EME, pois nesta representação é possível estabelecer uma formulação unificadora e extremamente natural para descrever a física relativística e as EME.

No que diz respeito aos objetivos específicos, temos: i) investigar como as EME são representadas na formulação algébrico-geométrica no FCET; ii) identificar como as propriedades geométricas (escalar, 1-forma, 2-forma, 3-forma e pseudoescalar) emergentes do espaço-tempo podem ser utilizadas na formulação das leis do eletromagnetismo e algumas simetrias associadas, em particular, as simetrias de Dualidade, *Gauge*, Lorentz, *CPT* e Conforme; iii) compreender como este formalismo matemático é capaz de ressaltar a visão geométrica dos fenômenos físicos, em particular, àqueles ligados às teorias de campo relativísticas, cujos exemplos mais surpreendentes são as teorias de campos de Maxwell e Einstein. Além disso, iv) enfatizar que este formalismo é extremamente poderoso para atacar problemas de fronteira: tais como teorias supersimétricas, teorias de cordas, etc., visto que as aplicações deste formalismo são inúmeras: Mecânica Clássica (HESTENES; VOLD, 1990), Quântica, Eletromagnetismo, Relatividade Especial e Geral, etc. (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007), sendo apenas necessário o estudo de um único formalismo.

A estrutura deste trabalho segue o seguinte ordenamento: No Capítulo 2 revisamos algumas das estruturas matemáticas necessárias para abordarmos as EME e algumas de suas simetrias. Dedicamos o Capítulo 3 para abordar as EME nos formalismos vetorial, algébrico-geométrico, tensorial e de formas diferenciais. Ademais, discutimos algumas das implicações que podem ser deduzidas de tais equações. No Capítulo 4 analisamos algumas das simetrias que deixam as EME invariantes e interpretamos fisicamente seus resultados. No Capítulo 5 apresentamos as Considerações Finais e em seguida, acrescentamos os Apêndices, com algumas informações complementares ao texto.

2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

A fim de estabelecer a estrutura matemática necessária para o desenvolvimento das Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME) e suas simetrias, no formalismo algébrico-geométrico, apresentamos neste capítulo uma breve revisão sobre Grupos de Lie (GL), as Álgebras de Lie, de Clifford e Exterior e também a noção de Fibrado, em particular, daremos ênfase ao Fibrado de Multiformas Diferenciais (FMD) e ao Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET).

Iniciaremos nossa discussão por GL, os quais desempenham um papel fundamental em Física Teórica no estudo de simetria. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto, veja por exemplo, (STEEB, 2007) e (BINCER, 2013). Essencialmente, GL são espaços abstratos cujos elementos são parametrizados continuamente, o que permite classificá-los como grupos contínuos. Além disso, próximos de seus elementos identidade, é possível definir uma curva r -parametrizada, onde r é o número de parâmetros destes grupos, e cuja expansão em série de Taylor até a primeira ordem, permite definir geradores infinitesimais de transformação. Estes últimos são ingredientes fundamentais na definição de uma Álgebra de Lie (AL), a qual ilustraremos a seguir.

Outro ponto que devemos enfatizar é a definição de uma Álgebra de Clifford (AC) que será essencial para as discussões ao longo deste trabalho. Cumpre destacar, entre outras coisas, que a definição de uma AC nos permitirá escrever um produto geral entre objetos geométricos, qual seja, o produto geométrico ou produto de Clifford, generalizando as noções de produtos escalar e vetorial. Este produto é um dos ingredientes mais importantes por detrás da formulação algébrico-geométrica das EME (HESTENES, 2015). Além disso, definiremos uma AE com uma extensão da métrica, permitindo definir uma Álgebra de Grassmann (AG). Isto nos permitirá expressar os elementos da AC a partir dos elementos da AG (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012).

Apresentamos também a construção de um FMD, o qual é definido pelo quociente entre um fibrado tensorial de tensores covariantes de ordem k , veja ref. (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007) para definição, e seu ideal bilateral, permitindo definir uma k -forma

sobre o Espaço-Tempo de Minkowski (ETM), a qual é uma seção local¹, uma generalização do conceito de função, deste fibrado. Logo, com a definição de um FCET, teremos condições de expressar localmente seus elementos, por exemplo, o campo eletromagnético, a partir dos elementos do FMD, uma vez que localmente estes fibrados são isomorfos (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007).

Por fim, destacamos algumas relações importantes e operações que podem ser definidas sobre o FCET, as quais nos permitirão estabelecer, na seção 4.4, uma relação entre as transformações discretas da conjugação de carga, C , da inversão espacial, P , e da reversão temporal T .

2.1 ÁLGEBRAS DE LIE E DE CLIFFORD

Apresentaremos ao longo desta seção, a definição formal de um GL e de uma álgebra, em especial, definiremos uma AL que nos permitirá definir, na seção 4.5, os comutadores entre os geradores da simetria conforme, as transformações que generalizam as simetrias do espaço-tempo (SUNDERMEYER, 2014). Além disso, mostraremos que a definição de uma Identidade de Jacobi (IJ), em termos dos geradores de infinitesimais, tem um papel fundamental em teorias de campo. Em particular, no eletromagnetismo, podemos estabelecer que a violação da IJ resulta na presença de monopolos magnéticos, veja seção 3.3.

Definiremos também uma AC em um espaço vetorial n -dimensional munido de uma métrica, um objeto geométrico que nos permite calcular a distância entre vetores ou 1-formas. Com isto, teremos condições de apresentar a definição de uma álgebra sobre o espaço euclidiano tridimensional, ou Álgebra de Clifford do Espaço (ACE) e de uma Álgebra do Espaço-Tempo (AET), definida sobre o ETM, em que é possível definir a noção de decomposição do espaço-tempo em relação a um observador inercial.

De fato, um GL, G , é definido por meio de uma lei de composição de grupo

$$c : G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \mapsto c(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2, \quad g_1, g_2 \in G \quad (2.1)$$

¹ Em teoria quântica de campos, campos de matéria, por exemplo, a noção de massa, carga, spin, etc., são seções locais de fibrados definidos sobre cada ponto do espaço-tempo. Para uma definição rigorosa de uma seção local veja, por exemplo, (EGUCHI; GILKEY; HANSON, 1980).

e por uma aplicação de inversão

$$i : G \rightarrow G, \quad g \mapsto i(g) = g^{-1} \quad g, g^{-1} \in G, \quad (2.2)$$

os quais são aplicações suaves entre variedades, de modo que G é um GL de dimensão finita r -parametrizado e g seus elementos, veja ref. (STEEB, 2007) para uma discussão mais aprofundada.

Por outro lado, uma álgebra consiste de um espaço vetorial \mathcal{A} sobre um corpo arbitrário \mathbb{K} (em particular, podemos considerar os corpos \mathbb{R} ou \mathbb{C}), munido de um produto de vetores, $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, tal que

$$(A, B) \mapsto AB \in \mathcal{A}, \quad A, B \in \mathcal{A},$$

satisfazendo um par de leis distributivas

$$A(aB + bC) = aAB + bAC, \quad (aA + bB)C = aAC + bBC, \quad a, b \in \mathbb{K}, \quad A, B, C \in \mathcal{A}.$$

No lado direito da primeira relação acima, aAB significa $a(AB)$. De fato, se escolhermos $b = 0$, temos $aAB = (aA)B = A(aB)$. Além disso, se para todo $A, B, C \in \mathcal{A}$, tivermos $A(BC) = (AB)C$ a álgebra é dita ser associativa, e se ainda, tivermos $AB = BA$ ela é dita ser comutativa. Dentre as álgebras não associativas, temos a AL como exemplo trivial (SZABO, 2019).

Outra definição importante é a noção de ideal. Dada uma álgebra \mathcal{A} , um *ideal à esquerda* \mathcal{I}_E dessa álgebra é um subconjunto contendo elementos da forma $ax \in \mathcal{I}_E$, $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in \mathcal{I}_E$, enquanto que um *ideal à direita* \mathcal{I}_D contém elementos da forma $xa \in \mathcal{I}_D$, $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in \mathcal{I}$ e um ideal bilateral \mathcal{I} é um subconjunto contendo elementos da forma $axb \in \mathcal{I}$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in \mathcal{I}$.

Antes de definirmos uma AL apropriadamente, devemos notar que uma transformação de um GL, G , de múltiplos parâmetros, pode ser escrita como

$$\mathbf{y} = A(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

de modo que $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ são vetores de n componentes pertencentes ao espaço vetorial \mathbb{R}^n de dimensão n , T a operação transposição que troca linhas por

colunas em uma matriz, $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ são os $r \leq n$ parâmetros deste grupo e $A(\epsilon)$ é uma curva suave (uma matriz) de r parâmetros passando pela identidade de G . Na vizinhança da identidade $I \in G$, é possível expandir $A(\epsilon)$ em série de Taylor, até a primeira ordem, e escrever

$$A(\epsilon) = I + \epsilon_k \frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon_k} \Big|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.4)$$

com $I = A(0)$. Logo, podemos identificar os seguintes geradores infinitesimais de transformação $Z_k \equiv \frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon_k} \Big|_{\epsilon=0}$, que também correspondem às expressões para os vetores tangentes à curva $A(\epsilon)$, em $\epsilon = 0$. O conjunto de todos os Z_k , i.e., o conjunto de todas as tangentes a todas as curvas em $I \in G$, forma um espaço vetorial linear de dimensão r , uma AL, definida por

$$\mathfrak{g} \equiv \left\{ Z_k = \frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon_k} \Big|_{\epsilon=0}, \quad A(\epsilon) \text{ é uma curva passando pela identidade} \right\}. \quad (2.5)$$

Além disso, podemos recuperar todas as propriedades locais de G a partir da exponenciação dos elementos da AL associada, na vizinhança da identidade, escrevendo $A(\epsilon_k) = \exp(\epsilon_k Z_k)$, em que fica implícita uma soma no índice k .

Do ponto de vista matemático, uma AL é munida de um produto

$$[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (2.6)$$

chamado de colchetes de Lie. Em particular, podemos considerar uma AL envolvente, uma vez admitindo um novo produto que o denotaremos por justaposição. Isto significa que a AL envolvente satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para $Z, X \in \mathfrak{g}$, temos que $[Z, X] = ZX - XZ \in \mathfrak{g}$, em que ZX e XZ são os produtos definidos por justaposição. Essa propriedade é conhecida como propriedade de fechamento.
2. Para $a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z], \quad [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z].$$

que é uma propriedade de bilinearidade.

3. $[X, Y] = -[Y, X]$ é a propriedade de antissimetria.

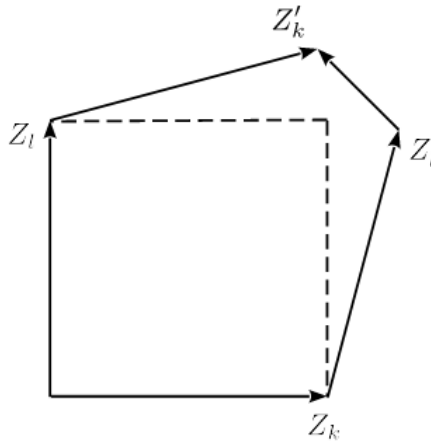
4. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ é conhecida como Identidade de Jacobi (IJ).

Em particular, o conjunto $\{Z_k\}$ fornece uma base de campos vetoriais tangentes linearmente independentes – especificamente, uma base *não holonômica*² – em um ponto do espaço tangente a G próximo a identidade, de modo que

$$[Z_k, Z_l] = C_{kl}^j Z_j, \quad (2.7)$$

em que C_{kl}^j ($j, k, l = 1, \dots, n$) são denominadas de *constantes de estrutura*. De fato, o comutador dos campos Z_k e Z_l mede a quantidade pela qual estes campos falham em formar um paralelogramo, veja Figura 1, em que Z'_k e Z'_l são seus deslocamentos infinitesimais ao longo de suas linhas integrais³.

Figura 1 – A constante de estrutura C_{kl}^j mede a quantidade pela qual campos e seus deslocamentos infinitesimais falham em formar um paralelogramo.



Fonte: Figura adaptada de (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007).

O último resultado, eq. (2.7), permite escrever a IJ da seguinte forma:

$$[Z_i, [Z_k, Z_l]] + [Z_l, [Z_i, Z_k]] + [Z_k, [Z_l, Z_i]] = 0, \quad (2.8)$$

impondo uma condição de simetria nos índices i , k e l .

² Por exemplo, uma base *holonômica* pode ser escolhida como as derivadas parciais de dimensão n de forma que o colchete de Lie dessas derivadas corresponde a $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, ou seja, as derivadas parciais comutam (STONE; GOLDBART, 2009).

³ Linhas integrais são funções diferenciáveis com a propriedade de que, em um dado aberto U de uma variedade M e em um dado ponto x , os vetores tangentes dessas funções, nesse ponto, correspondem ao valor de campos vetoriais neste mesmo ponto (LEE, 2013).

Para finalizar, uma AL também constitui um espaço vetorial de todos os mapeamentos lineares, que no presente caso, ocorre sobre \mathbb{R} . Assim podemos definir uma AL associada ao grupo

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}, \quad (2.9)$$

de dimensão n^2 , ou *geral linear*, de matrizes reais A de dimensão $n \times n$, cujos determinantes são diferentes de zero, por meio de

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \equiv \{\text{todos os mapas lineares de } \mathbb{R}^n \text{ em } \mathbb{R}^n \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\}. \quad (2.10)$$

Um subgrupo do grupo geral linear de muita importância⁴ é o *grupo ortogonal* definido como

$$O(n, \mathbb{R}) \equiv \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \quad (2.11)$$

em que I_n denota uma matriz identidade de dimensão $n \times n$. Se restringirmos o determinante da matriz A pela unidade, sua ação sobre os vetores de \mathbb{R}^n , é uma rotação destes vetores por um ângulo arbitrário. Assim, temos que

$$SO(n, \mathbb{R}) \equiv \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_n, \det A = 1\}, \quad (2.12)$$

é o *grupo especial ortogonal*, um subgrupo do grupo ortogonal, ambos com dimensão $n(n-1)/2$, os quais deixam a métrica euclidiana invariante (STEEB, 2007). Quando o espaço vetorial \mathbb{R}^n , em que podemos considerar a ação destes grupos, é equipado com uma métrica pseudo-euclidiana de modo que $n = p + q$, sendo p o número de dimensões positivas definidas e q o número de dimensões negativas definidas, é possível estabelecer os grupos *pseudo-ortogonal* $O(p, q)$ e *especial pseudo-ortogonal* $SO(p, q)$, de modo que suas AL associadas podem ser definidas por

$$\mathfrak{o}(p, q) \equiv \{X \in L(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R}^{p,q}), X^T = -X\} \quad (2.13)$$

⁴ Uma vez que o grupo geral linear é definido sobre os números complexos, \mathbb{C} , é possível definir também os subgrupos $U(n, \mathbb{C}) \equiv \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = I_n\}$ e $SU(n, \mathbb{C}) \equiv \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = I_n, \det A = 1\}$ de dimensões n^2 e $n^2 - 1$, respectivamente, de modo que a operação $*$ denota a conjugação complexa. Em particular, podemos definir os grupos $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$, os quais são importantes na formulação de teorias de *gauge*, cujo exemplo mais importante é a teoria do Modelo Padrão das partículas elementares. Tais grupos abstratos permitem definir os bósons, de spin inteiro, por exemplo, o fóton, o mensageiro da interação eletromagnética; Z , os W s e os glúons, mensageiros das interações nucleares fraca e forte, respectivamente, veja ref. (SUNDERMEYER, 2014).

e

$$\mathfrak{so}(p, q) \equiv \left\{ X \in L(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R}^{p,q}), X^T = -X, \text{tr}X = 0 \right\}, \quad (2.14)$$

respectivamente, em que $\text{tr}X$ denota a operação traço de X , ou a soma dos elementos diagonais de uma matriz.

Definida uma AL, o próximo passo é estabelecer uma AC que, de modo geral, pode ser definida considerando um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e uma forma quadrática (bilinear, ou equivalentemente, uma correlação linear) g sobre V , veja ref. (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012) para a definição formal. Esta álgebra é denotada por $C\ell(V, g)$, ela é associativa e possui um elemento unidade. Devido ao fato de que uma AC pode ser definida por meio de um quociente entre uma Álgebra Tensorial (AT) sobre um espaço vetorial e seu ideal, devemos considerá-la sobre V , a qual é definida por

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V, \quad (2.15)$$

de modo que $\mathcal{I}_g(V)$ é um ideal em $\mathcal{T}(V)$, gerado por todos os elementos da forma $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + g(\mathbf{v})1$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Deste modo, formalmente, uma AC pode ser definida por meio do quociente entre a AT associada ao espaço vetorial V e seu ideal \mathcal{I} , ou seja,

$$C\ell(V, g) \equiv \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}_g(V). \quad (2.16)$$

Com isto, existe uma submersão⁵ $V \hookrightarrow C\ell(V, g)$, a qual é a imagem de $V = \bigotimes^1 V$ dentro da projeção canônica, ou projeção natural, $\pi_g : \mathcal{T}(V) \rightarrow C\ell(V, g)$, uma forma lógica de mapear uma estrutura algébrica em suas estruturas quociente, veja ref. (LAWSON; MICHELSON, 1989).

Os elementos geradores da álgebra $C\ell(V, g)$ são o espaço vetorial $V \subset C\ell(V, g)$ e a identidade 1. Nesta construção, os elementos do espaço vetorial devem satisfazer $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g(\mathbf{v})1$, para todo $\mathbf{v} \in V$. Além disso, devemos salientar que $C\ell(V, g)$ tem um graduação $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$, ou seja, ela pode ser escrita como uma soma direta da seguinte forma: $C\ell(V, g) = C^{(0)}\ell(V, g) \oplus C^{(1)}\ell(V, g)$, em que 0 denota sua parte par e 1 sua parte ímpar. Logo, para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, a seguinte propriedade precisa ser satisfeita

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (2.17)$$

⁵ Uma submersão é um mapeamento suave entre variedades diferenciáveis de modo que sua diferencial é sobrejetiva em todo o espaço (LEE, 2013).

tal que $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ é simétrica nas suas entradas com $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$. Em termos das bases de $\mathbf{v} = v_i \hat{e}_i$, $\mathbf{w} = w_i \hat{e}_i \in V$ temos $\hat{e}_i \hat{e}_j + \hat{e}_j \hat{e}_i = 2g_{ij}$. onde \hat{e}_i e \hat{e}_i são vetores ortonormais.

Uma vez que o espaço vetorial V está envolvido com um forma bilinear, de forma tal que $V = \mathbb{R}^{p,q}$, temos que $Cl(\mathbb{R}^{p,q}, g) \equiv Cl_{p,q} \equiv \mathbb{R}_{p,q}$. Isto significa que $\mathbb{R}^{p,q}$ é o espaço vetorial pseudo-euclidiano com produto escalar dado por

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \cdots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \cdots - x^n y^n, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (2.18)$$

Quando $q = 0$, temos o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^{p,0}$ cujo produto escalar é dado por

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p,0}. \quad (2.19)$$

Por fim, uma AE sobre um espaço vetorial V , denotada por $\wedge V$, é definida pelo par $(\wedge V, \wedge)$, em que \wedge denota o produto exterior definido por $\wedge : \wedge V \times \wedge V \rightarrow \wedge V$. De fato, podemos considerar a seguinte soma direta sobre a AE de V

$$\bigoplus_{k=0}^n \wedge_k V = \wedge_0 V \oplus \cdots \oplus \wedge_n V = \wedge V, \quad (2.20)$$

com $\wedge_0 V = \mathbb{R}$ e $\wedge_1 V = V$, de modo que a dimensão de $\wedge_k V$ é dada por $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!}$, o que significa que a dimensão de $\wedge V = 2^n$. Quando $(\wedge V, \wedge)$ é munido de uma extensão Q , da métrica g dada pela eq. (2.18) ou pela eq. (2.19), definida por

$$Q(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_k) = \begin{vmatrix} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) & \cdots & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_k) \\ g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) & g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) & \cdots & g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1) & g(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_2) & \cdots & g(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \end{vmatrix}, \quad (2.21)$$

temos uma AG, o que significa que podemos estabelecer o seguinte isomorfismo de espaço vetorial

$$Cl(V, g) \simeq \wedge V, \quad (2.22)$$

(VAZ JR.; ROCHA JR., 2012). Este último resultado permite expressarmos os elementos de uma AC em termos dos elementos de uma AE sobre V , com uma extensão da métrica.

Assim, um elemento arbitrário de $\wedge V$, isto é, de $Cl(V, g)$, é dado por

$$A = \underbrace{A_0}_{\text{escalar}} + \underbrace{A^i \hat{e}_i}_{\text{1-vetor}} + \underbrace{A^{ij} \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j}_{\text{2-vetor}} + \underbrace{A^{ijk} \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j \wedge \hat{e}_k}_{\text{3-vetor}} + \cdots + \underbrace{A^{i \cdots n} \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge \hat{e}_n}_{\text{n-vetor}}. \quad (2.23)$$

2.2 ÁLGEBRAS DE CLIFFORD DO ESPAÇO E DO ESPAÇO-TEMPO

Tendo definido as estruturas algébricas necessárias para atingirmos o ponto central deste trabalho, qual seja, obter as EME e discutir algumas de suas simetrias, destacaremos logo adiante que as definições de uma ACE e de uma AET, estão intimamente relacionadas, ou seja, a ACE constitui uma subálgebra par da AET. A primeira é particularmente importante porque nos permitirá a definição dos campos elétrico e magnético, em termos de suas componentes espaciais, enquanto que a segunda, nos permitirá a definição do campo eletromagnético, resultados que nos serão úteis no Capítulo 3.

De fato, devemos considerar somente as AC: $\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$ e $\mathbb{R}_{1,3} \simeq \mathbb{H}(2)$, em que $\mathbb{C}(2)$ denota a álgebra de matrizes complexas de dimensão 2×2 , enquanto que $\mathbb{H}(2)$ a álgebra de matrizes quaterniônicas de dimensão 2×2 , pois estas correspondem às ACE e AET, em termos de matrizes (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Em particular, quando o espaço vetorial V é de dimensão finita, logo $V \simeq V^*$. Assim, temos que as ACs sobre os espaços vetoriais duais, euclidiano e pseudo-euclidiano, $\mathbb{R}_{3,0}^*$ e $\mathbb{R}_{1,3}^*$ são isomorfos (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012). Além disso, outros isomorfismos importantes são: $\mathbb{R}_{1,3}^0 \simeq \mathbb{R}_{3,0}$, $\mathbb{R}_{1,3}^{*,0} \simeq \mathbb{R}_{3,0}^*$, em que o superíndice 0 denota a parte par da álgebra.

De fato, os geradores de $\mathbb{R}_{3,0}$ são mostrados na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – Tabela dos k -vetores sobre o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{3,0}$.

Elemento	Espaço a que pertence	Tipo	Dimensão
1	$\wedge_0 V$	0–vetor ou escalar	1
σ_i	$\wedge_1 V$	1–vetor	3
$\sigma_i \wedge \sigma_j$	$\wedge_2 V$	2–vetor	3
$\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k$	$\wedge_3 V$	3–vetor ou pseudoescalar	1

Fonte: Autoria própria.

Deste modo, podemos definir o produto geométrico, ou produto de Clifford, entre os vetores σ_i por meio de

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_i \wedge \sigma_j, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.24)$$

em que

$$\delta_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j = \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i), \quad \sigma_i \wedge \sigma_j = \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i), \quad (2.25)$$

são as partes simétrica e antissimétrica do produto $\sigma_i \sigma_j$, com $\sigma_i \wedge \sigma_j = -\sigma_j \wedge \sigma_i$ e δ_{ij} é a delta de Kronecker igual a 1 quando $i = j$ e 0 quando $i \neq j$. Definindo o pseudoescalar⁶ da ACE por $\mathbf{i} = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$, tal que $\mathbf{i}^2 = -1$, temos que \mathbf{i} comuta com os 1-vetores σ_i , ou seja, $\mathbf{i}\sigma_i = \sigma_i\mathbf{i}$. Um elemento genérico de $\mathbb{R}_{3,0}$ é definido por

$$B = B_0 + B^i \sigma_i + \frac{1}{2!} B^{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j + \frac{1}{3!} B^{ijk} \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k. \quad (2.26)$$

Na literatura a AC $\mathbb{R}_{3,0}$ é conhecida também como Álgebra de Pauli. Observe que B_0 , B^i , B^{ij} e B^{ijk} sendo tensores contravariantes, de modo que B^{ij} e B^{ijk} devem ser pensados como tensores cujas componentes são totalmente antissimétricas.

Por outro lado, os geradores da AC $\mathbb{R}_{1,3}$ podem ser vistos na Tabela 2 abaixo.

Tabela 2 – Tabela dos k -vetores sobre o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{1,3}$.

Elemento	Espaço a que pertence	Tipo	Dimensão
1	$\Lambda_0 V$	0–vetor ou escalar	1
γ_μ	$\Lambda_1 V$	1–vetor	4
$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$	$\Lambda_2 V$	2–vetor	6
$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha$	$\Lambda_3 V$	3–vetor	4
$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$	$\Lambda_4 V$	4–vetor ou pseudoescalar	1

Fonte: Autoria própria.

Assim, o produto geométrico entre os 1-vetores γ_μ é dado por meio de

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu + \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu, \quad (\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

em que

$$\eta_{\mu\nu} = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad (2.28)$$

são as partes simétrica e antissimétrica do produto $\gamma_\mu \gamma_\nu$, com $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = -\gamma_\nu \wedge \gamma_\mu$ e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski η de assinatura $(1, -1, -1, -1)$, de modo que $\gamma_0^2 = 1 = -\gamma_k^2$, $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = 0$ para $\mu \neq \nu$, com $\gamma_0 = \gamma^0$ e $\gamma_k = -\gamma^k$ em que $(k = 1, 2, 3)$. Estas últimas propriedades permitem classificar γ_0 e γ_k como vetores do *tipo-tempo* e do *tipo-espaço*, respectivamente. Observe também que, uma vez que o produto escalar entre dois 1-vetores linearmente independentes é nulo, eles são ortogonais e anticomutam, enquanto que se o

⁶ De modo geral, um pseudoescalar é uma generalização de um n -vetor (ou n -forma), ou elemento de volume orientado, da AE sobre o espaço vetorial V , munido de uma extensão da métrica, em que n é a dimensão do espaço vetorial.

produto exterior for nulo, eles são paralelos e comutam entre si. Outro ponto importante que precisamos enfatizar é que o produto \cdot é na verdade uma contração. Logo, a contração entre um 1-vetor e um k -vetor resulta em um $(k-1)$ -vetor, de modo que o produto \cdot deve ser pensado como um produto escalar somente quando o produto estiver envolvido entre dois 1-vetores, (VAZ JR., 1993), (VAZ JR., 2000), (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012).

Além disso, é possível definir também o pseudoescalar do espaço-tempo por meio de $\gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 = \gamma_5 = -\gamma^5 = -\gamma^0 \wedge \gamma^1 \wedge \gamma^2 \wedge \gamma^3$ satisfazendo $(\gamma_5)^2 = (\gamma^5)^2 = -1$, o que significa que γ_5 comuta com os 1-vetores σ_i e anticomuta com os 1-vetores γ_μ , ou seja, $\gamma_5 \sigma_i = \sigma_i \gamma_5$ e $\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5$. De fato, também devemos ter que $\sigma_i \gamma_0 = -\gamma_0 \sigma_i$, uma vez que podemos definir $\sigma_i \equiv \gamma_i \gamma_0 = \gamma_i \wedge \gamma_0$ (HESTENES, 2015). Podemos definir ainda, a relação entre os pseudoescalares do espaço-tempo e do espaço, por

$$\gamma_5 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = \mathbf{i}. \quad (2.29)$$

Por fim, um elemento genérico de $\mathbb{R}_{1,3}$ é definido por

$$A = A_0 + A^\mu \gamma_\mu + \frac{1}{2!} A^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu + \frac{1}{3!} A^{\mu\nu\alpha} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha + \frac{1}{4!} A^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta, \quad (2.30)$$

com A_0 , A^μ , $A^{\mu\nu}$, $A^{\mu\nu\alpha}$ e $A^{\mu\nu\alpha\beta}$ sendo tensores contravariantes, de modo que $A^{\mu\nu}$, $A^{\mu\nu\alpha}$ e $A^{\mu\nu\alpha\beta}$ devem ser pensados como tensores cujas componentes são totalmente antissimétricas. Na literatura, $\mathbb{R}_{1,3}$ é conhecido como Álgebra de Dirac ou AET, ACET, etc.

2.3 DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO E ROTAÇÕES

Na seção anterior definimos os geradores de uma ACE e de uma AET, seus produtos geométricos e como podemos escrever um elemento genérico no espaço vetorial em que estas duas álgebras são definidas. Nesta seção, mostraremos que no formalismo da AET, é possível escrever um evento x no ETM, de modo que em relação a um observador γ_0 inercial, este evento pode ser decomposto em uma parte temporal e uma parte espacial, resultado que será utilizado ao longo deste trabalho e que nos será útil, por exemplo, para expressar a decomposição do campo eletromagnético em termos dos campos elétrico e magnético na seção 3.2.

Mostraremos também como podemos expressar uma rotação arbitrária no ETM a partir do formalismo algébrico-geométrico; porém, os resultados mais importantes serão referenciados no APÊNDICE B. Este último resultado nos será útil também para calcular um *boost* do campo eletromagnético na seção 4.3, quando começarmos a discutir algumas das simetrias que deixam as EME invariantes.

Com efeito, se x denota um evento no ETM, então podemos escrever

$$x = x\gamma_0\gamma_0 = (x \cdot \gamma_0)\gamma_0 + (x \wedge \gamma_0)\gamma_0, \quad (x \cdot \gamma_0)\gamma_0 = x^0\gamma_0 = ct\gamma_0, \quad (x \wedge \gamma_0)\gamma_0 = x^i\gamma_i = \vec{x}, \quad (2.31)$$

onde c é a velocidade da luz. Além disso, a segunda e a terceira expressões acima denotam as partes temporal e espacial de x , respectivamente.

Com isto em mente, podemos expressar a linha de universo de uma partícula no ETM por meio de $x = x(\tau)$, onde τ é o um parâmetro conhecido como *tempo próprio*⁷. Para o observador definido por γ_0 , a partícula seguirá uma trajetória no espaço tridimensional dada por $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Logo, podemos escrever as partes espacial e temporal no espaço tridimensional por meio de

$$\vec{x} = \vec{x}(\tau) = (x(\tau) \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_0, \quad ct = ct(\tau) = x(\tau) \cdot \gamma_0. \quad (2.32)$$

Uma vez conhecida a linha de universo de uma partícula no ETM, sua *velocidade própria* pode ser definida por

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\gamma_\mu, \quad (2.33)$$

que de modo análogo ao caso anterior, eq. (2.31), devemos ter

$$v = v\gamma_0\gamma_0 = (v \cdot \gamma_0)\gamma_0 + (v \wedge \gamma_0)\gamma_0, \quad (v \cdot \gamma_0)\gamma_0 = \frac{dx^0}{d\tau}\gamma_0, \quad (v \wedge \gamma_0)\gamma_0 = \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \quad (2.34)$$

em que a segunda e a terceira igualdades acima são as partes temporal e espacial da velocidade própria da partícula, respectivamente.

Por outro lado, é pertinente lembrar que $(v \wedge \gamma_0)\gamma_0$ não é a velocidade da partícula no espaço tridimensional. Na verdade, no espaço tridimensional, a velocidade da partícula é dada por $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, ou seja, a velocidade relativa entre dois observadores inerciais. Em

⁷ O tempo marcado por um relógio comóvel com a partícula.

termos de $(v \cdot \gamma_0)\gamma_0$ devemos escrever

$$\vec{v} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = c \frac{(v \wedge \gamma_0)\gamma_0}{v \cdot \gamma_0}. \quad (2.35)$$

Para um observador inercial, descrito por um vetor do tipo-tempo u , tal que $u^2 = 1$ e $\frac{du}{d\tau} = 0$, temos que a posição de um evento no ETM, em relação a este observador, pode ser escrita como

$$x = xu = ct'u + \vec{x}', \quad ct' = x \cdot u, \quad \vec{x}' = (x \wedge u)u, \quad (2.36)$$

em que t' e \vec{x}' são o tempo e a posição de um evento de acordo com o observador u , respectivamente. Um ponto importante que precisa ser enfatizado é que $t' \neq t$ e $\vec{x}' \neq \vec{x}$, (VAZ JR., 2000).

Antes de continuar, consideremos uma partícula com massa situada em $x = x^\mu \gamma_\mu$, então sua quadrivelocidade pode ser escrita, como vimos, calculando a derivada de x em relação ao seu tempo próprio τ , ou seja, $\frac{dx}{d\tau} = u = u^\nu \gamma_\nu$. Com isto, podemos definir também o seu quadrimomento por $p = p^\nu \gamma_\nu$, o qual pode ser decomposto em relação a um observador inercial γ_0 da seguinte forma: $p\gamma_0\gamma_0 = (p \cdot \gamma_0)\gamma_0 + (p \wedge \gamma_0)\gamma_0$, em que naturalmente podemos definir

$$(p \cdot \gamma_0)\gamma_0 = \frac{E}{c}\gamma_0, \quad (p \wedge \gamma_0)\gamma_0 = \vec{p}, \quad (2.37)$$

como sendo suas partes temporal e espacial, respectivamente. A quantidade $E = c(p \cdot \gamma_0)$ é conhecida como a *energia própria* da partícula. Assumindo que $p^2 > 0$, isto é, é uma 1-forma do tipo-tempo, então sua *massa própria* pode ser definida por $m_0^2 = \frac{p^2}{c^2}$.

Por fim, e não menos importante, apresentamos brevemente como podemos relizar uma rotação arbitrária no ETM por meio da definição dos elementos pertencentes ao grupo de recobrimento duplo do grupo de Lorentz próprio ortócrono, eq. (2.48), o chamado grupo de spin, eq. (B.5). Um elemento deste grupo permite definir uma transformação de Lorentz *ativa*, equivalentemente, uma transformação de Lorentz *passiva* entre dois referenciais no ETM, sobre os objetos geométricos de uma AET. Uma transformação ativa não afeta o sistema de coordenadas utilizado para descrever um dado objeto no espaço, mas a afeta sua posição, enquanto que uma transformação passiva, mantendo o objeto em sua posição física, afeta somente o seu sistema de coordenadas.

De acordo com as refs. (LOUNESTO, 1997) e (HESTENES, 2015), esta transformação é definida por

$$x' \rightarrow RxR^{-1}, \quad (2.38)$$

a qual é uma rotação arbitrária no ETM onde $R \in Spin_+^\uparrow(1, 3)$, veja APÊNDICE B.

2.4 FIBRADO DE MULTIFORMAS DIFERENCIAIS

Antes de definirmos apropriadamente um FMD e de um FCET, o que será feito na seção seguinte, convém apresentarmos uma noção intuitiva do que vem a ser um fibrado.

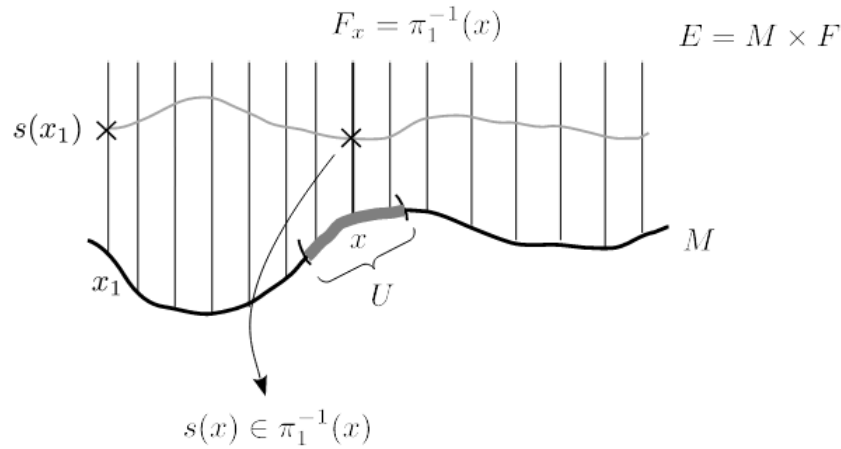
Na Física Teórica a noção de fibrado merece destaque, pois esta está intimamente relacionada com o termo *gauge* que surge a partir do fato de que as interações ou “forças fundamentais” da Natureza são manifestações de campos denominados *potenciais* ou *campos de gauge*. Por exemplo, as forças nucleares forte, fraca e a eletromagnética são exemplos de tais interações (campos descrevendo partículas de spin 1, como o fóton) as quais são regidas por potenciais 1-forma (conexões) definidos sobre seus respectivos fibrados principais definidos em cada ponto da variedade do espaço-tempo. Outros exemplos são *campos espinoriais* descrevendo partículas com spin semi-inteiro (e.g., elétron, neutrino, etc.) e *campos escalares* como o *campo de Higgs* associado a partículas de spin 0 (HUANG, 2007).

De fato, um fibrado é um espaço abstrato o qual localmente se parece com um produto de variedades, $M \times F$, mas não globalmente. Para uma discussão mais aprofundada veja as refs. (NAKAHARA, 2003), (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007), (GÖCKELER; SCHÜCKER, 1987) e também (DRECHSLER; MAYER, 1977). Para nossos propósitos M e F devem ser variedades suaves. Um exemplo de um fibrado que é localmente trivial⁸, mas não globalmente, é a *fita de Möbius*⁹. Neste trabalho estamos assumindo que os fibrados são triviais, ou seja, localmente eles são produtos de variedades diferenciáveis. Se M tem dimensão n e F dimensão n , o fibrado $E = M \times F$ tem dimensão $2n$, veja Figura 2.

⁸ Localmente as fibras sobre $U_i \in M$ são triviais, ou seja, é válida a seguinte afirmativa: $\pi_1^{-1}(U_i) \cong U_i \times F$.

⁹ Uma fita de Möbius pode ser construída usando um pedaço de papel retangular, rotacionando uma das extremidades por um ângulo de 180° e, em seguida, colando ambas as extremidades paralelamente.

Figura 2 – Ilustração de um fibrado vetorial E sobre um aberto $U \in M$ e uma seção transversal s (generalização de uma função).



Fonte: Autoria própria.

Na literatura, E é uma variedade chamada de *espaço total*, M uma *variedade base*, ou *base* e, F uma *variedade fibra*, ou *fibra*, *fibra padrão*, etc. Um fibrado E , admite uma projeção canônica

$$\pi_1 : E \rightarrow M \quad u \mapsto \pi_1(u) = x, \quad (2.39)$$

tal que $\pi_1^{-1}(x) = F_x$, uma fibra sobre x , é difeomorfa a F para todo $x \in M$. Em particular, se a fibra F é um espaço vetorial, o fibrado é chamado de fibrado vetorial, enquanto que, se ela for um GL, este é chamado de fibrado principal, veja ref. (NAKAHARA, 2003).

Nesta seção, definiremos um FMD e um FCET, que localmente se assemelha a uma AET. Apresentamos os subfibrados de um FMD quando este é definido sobre o ETM, em que é possível definir as noções de 1-forma, 2-forma, etc., objetos geométricos pertencentes às seções de seus respectivos fibrados. Em particular, o campo eletromagnético, o qual será definido na seção 3.2, é uma seção do subfibrado de dimensão 6 do FMD o qual, por sua vez, é isomorfo ao FCET de mesma dimensão.

Logo, um fibrado de k -formas diferenciais ou FMD é definido por uma AE sobre o fibrado cotangente por meio de

$$\bigwedge T^*M = \mathcal{T}_k^0 M / \mathcal{I}, \quad (2.40)$$

em que T^*M é um fibrado cotangente definido sobre uma variedade suave M de dimensão n , $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}_k^0 M$ é um *ideal bilateral* gerado pelos elementos da forma $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$ com as

1-formas $\alpha, \beta \in T^*M$. Explicitamente, este fibrado pode ser escrito como

$$\bigwedge T^*M = \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge T_x^*M = \bigsqcup_{x \in M} \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k T_x^*M, \quad (2.41)$$

em que $\bigsqcup_{x \in M}$ denota a união disjunta dos espaços cotangentes em cada ponto $x \in M$, o que permite identificar uma estrutura de fibrado da forma

$$\left(\bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k T_x^*M, (\pi_1^*)^{\otimes k}, M, ((\mathbb{R}^n)^*)^{\otimes k}, (G(n, \mathbb{R}))^{\otimes k} \right). \quad (2.42)$$

Aqui devemos destacar que, $\bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k T_x^*M$ é o espaço total em x , ou a fibra no ponto x , enquanto que $(\pi_1^*)^{\otimes k}$ é a k -ésima potência tensorial da projeção canônica que associa elementos do espaço total aos elementos da variedade de base M , $((\mathbb{R}^n)^*)^{\otimes k}$ é a fibra padrão deste fibrado, cuja estrutura é formada por uma k -ésima potência tensorial do espaço vetorial real dual de dimensão n , enquanto que $(G(n, \mathbb{R}))^{\otimes k}$ é também dada pela k -ésima potência tensorial do grupo geral linear (DRECHSLER; MAYER, 1977) e (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Além disso, quando a variedade de base M admite em cada um de seus pontos um tensor métrico, a estrutura de grupo do fibrado definido sobre esta é reduzida ao grupo ortonormal, em especial, quando a métrica é pseudo-euclidiana temos que a estrutura de grupo se torna o grupo pseudo-ortogonal $O(p, q)$ (NAKAHARA, 2003).

De modo geral, localmente em $U \in M$, uma k -forma é escrita como

$$A = \frac{1}{k!} \sum_{\nu_1 \dots \nu_k} A_{\nu_1 \dots \nu_k} \theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_k} = \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_k} A_{\nu_1 \dots \nu_k} \theta^{\nu_1 \dots \nu_k} \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^k T^*M), \quad (2.43)$$

como uma restrição dos índices $\nu_1 < \dots < \nu_k$, de modo que $\{\theta^\alpha\} = \{dx^\alpha\}$ são seções locais e ortonormais gerando este fibrado. Temos aqui que $\Gamma(U, \bigwedge^k T^*M)$ corresponde ao espaço de seções locais do fibrado de formas diferenciais de grau k sobre o espaço cotangente. Em particular, para $n = 4$, temos que

$$\bigsqcup_{x \in M} \bigoplus_{k=0}^4 \bigwedge^k T_x^*M = \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^0 T_x^*M \oplus \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^1 T_x^*M \oplus \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^2 T_x^*M \oplus \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^3 T_x^*M \oplus \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^4 T_x^*M \quad (2.44)$$

é uma soma direta de subfibrados de 0-formas, 1-formas, etc., em cada ponto da variedade M . Se a dimensão da variedade é 4, então a dimensão do FMD é $2^4 = 16$, uma decorrência da soma dos coeficientes binomiais

$$\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{(4-k)!k!} = 2^4 = 16 \quad (2.45)$$

no intervalo $0 \leq k \leq 4$. Para este caso particular, seus elementos e suas dimensões podem ser visualizados na Tabela 3 abaixo.

Tabela 3 – Tabela das k -formas sobre o ETM de acordo com a teoria de fibrados.

k -forma	Seção do espaço	Tipo	Dimensão
$A(x) = A_0$	$\text{sec}\Gamma(U, \wedge^0 T_x^* M)$	0–forma ou escalar	1
$\frac{1}{1!} A_{\nu_1}(x) \theta^{\nu_1}$	$\text{sec}\Gamma(U, \wedge^1 T_x^* M)$	1–forma	4
$\frac{1}{2!} A_{\nu_1 \nu_2}(x) \theta^{\nu_1} \wedge \theta^{\nu_2}$	$\text{sec}\Gamma(U, \wedge^2 T_x^* M)$	2–forma	6
$\frac{1}{3!} A_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(x) \theta^{\nu_1} \wedge \theta^{\nu_2} \wedge \theta^{\nu_3}$	$\text{sec}\Gamma(U, \wedge^3 T_x^* M)$	3–forma	4
$\frac{1}{4!} A_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(x) \theta^{\nu_1} \wedge \theta^{\nu_2} \wedge \theta^{\nu_3} \wedge \theta^{\nu_4}$	$\text{sec}\Gamma(U, \wedge^4 T_x^* M)$	4–forma ou pseudoescalar	1

Fonte: Autoria própria.

2.5 FIBRADO DE CLIFFORD DO ESPAÇO-TEMPO

Uma vez definido um FMD, o próximo passo é definirmos um FC, nos permitindo estabelecer também, de uma vez por todas, um FCET. A principal ideia por trás deste desenvolvimento é que, no formalismo de fibrados as EME podem ser definidas de maneira natural e moderna (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Além disso, enfatizaremos que o operador de Dirac, o qual está associado ao operador de evolução no ETM em teoria quântica de campos, no formalismo algébrico-geométrico, pode ser considerado um objeto geométrico por excelência, sem nenhuma menção à sua representação matricial, a qual negligencia este fato (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Este operador nos será útil, por exemplo, para escrevermos, no capítulo 3, as EME na presença de cargas elétricas e monopolos. Definiremos também, em seguida, a relação que este operador tem com os operadores da AE, a saber, o operador diferencial e codiferencial, nos permitindo, nas seções 3.4 e 4.2, definir o campo eletromagnético em termos de potências e obter os *gauges* de Lorenz generalizados em termos destes últimos, respectivamente.

Para iniciarmos nossa discussão, um FC é definido por

$$C\ell(M, g) = \mathcal{T}_k^0 M / J_g = \bigsqcup_{x \in M} C\ell(T_x^* M, g_x) \quad (2.46)$$

onde $J_g \subset \mathcal{T}_k^0 M$ é um ideal bilateral da álgebra dos tensores covariantes de grau k (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Este fibrado é gerado pelos elementos da forma $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha = 2g(\alpha, \beta)$, em que $\alpha, \beta \in \Gamma(M, T_x^* M) \subset \Gamma(M, \mathcal{T}_k^0 M)$. Aqui $C\ell(T_x^* M, g_x)$

representa a AC do espaço vetorial métrico (T_x^*M, g_x) em um ponto da variedade M . O FC tem também um gradeamento $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$, ou seja, ele pode ser escrito por meio de uma soma direta $C\ell(M, \eta) = C\ell^{(0)}(M, g) \oplus C\ell^{(1)}(M, g)$, em que 0 denota sua parte par e 1 sua parte ímpar. A parte par deste fibrado define também um FC de modo que

$$C\ell^{(0)}(M, g) = \bigsqcup_{x \in M} C\ell^{(0)}(T_x^*M, g) \hookrightarrow C(M, g). \quad (2.47)$$

Desde que $C\ell(M, g)$ seja um fibrado vetorial, também podemos expressar sua relação com seu fibrado principal associado por $C\ell(M, g) = P_{SO_+^\uparrow(p, q)} \times_{Ad} \mathbb{R}_{p, q}$, enquanto que $Ad : SO(p, q)_+^\uparrow \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{p, q})$ é a representação adjunta que associa elementos do grupo de Lorentz próprio ortócrono com os elementos do espaço de automorfismos¹⁰ da AC, $\mathbb{R}_{p, q}$, pela seguinte relação: $\Lambda \rightarrow Ad_\Lambda B = \Lambda B \Lambda^{-1}$, em que $\Lambda \in SO_+^\uparrow(p, q)$ e B , uma k -forma local, pertence a $\mathbb{R}_{p, q}^* \simeq \mathbb{R}_{p, q} \simeq C\ell(T_x^*M, g_x)$. Observe que para $p = 1$ e $q = 3$ a fibra padrão, do fibrado principal $P_{SO(1, 3)_+^\uparrow}$, associado ao FCET, é o grupo de Lorentz próprio ortócrono definido por

$$SO(1, 3)_+^\uparrow = \left\{ \Lambda \in SO(1, 3) \mid \text{sgn} \Lambda^0_0 = 1, \det \Lambda = 1 \right\}, \quad (2.48)$$

o qual deixa a métrica de Minkowski η invariante, ou seja, deve ser válido que $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, ou em termos de componentes, $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\sigma_\mu \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho_\nu$ com $(\mu, \nu, \sigma, \rho = 0, 1, 2, 3)$. Este grupo será importante para definirmos o grupo de spin no APÊNDICE B. Além disso, $\text{sgn} \Lambda^0_0 = 1$ implica que o princípio de causalidade é respeitado, enquanto que o $\det \Lambda = 1$, implica que as transformações são rotações.

Com isto, nosso interesse estará voltado às seguintes AC: $p = 1$ (uma dimensão temporal positiva definidas), $q = 3$ (três dimensões espaciais negativas definida). Logo, temos que $\mathbb{R}_{1, 3}^* \simeq \mathbb{R}_{1, 3} \simeq C\ell(T_x^*M, \eta_x)$, é a AET. Por outro lado, a parte par do FCET deverá ser: $p = 3$ (três dimensões espaciais positivas definidas), $q = 0$ (zero dimensão temporal negativa definida), resultando em $\mathbb{R}_{3, 0}^* \simeq \mathbb{R}_{3, 0} \simeq C^{(0)}\ell(T_x^*M, \eta_x)$. Isto significa que a parte par do FCET, que corresponde ao fibrado do espaço, é um subfibrado do FCET, ou seja, $C^{(0)}\ell(T_x^*M, \eta_x) \hookrightarrow C\ell(T_x^*M, \eta_x)$.

¹⁰ Um difeomorfismo é definido por meio de uma aplicação bijetiva (um elemento do contradomínio é ligado uma única vez por um elemento do domínio) $\alpha : M \rightarrow N$, entre variedades M, N , tal que α e sua inversa α^{-1} sejam suaves de classe C^∞ , ou seja, infinitamente diferenciáveis. Quando $N = M$, α é dito ser um automorfismo (LEE, 2013).

Devemos enfatizar também que o FC, $C\ell(M, g)$, é munido de um operador

$$\partial = \theta^\alpha D_{e_\alpha}, \quad (2.49)$$

em que $\{\theta^\alpha\} = \{dx^\alpha\}$ e $\{e_\alpha\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ são as seções locais dos fibrados T^*U e TU em que o aberto U satisfaz, $U \subset M$, respectivamente. Observe que TU é o espaço tangente definido localmente em $U \in M$.

Para uma k -forma A , pertencente a seção de $C\ell(M, g)$, é possível escrever

$$\partial A = \theta^\alpha (D_{e_\alpha} A) = \theta^\alpha \lrcorner (D_{e_\alpha} A) + \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha} A), \quad (2.50)$$

de modo que $\partial \lrcorner A = \theta^\alpha \lrcorner (D_{e_\alpha} A)$ e $\partial \wedge A = \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha} A)$, onde D_{e_α} denota a derivada covariante na direção do campo referencial local $\{e_\alpha\}$, associado às coordenadas locais $x^\alpha \subset U \in M$, em que \lrcorner denota a contração à esquerda da AE (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012). Além disso, outra definição que se segue, é o operador de Kähler-Atiyah, (GRAF, 1978), definido por

$$\partial = d - \delta, \quad (2.51)$$

em que d é operador diferencial e δ , o operador codiferencial, de modo que eles correspondem a $d = \partial \wedge$ e $-\delta = \partial \lrcorner = \partial \cdot$. O primeiro quando atua sobre uma k -forma fornece uma $(k+1)$ -forma, enquanto que o segundo fornece uma $(k-1)$ -foma. Note que o operador δ atua sobre uma k -forma A_k da seguinte maneira: $\delta A_k = (-1)^{n(k+1)+s+1} \star d \star A_k$, onde s é o número associado à assinatura da métrica g e \star é o operador de Hodge, denotado por $\star : \text{sec}\Gamma(U, \wedge^k T^* M) \rightarrow \text{sec}\Gamma(M, \wedge^{n-k} T^* M)$, o qual permite relacionar os fibrados $\wedge^k T^* M$ e $\wedge^{n-k} T^* M$, veja ref. (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007) para a definição deste operador. Para $n = 4$, com assinatura $(1, -1, -1, -1)$ temos $s = -1$.

Antes de prosseguir, devemos salientar que existe um isomorfismo entre o FCET e o FMD construído sobre o ETM. Isto significa que é possível definir uma aplicação de Clifford γ agindo como um operador sobre os geradores do espaço cotangente $\{dx^\mu\}$, (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012). Em termos de componentes, podemos escrever $\gamma^\mu = g^{\mu\nu} I_\nu + E^\mu$, em que $g^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço $\mathbb{R}^{p,q}$, I_ν e E^μ são as componentes de dois operadores lineares, os quais devem atuar sobre dx_ν e seu recíproco dx^μ , respectivamente. Estes resultados permitem escrever então $\gamma^\mu = \gamma(dx^\mu)$, o qual forma um conjunto $\{\gamma^\mu\}$ de seções

locais ortonormais gerando um FC $Cl(T_x^*M, g)$ em $x \in U \subset M$. A aplicação γ pode ser omitida de forma que a relação entre o FCET e o FMD, sobre o ETM, seja mais direta, ou seja, $\gamma^\mu = dx^\mu$. Este último resultado permite identificar o isomorfismo entre os fibrados

$$Cl(M, g) \simeq \bigwedge T^*M, \quad (2.52)$$

o qual deve ser pensado no sentido vetorial e não algébrico. Logo, para $n = 4$ um elemento arbitrário local do FCET pode ser escrito como

$$A = A_0 + A^\mu \gamma_\mu + A^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + A^{\mu\nu\alpha} \gamma_{\mu\nu\alpha} + A^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu\alpha\beta} \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^k T^*M) \quad (\mu < \nu < \alpha < \beta), \quad (2.53)$$

o que significa que $\Gamma(M, \bigwedge^k T^*M) \hookrightarrow Cl(M, \eta)$, permitindo expressar também o operador ∂ definido em termos da derivada covariante, eq. (2.54), da seguinte forma: $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$, conhecido na literatura como operador de Dirac (LAWSON; MICHELSON, 1989). Em termos de componentes temos

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \in \text{sec}\Gamma(M, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow Cl(M, \eta). \quad (2.54)$$

2.6 OPERAÇÕES E RELAÇÕES NOTÁVEIS

Na seção anterior formalizamos o que vem a ser um FMD e destacamos sua estreita relação como um FCET. Para esta seção, dedicaremos tempo para apresentar algumas operações que serão utilizadas a partir do próximo capítulo, a saber, as operações: involução graduada, reversão e conjugação. A reversão será importante na Seções 3.5 e 4.3 para calcularmos as EME reversas, nos permitindo definir o fluxo de energia do campo eletromagnético, e o reverso do gerador de *boost*, o qual é discutido no APÊNDICE B. Já a involução graduada e a conjugação desempenharão um papel importante quando estivermos preparados para discutir sobre a simetria *CPT* na seção 4.4, porque mostraremos que tais operações estão intimamente relacionadas com as operações de inversão espacial e reversão temporal.

Para finalizar, enfatizaremos alguns dos produtos que faremos uso em alguns momentos, *a posteriori*. Enfatizamos que o produto interno contraído entre uma k -forma e

1-forma pode ser simétrico ou antissimétrico dependendo se k é par ou ímpar. O mesmo deve ocorrer quando calcularmos o produto exterior entre 1-forma e uma k -forma.

Definiremos em seguida, o elemento de volume no ETM para $n = 4$. Este elemento de volume orientado define um pseudoescalar na AET em relação à métrica de Minkowski. Com ele podemos exprimir uma relação de dualidade entre o produto exterior e o produto interno contraído entre os objetos geométricos desta álgebra, o que significa que podemos, a primeira vista, relacionar propriedades simétricas e antissimétricas destes objetos. Diga-se de passagem que, teorias supersimétricas, as quais buscam descrever bósons (partículas de spin inteiro, e.g., o fóton) e férmions (partículas de spin semi-inteiro, e.g., o elétron) em uma mesma teoria, fazem intenso uso destas propriedades (SHADMI, 2016). Além disso, é possível definir uma relação entre o pseudoescalar e o operador de dualidade de Hodge da AE, a menos de um sinal relativo.

Para começar, definindo o projetor

$$\langle \rangle_k : \sec\Gamma(U, \bigwedge^k T^*M) \rightarrow \sec\Gamma(M, \bigwedge^k T^*M) \hookrightarrow \sec C\ell(M, g), \quad (2.55)$$

podemos obter os objetos geométricos definidos sobre os subfibrados do FCET. Uma vez que um objeto genérico deste fibrado é dado pela eq. (2.53), temos então que

$$\langle A \rangle_0 = A_0, \quad \langle A \rangle_1 = A^\mu \gamma_\mu, \quad \langle A \rangle_2 = A^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad \langle A \rangle_3 = A^{\mu\nu\alpha} \gamma_{\mu\nu\alpha}, \quad \langle A \rangle_4 = A^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.56)$$

Deste modo, as operações involução graduada, reversão e a conjugação são dadas por

$$\langle \hat{A} \rangle_k = (-1)^k \langle A \rangle_k, \quad \langle \tilde{A} \rangle_k = (-1)^{k(k-1)/2} \langle A \rangle_k, \quad (2.57)$$

$$\langle \bar{A} \rangle_k = \langle \tilde{\hat{A}} \rangle_k = \langle \hat{\tilde{A}} \rangle_k = (-1)^{k(k-1)/2+k} \langle A \rangle_k, \quad (2.58)$$

respectivamente. A Tabela 4 apresentam as ações destas operações sobre os elementos do FCET para $n = 4$.

Por outro lado, se A e B são uma k -forma e uma r -forma locais do FCET, respectivamente, o produto exterior entre elas deve satisfazer $A \wedge B = (-1)^{kr} B \wedge A$, de modo que

$$A \wedge B = \frac{1}{k!r!} A^{\nu_1 \dots \nu_k} B^{\mu_1 \dots \mu_r} \gamma_{\nu_1 \dots \nu_k} \wedge \gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{1}{k!r!} A^{\nu_1 \dots \nu_k} B^{\mu_1 \dots \mu_r} \gamma_{\nu_1 \dots \nu_k \mu_1 \dots \mu_r}, \quad (2.59)$$

Tabela 4 – Operações identidade, involução graduada, reversão e conjugação de Clifford.

Símbolo	Correspondência	Operação
$\langle A \rangle_k$	$\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$	Identidade
$\langle \hat{A} \rangle_k$	$\langle A \rangle_0 - \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$	Involução graduada
$\langle \tilde{A} \rangle_k$	$\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$	Reversão
$\langle \bar{A} \rangle_k$	$\langle A \rangle_0 - \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 + \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$	Conjugação

Fonte: Autoria própria.

enquanto que o produto interno contraído

$$A \cdot B = (-1)^{k(r-1)} B \cdot A, \quad (k \leq r), \quad (2.60)$$

ou seja,

$$A \cdot B = \frac{1}{k!r!} A^{\nu_1 \dots \nu_k} B^{\mu_1 \dots \mu_r} \gamma_{\nu_1 \dots \nu_k} \cdot \gamma_{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (2.61)$$

Com o auxílio desses dois produtos é possível generalizar os produtos simétrico e antissimétrico entre 1-formas da eq. (2.28) por meio de

$$\alpha \cdot A = \frac{1}{2}(\alpha A - (-1)^k A \alpha), \quad \alpha \wedge A = \frac{1}{2}(\alpha A + (-1)^k A \alpha), \quad (2.62)$$

o que significa que se escolhermos $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in T^*M$ e $A = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \sec \Gamma(U, \wedge^k T^*M) \hookrightarrow \mathcal{C}l(M, g)$, o produto interno contraído entre α e A pode ser escrito como

$$\alpha \cdot (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} (\alpha \cdot \alpha_s) (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{s-1} \wedge \alpha_{s+1} \wedge \dots \wedge \alpha_k), \quad (2.63)$$

de tal forma que quando o termo de índice s aparece envolvido no produto interno contraído, ele deve ser omitido no produto exterior, respeitando um sinal relativo, etc. Note que para $k = 2$, o produto interno contraído entre uma 2-forma e uma 1-forma é antissimétrico, enquanto que o produto exterior é simétrico.

Definindo também uma extensão da métrica por $\det \eta = \det [\eta(\gamma_\mu, \gamma_\nu)]$, em que η é a métrica de Minkowski, é possível escrever um elemento de volume

$$\tau_\eta = \sqrt{|\det \eta|} \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \in \Gamma(U, \wedge^4 T^*M) \hookrightarrow \mathcal{C}l(M, g), \quad (2.64)$$

o que significa que todos os eventos do ETM têm uma orientação, em particular, em $x^\mu \subset U \in M$ com $(\mu = 0, 1, 2, 3)$. Logo, também podemos definir uma extensão do produto

interno contraído entre duas multiformas por

$$A \wedge \star B = \langle A, B \rangle \tau_\eta, \quad (2.65)$$

em que $\langle A, B \rangle = \tilde{A} * B$, onde $*$ denota o produto escalar estendido da AG (VAZ JR., 1993), uma AE definida sobre um espaço vetorial munida de uma métrica. Para o caso particular $k = r = 4$, temos

$$A = \gamma_0 \wedge \cdots \wedge \gamma_3, \quad B = \gamma_0 \wedge \cdots \wedge \gamma_3, \quad (2.66)$$

logo

$$(\gamma_3 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_0) * (\gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3) = \det \begin{vmatrix} \gamma_0 * \gamma_0 & \gamma_0 * \gamma_1 & \gamma_0 * \gamma_2 & \gamma_0 * \gamma_3 \\ \gamma_1 * \gamma_0 & \gamma_1 * \gamma_1 & \gamma_1 * \gamma_2 & \gamma_1 * \gamma_3 \\ \gamma_2 * \gamma_0 & \gamma_2 * \gamma_1 & \gamma_2 * \gamma_2 & \gamma_2 * \gamma_3 \\ \gamma_3 * \gamma_0 & \gamma_3 * \gamma_1 & \gamma_3 * \gamma_2 & \gamma_3 * \gamma_3 \end{vmatrix} = -1 \quad (2.67)$$

Portanto, como $\sqrt{|\det \eta|} = 1$, o elemento de volume do espaço-tempo pode ser escrito como

$$\tau_\eta = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 = \gamma_5 \in \Gamma(U, \bigwedge^4 T^* M) \hookrightarrow Cl(M, g). \quad (2.68)$$

Isto implica que o produto escalar estendido entre duas k -formas no espaço-tempo segue de $\langle A, B \rangle = \det(\eta(\gamma_\mu, \gamma_\nu))$ para $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$. Note que para $k \neq r$, este último produto implica que $\langle A, B \rangle = 0$. Além disso, no espaço-tempo podemos escrever também uma relação entre o pseudoescalar γ^5 e o operador de Hodge \star por meio de

$$\gamma^5 \langle A \rangle_k = (-1)^r \star \langle A \rangle_k, \quad r = 1 \ (k = 1, 2, 3), \quad r = 2 \ (k = 0, 4). \quad (2.69)$$

Os resultados anteriores nos dizem que o FCET é isomorfo ao fibrado de formas diferenciais com uma extensão da métrica do ETM. Em particular, por simplicidade, iremos utilizar a notação da ref. (HESTENES, 2015), tal que o produto de Grassmann $*$ e produto interno contraído \cdot devem ser tomados como sendo idênticos. Por outro lado, a contração à esquerda \lrcorner não será utilizada, salvo menção explícita. Devemos salientar que, do ponto de vista matemático, estes produtos devem ser tomados como sendo distintos, dependendo da situação em que eles aparecem. Assim, utilizaremos o produto \cdot na maioria das vezes.

3 EQUAÇÕES DE MAXWELL DO ELETROMAGNETISMO

O presente capítulo é dedicado às Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME) e algumas de suas consequências mais importantes.

Estas equações fundamentam uma das mais belas teorias formuladas pela mente humana, o eletromagnetismo. Sobre a discussão histórica envolvendo o surgimento destas equações veja, por exemplo, (TONIDANDEL; ARAÚJO; BOAVENTURA, 2018), e para uma discussão conceitual mais aprofundada, (LIMA, 2019). De fato, elas podem ser deduzidas a partir de argumentos de simetria¹ e observações experimentais².

Embora não tenhamos evidências experimentais da existência de monopolos magnéticos, do ponto de vista teórico, eles podem explicar o por que cargas elétricas serem quantizadas, (DIRAC, 1931), (DIRAC, 1948). Outra consequência é que teorias de Grande Unificação, teorias que buscam descrever as leis do Universo a partir de uma única teoria fundamental, prevêm a existência de monopolos, (RAJANTIE, 2012). No entanto, análogos de monopolos podem ser observados em experimentos com gás de átomos de Rb, a baixa temperatura, (RAY et al., 2015). Além disso, o experimento MOEDAL tem como um dos seus objetivos a procura por *dyons*, partículas hipotéticas contendo cargas elétrica e magnética no *Large Hadron Collider* (LHC), ainda sem sucesso (ACHARYA et al., 2020).

3.1 FORMALISMO VETORIAL

Nesta seção apresentamos as EME no formalismo vetorial, na presença de monopolos, usando argumentos de simetria e resultados experimentais, que serão importantes adiante quando definirmos os campos elétrico e magnético em termos dos elementos do Fibrado de Clifford do Espaço (FCE), a parte par do Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET).

Assumindo a existência de monopolos, a densidade de força de Lorentz generalizada,

¹ As equações de Maxwell são invariantes pelas simetrias de inversão espacial, rotação espacial e translação no espaço (ZANGWILL, 2012).

² Tais observações experimentais incluem: a força de Lorentz, a conservação da carga elétrica, o princípio de superposição e a existência de ondas eletromagnéticas (ZANGWILL, 2012).

para cargas elétricas e magnéticas, no espaço tridimensional, pode ser escrita como

$$\mathbf{f} = \rho_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_m(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad (3.1)$$

em que \mathbf{f} é a densidade de força de Lorentz, \mathbf{E} e \mathbf{B} os campos elétrico e magnético, enquanto que \mathbf{v} é a velocidade de uma partícula localizada em uma região do espaço. Além disso, ρ_e e ρ_m são as densidades, por unidade de volume, de carga elétrica e de monopolos magnéticos, uniformemente distribuídas na região ocupada pela partícula (SCHUWINGER et al., 1998).

Em termos de componentes, podemos escrever

$$f_k \hat{e}_k = \rho_e E_i \hat{e}_i + (J_e)_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k + \rho_m B_j \hat{e}_j - (J_m)_j E_i \epsilon_{jik} \hat{e}_k, \quad (3.2)$$

onde foram definidas as componentes espaciais das densidades de correntes de carga elétrica e magnética

$$(J_e)_i = \rho_e v_i, \quad (J_m)_j = \rho_m v_j, \quad (3.3)$$

e ainda $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$, em que \hat{e}_i são vetores unitários, enquanto que ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita totalmente antissimétrico associado as três direções espaciais.

Com efeito, devemos levar em conta que a carga elétrica e o monopolo magnético não podem ser criados e nem destruídos, o que significa que eles precisam ser conservados, ou seja, precisam satisfazer equações de continuidade

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0, \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0, \quad (3.4)$$

em que

$$\nabla = \hat{e}_i \partial_i = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.5)$$

é o operador gradiente e

$$\mathbf{J}_e = (J_e)_i \hat{e}_i, \quad \mathbf{J}_m = (J_m)_j \hat{e}_j \quad (3.6)$$

as densidades de corrente elétrica e magnética, respectivamente. Tais equações nos dizem que o fluxo de corrente elétrica (resp. magnética) que deixa uma dada superfície, envolvendo um volume arbitrário no espaço, contendo cargas elétricas (resp. monopolos magnéticos),

é uma consequência do decréscimo da quantidade de carga elétrica (resp. monopolo magnético) dentro deste volume.

Por outro lado, levando em conta o princípio de superposição temos que, dada uma densidade de carga ocupando uma região arbitrária do espaço-tempo, uma excitação desta densidade produzirá uma densidade de corrente nesta região, e conseqüentemente, ondas eletromagnéticas propagarão por todo o espaço, em todas as direções. O mesmo argumento também é válido se, considerarmos outra região do espaço-tempo, porém em um instante subsequente. Logo, o princípio de superposição nos diz que, a combinação das ondas produzidas em regiões arbitrárias do espaço-tempo, em momentos distintos, terão o mesmo padrão caso sejam produzidas ao mesmo tempo e em uma mesma região específica.

Agora, para deduzirmos as EME, devemos lembrar que a ação de uma matriz A de dimensão 3×3 , pertencente ao grupo especial ortogonal $SO(3, \mathbb{R})$, definido pela eq. (2.12) para $n = 3$, sobre vetores do espaço tridimensional real, é uma rotação, pois o determinante de A é igual a 1 (ZANGWILL, 2012). Assim, \mathbf{f} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , $\mathbf{J}_e \times \mathbf{B}$, $\mathbf{J}_m \times \mathbf{E}$ precisam ser tensores de ordem 1, ou seja, vetores. Por outro lado, uma vez que \mathbf{r} é um vetor polar³, temos também que $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é um vetor polar, conseqüentemente, \mathbf{f} o é. Deste modo, estamos supondo que a densidade de carga elétrica ρ_e é uma quantidade axial⁴, equanto que a densidade de carga magnética ρ_m é uma quantidade polar.

Como já sabemos que a eq. (3.1) é polar, identificamos que os termos $\rho_e \mathbf{E}$ e $\mathbf{J}_e \times \mathbf{B}$, $\rho_m \mathbf{B}$ e $\mathbf{J}_m \times \mathbf{E}$ são polares, pois $\rho_e \mathbf{v} = \mathbf{J}_e$ é polar e $\rho_m \mathbf{v} = \mathbf{J}_m$ é axial.

Em posse destas informações, devemos agora tentar supor as equações de movimento para os campos. Uma vez que estamos admitindo o princípio de superposição dos campos, devemos nos restringir a operadores lineares no espaço e no tempo. O primeiro palpite a ser usado é que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \propto \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \propto \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

mas este resultado não é fisicamente correto, pois as soluções para tais equações são exponencias crescentes e decrescentes no tempo. Por exemplo, a solução cuja exponencial

³ Um vetor polar é vetor que se transforma sob a ação de uma inversão espacial $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$.

⁴ Um vetor axial, ou pseudovetor, é um vetor que permanece invariante sob a ação de uma inversão espacial, ou seja, $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}$. Dois exemplos são: o momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e o campo magnético \mathbf{B} (ZANGWILL, 2012).

é crescente no tempo, diverge quando $t \rightarrow \infty$. Logo, as soluções precisam ser funções harmônicas⁵ (ARNOLD, 2004).

Outro palpite seria então assumir que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \propto \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \propto \mathbf{E}, \quad (3.8)$$

o que também não é correto pois, elas misturam vetores polares e axiais em lados diferentes em cada equação.

Por outro lado, uma suposição interessante seria

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \propto \mathbf{r} \times \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \propto \mathbf{r} \times \mathbf{B}, \quad (3.9)$$

sendo que a primeira expressão fornece uma relação axial e a segunda uma relação polar, respectivamente. Embora esta seja uma suposição razoável, ela também não está correta, uma vez que ela não é invariante por uma translação espacial, onde uma translação espacial implica que $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{c}$, em que \mathbf{c} é um vetor constante.

Notando que $\nabla = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é invariante por uma translação espacial, mas não é invariante por uma inversão espacial, outras suposições para o lado direito das relações eq. (3.7) são: $\nabla \cdot \mathbf{B}$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}$, respectivamente. Como estas quantidades são escalares, correspondendo aos fluxos dos campos magnético e elétrico, respectivamente, elas não servem para o presente propósito, que é obter relações vetoriais, uma axial e outra polar, respectivamente.

Deste modo, supondo a existência de constantes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 , um palpite que satisfaz os requerimentos de invariância por rotação, translação e inversão (no espaço) é

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = k_1 \nabla \times \mathbf{B} + k_3 \mathbf{J}_e, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = k_2 \nabla \times \mathbf{E} + k_4 \mathbf{J}_m. \quad (3.10)$$

Tomando o divergente da primeira equação e usando as leis de conservação, eq. (3.4), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E} + k_3 \rho_e) = 0, \quad (3.11)$$

uma vez que $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$, cujo resultado segue do Lema de Poincaré para o operador diferencial eq. (3.58). Usando o mesmo raciocínio com a segunda equação, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B} + k_4 \rho_m) = 0. \quad (3.12)$$

⁵ Exemplos de funções harmônicas são as funções seno, cosseno, exponenciais complexas, etc.

Os resultados anteriores permitem escrever

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = k_1 \nabla \times \mathbf{B} + k_3 \mathbf{J}_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -k_3 \rho_e, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = k_2 \nabla \times \mathbf{E} + k_4 \mathbf{J}_m, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = -k_4 \rho_m.$$

O primeiro par de equações fornece uma equação de movimento totalmente polar, em relação ao produto vetorial, e uma equação de movimento escalar. Em relação ao segundo par de equações, temos uma equação de movimento totalmente axial, em relação ao produto vetorial, e uma equação de movimento escalar.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), as constantes que aparecem nas equações anteriores são: $k_1 = c^2$, $k_2 = -1$, $k_3 = -1/\epsilon_0$ e $k_4 = -\mu_0$. Logo, as EME estendidas no vácuo, no formalismo vetorial, são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \quad (3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

No primeiro par das equações anteriores, é possível identificar as leis de Gauss da eletricidade e do magnetismo, as quais nos dizem que o fluxo do campo elétrico (resp. magnético) que passa por um elemento de superfície envolvendo um elemento de volume arbitrário no espaço, é uma consequência da quantidade de carga elétrica (resp. monopolo magnético), por unidade de volume, que ocupa seu interior.

Para o segundo par de equações, temos a lei de Faraday-Maxwell generalizada, a qual nos diz que a circulação do campo elétrico, em torno de um circuito fechado no espaço, é resultado da corrente de monopolo magnético que circula sobre o circuito e do decréscimo temporal do campo magnético que o atravessa.

Por fim, e não menos importante, temos a lei Ampère-Maxwell, revelando que a circulação do campo magnético, em torno de um circuito fechado, é provocada pela combinação da densidade de corrente elétrica que flui por este circuito e pela taxa de variação temporal positiva do campo elétrico que o atravessa. Estes resultados mostram que os campos elétrico e magnético estão intimamente relacionados, a existência de um implica na existência de outro.

3.2 FORMALISMO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICO

Tendo obtido as EME, eq. (3.14), nesta seção desenvolveremos estas equações a partir da correspondência entre o espaço vetorial euclidiano tridimensional e o FCE, por meio da relação entre o produto vetorial e exterior. Com isto, teremos condições de expressá-las no FCET, as quais se tornam independentes de coordenadas, sem fazer nenhuma menção a componentes, generalizando os formalismos vigentes.

Agora, a partir das EME generalizadas, eq. (3.14), em unidade relativística $c = 1$, podemos escrever sem problemas os produtos vetoriais dos campos elétrico e magnético em termos do produto exterior onde usamos a identidade (C.15). Com efeito, temos

$$\nabla \times \mathbf{E} = \epsilon_{ijk} \partial_i E_j \sigma_k = -\mathbf{i}(\sigma_i \partial_i \wedge E_j \sigma_j) = -\gamma^5(\sigma_i \partial_i \wedge E_j \sigma_j) = -\gamma^5(\nabla \wedge \mathbf{E}), \quad (3.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} \partial_i B_j \sigma_k = -\mathbf{i}(\sigma_i \partial_i \wedge B_j \sigma_j) = -\gamma^5(\sigma_i \partial_i \wedge B_j \sigma_j) = -\gamma^5(\nabla \wedge \mathbf{B}). \quad (3.16)$$

Devemos salientar que os campos elétrico e magnético correspondem a seções locais da parte par do FCET.

Desta forma, podemos escrever o produto exterior entre o operador gradiente e os campos elétrico e magnético da seguinte forma:

$$-\gamma^5(\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad -\gamma^5(\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Multiplicando ambos os lados por γ^5 , notando que este é um pseudoescalar satisfazendo $(\gamma^5)^2 = -1$, de modo que ele pode entrar dentro da expressão da derivada temporal, encontramos

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\gamma^5 \mathbf{J}_m - \frac{\partial(\gamma^5 \mathbf{B})}{\partial t}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \gamma^5 \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

Agora, lembrando dos produtos geométricos, veja eqs. (2.24) e (2.27), o produto geométrico entre o operador gradiente e o campo elétrico pode ser escrito como

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} = \rho_e - \gamma^5 \mathbf{J}_m - \frac{\partial(\gamma^5 \mathbf{B})}{\partial t}, \quad (3.19)$$

enquanto que o produto geométrico entre o operador gradiente e o campo magnético como

$$\nabla(\gamma^5 \mathbf{B}) = \gamma^5(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \gamma^5(\nabla \wedge \mathbf{B}) = \gamma^5 \rho_m - \mathbf{J}_e - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.20)$$

uma vez que γ^5 comuta com as 1-formas pertencentes à parte par do FCET, logo multiplicando-o pelo produto geométrico $\nabla \mathbf{B}$, temos que $\gamma^5(\nabla \mathbf{B}) = \nabla(\gamma^5 \mathbf{B})$. Portanto, é possível somar as expressões, eqs. (3.19) e (3.20), de ambos os lados e obter

$$\nabla \mathbf{E} + \nabla(\gamma^5 \mathbf{B}) = \rho_e - \gamma^5 \mathbf{J}_m - \frac{\partial(\gamma^5 \mathbf{B})}{\partial t} + \gamma^5 \rho_m - \mathbf{J}_e - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Deste modo, movendo os termos proporcionais às derivadas parciais em relação ao tempo, dos campos elétrico e magnético, para o lado esquerdo da expressão anterior, teremos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) = \rho_e - \mathbf{J}_e + \gamma^5(\rho_m - \mathbf{J}_m). \quad (3.22)$$

O lado direito da expressão anterior, envolvendo as densidades de carga e correntes elétrica e de monopolo magnético, pode ser escrito como

$$\rho_e - \mathbf{J}_e \equiv \gamma_0 J_e, \quad \gamma^5(\rho_m - \mathbf{J}_m) \equiv \gamma_0(\gamma^5 J_m). \quad (3.23)$$

Mas como $\gamma_0 \partial = (\frac{\partial}{\partial t} + \nabla)$, segue que

$$\gamma_0 \partial(\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) = \gamma_0(J_e + \gamma^5 J_m). \quad (3.24)$$

Deste modo, podemos escrever

$$\partial(\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) = J_e + \gamma^5 J_m \equiv \mathcal{J}, \quad (3.25)$$

e finalmente obter as EME generalizadas⁶

$$\partial F = \mathcal{J}, \quad (3.26)$$

onde

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^2 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta) \quad (3.27)$$

⁶ Para ver como obter a eq. (3.26) consulte o Apêndice C.

é o campo eletromagnético, uma 2-forma, antissimétrica em seus índices, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, cujas componentes fornecem um tensor duas vezes covariante

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

ou equivalentemente, por um tensor duas vezes contravariante

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

em que E^i , B^i ($i = 1, 2, 3$) são as componentes dos campos elétrico e magnético.

Além disso,

$$\mathcal{J} \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M + \bigwedge^3 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta) \quad (3.30)$$

corresponde à densidade de corrente generalizada, uma seção do FCET, constituída por uma parte elétrica (1-forma) J_e e uma parte magnética (3-forma, pseudo-1-forma, etc.) $\gamma^5 J_m$.

As EME, eq. (3.26), nesta formulação são descritas por uma única expressão⁷, a qual nos revela que a presença das densidades de carga e corrente (elétrica e magnética) no espaço-tempo provoca excitações do campo eletromagnético que propaga através de sua estrutura geométrica. Estas excitações nada mais são do que ondas eletromagnéticas que propagam na velocidade da luz, quando tais equações são consideradas na presença de cargas elétricas e monopolos magnéticos. Observe que tais equações são independentes de coordenadas, uma vez que não existe nenhuma menção das coordenadas locais x^μ .

⁷ Outro formalismo que permite escrever as EME em um única expressão, embora não há menção explícita da inclusão de monopolos, é por meio da teoria de Twistors, veja por exemplo, (FRAUENDIENER; TSOU, 1995), proposta primeiramente por Roger Penrose para tratar gravidade quântica. Para uma discussão conceitual dessa teoria, veja por exemplo, (ATIYAH; DUNAJSKI; LIONE J., 2017), (ADAMO, 2018).

3.3 FORMALISMO TENSORIAL

Um dos resultados mais impressionantes da formulação algébrico-geométrica, é que esta permite obter as EME na formulação tensorial, veja por exemplo (ACENA, 2017), ou ainda (HERR, 2018). Na formulação tensorial, temos duas expressões para as EME, válidas em qualquer referencial. Note que a formulação algébrico-geométrica generaliza esta última, uma vez que o produto geométrico é considerado, que por sua vez, é a combinação de dois produtos de gradeamento diferentes, o produto interno contraído e o produto exterior, (HESTENES; VOLD, 1990).

Apresentaremos a seguir, como obter as EME no formalismo tensorial e mostraremos que a violação da identidade de Bianchi do campo eletromagnético implica na existência de monopolos magnéticos, de modo que não é possível, na presença deles, estabelecer o princípio de mínima-ação⁸.

Aplicando novamente o operador de Dirac ∂ nas EME generalizadas, eq. (3.26), temos que

$$\partial\partial F = 0, \quad (3.31)$$

onde

$$\partial\partial F = \partial(\partial \cdot F + \partial \wedge F) = \partial \cdot (\partial \cdot F) + \partial \cdot (\partial \wedge F) + \partial \wedge (\partial \cdot F) + \partial \wedge (\partial \wedge F). \quad (3.32)$$

O primeiro termo desta última expressão fornece uma 0-foma, porque duas contrações consecutivas entre uma 2-forma por uma 1-forma deve resultar em uma quantidade escalar. O segundo e terceiro termos fornecem uma 2-forma. No entanto, o quarto e último termo deve fornecer uma 4-forma. Logo, podemos identificar

$$\partial \cdot (\partial \cdot F) = \partial \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \partial \wedge (\partial \wedge F) = \partial \wedge \mathcal{J} = 0. \quad (3.33)$$

Em termos de componentes, podemos escrever a primeira expressão da eq. (3.33), por meio de

$$\partial \cdot (\partial \cdot F) = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu F_{\alpha\beta} (\gamma^\nu \cdot (\gamma^\mu \cdot (\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta))) = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

⁸ Um princípio muito utilizado em teoria de campos, o qual nos diz que a ação de um sistema físico entre os eventos dos espaço-tempo tem um extremo, o que corresponde a obter suas equações de movimento (RAMOND, 1981).

o qual segue da eq. (A.3), enquanto que o lado direito

$$\partial \cdot \mathcal{J} = \partial_\nu (J_e)^\mu (\gamma^\nu \cdot \gamma_\mu) = \partial_\nu (J_e)^\nu, \quad (3.35)$$

onde $\gamma^\nu \cdot \gamma_\mu = \delta_\mu^\nu$. Uma vez que a carga elétrica deve ser conservada, vemos que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu (J_e)^\nu = 0. \quad (3.36)$$

Explicitamente, o lado direito da expressão anterior deve fornecer a equação de continuidade envolvendo as densidades de carga e corrente elétrica

$$\partial_\nu (J_e)^\nu = 0 \implies \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0. \quad (3.37)$$

Por outro lado, a parte pseudoescalar da eq. (3.33) deve ser tal que

$$\partial \wedge (\partial \wedge F) = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu F_{\alpha\beta} (\gamma^\nu \wedge \gamma^\mu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \gamma^5 \partial_\nu \partial_\mu F_{\alpha\beta}, \quad (3.38)$$

a qual segue da eq. (A.17), enquanto que seu lado direito é dado por

$$\partial \wedge \mathcal{J} = \partial_\nu (J_m)^\mu (\gamma^\nu \wedge \gamma^5 \gamma_\mu) = -\partial_\nu (J_m)^\nu \gamma^5, \quad (3.39)$$

resultado que segue da eq. (A.26). Portanto, da eq. (3.33), segue o resultado

$$\partial_\nu (J_m)^\nu = 0 \implies \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0, \quad (3.40)$$

fornecendo a equação de continuidade para as densidades de carga e corrente magnéticas.

Obtidas as leis de conservação para as cargas elétrica e magnética, o próximo passo é obter as expressões para as EME, eq. (3.14), no formalismo tensorial. Para isto, devemos lembrar que as componentes das correntes elétrica e magnética podem ser obtidas da seguinte forma: $(J_e)^\nu = (J_e) \cdot \gamma^\nu$ e $\gamma^5 (J_m)^\nu = \gamma^5 (J_m) \cdot \gamma^\nu$. Logo, para a parte escalar, devemos ter

$$(\partial \cdot F) \cdot \gamma^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \cdot (\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta)) \cdot \gamma^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

enquanto que a parte pseudoescalar

$$(\partial \wedge F) \cdot \gamma^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu F_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \cdot \gamma^\nu = \gamma^5 \partial_\mu (*F^{\mu\nu}), \quad (3.42)$$

em que foi definido as componentes do campo eletromagnético dual por meio de $({}^*F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Estes resultados seguem das eqs. (A.4) e (A.24). Deste modo, as EME generalizadas podem ser escritas por meio de

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (J_e)^\nu, \quad \partial_\mu ({}^*F^{\nu\mu}) = -(J_m)^\nu. \quad (3.43)$$

Para chamar a atenção, a partir das eqs. (3.43), podemos escrever a identidade de Bianchi para o campo eletromagnético

$$-(J_m)^\nu = \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \implies \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} \neq 0 \quad (3.44)$$

que expressa a violação das EME na presença de monopolo magnético, uma vez que a relação anterior corresponde à identidade de Bianchi deformada para o campo eletromagnético, uma generalização da identidade de Jacobi para campos. Um fato interessante é que esta violação implica na não existência de coordenadas canônicas⁹ para descrever o sistema, assim nenhum princípio de ação lagrangeana pode ser construído (HENINGER; MORRISON, 2018).

3.4 FORMALISMO DE FORMAS DIFERENCIAIS E POTENCIAIS

Discutiremos nesta seção como o operador de Dirac pode ser trocado pelo seu equivalente, o operador de Kähler-Atiyah, permitindo escrever as EME no formalismo de formas diferenciais na presença de monopolos magnéticos. Além disso, definiremos o potencial de Hertz e, fazendo uso dos operadores diferencial e codiferencial, iremos relacioná-lo com as partes vetorial (o potencial vetor) e pseudovetorial (o potencial de Stratton) de um potencial generalizado.

O potencial de Hertz permite escrever duas equações de d'Alembert não homogêneas, veja por exemplo (BRAGA, 2006), em que os termos de fonte são os campos elétrico e magnético, respectivamente, enquanto que, na ausência de monopolos, em outras

⁹ Coordenadas canônicas (\mathbf{p}, \mathbf{q}) são aquelas pelas quais as equações Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

são invariantes. \mathbf{p} , \mathbf{q} e H , são as posições e os momentos generalizados e H a energia, respectivamente, de um sistema mecânico descrito no espaço de fases (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

palavras, impondo um *gauge* sobre o potencial generalizado, também podemos escrever uma equação de d'Alembert não homogênea para o potencial vetorial, em que o termo de fonte corresponde à densidade de corrente elétrica.

Um fato interessante é que no formalismo de formas diferenciais, as EME, em termos de potenciais, também são independentes de coordenadas.

Deste modo, uma vez que o operador de Dirac eq. (2.54) pode ser trocado pelo operador de Kähler-Atiyah eq. (2.51), podemos escrever também as EME, eq. (3.26), por meio de

$$(d - \delta)F = dF - \delta F = \mathcal{J}, \quad (3.45)$$

com F o campo eletromagnético, d o operador diferencial e δ o operador codiferencial, logo segue que o termo $\partial \cdot F = -\delta F = -\star d \star F$ deve resultar em uma 1-forma, enquanto que o segundo termo $\partial \wedge F = dF$ deve resultar em uma 3-forma.

Como a corrente generalizada \mathcal{J} é a soma de uma 1-forma (a densidade de corrente elétrica J_e) e uma 3-forma (a densidade de corrente elétrica $\gamma^5 J_m$), temos que as EME, eq. (3.45), podem ser escritas em termos dos operadores diferencial e codiferencial da seguinte forma:

$$-\delta F = J_e, \quad dF = \gamma^5 J_m. \quad (3.46)$$

Note que na ausência de monopolos magnéticos, as equações anteriores fornecem as EME no formalismo de formas diferenciais, veja por exemplo (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973), ou ainda (WARNICK; RUSSER, 2014).

Todavia, definimos o potencial de Hertz como

$$\Pi = \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^2 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad (3.47)$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\Pi_e^1 & -\Pi_e^2 & -\Pi_e^3 \\ \Pi_e^1 & 0 & -\Pi_m^3 & \Pi_m^2 \\ \Pi_e^2 & \Pi_m^3 & 0 & -\Pi_m^1 \\ \Pi_e^3 & -\Pi_m^2 & \Pi_m^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

é um tensor antissimétrico em seus índices, ou seja, $\Pi^{\mu\nu} = -\Pi^{\nu\mu}$, permitindo-se identificar suas componentes elétricas e magnéticas. Além disso, podemos identificar também suas

partes elétrica e magnética como $\Pi = \mathbf{\Pi}_e + \gamma^5 \mathbf{\Pi}_m$. De maneira similar ao caso anterior, envolvendo os operadores diferencial e codiferencial, o campo eletromagnético e as densidades de corrente elétrica e magnética, é possível escrever uma equação diferencial equivalente às EME generalizadas eq. (3.26). Tal equação pode ser escrita como

$$(d - \delta)\Pi = -\delta\Pi + d\Pi = \mathcal{A}, \quad (3.49)$$

onde \mathcal{A} é o potencial generalizado definido por

$$\mathcal{A} = A + \gamma^5 B \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M + \bigwedge^3 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad (3.50)$$

onde A é o conhecido potencial vetor e $\gamma^5 B$ é um pseudopotencial conhecido como potencial de Stratton (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007). Equivalentemente, podemos escrever, usando os mesmos raciocínios anteriores,

$$-\delta\Pi = A, \quad d\Pi = \gamma^5 B. \quad (3.51)$$

Todavia, um passo importante, para os desenvolvimentos seguintes, envolve mostrar que $\delta(\gamma^5 B) = \gamma^5(dB)$, nos permitindo expressar o campo eletromagnético, as densidades de correntes elétrica e magnética, em termos dos potenciais vetorial e de Stratton. Para mostrarmos esta relação, devemos lembrar que

$$A = A^\nu \gamma_\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta) \quad (3.52)$$

e

$$B = B^\nu \gamma_\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta) \quad (3.53)$$

são uma 1-formas do Espaço-Tempo de Minkowski (ETM), ambas seções do FCET, logo podemos escrever

$$\delta(\gamma^5 B) = -\partial \cdot (\gamma^5 B) = -\gamma^\mu \partial_\mu \cdot (\gamma^5 B^\nu \gamma_\nu) = \partial_\mu B^\mu \gamma^5 \quad (3.54)$$

e

$$\gamma^5(dB) = \gamma^5(\partial \wedge B) = \gamma^5(\gamma^\mu \partial_\mu \wedge B^\nu \gamma_\nu) = \partial_\mu B^\mu \gamma^5, \quad (3.55)$$

as quais seguem da eq. (A.26). Além disso, o mesmo raciocínio pode ser utilizado para obter $d(\gamma^5 B) = \gamma^5(\delta B)$. Feito isto, podemos escrever também

$$F = \partial\mathcal{A} = \partial^2\Pi = (d - \delta)(d - \delta)\Pi = d(\gamma^5 B) + dA - \delta(\gamma^5 B) - \delta A. \quad (3.56)$$

Agora, uma vez que o operador escalar

$$\partial\partial = \partial^2 = (d - \delta)(d - \delta) = -(\delta d + d\delta), \quad (3.57)$$

conhecido como operador d'Alembertiano de Hodge, veja a ref. (RODRIGUES JR.; OLIVEIRA, 2007) para mais detalhes, devemos ter

$$d^2 = 0, \quad \delta^2 = 0, \quad (3.58)$$

consequências do Lema de Poincaré¹⁰ (IVANCEVIC; IVANCEVIC, 2007).

Deste modo, supondo de que Π seja cofechada e também fechada, então

$$\delta^2\Pi = -\delta A = 0, \quad d^2\Pi = d(\gamma^5 B) = 0. \quad (3.59)$$

Isto significa que podemos escrever o campo eletromagnético da seguinte forma

$$F = dA - \delta(\gamma^5 B) = dA - \gamma^5(dB). \quad (3.60)$$

Logo, uma vez que

$$\partial F = (d - \delta)F = (d - \delta) [dA - \gamma^5(dB)] = d^2 A - d(\gamma^5 dB) - \delta dA + \delta(\gamma^5 dB),$$

temos que o primeiro e o último termo da relação anterior, envolvendo os potenciais A e B , devem se anular pelo Lema de Poincaré. Logo, os termos que sobram permitem identificar as EME

$$\delta dA = -J_e, \quad d\delta(\gamma^5 B) = -\gamma^5 J_m, \quad (3.61)$$

escritas em termos dos operadores diferencial e codiferencial da Álgebra Exterior (AE) e dos potenciais vetorial e de Stratton. A segunda relação, eq. (3.61), segue da igualdade das eqs. (3.54) e (3.55).

Por outro lado, definindo um campo eletromagnético, elétrico e magnético, por

$$F_e = dA = \mathbf{E}_e + \gamma^5 \mathbf{B}_e, \quad F_m = dB = \mathbf{E}_m + \gamma^5 \mathbf{B}_m, \quad (3.62)$$

¹⁰ Este Lema nos diz que para toda k -forma $C \in \text{sec}\Gamma(U, \wedge^k T^*M)$ em que é possível escrever $C = dU$ (resp. $C = \delta U$) de modo que $U \in \text{sec}\Gamma(U, \wedge^{k-1} T^*M)$, (resp. $\text{sec}\Gamma(U, \wedge^{k+1} T^*M)$), é dita ser exata (resp. coexata). Assim, toda k -forma exata (resp. coexata) deve ser fechada (resp. cofechada), de acordo com este lema, ou seja, $dC = d^2U = 0$ (resp. $\delta C = \delta^2U = 0$).

é possível escrever então

$$F = F_e + \gamma^5 F_m = (\mathbf{E}_e - \mathbf{B}_m) + \gamma^5(\mathbf{B}_e + \mathbf{E}_m). \quad (3.63)$$

Agora, como $\partial^2 \Pi = \partial \mathcal{A} = F$, temos que

$$\partial^2 \Pi = \partial^2 \Pi_e + \gamma^5 \partial^2 \Pi_m = \mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B} \implies \partial^2 \Pi_e = \mathbf{E}, \quad \partial^2 \Pi_m = \mathbf{B}. \quad (3.64)$$

Isto significa que os campos elétrico e magnético são as fontes para equações de d'Alembert não homogêneas, em que temos dois potenciais de Hertz. Note que na ausência dos campos elétrico e magnético ainda restam as soluções homogêneas dos potenciais de Hertz elétrico e magnético. Estes resultados podem ser usados para obter soluções sub e superluminais, quando $F = 0$, de ondas viajando com velocidade de grupo menor e maior que a velocidade da luz, respectivamente, (RODRIGUES JR.; VAZ JR., 1995).

Uma vez que o campo eletromagnético pode ser escrito por meio do potencial generalizado como

$$F = \partial \mathcal{A} = \partial \cdot \mathcal{A} + \partial \wedge \mathcal{A}, \quad (3.65)$$

podemos obter equações de onda na presença de matéria. Isto pode ser feito impondo o *gauge* $\partial \cdot \mathcal{A} = 0$, que discutiremos apropriadamente na seção 4.2, de modo que

$$\partial \cdot \mathcal{A} = \partial \cdot A + \partial \cdot (\gamma^5 B) = -\delta A - \gamma^5 (dB) = 0 \quad (3.66)$$

ou ainda que $\gamma^5 J_m = 0$ e $F = dA$, em outras palavras, não existem monopolos magnéticos na Natureza. Logo, não é difícil mostrar que as EME na ausência de monopolos, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\partial(\partial \wedge A) = \partial \cdot (\partial \wedge A) + \partial \wedge (\partial \wedge A) = \partial^2 A = J_e, \quad (3.67)$$

em que $\partial \wedge (\partial \wedge A) = 0$.

Identificando a equação acima, eq. (3.67), como a equação de d'Alembert não homogênea, é possível usar o método das funções de Green para obter as possíveis soluções, veja (BRAGA, 2006). Deste modo, encontramos duas soluções, uma solução retardada e uma avançada, que por considerações físicas (princípio de causalidade), a solução avançada deve ser desprezada. Assim, em um ponto \mathbf{x}' do espaço tridimensional e em um tempo

retardado $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$, onde encontram-se as distribuições de carga e corrente elétrica, as soluções fisicamente aceitáveis podem ser encontradas somente para $t > t'$. Desta forma, podemos expressar as componentes do potencial vetor A^μ em termos de uma função de Green retardada multiplicada pelo termo de fonte, logo podemos então escrever

$$A^\mu = k \int d^3\mathbf{x}' \frac{J_e^\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.68)$$

onde k é uma constante que precisa ser ajustada de acordo com o sistema de unidades escolhido. Esta solução, eq. (3.68), nos diz que a radiação produzida pelas cargas e correntes elétricas evoluem no tempo para $t > t'$, decrescendo com o inverso da distância entre o ponto de observação \mathbf{x} e o ponto onde elas se encontram \mathbf{x}' .

3.5 ENERGIA ELETROMAGNÉTICA E INVARIANTES

Do ponto de vista mecânico, energia pode ser associada ao trabalho realizado por um objeto sobre outro; ou sobre a história destes objetos, no sentido de que a energia cinética de um corpo, com uma dada velocidade v , está relacionada com o trabalho necessário para tirá-lo do repouso e colocá-lo em movimento com esta velocidade. Por outro lado, do ponto de vista do eletromagnetismo, o raciocínio sobre a concepção de energia é completamente diferente. A ideia é que a energia está relacionada com a existência de campos elétricos e magnéticos, em particular, cargas podem armazenar e bem como radiar energia eletromagnética. Esta mudança de paradigma, ou seja, de mudar a perspectiva de análise em termos mecânicos, para uma análise puramente em termos de campo, fluxo de energia, etc., é uma das maiores contribuições que o eletromagnetismo presenteou as teorias de campo modernas, embora esta ideia não seja muito enfatizada nos cursos de mecânica e eletromagnetismo, (KNEUBIL et al., 2017).

Enfatizamos nesta seção que a energia eletromagnética não é conservada na presença de matéria, uma consequência do momento angular do campo eletromagnético. Apresentamos a expressão para o tensor de energia-momento do campo eletromagnético, $T^{\mu\nu}$, a partir da definição do fluxo de energia-momento, S^μ , que atravessa um hiperplano Σ ortogonal a uma direção arbitrária no espaço-tempo. Partindo das EME obtidas anteriormente, eq. (3.26), e considerando-as de forma reversa, usando o operador de reversão, podemos

encontrar

$$\widetilde{\partial F} = J_e + \widetilde{\gamma^5 J_m} \implies \widetilde{F} \widetilde{\partial} = J_e + J_m \gamma^5. \quad (3.69)$$

onde usamos a reversão de uma k -forma, dada por $\langle \widetilde{A} \rangle_k = (-1)^{k(k-1)/2} \langle A \rangle_k$, então temos que $\widetilde{J}_e = J_e$, $\widetilde{J}_m = J_m$ e $\widetilde{\gamma^5} = \gamma^5$, pois J_e e J_m são duas 1-formas e γ^5 uma 4-forma, respectivamente. Além disso, devemos explicitar que o operador $\widetilde{\partial}$ atua à direita.

Portanto, temos dois conjuntos de EME

$$\partial F = J_e + \gamma^5 J_m, \quad \widetilde{F} \widetilde{\partial} = J_e + J_m \gamma^5. \quad (3.70)$$

Multiplicando a primeira das equações por $\widetilde{F} = -F$, à esquerda, a segunda por F , à direita, e somando de ambos os lados, é possível encontrar

$$\widetilde{F} \partial F + \widetilde{F} \widetilde{\partial} F = J_e F - F J_e + J_m \gamma^5 F - \gamma^5 F J_m. \quad (3.71)$$

Multiplicando de ambos os lados por $\frac{1}{2}$, encontramos

$$\frac{1}{2}(\widetilde{F} \partial F + \widetilde{F} \widetilde{\partial} F) = \frac{1}{2}(J_e F - F J_e) + \frac{1}{2}(J_m \gamma^5 F - \gamma^5 F J_m) = F \cdot J_e + (\gamma^5 F) \cdot J_m. \quad (3.72)$$

O passo anterior é decorrente do produto interno contraído entre uma 2-foma e uma 1-foma, definidos pela relação (2.62), para $k = 2$.

Concentrando-nos agora no termo do lado esquerdo, entre parênteses, da eq. (3.72), podemos escrever

$$\widetilde{F} \partial F + \widetilde{F} \widetilde{\partial} F = \widetilde{F} \gamma^\mu (\partial_\mu F) + \widetilde{F} \gamma^\mu (\widetilde{\partial}_\mu F). \quad (3.73)$$

Da regra do produto, a última expressão também pode ser escrita como

$$\partial_\mu (\widetilde{F} \gamma^\mu F) = (\partial_\mu \widetilde{F}) \gamma^\mu F + \widetilde{F} \gamma^\mu (\partial_\mu F) = \widetilde{F} \gamma^\mu \widetilde{\partial}_\mu F + \widetilde{F} \gamma^\mu (\partial_\mu F), \quad (3.74)$$

logo, como a derivada parcial ∂_μ atua sobre \widetilde{F} , depois da primeira igualdade, no primeiro termo, pela esquerda, podemos trocá-la por $\widetilde{\partial}_\mu$, a qual atua pela direita, o que significa que podemos definir uma 1-forma

$$S^\mu = \frac{1}{2} \widetilde{F} \gamma^\mu F \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^* M) \hookrightarrow \mathcal{Cl}(M, \eta), \quad (3.75)$$

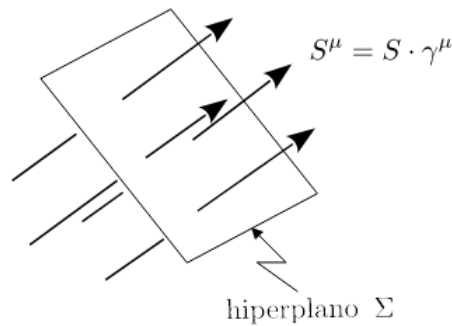
que fisicamente é interpretada como o *fluxo de energia-momento*, veja Figura 3, do campo eletromagnético que passa por uma hipersuperfície do espaço-tempo ortogonal a γ^μ .

De fato, temos que

$$S = S^\mu \otimes \gamma_\mu \in \text{sec}\Gamma(U, T^*M), \quad (3.76)$$

com $S^\mu = T^{\mu\nu}\gamma_\nu$, cujas componentes $T^{\mu\nu}$ define um tensor simétrico, fornecendo o fluxo da μ -ésima componente do quadrimomento do campo eletromagnético que passa por uma hiperplano do espaço-tempo de componentes coordenadas $x^\nu = \text{const.}$ (HESTENES, 2015), (RODRIGUES JR., 2008).

Figura 3 – Fluxo de energia-momento S^μ que atravessa um hiperplano Σ ortogonal a uma direção γ^μ do espaço-tempo.



Fonte: Autoria própria.

Portanto, podemos escrever

$$\partial_\mu S^\mu = F \cdot J_e + (\gamma^5 F) \cdot J_m, \quad (3.77)$$

onde fizemos uso das eqs. (3.72) e (3.74). Note que a quantidade anterior não é um escalar, mas uma 1-forma do FCET. Por fim, contraindo a quantidade anterior, eq. (3.77), de ambos os lados por 1-forma γ^ν , para encontrarmos suas componentes, segue que

$$\partial_\mu S^\mu \gamma^\nu = (F \cdot J_e) \gamma^\nu + ((\gamma^5 F) \cdot J_m) \gamma^\nu, \quad (3.78)$$

O lado esquerdo pode ser escrito como

$$\partial_\mu S^\mu \gamma^\nu = Q^\nu, \quad (3.79)$$

o qual segue do fato de que podemos escrever $\partial_\mu S^\mu \cdot \gamma^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\nu\mu} = \partial_\mu S^\nu \cdot \gamma^\mu = \partial_\mu S^\nu \gamma^\mu = \gamma^\mu \partial_\mu S^\nu = \partial S^\nu$, em que $\partial S^\nu = Q^\nu$, logo temos também que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = Q^\nu. \quad (3.80)$$

A quantidade

$$Q = Q^\nu \gamma_\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta) \quad (3.81)$$

é 1-forma correspondendo às interações entre as cargas e correntes (elétricas e magnéticas) da matéria com o campo eletromagnético. Precisamente, o termo de interação pode ser escrito como

$$Q^\nu = [F \cdot J_e + (\gamma^5 F) \cdot J_m] \gamma^\nu. \quad (3.82)$$

Por outro lado, é possível expressar o momento angular total das cargas elétricas e magnéticas como

$$L = \frac{1}{2} L^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^2 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad (3.83)$$

de modo que a taxa de variação do espaço e do tempo da quantidade acima corresponde ao termo de interação, eq. (3.82), (RECAMI; RODRIGUES JR., 1990). Desta forma, podemos escrever

$$\partial L = \frac{1}{2} \partial_\mu L^{\mu\nu} \gamma^\mu \cdot (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = \partial_\mu L^{\mu\nu} \gamma_\nu \equiv -Q^\nu \gamma_\nu \implies \partial_\mu L^{\mu\nu} = -Q^\nu, \quad (3.84)$$

o qual segue da eq. (A.10).

Uma vez que na presença de matéria $\partial_\mu T^{\mu\nu} = Q^\nu$, eq. (3.80), podemos escrever a conservação total da energia eletromagnética como

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\mu L^{\mu\nu} \implies \partial_\mu (T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.85)$$

O resultado anterior significa que a energia eletromagnética não será conservada na presença de matéria. Esta não conservação da energia é uma consequência das interações mútuas entre o campo eletromagnético e as cargas elétricas e magnéticas, que por sua vez, estão em intenso movimento em alguma região do espaço-tempo. No entanto, podemos considerar uma conservação generalizada do campo eletromagnético quando o momento angular deste campo se faz presente.

Do ponto de vista do teorema de Noether, não existe corrente conservada neste caso. Isto significa que é necessário estender a noção de simetria se quisermos compreender o que acontece no interior da matéria, uma vez que a contribuição na fronteira não

pode ser desprezada nesta circunstância, (ADOS; REYES, 2017), (URBAN; BAJARDI; CAPOZZIELLO, 2020), (NEUENSCHWANDER, 2011).

Por outro lado, para encontrarmos uma expressão mais conveniente para as componentes de $T^{\mu\nu}$, em termos das componentes do campo eletromagnético, devemos escrever a seguinte relação:

$$T^{\mu\nu} = S^\mu \cdot \gamma^\nu = -\frac{1}{2} \langle F \gamma^\mu F \gamma^\nu \rangle_0, \quad (3.86)$$

onde $\langle \ \rangle_0$ denota a parte escalar. Como o produto contraído entre a uma 1-forma γ^μ e a 2-forma F pode ser escrito como $\gamma^\mu \cdot F = \frac{1}{2}(\gamma^\mu F - F \gamma^\mu) = -F \cdot \gamma^\mu$, logo $F \gamma^\mu = 2F \cdot \gamma^\mu + \gamma^\mu F$. Podemos, assim, escrever

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \langle F \gamma^\mu F \gamma^\nu \rangle_0 = -(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) - \frac{1}{2} \langle \gamma^\mu F^2 \gamma^\nu \rangle_0. \quad (3.87)$$

Além disso, sabemos que $F^2 = FF = F \cdot F + F \wedge F$. Portanto, podemos expressar a eq. (3.87) como

$$T^{\mu\nu} = -(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) - \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (F \cdot F). \quad (3.88)$$

Ademais, temos que a projeção do campo eletromagnético em uma direção arbitrária do ETM é dada por

$$F \cdot \gamma^\mu = \frac{1}{2} F^{\lambda\alpha} (\gamma_\lambda \wedge \gamma_\alpha) \cdot \gamma^\mu = \frac{1}{2} (F^{\lambda\mu} \gamma_\lambda - F^{\mu\alpha} \gamma_\alpha), \quad (3.89)$$

resultado que segue da eq. (A.11). Analogamente,

$$F \cdot \gamma^\nu = \frac{1}{2} F^{\lambda\beta} (\gamma_\lambda \wedge \gamma_\beta) \cdot \gamma^\nu = \frac{1}{2} (F^{\lambda\nu} \gamma_\lambda - F^{\nu\beta} \gamma_\beta). \quad (3.90)$$

Uma vez que $-(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu)$ é uma quantidade escalar, temos que

$$-(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) = \frac{1}{4} \left(-F^{\lambda\mu} F^{\alpha\nu} \gamma_\lambda \gamma_\alpha + F^{\lambda\mu} F^{\nu\beta} \gamma_\lambda \gamma_\beta + F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \gamma_\alpha \gamma_\lambda - F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \right). \quad (3.91)$$

Manipulando os termos da eq. (3.91) podemos escrever

$$-(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \left(F^{\lambda\mu} F^{\nu\beta} \gamma_\lambda \gamma_\beta + F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \gamma_\alpha \gamma_\lambda \right). \quad (3.92)$$

Agora, observe que o primeiro termo pode ser escrito como

$$F^{\lambda\mu} F^{\nu\beta} \gamma_\lambda \gamma_\beta = F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \gamma_\alpha \gamma_\lambda. \quad (3.93)$$

Portanto, obtemos por fim que

$$-(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) = F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \gamma_\alpha \gamma_\lambda. \quad (3.94)$$

Agora, para calcularmos o segundo termo $F \cdot F$ da eq. (3.88) devemos escrever

$$F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu, \quad F = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta. \quad (3.95)$$

Então, temos

$$F \cdot F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) \cdot (\gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta), \quad (3.96)$$

ou ainda

$$F \cdot F = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (3.97)$$

Com estes resultados, eqs. (3.94) e (3.97), podemos escrever finalmente

$$T^{\mu\nu} = -(F \cdot \gamma^\mu)(F \cdot \gamma^\nu) - \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (F \cdot F) = F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} \gamma_\alpha \cdot \gamma_\lambda + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu, \quad (3.98)$$

em que ambos os lados precisam ser uma quantidade escalar. Como $\eta_{\alpha\lambda} = \gamma_\alpha \cdot \gamma_\lambda$, $\eta^{\mu\nu} = \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu$, então

$$T^{\mu\nu} = F_\lambda^\mu F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (3.99)$$

Para obter as componentes da interação do campo eletromagnético com a matéria carregada eletricamente, devemos escrever

$$(F \cdot J_e) \gamma^\nu = \frac{1}{2} (J_e)_\mu F^{\alpha\mu} ((\gamma_\alpha \wedge \gamma_\mu) \cdot \gamma^\mu) \gamma^\nu = -(J_e)_\mu F^{\mu\nu}, \quad (3.100)$$

e

$$(\gamma^5 F \cdot J_m) \gamma^\nu = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (J_m)_\mu (\gamma^5 (\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \cdot \gamma^\mu) \gamma^\nu = -({}^* F^{\nu\mu}) (J_m)_\mu, \quad (3.101)$$

os quais seguem das eqs. (A.9) e (A.25), respectivamente. Portanto, as componentes do termo de interação, eq. (3.82), são dadas por

$$Q^\nu = -F^{\mu\nu} (J_e)_\mu - ({}^* F^{\nu\mu}) (J_m)_\mu. \quad (3.102)$$

o que implica que a eq. (3.80) também pode ser expressa como

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} (J_e)_\mu - ({}^* F^{\nu\mu}) (J_m)_\mu, \quad (3.103)$$

Além disso, definimos por conveniência as 1-formas

$$K_e = F \cdot J_e, \quad K_m = (\gamma^5 F) \cdot J_m. \quad (3.104)$$

Em relação a um observador inercial γ_0 , podemos escrever a primeira expressão como

$$K_e \gamma_0 = (K_e)_0 + \mathbf{K}_e \quad (3.105)$$

onde

$$(K_e)_0 = -\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}. \quad (3.106)$$

correspondem às partes temporal e espacial da força de Lorentz (elétrica) generalizada, respectivamente. A primeira fornece a densidade de potência elétrica que se dissipa a partir de uma região volumétrica no espaço, em decorrência da interação do campo elétrico com as cargas elétricas. A segunda, é a densidade de força de Lorentz que atua sobre as densidades de carga e corrente elétrica no referencial do observador γ_0 .

Agora, da segunda expressão da eq. (3.104), em relação a um observador γ_0 , a força de Lorentz magnética generalizada é expressa como

$$K_m \gamma_0 = (K_m)_0 + \mathbf{K}_m, \quad (3.107)$$

onde é possível também indentificar as partes temporal e espacial a partir de

$$(K_m)_0 = \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{K}_m = -\rho_m \mathbf{B} - \mathbf{J}_m \times \mathbf{E}, \quad (3.108)$$

que analogamente ao caso anterior, temos a densidade de potência magnética e a densidade de força de Lorentz sobre monopolos.

Além disso, podemos determinar os invariantes do campo eletromagnético calculando-se

$$F^2 = F \cdot F + F \wedge F, \quad (3.109)$$

os quais devem ser quantidades independentes de observadores, i.e., devem ser invariantes de Lorentz, assumindo a mesma forma em qualquer referencial inercial. Em termos de componentes, veja Apêndice D para os cálculos dessas quantidades, os invariantes podem ser escritos como

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{\mu\nu} ({}^*F_{\mu\nu}) = -4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}). \quad (3.110)$$

Para finalizar, cumpre destacar que os invariantes acima são fundamentais na construção de Lagrangeanas consistentes em teorias de campos, em que entende-se por Lagrangeana, uma função dos campos e de suas derivadas, além de poder depender da posição do espaço-tempo onde os campos são localizados. As Lagrangeanas mais gerais possíveis, utilizadas para descrever o eletromagnetismo, são construídas a partir destes invariantes mencionados acima, (ESCOBAR; URRUTIA, 2014).

3.6 ONDA PLANA E POLARIZAÇÃO CIRCULAR

O Sol é um dos responsáveis por fornecer a energia necessária para a química da vida, (RAPF; VAIDA, 2016). Esta forma de energia é conhecida como energia radiante, vista como a propagação oscilatória de ondas eletromagnéticas no espaço, e que atingem partículas, átomos, moléculas, células, etc., que constituem a estrutura dos materiais e organismos em nosso planeta. Por exemplo, a luz visível corresponde a uma pequena faixa do espectro eletromagnético de comprimento de onda bem definido. Uma das propriedades interessantes das ondas transversais é a polarização, que por sua vez, é uma propriedade cinemática e geométrica dessas ondas.

De fato, a luz que vem do sol não tem polarização definida. Mas, em várias situações, por exemplo, quando a luz passa por um polarizador¹¹, ainda temos luz visível e ela tem polarização definida. Em particular, ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas são formadas por campos elétrico e magnético, ortogonais entre si e de magnitude constante, de modo que em cada instante de tempo, estes oscilam ao redor da direção de propagação. O sentido da rotação dos campos caracteriza o tipo de onda, por exemplo, se os campos giram no sentido horário (resp. anti-horário), a onda é circularmente polarizada à direita (resp. esquerda).

Do ponto de vista quântico, luz circularmente polarizada está relacionada com o spin dos fótons. Isto significa que um fóton linearmente polarizado (spin 0) corresponde a uma superposição de um fóton circularmente polarizado à esquerda (spin -1) e um à direita (spin 1), respectivamente, (CODDENS,).

¹¹ Um dispositivo capaz de selecionar um de seus possíveis estados de polarização, por exemplo, linear, circular e elíptico.

Para finalizarmos este capítulo, apresentamos uma das possíveis soluções das EME na ausência de fontes no formalismo algébrico-geométrico, correspondendo a uma onda circularmente polarizada à direita e destacamos que os objetos geométricos que a definem, permitem estabelecer um fibrado equivalente ao FCE.

No contexto AET, uma onda plana monocromática em um ponto $x = x^\mu \gamma_\mu$ do ETM, com frequência angular $\omega > 0$, bem definida, e vetor de propagação $k = k^\mu \gamma_\mu$ constante, se propagando em $x > 0$ com velocidade c , pode ser escrita de acordo com a ref. (SABBATA; DATTA, 2007) por meio de

$$F_+(x) = f e^{\gamma^5(\omega t - k \cdot x)}, \quad (3.111)$$

em que o escalar f denota a amplitude desta onda. Para não carregarmos a todo momento o subscrito $+$ em F_+ , por simplicidade iremos omití-lo. Com efeito, esta onda deve ser uma solução das EME desprovidas de fontes, $\partial F = 0$. Assim, como primeiro passo, devemos calcular as derivadas em relação ao espaço e ao tempo para encontrarmos sua relação de dispersão. Neste ponto devemos chamar a atenção para o fato de que estamos considerando a velocidade da luz c , logo a componente temporal do operador de Dirac deve ser escrita como a eq. (2.54).

Em relação a um observador inercial γ_0 , temos que

$$\gamma_0 \partial F = \left(\frac{1}{c} \partial_t + \nabla \right) f e^{\gamma^5(\omega t - k \cdot x)} = 0, \quad (3.112)$$

de modo que a derivada temporal não oferece problemas para obtermos

$$\frac{1}{c} \partial_t \left\{ f e^{\gamma^5(\omega t - k \cdot x)} \right\} = f \gamma^5 \frac{\omega}{c} e^{\gamma^5(\omega t - k \cdot x)} \quad (3.113)$$

enquanto que para a derivada espacial, devemos calcular primeiro o produto interno contraído $x \cdot k$, ou seja

$$x \cdot k = x^\mu k^\nu (\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu) = x^0 k_0 + x^i k_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.114)$$

onde foi usado que $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$. Logo, podemos escrever

$$\nabla \left\{ f e^{\gamma^5(\omega t - x^0 k_0 - x^i k_i)} \right\} = \sigma_j \partial_j \left\{ f e^{\gamma^5(\omega t - x^0 k_0 - x^i k_i)} \right\} = -\gamma^5 f k e^{\gamma^5(\omega t - k \cdot x)}, \quad (3.115)$$

onde foi usado que $\sigma_i = \delta_{ij}\sigma_j$ e $\kappa = k_i\sigma_i$, a parte espacial do vetor de onda. Com estes resultados podemos então escrever

$$\left(\frac{\omega}{c} - \kappa\right) F = 0, \quad (3.116)$$

que multiplicando à esquerda por $\left(\frac{\omega}{c} + \kappa\right)$, resulta

$$\left(\frac{\omega}{c} + \kappa\right) \left(\frac{\omega}{c} - \kappa\right) F = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right) F = 0. \quad (3.117)$$

Como $F \neq 0$, devemos encontrar que $|\kappa| = \left|\frac{\omega}{c}\right| = \frac{\omega}{c}$, mas se definirmos um vetor de onda unitário por

$$\mathbf{k} = \frac{\kappa}{|\kappa|} = \kappa/(\omega/c) \quad (3.118)$$

de tal forma que $\kappa = \frac{\omega}{c}\mathbf{k}$, logo

$$\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{c}\mathbf{k}\right) F = 0 \implies \mathbf{k}F = F. \quad (3.119)$$

O resultado acima indica que a 1-forma unitária do espaço, correspondendo ao vetor de onda de uma onda eletromagnética monocromática – radiação que se propaga à direita em uma direção genérica, quando multiplicada geometricamente pelo campo eletromagnético relativístico, implica que este permanece invariante¹².

Lembrando da decomposição de F em termos dos campos elétrico e magnético, eq. (C.2), o próximo passo é estabelecer uma relação entre esta decomposição com a relação encontrada anteriormente, eq. (3.119). Para isso devemos multiplicar o campo eletromagnético à esquerda e à direita por γ_0 , e utilizar as propriedades de antissimetria de γ_μ e a definição $\sigma_i = \gamma_i\gamma_0$. Desta forma, escrevemos

$$\gamma_0 F \gamma_0 = \gamma_0 \mathbf{E} \gamma_0 + \gamma_0 \gamma^5 \mathbf{B} \gamma_0 = \gamma_0 E_i \gamma_i \gamma_0 \gamma_0 + \gamma_0 \gamma^5 B_i \gamma_i \gamma_0 \gamma_0, \quad (3.120)$$

cujos produtos entre as 1-formas, são:

$$\underbrace{\gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \gamma_0}_{=1} = -\sigma_i, \quad \gamma_0 \gamma^5 \gamma_0 \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \gamma_0 = \gamma^5 \sigma_i. \quad (3.121)$$

Portanto,

$$\gamma_0 F \gamma_0 = -E_i \sigma_i + \gamma^5 B_i \sigma_i = -\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}. \quad (3.122)$$

¹² Um objeto geométrico se diz invariante sob uma dada transformação, quando o objeto permanece idêntico à sua forma anterior a transformação (BINCER, 2013).

Agora, somando e subtraindo este último resultado de F , temos

$$F + \gamma_0 F \gamma_0 = 2\gamma^5 \mathbf{B}, \quad F - \gamma_0 F \gamma_0 = 2\mathbf{E}, \quad (3.123)$$

então os campos elétrico e magnético podem ser expressos em termos do campo eletromagnético F por meio de

$$\gamma^5 \mathbf{B} = \frac{1}{2}(F + \gamma_0 F \gamma_0), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(F - \gamma_0 F \gamma_0), \quad (3.124)$$

Multiplicando o vetor de onda unitário, eq. (3.118), pelo campo elétrico e notando que ele é uma 1-forma do espaço que deve anticomutar com γ_0 e comutar com γ^5 , temos que

$$\mathbf{k}\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}F - \mathbf{k}\gamma_0 F \gamma_0) = \gamma^5 \mathbf{B}, \quad (3.125)$$

combinando este último resultado com a decomposição do campo eletromagnético em termos dos campos elétrico e magnético, eq. (C.2), é possível obter

$$F = \mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B} = (1 + \mathbf{k})\mathbf{E} = \mathbf{E}(1 - \mathbf{k}). \quad (3.126)$$

Antes de prosseguir, devermos calcular o quadrado do campo eletromagnético, ou seja, $F^2 = F \cdot F + F \wedge F$. Logo,

$$F^2 = (\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B})(\mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}) = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2\gamma^5(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.127)$$

pois γ^5 comuta com 1-formas do espaço. Observando que o lado esquerdo da última relação pode ser escrito como

$$F^2 = (1 + \mathbf{k})^2 \mathbf{E}^2 = 2\mathbf{E}^2 + 2\gamma^5(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}), \quad (3.128)$$

segue ao igualarmos as eqs. (3.127) e (3.128) que

$$-\mathbf{B}^2 = \mathbf{E}^2. \quad (3.129)$$

Desta equação, é possível estabelecer a relação entre as magnitudes dos campos elétrico e magnético, de forma que

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|, \quad (3.130)$$

uma vez que $c = 1$. Portanto, com este resultado, eq. (3.130), estamos na posição de definir as 1-formas unitárias

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{E}|}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{B}|}, \quad (3.131)$$

permitindo reescrever a relação eq. (3.125). Multiplicando esta última relação pelo inverso do módulo do campo elétrico e usando as relações anteriores, não é difícil encontrar

$$\mathbf{kE} = \gamma^5 \mathbf{B}, \quad (3.132)$$

ou ainda

$$\mathbf{kEB} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \gamma^5. \quad (3.133)$$

Este resultado é surpreendente, pois relaciona um referencial ortonormal no espaço, definido pelas 1-formas unitárias correspondentes à tripla $(\mathbf{k}, \mathbf{E}$ e $\mathbf{B})$ de uma onda monocromática, com um hipervolume (pseudoescalar) orientado do ETM. Isto significa que este referencial assim definido pode ser usado para descrever um observador inercial movendo-se com a velocidade de propagação da onda eletromagnética. Em particular, o movimento de uma partícula que viaja na velocidade da luz neste referencial nada mais é que um fóton. Além disso, \mathbf{k} , \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser utilizados como 1-formas para gerar a parte par¹³ do FCET, analogamente como as 1-formas espaciais σ_i , com $(i = 1, 2, 3)$.

Lembrando da relação $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5 = \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta$, eq. (A.16), podemos escrever também

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\mathbf{kEB}) = \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta, \quad (3.134)$$

definindo 24 referenciais linearmente independentes, 12 com orientações positivas e 12 com orientações negativas, dependendo do observador γ_0 .

Considerando novamente o campo descrevendo a onda monocromática eq. (3.111), então na origem podemos escrever

$$F_+(0) = f = \mathbf{E}_0(1 - \mathbf{k}), \quad (3.135)$$

¹³ Neste sentido podemos expressar um elemento genérico deste fibrado por meio de

$$A = A_0 + A^k \mathbf{k} + \frac{1}{2!} A^{\mathbf{kE}} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{3!} A^{\mathbf{kEB}} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}.$$

onde fizemos uso da eq. (3.126), o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} F_+(x) &= \mathbf{E}_0(1 - \mathbf{k})e^{\gamma^5(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{E}_0 \mathbf{k} [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{k} \gamma^5 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Além disso, a partir de $F_+ = \mathbf{E}_+ + \gamma^5 \mathbf{B}_+$ podemos identificar

$$\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \gamma^5 \mathbf{B}_+ = -\mathbf{E}_0 \mathbf{k} [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{k} \gamma^5 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \quad (3.137)$$

Impondo que o vetor de onda seja ortogonal à posição onde se encontra, ou seja, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$, temos que os campos elétrico e magnético que formam a onda monocromática dependem somente do tempo, logo

$$\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) - \mathbf{B}_0 \sin(\omega t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{B}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right), \quad (3.138)$$

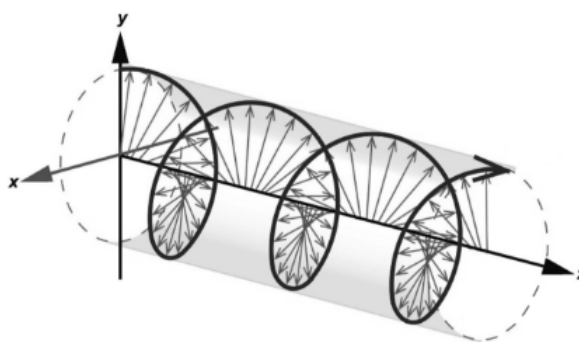
$$\mathbf{B}_+ = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{E}_0 \sin(\omega t) = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \omega t\right) \quad (3.139)$$

onde foram utilizadas as propriedades do cosseno da soma de dois ângulos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = -\sin(\omega t) \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \omega t\right) = \sin(\omega t). \quad (3.140)$$

Estes resultados eqs. (3.138) e (3.139), nos dizem que a amplitude do campo elétrico desta onda circula, em um plano xy , no sentido horário em torno do vetor de onda unitário apontando para à direita, ao longo da direção $z > 0$, do ponto de vista da fonte, veja Figura 4 (SABBATA; DATTA, 2007). Contudo, a amplitude do campo magnético está atrasada em relação à amplitude do campo elétrico, de forma tal que esta defasagem corresponde a um ângulo $\frac{\pi}{2}$ formado entre eles, em outras palavras, quando a amplitude do campo elétrico encontra-se no plano yz , a amplitude do campo magnético encontra-se no plano xz . Logo, estamos diante de uma onda circularmente polarizada à direita do ponto de vista da fonte.

Figura 4 – Onda eletromagnética circularmente polarizada a direita propagando-se na direção $z > 0$ do ponto de vista da fonte.



Fonte: <https://www.mdpi.com/2073-8994/11/4/474/htm>.

4 SIMETRIAS

Simetria é um dos pilares da Física Teórica na descrição das interações fundamentais (RAMOND, 1981), (SUNDERMEYER, 2014) e (SCHWICHTENBER, 2015). A interação entre campos e como estes são transportados paralelamente entre eventos no espaço-tempo devem obedecer leis de transformações específicas. O conjunto de todas estas transformações em questão forma um grupo de simetria ou Grupo de Lie (GL) cujos parâmetros são contínuos, (STEEB, 2007).

Além disso, simetrias, do ponto de vista físico, estão relacionadas com leis de conservação por meio do teorema de Noether, (ANCO; THE, 2005), (NEUENSCHWANDER, 2011). Por exemplo, dada uma equação, descrevendo algum fenômeno físico, se ela for invariante por transformações tais como translação temporal, translação espacial e rotação, o teorema de Noether implica que a energia, o momento linear e o momento angular deste sistema físico são conservados, respectivamente.

No presente capítulo discutiremos algumas das simetrias que estão relacionadas com as Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME), a saber, a simetria de Dualidade, a simetria de *Gauge*, a simetria de Lorentz, a simetria *CPT* e a simetria Conforme, interpretando-as fisicamente.

4.1 SIMETRIA DE DUALIDADE

A simetria de dualidade diz respeito à equivalência entre duas teorias físicas. Isto é, podemos dizer que existem duas realidades totalmente independentes, mas que levam à mesma física, (SONG, 1996).

Por outro lado, do ponto de vista mais recente, a simetria de dualidade envolve um dos tópicos mais quentes da Física Teórica, em particular, da física de altas energias, a correspondência AdS/CFT (BANERJEE, 2017). Sem entrar em muitos detalhes, esta correspondência prega a equivalência entre a descrição da matéria a nível quântico e a descrição da estrutura dinâmica do espaço-tempo (gravidade) em dimensões maiores que aquelas que experimentamos. Para uma discussão mais aprofundada, veja por exemplo (NATSUUME, 2015).

Uma consequência direta da invariância das EME por dualidade, é a conservação do número de fótons circularmente polarizados à esquerda e à direita, (MCDONALD, 2020). Isto se deve à conservação de uma propriedade conhecida como helicidade¹ eletromagnética dos campos no vácuo, quando não há a presença de matéria. Além disso, na presença de matéria, a helicidade eletromagnética não é uma propriedade conservada (CRIMIN et al., 2019).

Nesta seção calculamos a transformação de dualidade do campo eletromagnético, das densidades de carga e corrente (elétrica e magnética) e mostramos que podemos considerar duas realidades completamente diferentes em que as EME são válidas, implicando que ambas as realidades estão rotacionadas, uma em relação a outra, por um ângulo $\frac{\pi}{2}$, veja Figura 5.

A simetria de dualidade elétrico-magnética pode ser descrita por meio da seguinte transformação:

$$F' \longrightarrow e^{-\gamma^5 \phi} F, \quad (4.1)$$

onde ϕ é uma constante arbitrária.

Uma vez que a função exponencial pode ser expandida em série de potências, podemos escrever

$$e^{-\gamma^5 \phi} = \cos \phi - \gamma^5 \sin \phi, \quad (4.2)$$

onde foram identificadas as expansões, em série de potência, das funções cosseno e seno, respectivamente, além de que $(\gamma^5)^2 = -1$. Observe a semelhança entre a relação acima e uma rotação anti-horária, por um ângulo arbitrário ϕ , de um vetor de módulo r , dada por $r' \longrightarrow r \cos \phi - ir \sin \phi = r e^{-i\phi}$ no plano complexo. Logo, podemos escrever a transformação de dualidade, eq. (4.2), por meio de

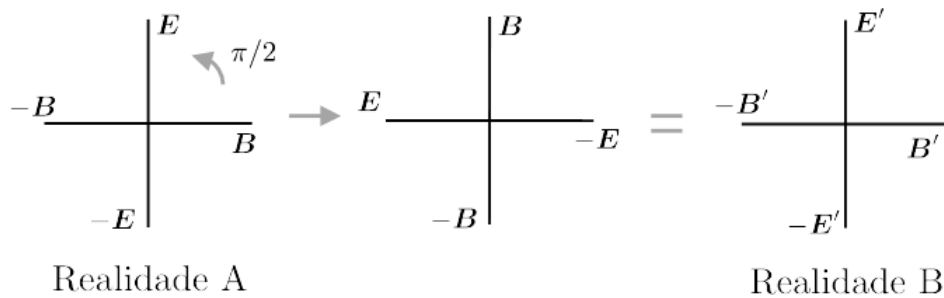
$$F' \longrightarrow F \cos \phi - \gamma^5 F \sin \phi, \quad (4.3)$$

em que, em termos de $F = \mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B}$, temos

$$\mathbf{E}' + \gamma^5 \mathbf{B}' \longrightarrow \mathbf{E} \cos \phi + \mathbf{B} \sin \phi + \gamma^5 (\mathbf{B} \cos \phi - \mathbf{E} \sin \phi). \quad (4.4)$$

¹ Helicidade é definida a partir da projeção do spin de partícula quântica na direção de seu quadrimomento (BINCER, 2013). Para a definição da helicidade eletromagnética, veja por exemplo (JAFARI, 2019).

Figura 5 – Plano magnético-elétrico definido pelos campos megnético (eixo horizontal) e elétrico (eixo vertical). Podemos considerar duas realidades independentes, uma correspondendo a “Realidade A” e a outra correspondendo a “Realidade B”. Se na realidade A existe um cientista realizando um experimento para tentar medir a força elétrica entre duas cargas elétricas, em B deve haver um cientista, um pouco diferente, fazendo um experimento para tentar medir a força magnética entre duas cargas magnéticas, de tal forma que o plano magnético-elétrico de ambas as realidades A e B formam um $\phi = \pi/2$, uma em relação à outra. O mesmo argumento pode ser usado para as densidades de carga e corrente (elétrica e magnética).



Fonte: (SONG, 1996).

Note que a orientação do espaço-tempo em que o campo eletromagnético F é definido, corresponde à mesma orientação de um outro espaço-tempo (dual) em que F' é definido, em virtude da presença do pseudoescalar γ^5 de ambos os lados da relação de transformação.

Com efeito, podemos escrever as transformações de dualidade para os campos elétrico e magnético, eq. (4.4) para ϕ arbitrário, por meio de

$$\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{E} \cos \phi + \mathbf{B} \sin \phi, \quad \mathbf{B}' \longrightarrow \mathbf{B} \cos \phi - \mathbf{E} \sin \phi. \quad (4.5)$$

Em particular, para $\phi = \frac{\pi}{2}$, veja Figura 5, temos

$$\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' \longrightarrow -\mathbf{E}. \quad (4.6)$$

Analogamente, para a corrente generalizada $\mathcal{J} = J_e + \gamma^5 J_m$, podemos encontrar

$$J'_e \longrightarrow J_e \cos \phi + J_m \sin \phi, \quad J'_m \longrightarrow J_m \cos \phi - J_e \sin \phi. \quad (4.7)$$

Uma vez que, em relação a um observador inercial γ_0 , podemos escrever

$$J'_e \gamma_0 \longrightarrow (\rho_e + \mathbf{J}_e) \cos \phi + (\rho_m + \mathbf{J}_m) \sin \phi, \quad J'_m \longrightarrow (\rho_m + \mathbf{J}_m) \cos \phi - (\rho_e + \mathbf{J}_e) \sin \phi. \quad (4.8)$$

em que

$$\mathbf{J}'_e \gamma_0 = \rho'_e + \mathbf{J}'_e, \quad \mathbf{J}'_m \gamma_0 = \rho'_m + \mathbf{J}'_m, \quad (4.9)$$

não é difícil ver que para $\phi = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\rho'_e \longrightarrow \rho_m, \quad \rho'_m \longrightarrow -\rho_e, \quad \mathbf{J}'_e \longrightarrow \mathbf{J}_m, \quad \mathbf{J}'_m \longrightarrow -\mathbf{J}_e. \quad (4.10)$$

No caso das EME, a simetria de dualidade é uma simetria quebrada, pois até onde sabemos monopolos magnéticos ainda são teóricos. Por outro lado, na ausência de fontes, as EME recuperam esta simetria.

Se definirmos um plano formado por dois eixos perpendiculares, com os campos magnético, na horizontal, e elétrico, na vertical, veja Figura 5, a transformação de dualidade dos campos, das densidades de carga e correntes, implica que estas quantidades e suas respectivas quantidades transformadas, estarão relacionadas por uma rotação anti-horária por um ângulo $\phi = \frac{\pi}{2}$ neste plano.

4.2 SIMETRIA DE GAUGE

Do ponto de vista da Física Teórica, a teoria eletromagnética é um dos pilares na construção de teorias mais modernas, um exemplo é o Modelo Padrão (MP) das partículas elementares, (WANG, 2018). Esta teoria descreve as interações nucleares forte e fraca e a própria interação eletromagnética a partir de um princípio de *gauge*, um princípio de simetria associado às transformações dos potenciais (conexões) da teoria, (SUNDERMEYER, 2014), (SCHWICHTENBER, 2015). A interação nuclear forte explica a coesão do núcleo atômico, a interação fraca explica o decaimento radioativo de diferentes elementos, enquanto que a eletromagnética explica as ligações químicas entre átomos e moléculas. No caso do eletromagnetismo, a simetria de *gauge* está relacionada com a conservação da carga elétrica (HUANG, 2007).

Nesta seção apresentaremos como escrever as transformações de *gauge* na presença de cargas elétricas e monopolos magnéticos. Expressamos as transformações em termos dos operadores diferencial e codiferencial e dos potenciais vetorial e de Stratton. Por fim, mostramos que é possível definir *gauges* de Lorenz escritos em termos dos operadores mencionados, deixando as EME invariantes.

Já vimos na seção 3.4 que podemos escrever o campo eletromagnético em termos de um potencial generalizado, eq. (3.65), ou seja, podemos escrever

$$F = \partial\mathcal{A} = \partial\cdot\mathcal{A} + \partial \wedge \mathcal{A} = \partial(A + \gamma^5 B) \quad (4.11)$$

em que A é o potencial vetorial e B o potencial de Stratton. Logo, também temos que

$$\partial\cdot\mathcal{A} = -\delta A - \gamma^5(dB), \quad \partial \wedge \mathcal{A} = dA + \gamma^5(\delta B), \quad (4.12)$$

uma vez que $d = \partial \wedge$, $\delta = -\partial\cdot$ e $d(\gamma^5 B) = \gamma^5(\delta B)$. As condições sobre o potencial de Hertz, eq. (3.59), nos obriga a impor $\delta A = 0$ e que $\gamma^5(\delta B) = 0$, assim

$$\partial\cdot\mathcal{A} = -\gamma^5(dB), \quad \partial \wedge \mathcal{A} = dA. \quad (4.13)$$

De fato, realizando uma transformação no potencial generalizado de forma que

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \partial f, \quad (4.14)$$

em que $f = g + \gamma^5 h$, é um campo que tem uma parte escalar e outra pseudoescalar, enquanto que g e h são 0-formas, funções escalares. Substituindo esta transformação na expressão para o campo eletromagnético, é possível encontrar

$$F = \partial\mathcal{A} + \partial^2 f. \quad (4.15)$$

Note que f é uma campo escalar, então temos de imediato que $\partial^2 f = 0$.

Todavia, lembrado que o operador de Dirac ∂ pode ser escrito em termos do operador de Kähler-Atiyah $d - \delta$, temos que

$$F = \partial(\mathcal{A} + \partial f) = dA - \delta A - \underbrace{\delta dg}_{=0} + d(\gamma^5 B) - \delta(\gamma^5 B) - \underbrace{\delta d(\gamma^5 h)}_{=0} - d\delta(\gamma^5 h). \quad (4.16)$$

Antes de continuar, devemos explicar quais objetos geométricos cada termo da expressão anterior representa. Com efeito:

- o primeiro é uma 2-forma, enquanto que o segundo e o terceiro devem ser uma 0-forma. O raciocínio é o seguinte: g é uma 0-forma, uma função escalar, então sua diferencial é uma 1-forma, logo, como o operador codiferencial pode ser escrito por meio do operador de Dirac, temos que a contração de uma 1-forma nada mais é que uma 0-forma;

- o quarto deve ser a contração de uma 0-forma, o que não faz sentido. Assim, este termo deve ser nulo;
- devemos lembrar também que γ^5 tem uma relação com o operador de Hodge \star , eq. (2.69), que relaciona as seções do fibrado de k -formas com as seções do fibrado de $(n-k)$ -formas. Isto significa que quando $n = 4$, γ^5 atua como um operador de dualidade, a menos de um sinal relativo. Deste modo, o quinto termo deve ser uma 4-forma, ou pseudoescalar, pois o dual de uma 1-forma, ou seja, o dual de B , é uma 3-forma, cuja diferencial fornece uma 4-forma;
- o sexto termo, usando os argumentos construídos até aqui, deve ser uma 2-forma;
- o sétimo também deve se anular, pois o dual de uma 0-forma é uma 4-forma e cuja diferencial deve resultar em uma 5-forma, o que também não faz sentido, uma vez que a dimensão do ETM é quadridimensional;
- por fim, o oitavo termo deve ser uma 4-forma.

Variando o potencial vetor A' por 1-forma, ou seja, $A' = A + dg$ e o potencial de Stratton B' por uma 3-forma, $\gamma^5 B' = \gamma^5 B - \delta(\gamma^5 h)$, temos que

$$\delta A' = \delta A + \delta dg, \quad d(\gamma^5 B') = d(\gamma^5 B) - d\delta(\gamma^5 h). \quad (4.17)$$

Feito isto, podemos expressar o campo eletromagnético F , eq. (4.11), como

$$F = dA - \delta A' - \delta(\gamma^5 B) + d(\gamma^5 B'). \quad (4.18)$$

Como g e h são funções escalares arbitrárias do espaço-tempo, podemos escolher por simplicidade $\delta dg = -\delta A$ e $d\delta(\gamma^5 h) = d(\gamma^5 B)$. Tais escolhas permitem chegar à conclusão de que

$$\delta A' = 0, \quad d(\gamma^5 B') = 0. \quad (4.19)$$

Portanto, encontramos a expressão já obtida eq. (3.60) que relaciona o campo eletromagnético com o potenciais vetorial e de Stratton.

A eq. (4.19) fornece os *gauges* de Lorenz generalizados, o que significa que a transformação generalizada

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} + \partial f, \quad (4.20)$$

deixa as EME, eq. (3.26), na presença de cargas elétricas e monopolos invariantes. Note que o *gauge* $\partial \cdot \mathcal{A} = 0$, implica nas condições impostas na eq. (4.19) e na ausência de monopolos, permitindo obter o resultado da eq. (3.68).

Uma das consequências da invariância das EME por uma transformação de *gauge* implica que a carga elétrica é conservada local² e globalmente. Isto significa que em um dado processo, tal como o decaimento atômico, inicialmente podemos considerar um átomo neutro decaindo em dois novos átomos, um positivamente carregado e outro negativamente carregado. Logo, temos que a carga elétrica total depois do decaimento de um átomo neutro deve ser neutra.

Quando as leis do eletromagnetismo são escritas em termos dos potenciais, vemos a liberdade de *gauge* que temos sobre esses potenciais. Contudo, em termos dos campos elétrico e magnético, essa liberdade não é mais presente. De fato, os campos são univocamente determinados para diferentes configurações de potenciais. Outro importante resultado é que esta invariância nos diz que a interação eletromagnética tem um alcance infinito, que do ponto de vista da teoria quântica de campos, corresponde ao fato do fóton não ter massa. Além disso, o potencial vetor também tem uma estreita relação com a fase quântica, o exemplo mais importante desta relação é envolvido com o efeito Aharonov-Bohm³, (AHARONOV; BOHM, 1959), (COURTEILLE, 2020).

² A princípio, a Lagrangeana da interação eletromagnética não é localmente invariante pelo grupo $U(1)$ porque seus parâmetros agora devem depender das posições do espaço-tempo. Para recuperar localmente a simetria $U(1)$, é necessário a introdução de uma derivada covariante, o que implica que o campo (o potencial vetor) deve transformar-se, a menos de uma constante de acoplamento (a carga elétrica), de acordo com a eq. (4.14), ou seja, como uma transformação de *gauge* (SCHWICHTENBER, 2015).

³ O efeito Aharonov-Bohm nos informa que as franjas de interferência produzidas em um experimento de fenda dupla, por exemplo, com elétrons, na presença de um campo magnético, sofrem um desvio lateral (mudança na fase da função de onda de um elétron) no anteparo colocado ligeiramente na frente das fendas.

4.3 SIMETRIA DE LORENTZ

As EME são invariantes pela simetria de Lorentz. Este resultado foi obtido a bastante tempo, uma vez que a simetria de Galileu mostrou-se ser incompatível com as leis do eletromagnetismo (ROCHA; RIZZUTI; MOTA, 2013).

A simetria de Lorentz permite considerarmos o movimento relativístico dos objetos no mundo físico. Quando as velocidades destes objetos se aproximam da velocidade da luz, nossa intuição física sobre a Natureza falha, um reflexo de que a estrutura de grupo adjacente ao espaço que usamos para descrever as leis físicas não é mais a de Galileu. Uma vez assumida a simetria de Lorentz, não existe um referencial privilegiado para descrever as leis da física, todos eles são compatíveis, desde que sejam inerciais.

No regime relativístico, propriedades contraintuitivas, como os fenômenos da contração de Lorentz e da dilatação temporal, precisam ser consideradas, (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). Por exemplo, para um observador em repouso na origem, um objeto rígido se movendo próximo da velocidade da luz, comóvel com outro observador, se contrai na direção do movimento, enquanto que o observador comóvel a este objeto não nota este efeito. No caso da dilatação temporal, o observador em movimento experimenta um tempo próprio, em outras palavras, o tempo para ele passa mais devagar em relação ao observador na origem.

Além de rotações espaciais, é possível realizar rotações no espaço-tempo, ou seja, *boosts* nas três direções espaciais x , y e z . Tecnicamente, *boosts* são transformações entre observadores inerciais se movendo relativamente com velocidade constante de modo que o centro de massa do sistema se torna uma quantidade invariante (SCHWICHTENBER, 2015).

Ilustramos a seguir um *boost* do campo eletromagnético, de forma que os campos elétrico e magnético definidos por ele sejam 1-formas do espaço-tempo, ou seja, quantidades quadridimensionais por excelência. Este fato implica que as transformações vigentes, eq. (4.52), dos campos elétrico e magnético, no espaço tridimensional euclídeo, veja por exemplo (JACKSON, 1999), (HESTENES, 2015), são transformações aparentes, ou seja, elas não estão de acordo com a Relatividade Especial (RE) de Einstein (IVEZIC, 2005). Além

disso, mostramos também que não existe uma mistura das componentes dos campos elétrico e magnético depois da transformação e, como novidade, enfatizamos que as componentes linearmente independentes destes campos também são transformadas, conclusão que não é possível chegar usando as transformações de Lorentz vigentes.

De acordo com IVEZIC (2005), é possível definir também o campo eletromagnético, eq. (3.27), da seguinte maneira

$$F = E \wedge \gamma_0 + c(\gamma_5 B) \cdot \gamma_0. \quad (4.21)$$

onde E e B são os campos elétrico e magnético, respectivamente, c a velocidade da luz e γ_5 o pseudoescalar do espaço-tempo. As componentes do campo elétrico podem ser obtidas contraindo-se o campo eletromagnético F à direita com um observador inercial definido por γ_0 , logo

$$F \cdot \gamma_0 = E^\mu \gamma_\mu \wedge \gamma_0 \cdot \gamma_0 + c(\gamma_5 B^\mu \gamma_\mu) \cdot \gamma_0 \cdot \gamma_0, \quad (4.22)$$

em que

$$\gamma_\mu \wedge \gamma_0 \cdot \gamma_0 = -(\eta_{0\mu} \gamma_0 - \eta_{00} \gamma_\mu), \quad (\gamma_\mu \cdot \gamma_0) \cdot \gamma_0 = \eta_{\mu 0} \gamma_0. \quad (4.23)$$

Uma vez que os campos elétrico e magnético têm suas componentes temporais iguais a zero, temos $F \cdot \gamma_0 = 0$ para $\mu = 0$. Por outro lado, para $\mu = k$, com $(k = 1, 2, 3)$, temos

$$F \cdot \gamma_0 = E^k \gamma_k, \quad (4.24)$$

que por simplicidade escreveremos

$$F \cdot \gamma_0 = E^\mu \gamma_\mu = E, \quad (4.25)$$

onde fica implícito que a componente temporal de E é nula. IVEZIC (2005) define o campo elétrico E como um 1-vetor. Em nosso caso, ele deve ser pensado como sendo 1-forma pertencente a uma seção local do FCET.

Todavia, para encontrarmos as componentes do campo magnético, devemos calcular o produto exterior entre o campo eletromagnético F e a 1-forma definida pelo observador γ_0 , de forma tal que o termo envolvendo a parte correspondente ao campo elétrico seja

zero. Portanto, temos que

$$F \wedge \gamma_0 = \underbrace{F^{0k} \gamma_0 \wedge \gamma_k \wedge \gamma_0}_{=0} + \frac{1}{2} F^{jk} \gamma_j \wedge \gamma_k \wedge \gamma_0 = \gamma_5 c B^i \gamma_i. \quad (4.26)$$

Em que foram definidas as componentes do campo magnético em termos das componentes do tensor $F_{\mu\nu}$, as componentes do campo eletromagnético covariante, ou seja,

$$B^i \equiv -\frac{1}{2c} \epsilon^{0ijk} F_{jk}. \quad (4.27)$$

Note que F^{0k} fornecem as componentes do campo elétrico para $(k = 1, 2, 3)$ e, além disso, é possível identificar

$$F \wedge \gamma_0 = \gamma_5 c B^\mu \gamma_\mu \longrightarrow -\frac{1}{c} \gamma_5 (F \wedge \gamma_0) = B^\mu \gamma_\mu = B, \quad (4.28)$$

uma vez que $(\gamma_5)^2 = -1$.

Ademais, as componentes do campo eletromagnético covariante são definidas por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

enquanto que as componentes contravariantes por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 c & B^2 c \\ E^2 & B^3 c & 0 & -B^1 c \\ E^3 & -B^2 c & B^1 c & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Neste sentido, um *boost* na direção γ_1 pode ser definido a partir da definição dos geradores

$$\mathcal{B} = \frac{1 + \gamma + \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}}, \quad \tilde{\mathcal{B}} = \frac{1 + \gamma - \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}}. \quad (4.31)$$

Veja Apêndice B para uma discussão sobre como obtê-los.

Deste modo, de acordo com VAZ JR. (2000), podemos escrever, no sentido passivo, um *boost* de Lorentz do campo eletromagnético na direção γ_1 como

$$F' = \tilde{\mathcal{B}} F \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} (F^{0k} \gamma_k) \mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}} \left(-\frac{1}{2c} \epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i \right) \mathcal{B}. \quad (4.32)$$

Vejam os como as componentes do campo elétrico se transformam. Para isto devemos calcular o seguinte produto, de modo que a ordem dos produtos deve ser respeitada. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
E' &= \left[\frac{1 + \gamma - \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \right] F^{0k}\gamma_k \left[\frac{1 + \gamma + \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \right] \\
&= \frac{1}{2}(1 + \gamma)(F^{0k}\gamma_k) - \frac{1}{2}\gamma\beta\gamma_1\gamma_0(F^{0k}\gamma_k) + \frac{1}{2}\gamma(F^{0k}\gamma_k)\beta\gamma_1\gamma_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)}\beta\gamma_1\gamma_0(F^{0k}\gamma_k)\beta\gamma_1\gamma_0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Antes de prosseguir, devemos notar o seguinte: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ é o fator de Lorentz e $\beta = u/c$, sendo que u é a velocidade com que um observador inercial viaja na direção x ou γ_1 , em relação a um referencial em repouso na origem, e c a velocidade da luz no vácuo. Usando a relação $\frac{\gamma^2}{\gamma+1} = \frac{\gamma-1}{\beta^2}$, podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}(1 + \gamma)(F^{0k}\gamma_k) - \frac{1}{2}\gamma\beta\gamma_1\gamma_0(F^{0k}\gamma_k) + \frac{1}{2}\gamma(F^{0k}\gamma_k)\beta\gamma_1\gamma_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta\gamma_1\gamma_0(F^{0k}\gamma_k)\beta\gamma_1\gamma_0.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Feito isto, devemos agora lembrar que, como as componentes do campo elétrico são simplesmente funções, elas podem ser ignoradas por enquanto. O mesmo pode ser feito com γ , uma vez que ele é um número real. Por outro lado, como o fator β é proveniente da componente de um vetor constante, a velocidade de um observador inercial u , devemos supor que seu valor esteja condicionado a uma direção unitária apontando ao longo da direção γ_1 . Logo, a seguinte condição precisa ser satisfeita:

$$\gamma_k\beta\gamma_1\gamma_0 = \gamma_k\beta\gamma_1 \wedge \gamma_0 = -\beta\gamma_1 \wedge \gamma_0\gamma_k, \tag{4.35}$$

a qual segue do terceiro termo da eq. (4.34). De fato, podemos simplificar o último termo da eq. (4.34) e escrever

$$-\beta\gamma_1\gamma_0\gamma_k\beta\gamma_1\gamma_0 = -\beta\gamma_1 \wedge \gamma_0\gamma_k\beta\gamma_1 \wedge \gamma_0 = \beta^2\gamma_k. \tag{4.36}$$

Assim, os resultados anteriores, eqs. (4.35) e (4.36), advêm do fato de que β , γ_0 e as 1-formas espaciais, por exemplo, γ_1 , anticomutam entre si e com E .

Substituindo os resultados anteriores, eqs. (4.35) e (4.36) na eq. (4.34), encontramos

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \gamma)(F^{0k}\gamma_k) - 2\gamma\beta\gamma_1\gamma_0(F^{0k}\gamma_k) + (\gamma - 1)(F^{0k}\gamma_k) \right\} \\ &= \gamma F^{0k}\gamma_k - \gamma\beta F^{0k}\gamma_1\gamma_0\gamma_k. \end{aligned} \quad (4.37)$$

No entanto, para determinarmos a expressão final, nos resta calcular o seguinte produto: $\gamma_1\gamma_0\gamma_k = (\gamma_1 \wedge \gamma_0)\gamma_k$. Além disso, lembrando que estamos à procura de uma 1-forma do espaço-tempo, cujas componentes devem ser as do campo elétrico, temos

$$(\gamma_1 \wedge \gamma_0)\gamma_k = (\gamma_1 \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_k + (\gamma_1 \wedge \gamma_0) \wedge \gamma_k, \quad (4.38)$$

que por considerações físicas, o segundo termo do lado direito, do resultado acima, deve se anular para $k = 0, 1$ ou fornecer uma 3-forma para $k = 2, 3$, que não é o caso, pois estamos à procura de uma 1-forma.

Logo, a única possibilidade é considerarmos o produto interno contraído à esquerda entre a 2-forma $\gamma_1 \wedge \gamma_0$ e a 1-forma γ_k , o qual é dado por

$$(\gamma_1 \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_k = -((\gamma_k \cdot \gamma_1)\gamma_0 - (\gamma_k \cdot \gamma_0)\gamma_1) = -\eta_{k1}\gamma_0 + \eta_{k0}\gamma_1. \quad (4.39)$$

Note que o produto anterior é nulo a menos que $k = 1$, fornecendo o resultado γ_0 .

Finalmente, podemos escrever as componentes transformadas do campo elétrico, eq. (4.25), como

$$E' = -\gamma\beta E^1\gamma_0 - \gamma E^1\gamma_1 - \gamma E^2\gamma_2 - \gamma E^3\gamma_3, \quad (4.40)$$

enquanto que a transformação usual, de acordo com a ref. (TONG, 2015), é dada por

$$E_{st} = (0, E_x, E_y, E_z) \longrightarrow E'_{st} = (0, E_x, \gamma(E_y - uB_z), \gamma(E_z - uB_y)), \quad (4.41)$$

em que u é a velocidade do *boost* na direção $x > 0$, enquanto que o subscrito st denota a transformação padrão, vigente, usual, etc., do campo, neste caso, o campo elétrico.

Note que a componente temporal da eq. (4.40) não se anula e que não existe uma mistura de componentes dos campos elétrico e magnético, resultado que está em conformidade com a ref. (IVEZIC, 2005). Todavia, ela sugere que as componente E^2 e E^3 também devem ser afetadas pelo *boost* na direção γ_1 .

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível calcular o *boost* do campo magnético. Deste modo, temos

$$\begin{aligned}
B' &= \left[\frac{1 + \gamma - \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \right] \left(-\frac{1}{2c} \epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i \right) \left[\frac{1 + \gamma + \gamma\beta\gamma_1\gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \right] \\
&= -\frac{1}{4c} (1 + \gamma) (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i) + \frac{1}{4c} \gamma\beta\gamma_1\gamma_0 (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i) - \frac{1}{4c} \gamma (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i) \beta\gamma_1\gamma_0 \\
&\quad + \left(\frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \right) \frac{1}{4c} \beta\gamma_1\gamma_0 (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i) \beta\gamma_1\gamma_0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Agora, devemos notar que o terceiro termo da expressão anterior é relacionado com o seguinte produto:

$$-\gamma_i \beta \gamma_1 \wedge \gamma_0 = -\beta \gamma_i \gamma_1 \wedge \gamma_0 = \beta \gamma_1 \wedge \gamma_0 \gamma_i. \tag{4.43}$$

Assim, devemos destacar que o quarto termo da mesma expressão é associado ao produto:

$$\beta \gamma_1 \gamma_0 \gamma_i \beta \gamma_1 \gamma_0 = \beta \gamma_1 \wedge \gamma_0 \gamma_i \beta \gamma_1 \wedge \gamma_0 = -\gamma_i \beta^2. \tag{4.44}$$

Os resultados anteriores, eqs (4.43) e (4.44), advêm do fato de que β , γ_0 e γ_1 anticomutam entre si. No entanto, β e γ_0 comutam com B , que por sua vez, deve anticomutar com 1-formas do espaço.

Logo, podemos escrever a eq. (4.42) como

$$B' = \frac{1}{2c} \gamma (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i) - \frac{1}{2c} \gamma \beta \gamma_1 \gamma_0 (\epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma_i). \tag{4.45}$$

Agora, devemos observar que $\gamma_1 \gamma_0 \gamma_i = (\gamma_1 \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_i$, o que implica em

$$(\gamma_1 \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_i = -((\gamma_i \cdot \gamma_1) \gamma_0 - (\gamma_i \cdot \gamma_0) \gamma_1) = -\eta_{i1} \gamma_0 + \eta_{i0} \gamma_1, \tag{4.46}$$

que claramente é igual a zero a menos que $i = 1$, fornecendo o resultado γ_0 .

Finalmente, podemos escrever as componentes transformadas do campo magnético como

$$B' = -\gamma \beta B^1 \gamma_0 + \gamma B^1 \gamma_1 + \gamma B^2 \gamma_2 + \gamma B^3 \gamma_3, \tag{4.47}$$

enquanto que a transformação usual é

$$B_{st} = (0, B_x, B_y, B_z) \longrightarrow B'_{st} = \left(0, B_x, \gamma \left(B_y + \frac{u}{c^2} E_z \right), \gamma \left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right) \right). \tag{4.48}$$

De acordo com IVEZIC (2005), a eq. (4.40) corresponde à expressão para o campo elétrico transformado ativamente, usando o formalismo algébrico-geométrico, e o mesmo

para eq. (4.47), que corresponde à expressão para o campo magnético. Na verdade, de acordo com VAZ JR. (2000), ambas as expressões são obtidas a partir da transformação passiva, e não ativa, do campo eletromagnético, eq. (4.32), um objeto geométrico quadridimensional, independente de observadores e invariante sob uma transformação de Lorentz passiva. Logo, as transformações obtidas dos campos elétrico e magnético, eqs. (4.40) e (4.47), seguem o ponto de vista passivo, de acordo com a ref. (VAZ JR., 2000).

Pode-se notar que as eqs. (4.40) e (4.47), e as eqs. (4.41) e (4.48), são diferentes, respectivamente. Na verdade, um observador O que mede tanto E' quanto B' , em seu referencial, não irá concordar com o observador O' que mede E'_{st} e B'_{st} , em seu referencial, uma vez que estas quantidades são diferentes. De fato, quando O' detecta campo elétrico, este percebe que as componentes deste campo têm um mistura de campos elétrico e magnético como podemos notar pelas eqs. (4.41) e (4.48). Além disso, devemos enfatizar que cada observador realiza medidas sobre os objetos em seu próprio referencial e que, *medidas experimentais não estão relacionadas por meio de transformações de Lorentz*, logo as transformações vigentes, eqs. (4.41) e (4.48), dos campos elétrico e magnético, não estão de acordo com as transformações de Lorentz de acordo com o formalismo algébrico-geométrico, pois estes objetos não correspondem a quantidades quadridimensionais bem definidas e independentes de observadores como F , E e B , eqs. (4.21), (4.25) e (4.28), respectivamente (IVEZIC, 2005).

Um dos possíveis argumentos para justificar a diferença entre as transformações dos campos (IVEZIC, 2005), segundo os formalismos algébrico-geométrico e tensorial, é que, as identificações

$$E_k = F^{0k}, \quad B^i = -\frac{1}{c}\epsilon^{0ijk}F_{jk}, \quad (4.49)$$

não são corretas, pois do lado esquerdo das expressões acima, temos as componentes de vetores do espaço euclideano tridimensional, igualadas às componentes de objetos quadridimensionais, a saber, F^{0k} , ϵ^{0ijk} e F_{jk} . Tais identificações não correspondem a uma operação bem definida no formalismo tensorial, uma vez que operações bem definidas são, por exemplo, a contração entre dois pares de índices e à adição de componentes de dois tensores. Além disso, elas dependem do sistema de coordenadas adotado.

Consideremos uma distribuição de carga no referencial O' movendo-se com velocidade β em relação ao referencial O na direção $x > 0$. Logo, um observador em O estará na presença de uma densidade de corrente $J_x = \gamma\rho_0\beta$. Deste modo, temos as seguintes quadricorrentes em cada referencial

$$J^\mu = (\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\beta, 0, 0), \quad J'^\mu = (\rho_0, 0, 0, 0), \quad (4.50)$$

as quais estão relacionadas por um *boost* na direção x . No formalismo tensorial, a relação entre as quadricorrentes, eq. (4.50), é expressa como

$$J^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu J'^\nu, \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_+^\uparrow(1, 3), \quad (4.51)$$

isto significa que as transformações usuais dos campos elétrico e magnético, eqs. (4.41) e (4.48), são obtidas da mesma forma, segundo a lei de transformação

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}, \quad (4.52)$$

porém agora

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \Lambda^\nu{}_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Assim, as transformações dos campos elétrico e magnético usando a eq. (4.52), segundo o formalismo tensorial, levam às transformações incorretas. Pois, estas fundamentam-se na identificação de quantidades tridimensionais com quadridimensionais, eq. (4.49). Esta identificação não é uma operação bem definida no formalismo tensorial.

Portanto, os resultados obtidos, eqs. (4.40) e (4.47), mostram que quando um *boost* do campo eletromagnético, definido pela eq. (4.21), é realizado, não existe uma mistura entre as componentes dos campos elétrico e magnético transformados. Estes resultados confrontam as transformações vigentes, eqs. (4.41) e (4.48), que apresentam uma mistura das componentes destes campos. Além do fato de que as componentes temporais destes

campos, eqs. (4.41) e (4.48), não são identicamente nulas e que as componentes linearmente independentes da direção em que ocorre a transformação, também devem ser afetadas pelo *boost*, gerando uma novidade. Estes resultados reforçam que a transformação de Lorentz de quantidades tridimensionais (os campos elétrico e magnético) são transformações aparentes (IVEZIC, 2005).

4.4 SIMETRIA *CPT*

Na presente seção, mostramos que algumas das transformações que podem ser realizadas sobre os objetos geométricos da AET estão relacionadas com as transformações da simetria *CPT* e que para considerarmos a conjugação de carga, *C*, é necessário que o Espaço-Tempo de Minkowski (ETM) seja complexificado.

A conjugação de carga, *C*, nos informa que em um dado sistema físico, as partículas são trocadas pelas suas antipartículas. A denominação de conjugação de carga, advém do fato de que dada uma partícula carregada, por exemplo, o elétron de carga negativa, quando sujeito a esta transformação, é convertida em sua antipartícula, o pósitron de carga positiva. Por sua vez, a simetria de conjugação espacial *P*, inversão espacial, transformação de paridade, etc., implica que as partículas presentes em um dado sistema, as interações entre elas e o processo de decaimento, são trocados pelas suas respectivas versões espelhadas espacialmente. Por fim a simetria de inversão temporal *T*, implica que interações entre partículas evoluindo no tempo se comportam da mesma forma como se elas estivessem regredindo no tempo.

Do ponto de vista axiomático, estas simetrias implicam diretamente na simetria de Lorentz, no princípio de localidade⁴ e na unitariedade da teoria (conservação da densidade de probabilidade) em um espaço com geometria plana, por exemplo, o ETM. Em teorias quânticas de campo, em relação a este ponto de vista, é possível calcular separadamente as simetrias *C*, *P* e *T* e, em seguida, calcular o produto entre elas, o que não é possível usando o formalismo lagrangeano, uma das ferramentas mais utilizadas no tratamento de simetrias em Física.

⁴ Este princípio nos diz que a interação entre dois sistemas somente pode acontecer por intermédio de seu entorno imediato.

Além disso, a violação da simetria CPT , envolve o comportamento da matéria em várias escalas de energia, veja por exemplo (KOSTELECKY; RUSSELL, 2008), e também na escala de Planck, em outras palavras, no contexto da gravidade quântica, que busca incluir a interação gravitacional na explicação do comportamento da matéria nesta escala (GREENBERG, 2006), (MAVROMATOS, 2009).

A fim de investigar a simetria CPT no contexto da AET, devemos lembrar que um elemento arbitrário da seção do FCET pode ser escrito como

$$B = B_0 + B^\mu \gamma_\mu + \frac{1}{2!} B^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu + \frac{1}{3!} B^{\mu\nu\alpha} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha + \frac{1}{4!} B^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta$$

$$\in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^k T^*M) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \eta),$$
(4.54)

correspondendo a uma k -forma, que para nossos propósitos consideramos $n = 4$, re- peitando uma dimensão temporal positiva definida e três dimensões espaciais negativas definidas. Localmente, este elemento é isomorfo a um elemento da AET, $\mathbb{R}_{1,3}$. De acordo com a ref. (VARLAMOV, 2003), é possível definir além das operações que são apresentadas na Tabela 4, um pseudoautomorfismo, que podem ser realizadas sobre estes objetos:

1. **Identidade:** Existe um automorfismo no FCET tal que

$$B \rightarrow B,$$
(4.55)

em que $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu$.

2. **Involução graduada:** Um automorfismo $B \rightarrow \hat{B}$ em que $\gamma_\mu \rightarrow -\gamma_\mu$.

Este automorfismo atua sobre um elemento arbitrário B , tal que seja possível definir uma decomposição $B = B^{(0)} + B^{(1)}$, em que $B^{(0)}$ é uma k -forma cujas componentes são homogêneas de grau par, enquanto que $B^{(1)}$ também é uma k -forma cujas componentes são homogêneas, mas de grau ímpar. Isto significa que $B^{(0)}$ permanece inalterada sob a ação de uma involução graduada, enquanto que $B^{(1)}$ é alterada por uma mudança fase, ou seja, $\hat{B} = B^{(0)} - B^{(1)}$. Se B é homogêneo, então define-se

$$\hat{B} = (-1)^k B,$$
(4.56)

onde k é o grau de B . Por exemplo, o grau do campo eletromagnético é $k = 2$. Além disso, uma vez definido o elemento de volume $\gamma^5 = \gamma^0 \wedge \gamma^1 \wedge \gamma^2 \wedge \gamma^3$, i.e., o pseudoescalar

do espaço-tempo, podemos escrever também $\hat{B} = \gamma^5 B (\gamma^5)^{-1}$, tal que $(\gamma^5)^{-1} = \gamma^5$, logo $\hat{B} = \gamma^5 B \gamma^5$. Todavia, de acordo com a referência (SABBATA; DATTA, 2007), deve haver um sinal relativo na expressão anterior, de modo que $\hat{B} = -\gamma^5 B \gamma^5$, define uma conjugação do espaço-tempo.

3. **Reversão:** Esta operação é um antiautomorfismo $B \rightarrow \tilde{B}$ em que $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu$. Quando esta operação age sobre um elemento B , temos que seus elementos de base são substituídos pelos mesmos elementos na ordem reversa. Logo para um elemento B do FCET, temos

$$\tilde{B} = (-1)^{k(k-1)/2} B. \quad (4.57)$$

4. **Conjugação:** Esta operação é um antiautomorfismo $B \rightarrow \tilde{\tilde{B}} = \bar{B}$ em que $\gamma_\mu \rightarrow -\gamma_\mu$, o qual é a composição do automorfismo $B \rightarrow \hat{B}$ e do antiautomorfismo $B \rightarrow \tilde{B}$. Logo para um elemento B , tem-se

$$\bar{B} = (-1)^{k(k+1)/2} B. \quad (4.58)$$

5. **Pseudoautomorfismo:** A ideia que está por detrás da transformação discreta, conjugação de carga, está ligada, de maneira geral, à operação de extração do subespaço $\mathbb{R}^{p,q}$ do espaço \mathbb{C}^n . Uma base ortonormal deste espaço é escrita como $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$, satisfazendo $\hat{e}_1^2 = 1$. Isto significa que os primeiros p vetores da base permanecem inalterados, enquanto que os q vetores da base são multiplicados pelo fator imaginário $i = \sqrt{-1}$, de forma que a nova base $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p, i\hat{e}_{p+1}, \dots, i\hat{e}_{p+q}\}$ permite realizar a referida extração. A ideia é que a extração do subespaço real $\mathbb{R}^{p,q}$ de \mathbb{C}^n , induz também uma extração da subálgebra real $\mathbb{R}_{p,q}$ em $\mathbb{C}_n = Cl_n = Cl_n(\mathbb{C}) = Cl_{p,q}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$. Logo, um elemento de \mathbb{C}_n pode ser escrito como $B = B_1 + iB_2$, em que $B_1, B_2 \in \mathbb{R}_{p,q}$. Portanto, é possível definir um pseudoautomorfismo, aqui denotado por \circ , sobre \mathbb{C}_n tal que

$$\mathring{B} = B_1 - iB_2. \quad (4.59)$$

Por outro lado, com a operação \circ , é possível estender o conjunto de automorfismo da AC \mathbb{C}_n , de modo que os quatro automorfismos $B \rightarrow B, B \rightarrow \hat{B}, B \rightarrow \tilde{B}, B \rightarrow \bar{B}$ com a adição de $B \rightarrow \mathring{B}$ e mais três composições, tais que

$$B \rightarrow \mathring{\hat{B}}, \quad B \rightarrow \mathring{\tilde{B}}, \quad B \rightarrow \mathring{\bar{B}}, \quad (4.60)$$

forneem um pseudoautomorfismo e dois pseudoantiautomorfismos, respectivamente. Logo, é possível definir um conjunto de automorfismos de \mathbb{C}_n , o qual contém oito transformações, as quais formam um grupo de ordem 8, ou seja,

$$\{\text{id}, \hat{}, \sim, -, \circ, \hat{}, \hat{}, \hat{}\}. \quad (4.61)$$

Este grupo tem os seguintes isomorfismos

$$\{\text{id}, \hat{}, \sim, -, \circ, \hat{}, \hat{}, \hat{}\} \simeq \{1, P, T, PT, C, CP, CT, CPT\} \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2, \quad (4.62)$$

cujos símbolos e significados são mostrados na Tabela 5.

O grupo $\{1, P, T, PT, C, CP, CT, CPT\}$ com comutatividade e com a condição $P^2 = T^2 = (PT)^2 = C^2 = (CP)^2 = (CT)^2 = (CPT)^2 = 1$ é um grupo abeliano de ordem 8, que por sua vez, é isomorfo ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

Tabela 5 – Automorfismo, antiautomorfismo e pseudoautomorfismo da AET e suas relações com as simetrias C , P , T , e CPT

Operação	Símbolo	Significado
$\hat{}$	P	Paridade (Inversão espacial)
\sim	T	Reversão temporal
$-$	PT	Reflexão total
\circ	C	Conjugação de carga
$\hat{}$	CP	Inversão espacial + Conjugação de carga
$\hat{}$	CT	Reversão temporal + Conjugação de carga
$\hat{}$	CPT	Reversão temporal + Inversão espacial + Conjugação de carga

Fonte: Autoria própria.

A simetria CPT no formalismo da AET está intimamente lidada às propriedades das transformações discretas, eqs. (4.56), (4.57), (4.58), (4.59) e a operação identidade (4.55). Além disso, devemos notar que para considerarmos a conjugação de carga, o espaço, o qual é usado para descrever as leis da Natureza, precisa necessariamente ser complexo.

4.5 SIMETRIA CONFORME

Simetria Conforme é uma simetria que preserva ângulos⁵ entre as direções dos campos no espaço-tempo, mas não preserva comprimento (SUNDERMEYER, 2014). Em

⁵ Os ângulos são invariantes de escala.

particular, esta simetria implica na seguinte lei de transformação para o tensor métrico do espaço-tempo

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) \rightarrow \Omega^2(x^\alpha)g_{\mu\nu}(x^\alpha), \quad (4.63)$$

que não necessariamente é considerado plano, como por exemplo, o ETM. $\Omega(x^\alpha)$ é uma função adimensional das variáveis locais x^α do espaço-tempo, de modo que a lei de transformação, eq. (4.63), é uma consequência da transformação das coordenadas locais $x^{\alpha'} \rightarrow \Omega(x^\alpha)x^\mu$, que nada mais é que uma transformação de escala (COUMBE, 2018). A simetria Conforme e a simetria de Dualidade, veja seção 4.1, juntas constituem a máxima simetria, a qual deixa as EME invariantes. Além disso, esta última simetria tem um papel importante no estudo de teorias que vão além do MP como, por exemplo, teorias de corda e supersimetria (BEDFORD, 2011) e (BERTOLINI, 2021).

Seguindo VAZ JR. e ROCHA JR. (2012), é possível definir o grupo dos geradores de simetria Conforme como

$$\text{Conf}(p, q) \simeq O(p + 1, q + 1)/\mathbb{Z}_2, \quad (4.64)$$

em que $O(p + 1, q + 1)$ denota o grupo ortogonal, enquanto que \mathbb{Z}_2 é o grupo cíclico de ordem 2. Em termos dos geradores da AET, ou seja, $\{\gamma^\mu\}$, que por sua vez, são isomorfos às seções ortonormais do FCET de dimensão 4, o grupo Conforme para $p = 1$ e $q = 3$ é dado por $\text{Conf}(1, 3)$, o qual generaliza o grupo de Poincaré⁶. Sabemos que o grupo de Poincaré tem associado dez geradores, três geradores de translação espacial, um gerador de translação no tempo e seis geradores de rotação, três espaciais e três temporais (*boosts*). Por sua vez, o grupo Conforme, inclui mais quatro geradores de transformações especiais e um gerador de transformação de escala.

Por fim, nesta seção, definiremos os geradores de simetria associados a este grupo em termos dos geradores da AET e concluímos com uma discussão sobre seus significados físicos. Apresentamos também as relações de comutação que tais geradores satisfazem, o que significa que eles satisfazem uma Álgebra de Lie (AL) e mostramos que tais comutadores possuem uma propriedade de dualidade semelhante à dualidade elétrica-magnética discutida na seção 4.1.

⁶ Grupo de Lorentz mais translações no espaço e no tempo (STEEB, 2007).

Com efeito, os geradores do grupo Conforme são:

$$P^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu + i\gamma^\mu\gamma^5), \quad M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu), \quad (4.65)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}i\gamma^5, \quad \mathcal{K}^\mu = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu - i\gamma^\mu\gamma^5),$$

para $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, em que P^μ , $M^{\mu\nu}$, \mathcal{D} e \mathcal{K}^μ são os geradores infinitesimais de translações no espaço-tempo, transformações de Lorentz (*boosts* e rotações), transformações de escala e transformações especiais conforme (inversão espacial e temporal, e transversão⁷), respectivamente, e $i = \sqrt{-1}$. Estes geradores formam uma AL conforme, o que significa que eles satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [\mathcal{K}^\mu, \mathcal{K}^\nu] = 0, \quad [M^{\mu\nu}, \mathcal{D}] = 0, \quad (4.66)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = -(\eta^{\mu\lambda}P^\nu - \eta^{\nu\lambda}P^\mu), \quad [M^{\mu\nu}, \mathcal{K}^\lambda] = -(\eta^{\mu\lambda}\mathcal{K}^\nu - \eta^{\nu\lambda}\mathcal{K}^\mu), \quad (4.67)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\rho}] = \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}, \quad (4.68)$$

$$[P^\mu, \mathcal{K}^\nu] = 2(\eta^{\mu\nu}\mathcal{D} - M^{\mu\nu}), \quad (4.69)$$

$$[P^\mu, \mathcal{D}] = P^\mu, \quad [\mathcal{K}^\mu, \mathcal{D}] = -\mathcal{K}^\mu. \quad (4.70)$$

As interpretações para cada comutador são as seguintes:

- Geometricamente, as três primeiras relações, eqs.(4.66), da esquerda para a direita, implicam que é possível construir paralelogramos cujos lados são dados pelas direções μ e ν de seus geradores. Além disso, é possível definir duas identidades de Jacobi assumindo uma simetria nos índices dos geradores de translação no espaço-tempo e transformações especiais conformes.

⁷ Uma inversão seguida de uma translação e de uma nova inversão.

- A quarta relação, eq. (4.67), nos informa que o comutador entre o gerador de rotação no espaço-tempo e o gerador de translações, corresponde a uma combinação linear destes últimos geradores nas direções do hiperplano formado pelas direções linearmente independentes μ e ν . O mesmo raciocínio pode ser usado para descrever a quinta relação, eq. (4.67), cujo resultado é uma combinação linear de transformações especiais conformes.
- A sexta relação, eq. (4.68), revela que o comutador dos geradores de rotação no espaço-tempo, em direções linearmente independentes, fornece uma combinação linear de geradores de rotações no espaço-tempo.
- A sétima relação, eq. (4.69), nos diz que o comutador entre uma translação e uma transformação especial, corresponde a uma combinação de uma transformação de escala e uma rotação.
- A oitava relação, eq. (4.70), implica, por sua vez, que o comutador entre uma translação e uma dilatação corresponde a um translação.
- Finalmente, o comutador entre uma transformação especial e uma dilatação, eq. (4.70), fornece uma transformação especial a menos de um sinal relativo.

Além disso, podemos verificar que tais relações de comutação permanecem invariantes perante as substituições

$$P^\mu \mapsto -\mathcal{K}^\mu, \quad \mathcal{K}^\mu \mapsto -P^\mu, \quad \mathcal{D} \mapsto -\mathcal{D}. \quad (4.71)$$

O que podemos retirar de toda essa discussão sobre simetria é que elas são fundamentais no estudo de fenômenos físicos. Desde os tempos antigos, simetria tem despertado o interesse de artistas, físicos e matemáticos mas, somente recentemente, a partir da relevância do teorema de Noether, ela se tornou fundamental na análise física, uma vez que é possível relacionar a cada simetria à uma lei de conservação. Isto mostra que as EME formam um terreno fértil no estudo introdutório de simetrias, primeiro porque a teoria eletromagnética não é tão complicada em relação, por exemplo, às teorias quânticas de campos e Relatividade Geral (RG). O formalismo da AET permite tratar de maneira geral,

simetrias contínuas, envolvendo o espaço e tempo como a simetria conforme e, também simetrias discretas que não estão relacionadas com o espaço-tempo, tal como dualidade, conjugação de carga e paridade.

Para finalizar, uma vez que os comutadores associados à simetria conforme são invariantes pelas substituições mencionadas acima, eq. (4.71), estamos diante de uma simetria de dualidade, cujo primeiro exemplo é a dualidade elétrica-magnética discutida na seção 4.1. Do ponto de vista físico, isto significa que podemos considerar duas teorias de campo conforme completamente diferentes, cujo significado físico seja equivalente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Espaço-Tempo de Minkowski (ETM), uma variedade quadridimensional suave, é um dos palcos para física relativística, em que os coadjuvantes são os fenômenos físicos, os quais devem ser invariantes para seus telespectadores, nós, os observadores. Não há como falar de espaço sem considerar o tempo, uma das consequências mais impressionantes proposta por Einstein no início do século passado. Do ponto de vista matemático, este espaço abstrato serve para analisar problemas que não necessariamente têm uma aplicação imediata em física, mas do ponto de vista físico, este permite definir em sua topologia, as linhas de mundo para observadores inerciais, onde é possível definir a noção de passado, presente e futuro.

Além de variedades suaves, como o espaço-tempo, outros espaços matemáticos também importantes no estudo de fenômenos físicos são os grupos, os quais podem ser discretos ou contínuos, infinitos ou finitos, etc., como por exemplo, um Grupo de Lie (GL) r -parametrizado, o qual tem associada uma Álgebra de Lie (AL), um espaço tangente próximo da identidade. Eles são extremamente importantes para o tratamento adequado das transformações (rotações, translações, inversões, dilatação e transversão) dos objetos geométricos que uma determinada teoria admite.

No contexto da Álgebra do Espaço-Tempo (AET), a física relativística se torna uma consequência de um Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET) sobre o ETM. Impondo certas regras de simetria e antissimetria entre os geradores locais da AET, podemos considerar produtos de graduação diferentes como, por exemplo, os produtos interno contraído e exterior. Quando a propriedade de antissimetria do produto exterior é combinada com os Colchetes de Lie (CL), é possível considerar uma AL a partir da definição de certos geradores (rotação, translação, *boost* e dilatação). Quando isto é feito, é possível também realizar transformações ativas e passivas dos objetos geométricos da teoria.

A exemplo da teoria do Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais, cujos fundamentos matemáticos estão baseados na teoria de fibrados, da geometria diferencial, as Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME) podem ser formuladas de forma

natural desde que se admitia o isomorfismo local entre o FCET e o Fibrado de Multiformas Diferenciais (FMD), permitindo as definições dos operadores de Dirac e de Kähler-Atiyah, os operadores de evolução espacial e temporal dos campos. Devemos salientar que o operador de Dirac foi introduzido a partir da linearização da relação de energia-momento relativística, cuja consequência mais surpreendente foi a possibilidade de tratar o comportamento quântico da matéria próximo da velocidade da luz, permitindo relacionar o spin das partículas elementares com o fenômeno relativístico a partir da introdução da equação de Dirac.

No formalismo algébrico-geométrico é possível definir uma AET em cada ponto do ETM em que uma 4-forma (pseudoescalar), um objeto geométrico estendido, pode desempenhar um papel de operador de dualidade como o operador de Hodge da Álgebra Exterior (AE). Este resultado permite relacionar o produto interno contraído (simétrico) com o produto exterior (antissimétrico), o que pode ser uma das vias para o tratamento de bósons (partículas de spin inteiro) e férmions (partículas de spin semi-inteiro) em uma mesma teoria, uma vez que estes partilham das mesmas propriedades.

Neste sentido, as EME constituem uma das teorias de campos mais bem sucedidas na história da Física. Elas são precursoras das teorias de campos modernas, cujo ápice é a teoria quântica de campos. No formalismo algébrico-geométrico, estas equações podem ser formuladas por uma única expressão, generalizando os formalismos vetorial, tensorial e de formas diferenciais. O tratamento de monopolo magnético se torna natural, embora as evidências que temos sobre sua existência sejam escassas. O fato é que eles estão intimamente relacionados com o pseudoescalar do espaço-tempo, que por sua vez, define uma orientação sobre este, em relação à métrica de Minkowski. Também deve ser mencionado que a presença de monopolos implica na violação da identidade de Bianchi para o campo eletromagnético, obtida no formalismo tensorial, um caso particular do formalismo algébrico-geométrico.

No que diz respeito à conservação da energia do campo eletromagnético, a presença de matéria implica que a energia armazenada no campo não será conservada, uma consequência da interação mútua entre matéria e o campo eletromagnético. No entanto, é

possível considerar uma conservação da energia eletromagnética mais geral, desde que o momento angular total do campo, um resultado macroscópico dos momentos angulares individuais das partículas, seja considerado. Logo, a presença de matéria está intimamente relacionada aos movimentos rotacionais das partículas ou da presença de spin. Em situações mais particulares, ou seja, na ausência de matéria, a conservação é restaurada e o teorema de Noether é restaurado.

Quando as EME são descritas no formalismo algébrico-geométrico, os invariantes eletromagnéticos podem ser obtidos sem muita dificuldade, em vista dos somatórios tediosos que precisam ser realizados, antes de obter os resultados finais, no formalismo tensorial. Isto somente é possível, uma vez que é considerada a decomposição do campo eletromagnético em termos dos campos elétrico e magnético por meio da AET.

Ondas eletromagnéticas são extremamente importantes nas aplicações cotidianas, desde aplicações tecnológicas como pinças ópticas e biossensores nanofotônicos até cálculos teóricos em astronomia e astrofísica. Desde as ondas de raio, cruciais nos primórdios da comunicação, até o presente momento, com o advento da *internet*, nossa maneira de ver o mundo mudou completamente. O fato é que, além da vasta aplicabilidade das ondas eletromagnéticas, o interesse por elas também se revela quando consideramos uma de suas propriedades mais interessantes, a polarização. Em particular, do ponto de vista matemático, ondas circularmente polarizadas à esquerda e à direita podem ser utilizadas para construir um fibrado em analogia ao Fibrado de Clifford do Espaço (FCE). Isto pode ser feito levando em conta as 1-formas unitárias associadas ao campo elétrico, magnético e vetor de onda, devido às suas propriedades de ortonormalidade e antissimetria. De fato, o produto triplo exterior entre elas tem a mesma propriedade que os pseudoescalares do espaço e do espaço-tempo, permitindo a definição da noção de orientabilidade.

Ademais, as leis do eletromagnetismo incorporadas pelas EME, constituem um dos terrenos mais férteis para o estudo de simetrias. Uma vez que simetrias estão relacionadas com leis de conservação pelo teorema de Noether, é possível investigar vários princípios de conservação, tais como a conservação da energia, momento linear, momento angular, carga elétrica, etc., no contexto do eletromagnetismo. Também é possível explorar outros tipos

de simetria como a simetria de *gauge*, intimamente relacionada com a propriedade local das interações fundamentais, a partir da ideia de conexão, ou ainda, a simetria dualidade, a qual envolve a equivalência entre modelos físicos independentes.

Para destacar ainda mais a ideia de simetria, quando consideramos essas equações, um dos resultados mais surpreendentes é que um *boost* de Lorentz do campo eletromagnético realizado no sentido passivo, em uma direção particular do espaço, de forma tal que os campos elétrico e magnético sejam 1-formas do ETM, seções do FCET, implica que as transformações usuais do eletromagnetismo são transformações aparentes. Primeiro porque na transformação usual, os campos elétrico e magnético são vetores pertencentes a um espaço euclidiano tridimensional e segundo porque existe uma mistura entre as componentes destes campos quando transformados, o que não é observado quando eles são considerados em termos de quantidades quadrimensionais, compatíveis com a Relatividade Especial.

Por fim, e não menos importante, a simetria *CPT*, intimamente relacionada com a simetria de Lorentz, e a simetria Conforme, que estende a simetria de Poincaré, integram a lista de simetrias que deixam as EME invariantes. No formalismo algébrico-geométrico, a simetria *CPT* pode ser associada a um conjunto de transformações que podem ser consideradas sobre os objetos geométricos da teoria. Isto significa que, para considerarmos partículas eletricamente carregadas e levar em conta transformações de escala e transformações especiais conforme, a estrutura do espaço-tempo precisa ser complexificada.

Uma reflexão que se segue de toda essa discussão é: talvez, a unificação de nossos modelos físicos, deve em princípio, partir da unificação da linguagem com a qual buscamos descrever a realidade à nossa volta. A justificativa é que a AET, intimamente relacionada ao FCET, como linguagem matemática, permite descrever as EME de maneira natural, revelando-se mais adequada, generalizadora e unificadora, em relação aos formalismos vetorial, tensorial e de formas diferenciais, na explicação das propriedades de simetria e geométricas subjacentes da teoria relativística e do eletromagnetismo.

Foi uma experiência interessante e ao mesmo tempo desafiadora estudar as EME no formalismo algébrico-geométrico. Houve muitos erros até a finalização deste texto, mas

também muitos acertos, pois, parafraseando Zeidler, estava com o fio de Ariadne em mãos para guiar-me.

Como perspectiva futura, um das minhas pretensões é a investigação dos aspectos gerais da teoria de Twistors, em um curso de pós-graduação, uma vez que este formalismo também permite definir as EME em uma única expressão, porém o campo eletromagnético deve ser pensado a partir de um ponto de vista espinorial sobre um ETM complexificado.

REFERÊNCIAS

- ACENA, A. La Transición a la Formulación Covariante del Electromagnetismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 39, 00 2017. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172017000100403&nrm=iso>. Citado na página 49.
- ACHARYA, B. et al. First Search for Dyons with the Full MoEDAL Trapping Detector in 13 TeV pp Collisions. 1 2020. Citado na página 41.
- ADAMO, T. Lectures on Twistor Theory. **PoS**, Modave2017, p. 003, 2018. Citado na página 48.
- ADOS, M. Ba REYES, I. A. A Short Review on Noether's Theorems, Gauge Symmetries and Boundary Terms. **Optics Communications**, arXiv, p. 75, Aug 2017. Disponível em: <arXiv:1601.03616>. Citado na página 60.
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Phys. Rev.**, v. 115, p. 485–491, 1959. Citado na página 76.
- AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. Magnetic Field Structure Near The Event Horizon. **Astrophys. J. Lett.**, v. 910, n. 1, p. L13, 2021. Citado na página 16.
- ANCO, S. C.; THE, D. Symmetries, Conservation Laws, and Cohomology of Maxwell's Equations Using Potentials. **Arxiv**, eprint arXiv:math-ph/0501052, 2005. Disponível em: <arXiv:math-ph/0501052>. Citado na página 70.
- ARNOLD, V. I. **Lectures on Partial Differential Equations**. [S.l.]: Springer, 2004. Citado na página 44.
- ATIYAH, M.; DUNAJSKI, M.; LIONE J., M. Twistor Theory at Fifty: from Contour Integrals to Twistor Strings. **Proc. R. Soc.**, v. 473, October 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0530>>. Citado na página 48.
- BANERJEE, P. **Some Basics of AdS/CFT-Lecture Notes**. 2017. Disponível em: <https://www.imsc.res.in/~pinakib/AdS-CFT_ST4.pdf>. Citado na página 70.
- BEDFORD, J. An Introduction to String Theory. 7 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1107.3967v3>>. Citado na página 89.
- BERTOLINI, M. **Lectures on Supersymmetry**. 2021. Disponível em: <<https://people.sissa.it/~bertmat/susycourse.pdf>>. Citado na página 89.
- BINCER, A. M. **Lie Groups and Lie Algebras: A Physicist's Perspective**. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 18, 65 e 71.
- BRAGA, C. L. R. **Notas de Física Matemática: Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 55.
- CHAPPELL, J. M. et al. The Vector Algebra War: A Historical Perspective. **IEEE Access**, v. 4, p. 1997–2004, 2016. Citado na página 16.

- CODDENS, G. A Linearly Polarized Electromagnetic Wave as a Swarm of Photons Half of Which Have spin -1 and Half of Which Have spin +1. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02636464>>. Citado na página 63.
- COUMBE, D. N. A Note on Conformal Symmetry. In: **5th International Conference on the Nature and Ontology of Spacetime: does spacetime represent an evolving present or a block universe or a growing block universe?** [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 89.
- COURTEILLE, Ph. W. **Proceedings of the Seminar to the course Eletromagnetismo Avançado**. Universidade de São Paulo Instituto de Física de São Carlos, 2020. Disponível em: <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/itp-dam/documents/gaberdiel/proseminar_fs2018/06_Waechter.pdf>. Citado na página 76.
- CRIMIN, F. et al. On the Conservation of Helicity in a Chiral Medium. **Journal of Optics**, IOP Publishing, v. 21, n. 9, p. 094003, aug 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/2040-8986/ab387c>>. Citado na página 71.
- DIRAC, P. A. M. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field,. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931. Citado na página 41.
- DIRAC, P. A. M. The Theory of Magnetic Poles. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 74, p. 817–830, Oct 1948. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.817>>. Citado na página 41.
- DRECHSLER, W.; MAYER, M. E. **Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1977. (Lectures Notes in Physics 67.). ISBN 3540083502. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- EGUCHI, T.; GILKEY, P. B.; HANSON, A. J. Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry. **Physics Reports**, v. 66, n. 6, p. 213–393, 1980. Citado na página 19.
- ENGHETA, N. 150 Years of Maxwell’s Equations. **Science**, v. 349, p. 136–137, Jul 2015. Citado na página 15.
- ESCOBAR, C. A.; URRUTIA, L. F. Invariants Of the Electromagnetic Field. **J. Math. Phys.**, v. 55, p. 032902, 2014. Citado na página 63.
- FRAUENDIENER, J.; TSOU, S.-T. Twistors in Field Theory. In: BARRET, T. W.; GRIMES, D. M. (Ed.). **Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications**. Singapore: World Scientific, 1995. cap. 6, p. 182–217. Citado na página 48.
- GÖCKELER, M.; SCHÜCKER, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1987. ISBN 9780511628818. Citado na página 31.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. S. **Classical Mechanics**. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. Citado na página 51.

- GRAF, W. Differential Forms as Spinors. **Annales de l'I.H.P. Physique théorique**, Gauthier-Villars, v. 29, n. 1, p. 85–109, 1978. Disponível em: <www.numdam.org/item/AIHPA_1978__29_1_85_0/>. Citado na página 36.
- GREENBERG, O. W. Why is CPT fundamental? **Found. Phys.**, v. 36, p. 1535–1553, 2006. Citado na página 86.
- HENINGER, J. M.; MORRISON, P. J. Hamilton Nature of Monopole Dynamics. **arXiv.1808.08689**, Out 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1808.08689>>. Citado na página 51.
- HERR, W. Short Theory of Special Relativity and Invariant Formulation of Electrodynamics. **CERN Yellow Rep. School Proc.**, v. 1, p. 27, 2018. Citado na página 49.
- HESTENES, D. **Space-Time Algebra**. 2. ed. New York: Birkhäuser, 2015. Citado 11 vezes nas páginas 16, 18, 28, 31, 40, 58, 77, 106, 110, 114 e 115.
- HESTENES, D.; VOLD, T. G. New Foundations for Classical Mechanics. **American Journal of Physics**, v. 58, n. 7, p. 703–704, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.16386>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 49.
- HUANG, K. **Fundamental Forces of Nature: The Story of Gauge Fields**. [S.l.]: World Scientific, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 73.
- IVANCEVIC, V. G.; IVANCEVIC, T. T. **Applied Differential Geometry - A modern introduction**. [S.l.]: World Scientific, 2007. Citado na página 54.
- IVEZIC, T. The Proof That Maxwell Equations with the 3D E and B are not Covariant Upon the Lorentz Transformations but Upon the Standard Transformations: The New Lorentz Invariant Field Equations. **Found. Phys.**, v. 35, p. 1585–1615, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 77, 78, 81, 82, 83 e 85.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3rd. ed. New York, NY: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321. Disponível em: <<http://cdsweb.cern.ch/record/490457>>. Citado na página 77.
- JAFARI, A. Electromagnetic Helicity in Classical Physics. 8 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1908.07394.pdf>>. Citado na página 71.
- KNEUBIL, F. B. et al. Electromagnetism as a World View: Implications for the Teaching of Energy. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 39, 00 2017. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172017000400412&nrm=iso>. Citado na página 56.
- KOSTELECKY, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. 1 2008. Citado na página 86.
- LAWSON, H. B.; MICHELSON, M-L. **Spin Geometry**. [S.l.]: Princeton University Press, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 37.
- LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifold**. [S.l.]: Springer, 2013. (Graduate Text in Mathematics 218). ISBN 9781441999818. Citado 4 vezes nas páginas 16, 22, 24 e 35.

LIMA, M. C. Sobre o Surgimento das Equações de Maxwell. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 41, 00 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172019000400704&nrm=iso>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 41.

LOUNESTO, P. **Clifford Algebra and Spinors**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. (Second Edition. London Mathematical Society Lecture Notes series 286). Citado na página 31.

LOUNESTO, P. A History of Clifford Algebras. In: _____. **Clifford Algebras and Spinors**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. (London Mathematical Society Lecture Note Series), p. 320–330. Citado na página 16.

MAVROMATOS, N. E. CPT Violation and Decoherence in Quantum Gravity. **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 171, p. 012007, 2009. Citado na página 86.

MAXWELL, J. C. A Dynamical Theory of The Electromagnetic Field. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society of London, v. 155, p. 459–513, 1865. Citado na página 15.

MCDONALD, K. T. Poyting's Theorem with Magnetic Monopoles. 2020. Disponível em: <<https://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/poynting.pdf>>. Citado na página 71.

MISNER, C. W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. ISBN 978-0-7167-0344-0, 978-0-691-17779-3. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 77.

NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics - Second Edition**. [S.l.]: IOP Publishing Ltd., 2003. ISBN 0750306068. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.

NATSUUME, M. **AdS/CFT Duality User Guide**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 903. ISBN 978-4-431-55441-7, 978-4-431-55440-0. Citado na página 70.

NEUENSCHWANDER, D. E. **Emmy Noether's Wonderful Theorem**. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 70.

RAJANTIE, A. Introduction to Magnetic Monopoles. **Contemp. Phys.**, v. 53, p. 195–211, 2012. Citado na página 41.

RAMOND, P. **Field Theory. A Modern Primer**. [S.l.]: Front.Phys., 1981. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 70.

RAPF, R. J.; VAIDA, V. Sunlight as an Energetic Driver in the Synthesis of Molecules Necessary for Life. **Phys. Chem. Chem. Phys.**, The Royal Society of Chemistry, v. 18, p. 20067–20084, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C6CP00980H>>. Citado na página 63.

RAY, M. W. et al. Observation of Isolated Monopoles in a Quantum Field. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 348, n. 6234, p. 544–547, 2015. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/348/6234/544>>. Citado na página 41.

RECAMI, E.; RODRIGUES JR., W. A. On Magnetic Monopoles (Without a String) and the Clifford Bundle Formalism. **International Centre for Theoretical Physics**, 1990. Disponível em: <https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/21/090/21090831.pdf>. Citado na página 59.

ROCHA, A.N.; RIZZUTI, B.F.; MOTA, D.S. Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 35, p. 1 – 9, 12 2013. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172013000400004&nrm=iso>. Citado na página 77.

RODRIGUES JR., W. A. Killing Vector Fields, Maxwell Equations and Lorentzian Spacetimes. **arXiv e-prints**, p. arXiv:0801.3632, jan. 2008. Citado na página 58.

RODRIGUES JR., W. A.; OLIVEIRA, E. C. de. **The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations**. Springer, 2007. (Lectures Notes in Physics 722.). ISBN 9783540712923. Disponível em: <<https://www.springer.com/gp/book/9783319276366>>. Citado 12 vezes nas páginas 16, 17, 18, 19, 22, 26, 31, 33, 34, 36, 53 e 54.

RODRIGUES JR., W. A.; VAZ JR., J. Subluminal and Superluminal Solutions in Vacuum of the Maxwell Equations and the Massless Dirac Equation. In: **International Conference on the Theory of the Electron**. [s.n.], 1995. Disponível em: <arXiv:hep-th/9511182>. Citado na página 55.

SABBATA, V.; DATTA, B. K. **Geometric Algebra and Applications to Physics**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 64, 68, 87 e 110.

SALAM, A.; TAYLOR, J. C. **Unification of Fundamental Forces: The First 1988 Dirac Memorial Lecture**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. Citado na página 15.

SCHUWINGER, J. et al. **Classical Electrodynamics**. [S.l.]: Perseus Book, 1998. Citado na página 42.

SCHWICHTENBER, J. **Physics from Symmetry**. [S.l.]: Springer, 2015. (Undergraduate Lectures Notes in Physics). Citado 4 vezes nas páginas 70, 73, 76 e 77.

SHADMI, Y. Introduction to Supersymmetry. In: **2014 European School of High-Energy Physics**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 95–123. Citado na página 38.

SNYGG, J. **Clifford Algebra: A Computational Tool for Physicist**. [S.l.]: Oxford University Press, 1997. Citado na página 110.

SONG, J. S. Theory of Magnetic Monopoles and Electric-Magnetic Duality: A Prelude to S-Duality. **J. Undergrad. Sci**, v. 3, p. 47–55, 1996. Disponível em: <<https://www.hcs.harvard.edu/~jus/0302/song.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 72.

STEEB, W-H. **Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra - Second Edition**. [S.l.]: World Scientific, 2007. ISBN 10981270809X. Citado 5 vezes nas páginas 18, 20, 23, 70 e 89.

STONE, M.; GOLDBART, P. **Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students**. 10.1017/cbo9780511627040. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 22.

SUNDERMEYER, K. **Symmetries in Fundamental Physics. 2. ed.** [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 16, 19, 23, 70, 73 e 88.

SZABO, R. J. An Introduction to Nonassociative Physics. **PoS**, CORFU2018, p. 100, 2019. Citado na página 20.

TONG, D. **Electromagnetism - University of Cambridge Part IB and Part II Mathematical Tripos.** 2015. Disponível em: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/electro.pdf>>. Citado na página 81.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A.; BOAVENTURA, W. C. História da Eletricidade e do Magnetismo: da Antiguidade à Idade Média. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 40, 00 2018. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000400702&nrm=iso>. Citado na página 41.

UNESCO. **Inspire by Light: Reflections form the International Year of Light 2015.** [S.l.]: SPIE and EPS and ICTP, 2015. Citado na página 15.

URBAN, Z.; BAJARDI, F.; CAPOZZIELLO, S. The Noether–Bessel-Hagen Symmetry Approach for Dynamical Systems. **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.**, v. 17, n. 14, p. 2050215, 2020. Citado na página 60.

VARLAMOV, V. V. Group Theoretical Interpretation of CPT Theorem. 6 2003. Disponível em: <[arXiv:math-ph/0306034v2](https://arxiv.org/abs/math-ph/0306034v2)>. Citado na página 86.

VAZ JR., J. A Álgebra do Espaço-Tempo, o Spinor de Dirac-Hestenes e a Teoria do Elétron. **Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.**, 1993. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306702>>. Citado 5 vezes nas páginas 28, 40, 108, 109 e 110.

VAZ JR., J. A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 2, n. 1, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 28, 30, 79, 83, 108 e 109.

VAZ JR., J.; ROCHA JR., R. **Álgebras de Clifford e Espinores.** [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2012. ISBN 9788578611330. Citado 8 vezes nas páginas 18, 24, 25, 26, 28, 36, 89 e 108.

WANG, L-T. A Brief Introduction to Particle Physics. **PoS**, TASI2017, p. 018, 2018. Citado na página 73.

WARNICK, K.; RUSSEY, P. H. Differential Forms and Electromagnetic Field Theory (invited paper). **Progress In Electromagnetics Research**, v. 148, p. 83–112, 2014. Disponível em: <<http://jpieer.org/PIER/pier.php?paper=14063009>>. Citado na página 52.

ZANGWILL, A. **Modern Electrodynamics.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 43.

APÊNDICE A –

Apresentaremos em seguida alguns dos produtos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Começaremos com o produto geométrico entre duas 2-formas, ou seja,

$$(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu)(\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) = (\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) + \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \wedge \gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa, \quad (\text{A.1})$$

de modo que o produto interno contraído pode ser calculado da seguinte forma:

$$(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) = \begin{vmatrix} \gamma^\nu \cdot \gamma^\sigma & \gamma^\nu \cdot \gamma^\kappa \\ \gamma^\mu \cdot \gamma^\sigma & \gamma^\mu \cdot \gamma^\kappa \end{vmatrix} = \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\kappa} - \eta^{\nu\kappa}\eta^{\mu\sigma}, \quad (\text{A.2})$$

de modo que

$$\gamma^\mu \cdot (\gamma^\nu \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa)) = (\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa). \quad (\text{A.3})$$

Este resultado nos será útil, por exemplo, para calcular a parte escalar de um dos invariantes do campo eletromagnético, eq. (3.97) e também a expressão dada pela eq. (3.34). A parte pseudoescalar nos será mais interessante exprimi-la de maneira compacta em termos de γ^5 e do símbolo de Levi-Civita de quatro componentes totalmente antissimétricas, o que será feito logo adiante. Contudo, também podemos considerar o produto

$$\gamma^\mu \cdot (\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \cdot \gamma^\nu = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}, \quad (\text{A.4})$$

permitindo calcular a parte escalar das Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME) no formalismo tensorial eq.(3.41).

Devemos enfatizar que o produto geométrico entre uma 1-forma e uma 2-forma fornece dois objetos, uma 1-forma genérica e uma 3-forma, ou seja,

$$\gamma^\mu \gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa = \gamma^\mu \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) + \gamma^\mu \wedge \gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa, \quad (\text{A.5})$$

logo a parte envolvendo o produto interno contraído pode ser escrita como

$$\gamma^\mu \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) = (\gamma^\mu \cdot \gamma^\sigma)\gamma^\kappa - (\gamma^\mu \cdot \gamma^\kappa)\gamma^\sigma = \eta^{\mu\sigma}\gamma^\kappa - \eta^{\mu\kappa}\gamma^\sigma. \quad (\text{A.6})$$

Lembrando que $\alpha \cdot A_k = -A_k \cdot \alpha$ quando $k = 2$, na primeira relação da eq. (2.62), em que $A_2 = \gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa$ é uma 2-forma e $\alpha = \gamma^\mu$ é uma 1-forma, podemos escrever

$$\gamma^\mu \cdot (\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) = -(\gamma^\sigma \wedge \gamma^\kappa) \cdot \gamma^\mu = -(\eta^{\mu\sigma}\gamma^\kappa - \eta^{\mu\kappa}\gamma^\sigma). \quad (\text{A.7})$$

No entanto, também devemos calcular o produto geométrico entre a 1-forma γ_μ e sua recíproca γ^ν , de modo que

$$\gamma_\mu \gamma^\nu = \gamma_\mu \cdot \gamma^\nu + \gamma_\mu \wedge \gamma^\nu = \delta_\mu^\nu + \eta^{\nu\alpha} \gamma_\mu \wedge \gamma_\alpha \quad (\text{A.8})$$

que, em particular, quando $\nu = \mu$, temos $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$. A parte escalar deste último produto, ou seja, $\gamma_\mu \cdot \gamma^\nu = \delta_\mu^\nu$, nada mais é que a delta de Kronecker cujo valor é igual a 0 quando $\mu \neq \nu$ e igual a 1 quando $\mu = \nu$, para $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$. Combinando a definição da delta de Kronecker com os resultados anteriores, podemos escrever as seguintes relações:

$$((\gamma_\alpha \wedge \gamma_\mu) \cdot \gamma^\mu) \gamma^\nu = -\delta_\alpha^\mu \delta_\mu^\nu + \delta_\mu^\mu \delta_\alpha^\nu, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma^\mu \cdot (\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu) = \delta_\mu^\mu \gamma_\nu - \delta_\nu^\mu \gamma_\mu, \quad (\text{A.10})$$

$$(\gamma_\lambda \wedge \gamma_\alpha) \cdot \gamma^\mu = -(\delta_\lambda^\mu \gamma_\alpha - \delta_\alpha^\mu \gamma_\lambda), \quad (\text{A.11})$$

os quais foram utilizados para obter a parte elétrica do termo de interação, eq. (3.100), as componentes do termo de interação, eq. (3.84), e a projeção do campo eletromagnético em uma direção qualquer do ETM, eq. (3.89), respectivamente.

Antes de continuar, devemos relacionar uma 4-forma genérica no ETM com o símbolo de Levi-Civita de quatro componentes totalmente antissimétricas. Com efeito, temos que

$$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta = \delta_\mu^0 \delta_\nu^1 \delta_\alpha^2 \delta_\beta^3 \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \delta_\mu^0 \delta_\nu^1 \delta_\alpha^2 \delta_\beta^3 = \begin{vmatrix} \delta_\mu^0 & \delta_\mu^1 & \delta_\mu^2 & \delta_\mu^3 \\ \delta_\nu^0 & \delta_\nu^1 & \delta_\nu^2 & \delta_\nu^3 \\ \delta_\alpha^0 & \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^0 & \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

é o símbolo de Levi-Civita do ETM de uma dimensão temporal e três dimensões espaciais, em que $\epsilon_{0123} = 1$, definido por

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ é uma permutação par de } (\mu, \nu, \alpha, \beta), \\ -1 & \text{se } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ é uma permutação ímpar de } (\mu, \nu, \alpha, \beta), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Este resultado mostra a relação entre o símbolo de Levi-Civita e a delta de Kronecker generalizada por meio do determinante de uma matriz de dimensão 4×4 , cujas entradas são deltas de Kronecker δ_{μ}^{ν} . Além disso, podemos relacioná-lo com o símbolo de Levi-Civita do espaço, qual seja, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk0} = -\epsilon_{0ijk}$, com $\epsilon_{123} = 1$, definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{caso contrário: } i = j, j = k, k = i. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Uma vez que $\gamma^5\gamma_5 = 1$, não é difícil mostrar as seguintes relações:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \gamma^5\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha} \wedge \gamma_{\beta}, \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \gamma_5\gamma^{\mu} \wedge \gamma^{\nu} \wedge \gamma^{\alpha} \wedge \gamma^{\beta}, \quad (\text{A.16})$$

permitindo expressar as 4-formas covariante e contravariante

$$\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha} \wedge \gamma_{\beta} = \gamma_5\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad \gamma^{\mu} \wedge \gamma^{\nu} \wedge \gamma^{\alpha} \wedge \gamma^{\beta} = \gamma^5\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{A.17})$$

respectivamente. A segunda relação acima permite escrever a eq. (3.38) em termos do pseudoescalar γ^5 e do símbolo de Levi-Civita de quatro componentes.

Por outro lado, seguindo a ref. (HESTENES, 2015), também podemos escrever as multiformas

$$\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha} \wedge \gamma_{\beta}\gamma^{\beta} = \gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha}, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha} \wedge \gamma_{\beta}\gamma^{\alpha} \wedge \gamma^{\beta} = 2\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\alpha} \wedge \gamma_{\beta}\gamma^{\nu} \wedge \gamma^{\alpha} \wedge \gamma^{\beta} = 6\gamma_{\mu}, \quad (\text{A.20})$$

que combinadas com as relações da eq. (A.16) permitem obter as multiformas covariantes e contravariantes:

$$\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha = \gamma^5 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\beta, \quad \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \wedge \gamma^\alpha = \gamma^5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\beta, \quad (\text{A.21})$$

$$2\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \gamma^5 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta, \quad 2\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu = \gamma^5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta, \quad (\text{A.22})$$

$$6\gamma_\mu = \gamma^5 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta, \quad 6\gamma^\mu = \gamma^5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta. \quad (\text{A.23})$$

Observe que estas relações correspondem a uma 3-forma, 2-forma e 1-forma, respectivamente.

A justificativa é que estes resultados permitem calcular os seguintes produtos:

$$(\gamma^\mu \wedge \gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \cdot \gamma^\nu = \gamma^5 \epsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \delta_\sigma^\nu, \quad (\text{A.24})$$

$$(\gamma^5 (\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \cdot \gamma^\mu) \gamma^\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\nu\mu} (\delta_\nu^\mu \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^\mu \delta_\nu^\nu), \quad (\text{A.25})$$

os quais estão relacionados com a parte magnética das EME no formalismo tensorial, eq. (3.42) e com a parte magnética do termo de interação eq. (3.101), respectivamente.

Por fim, combinando as eqs. (2.62) e (2.69), podemos escrever também

$$-\gamma^5 \gamma^\nu \wedge \gamma_\mu = \gamma^\nu \wedge \gamma^5 \gamma_\mu = -\gamma^\nu \cdot \gamma_\mu \gamma^5 = -\delta_\mu^\nu \gamma^5, \quad (\text{A.26})$$

permitindo encontrar a lei de conservação para monopolos magnéticos eq. (3.39) e obter as relações eqs. (3.54) e (3.55).

APÊNDICE B –

Neste apêndice apresentamos a definição do grupo de Clifford-Lipschitz, um grupo formado pelos elementos inversos da Álgebra de Clifford (AC) $\mathbb{R}_{p,q}$ (VAZ JR.; ROCHA JR., 2012). Com ele, definiremos o grupo de spin associado às componentes temporal e espacial da Álgebra do Espaço-Tempo (AET), que recobre duplamente o grupo de Lorentz próprio ortócrono, definido pela eq. (2.48), uma vez que para cada um de seus elementos temos dois elementos equivalentes no grupo de spin. Com a definição do grupo de spin, teremos condições de expressar rotações espaciais e temporais¹ (*boosts*) na AET que, como foi apresentado na seção 2.5, é localmente isomorfa ao Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET). Além disso, deduziremos a expressão para os geradores de *boosts*, que serão importantes para calcularmos o *boost* do campo eletromagnético na direção x na seção 4.3.

No formalismo da AET, é possível escrever uma transformação de Lorentz \mathcal{L} no Espaço-Tempo de Minkowski (ETM) lembrando que \mathcal{L} deixa invariante a norma de um vetor (ou 1-forma) $x = x^\mu \gamma_\mu \in \text{sec}\Gamma(U, \wedge^1 T^*M) \hookrightarrow \text{Cl}(M, \eta)$, ou seja, $(x')^2 = x' \cdot x' = x \cdot x = x^2$, de modo que $x' = \mathcal{L}(x)$. Este tipo de transformação é um caso particular de um automorfismo associado à Álgebra de Lie (AL) do grupo de Lorentz. Além disso, o ETM $\mathbb{R}^{1,3}$, em que a AET, $\mathbb{R}_{1,3}$, é definida, é dita ser simples (VAZ JR., 1993). Isto significa que uma transformação de Lorentz *ativa* pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(x) = Ad_L x = LxL^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

onde Ad_L é a representação adjunta e $L \in \Gamma(1, 3)$, em que $\Gamma(1, 3)$ é o grupo de Clifford-Lipschitz, o qual será definido em seguida. Isto significa que, de acordo com um observador inercial definido por γ_0 , a eq. (B.1) fornece as coordenadas de um novo evento $\mathcal{L}(x) = x'$ (VAZ JR., 2000), pois em uma transformação ativa, o sistema coordenadas utilizado para descrever um dado objeto, um fenômeno físico, corpo rígido, etc., no espaço, não é afetado, porém sua posição física o é.

De fato, a fim de utilizar o formalismo algébrico-geométrico para realizar uma transformação de Lorentz, devemos “simular” o ponto de vista *passivo* em termos do ponto

¹ De modo geral rotações no ETM, no formalismo da AET, são definidas pela eq. (2.38).

de vista ativo, escrevendo

$$\mathcal{L}(x) = Ad_L x = L^{-1} x L, \quad (\text{B.2})$$

uma vez que em uma transformação passiva, o objeto mantém-se em sua posição física, somente o sistema de coordenadas é afetado (VAZ JR., 2000). Aqui, devemos nos atentar para o grupo definido por

$$\Gamma(1, 3) = \{L \in \mathbb{R}_{1,3} \mid LL^{-1} = L^{-1}L = 1, Ad_L(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathbb{R}^{1,3}\}, \quad (\text{B.3})$$

conhecido como grupo de Clifford-Lipschitz e para o fato de que o grupo de Lorentz próprio ortócrono $SO_+^\uparrow(1, 3)$, que corresponde a componente conexa à identidade do grupo pseudo-ortogonal $O(1, 3)$, definido na seção 2.1, pode ser escrito como

$$SO_+^\uparrow(1, 3) \simeq Spin_+^\uparrow(1, 3)/\{\pm 1\}, \quad (\text{B.4})$$

ou seja, temos para cada um de seus elementos, dois elementos correspondentes pertencentes ao grupo

$$Spin_+^\uparrow(1, 3) = \{L \in \Gamma^+(1, 3) \mid N(L) = 1\}, \quad (\text{B.5})$$

chamado de grupo de spin. Nesta definição $N(L)$ é a norma de L , de modo que $N(L) = \tilde{L}L = \langle L, L \rangle$ e

$$\Gamma^+(1, 3) = \{L \in \mathbb{R}_{1,3}^0 \simeq \mathbb{R}_{3,0} \mid \hat{L} = L, \tilde{L} = L^{-1}, LL^{-1} = L^{-1}L = 1, Ad_L(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathbb{R}^{1,3}\}. \quad (\text{B.6})$$

As condições $\hat{L} = L$ e $\tilde{L} = L^{-1}$ implicam que a ação de L sobre algum elemento de $\mathbb{R}^{1,3}$, isto é, do espaço-tempo, é uma rotação. Em particular, podemos expressar uma rotação de Lorentz por $R \in Spin_+^\uparrow(1, 3)$, tal que $R = e^B$, em que $B \in \text{sec}\Gamma(U, \wedge^2 T^*M) \hookrightarrow Cl(M, \eta)$, é uma 2-forma do ETM (VAZ JR., 1993). Para uma rotação espacial $B^2 = -1$, enquanto que uma rotação temporal, ou seja, um *boost*, $B^2 = 1$. Estas duas condições podem ser obtidas sem muita dificuldade usando-se a eq. (A.2).

Por outro lado, seguindo VAZ JR. (1993), uma rotação arbitrária pode ser escrita como $R = \mathcal{R}\mathcal{B}$, em que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta, \varphi, \chi) = e^{(\gamma_1 \wedge \gamma_2)\varphi/2} e^{(\gamma_3 \wedge \gamma_1)\theta/2} e^{(\gamma_3 \wedge \gamma_2)\chi/2} \quad (\text{B.7})$$

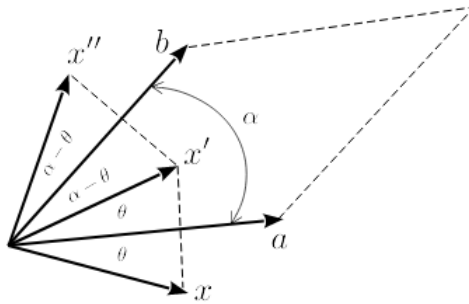
descreve uma rotação arbitrária no espaço, enquanto que θ , φ e χ são os ângulos de Euler. Por exemplo, a primeira exponencial está relacionada com uma rotação por um ângulo $\varphi/2$ entorno do eixo z .

Por outro lado, o gerador de *boost* \mathcal{B} , ou seja, uma rotação arbitrária no ETM, pode ser escrito como

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(s_1, s_2, s_3) = e^{(\gamma_1 \wedge \gamma_0)s_1/2} e^{(\gamma_2 \wedge \gamma_0)s_2/2} e^{(\gamma_3 \wedge \gamma_0)s_3/2}, \quad (\text{B.8})$$

ou ainda, por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(s) = e^{s/2}$, em que $s = s_1\gamma_1 \wedge \gamma_0 + s_2\gamma_2 \wedge \gamma_0 + s_3\gamma_3 \wedge \gamma_0$ é um 2-forma do tipo-tempo. Com este resultado podemos expressar a velocidade u de um observador inercial descrito por uma 1-forma u do tipo-tempo, em que $u^2 = 1$ e $\frac{du}{d\tau} = 0$. No entanto, de acordo com as refs. (HESTENES, 2015), (SABBATA; DATTA, 2007) e (SNYGG, 1997), a 2-forma $s/2$ pode ser entendida como sendo um ângulo α formado entre duas direções definidas, por exemplo, pelas 1-formas a e b , veja Figura 6, as quais definem hiperplanos no ETM. Os resultados anteriores permitem expressar a velocidade u de um observador inercial como $u = e^\phi \gamma_0$ (VAZ JR., 1993). Multiplicando o resultado anterior pela direita por γ_0 e lembrando que $(\gamma_0)^2 = 1$, podemos encontrar $u\gamma_0 = e^\phi$.

Figura 6 – Rotação da uma 1-forma x por um ângulo $\beta = 2\alpha$, em que α é o ângulo entre as 1-formas a e b .



Fonte: Autoria própria.

Da definição de um *boost*, temos que $\mathcal{B}^2 = e^\phi$, de modo que $\mathcal{B} = e^{\phi/2}$ com $\alpha = \phi/2$, enquanto que o produto geométrico $u\gamma_0$ é dado por

$$u\gamma_0 = u \cdot \gamma_0 + u \wedge \gamma_0 = \mathcal{B}^2. \quad (\text{B.9})$$

Lembrando também que $\vec{u} = \frac{c(u \wedge \gamma_0) \cdot \gamma_0}{u \cdot \gamma_0}$, é a parte espacial da 1-forma u , é possível definir uma constante tal que $u \cdot \gamma_0 = \gamma$. Então, podemos escrever

$$\mathcal{B}^2 = u \cdot \gamma_0 + u \wedge \underbrace{\gamma_0 \gamma_0 \gamma_0}_{=1} = u \cdot \gamma_0 + (u \wedge \gamma_0 \cdot \gamma_0) \gamma_0 = \gamma \left(1 + \frac{\vec{u}}{c} \gamma_0\right), \quad (\text{B.10})$$

de tal forma que uma expressão para γ pode ser obtida escrevendo o produto

$$\gamma_0 u = \gamma \left(1 - \frac{\vec{u}}{c} \gamma_0\right) \quad (\text{B.11})$$

e notando que $u^2 = 1$, logo temos

$$1 = uu = u \gamma_0 \gamma_0 u = \gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{u}}{c} \gamma_0\right) \left(1 - \frac{\vec{u}}{c} \gamma_0\right) = \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \quad (\text{B.12})$$

onde podemos identificar o fator de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Concentrando agora em encontrar uma nova expressão para \mathcal{B} , temos que

$$\mathcal{B}^2 = \gamma \left(1 + \frac{\vec{u}}{c} \gamma_0\right) = \gamma (1 + \beta \mathbf{n} \gamma_0), \quad (\text{B.13})$$

em que foi definido o fator $\beta = \frac{|u|}{c}$ que fornece a velocidade de um observador inercial viajando com velocidade relativa u em relação a velocidade da luz c , enquanto que $\mathbf{n} = \frac{\vec{u}}{|u|}$ é uma 1-forma espacial unitária apontando na direção de u . As componentes de \mathbf{n} podem ser escritas como $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \gamma_1 + \mathbf{n}_2 \gamma_2 + \mathbf{n}_3 \gamma_3 \equiv \mathbf{n}_k \gamma_k$ com $(k = 1, 2, 3)$. O termo $\beta \mathbf{n}_k \gamma_k \gamma_0$ é uma 2-forma, tal que $\beta \mathbf{n}_k \gamma_k \gamma_0 = \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0$. Deste modo, temos que $\mathcal{B}^2 = \gamma + \gamma \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0$, e sua inversa é dada por

$$\tilde{\mathcal{B}}^2 = [\gamma + \gamma \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0]^\sim = \gamma + \gamma \beta \widetilde{\mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0} = \gamma - \gamma \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0. \quad (\text{B.14})$$

Somando uma unidade de ambos os lados das expressões acima, temos

$$\mathcal{B}^2 + 1 = 1 + \gamma + \gamma \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0, \quad \tilde{\mathcal{B}}^2 + 1 = 1 + \gamma - \gamma \beta \mathbf{n}_k \gamma_k \wedge \gamma_0. \quad (\text{B.15})$$

e somando lado a lado, é possível encontrar $\mathcal{B}^2 + \tilde{\mathcal{B}}^2 + 2 = 2(1 + \gamma)$. Uma vez que $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}$, podemos usar esta propriedade e uma manipulação, multiplicando ambos os lados por \mathcal{B}^2 , logo podemos escrever

$$\mathcal{B}^2 (\mathcal{B}^2 + \mathcal{B}^{-2} + 2) = 2\mathcal{B}^2 (1 + \gamma), \quad (\text{B.16})$$

fornecendo o lado esquerdo

$$\mathcal{B}^4 + \mathcal{B}^2\mathcal{B}^{-2} + 2\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^4 + \underbrace{(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})^2}_{=1} + 2\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^4 + 2\mathcal{B}^2 + 1 = (\mathcal{B}^2 + 1)^2, \quad (\text{B.17})$$

então não é difícil mostrar que $(\mathcal{B}^2 + 1)^2 = 2\mathcal{B}^2(1 + \gamma)$, permitindo escrever $\mathcal{B}^2 = \frac{(\mathcal{B}^2+1)^2}{2(1+\gamma)}$, ou ainda

$$\mathcal{B} = \pm \frac{\mathcal{B}^2 + 1}{\sqrt{2(1 + \gamma)}}. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, podemos escrever o gerador de *boost* em uma direção arbitrária no espaço por meio de

$$\mathcal{B} = \pm \frac{1 + \gamma + \gamma\beta\mathbf{n}_k\gamma_k \wedge \gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}}. \quad (\text{B.19})$$

Para um *boost* na direção γ_1 , temos $\mathbf{n}_k\gamma_k = \mathbf{n}_1\gamma_1 = \gamma_1$, então (escolhendo o sinal negativo)

$$\mathcal{B} = \frac{1 + \gamma + \gamma\beta\gamma_1 \wedge \gamma_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}}. \quad (\text{B.20})$$

Quando estes objetos são utilizados para realizar uma transformação de Lorentz, esta pode ser pensada tanto no sentido ativo, eq. (B.1), quanto no sentido passivo, eq. (B.2). Além disso, o sinal de \pm na eq. (B.19) implica que sempre existe dois geradores de *boosts* em $Spin_+^\uparrow(1, 3)$ representando um gerador de *boost* em $SO_+^\uparrow(1, 3)$.

APÊNDICE C –

Neste apêndice apresentaremos a decomposição do campo eletromagnético, necessário para escrever as Equações de Maxwell do Eletromagnetismo (EME), eq. (3.26), no formalismo algébrico-geométrico. Definiremos também os campos elétrico e magnético, os quais devem ser entendidos como seções da parte par do Fibrado de Clifford do Espaço-Tempo (FCET). Definiremos em seguida as densidades de corrente elétrica e magnética e as expressões para os operadores de Dirac em relação a um observador γ_0 inercial, necessárias para obtermos o operador d'Alembertiano de Hodge. Por fim, mostraremos como relacionar o produto vetorial com o produto exterior, essencialmente uma relação de dualidade, a partir do pseudoescalar do Espaço-Tempo de Minkowski (ETM), resultado que será fundamental para expressarmos as EME, partindo do formalismo vetorial, no formalismo algébrico-geométrico.

Definindo o campo eletromagnético por meio de uma 2-forma sobre o ETM, ou seja,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^2 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad (\text{C.1})$$

é possível encontrar uma nova expressão, em termos dos campos elétrico e magnético, multiplicando por $1 = \gamma^0 \gamma^0$ à direita e usando as propriedades do produto geométrico, ou seja,

$$\begin{aligned} F &= F \gamma^0 \gamma^0 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} [(\gamma^\mu \wedge \gamma^\nu) \gamma^0] \gamma^0 \\ &= F_{0k} \gamma_k \gamma_0 + \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} F_{jk} \gamma^5 \gamma_i \gamma_0 \\ &= E_k \sigma_k + \gamma^5 B_i \sigma_i = \mathbf{E} + \gamma^5 \mathbf{B} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Na segunda passagem foi usado o fato de que o produto interno contraído entre uma 2-forma e uma 1-forma é antissimétrico e que uma 3-forma geral do espaço-tempo pode ser escrita em termos de γ^5 e do símbolo de Levi-Civita do ETM, eq. (A.21).

Além disso, os campos elétrico e magnético podem ser escritos como 1-formas do espaço

$$\mathbf{E} = E_k \sigma_k \in \text{sec}\Gamma^{(0)}(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell^{(0)}(M, \eta), \quad (\text{C.3})$$

e

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}F_{jk}\right)\sigma_i = B_i\sigma_i \in \text{sec}\Gamma^{(0)}(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell^{(0)}(M, \eta), \quad (\text{C.4})$$

ambas as quantidades são seções da parte par do FCET. Os objetos

$$\sigma_k = \gamma_k\gamma_0 \in \text{sec}\Gamma^{(0)}(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell^{(0)}(M, \eta), \quad (\text{C.5})$$

são 1-formas espaciais e locais deste fibrado que claramente são geradores de rotações do tipo-tempo.

Definindo as densidades de corrente elétrica e magnética por meio de duas 1-formas do ETM, ou seja,

$$J_e \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad J_m \in \text{sec}\Gamma(U, \bigwedge^1 T^*M) \hookrightarrow C\ell(M, \eta), \quad (\text{C.6})$$

temos que, em termos de componentes, podemos escrever

$$J_e = (J_e)^\mu\gamma_\mu = \rho_e\gamma_0 + (J_e)^i\gamma_i, \quad J_m = (J_m)^\mu\gamma_\mu = \rho_m\gamma_0 + (J_m)^i\gamma_i, \quad (\text{C.7})$$

em que é possível identificar que a parte temporal de ambas as densidades correspondem às densidades de carga elétrica ρ_e e magnética ρ_m , 0-formas, funções escalares que podem depender do espaço e do tempo.

Em relação a um observador inercial γ_0 , ou seja, multiplicando à direita por γ_0 , podemos escrever a densidade¹ de corrente elétrica como

$$J_e\gamma_0 = \rho_e + (J_e)^i\sigma_i = \rho_e + \mathbf{J}_e \quad (\text{C.8})$$

de modo que para a densidade de corrente magnética, devemos ter a seguinte condição:

$$\gamma_0(\gamma^5 J_m) = -(\gamma^5 J_m)\gamma_0, \quad (\text{C.9})$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \gamma_0(\gamma^5 J_m) &= -\gamma^5 J_m \gamma_0 \\ &= \gamma^5 \gamma_0 J_m \\ &= \gamma^5 (\rho_m - \mathbf{J}_m), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

¹ A definição da densidade de corrente elétrica segue da ref. (HESTENES, 2015), porém sem nenhuma menção à densidade de corrente magnética.

onde

$$\mathbf{J}_m \gamma_0 = \rho_m + (\mathbf{J}_m)^i \sigma_i = \rho_m + \mathbf{J}_m. \quad (\text{C.11})$$

Por sua vez, \mathbf{J}_e e \mathbf{J}_m são as densidades espaciais de corrente elétrica e magnética no referencial do observador γ_0 .

Um importante ponto a ser mencionado, é que podemos expressar o operador de Dirac em termos da parte par do FCET multiplicando à esquerda por γ_0 , ou seja,

$$\gamma_0 \partial = \gamma_0 \gamma^0 \partial_t + \gamma_0 \gamma^i \partial_i = \partial_t + \sigma_i \partial_i = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla, \quad (\text{C.12})$$

ou à direita

$$\partial \gamma_0 = \gamma^0 \gamma_0 \partial_t + \gamma^i \gamma_0 \partial_i = \partial_t - \sigma_i \partial_i = \frac{\partial}{\partial t} - \nabla, \quad (\text{C.13})$$

permitindo escrever o operador escalar ∂^2 como

$$\partial^2 = \partial \gamma_0 \gamma_0 \partial = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{C.14})$$

O operador ∇ corresponde ao operador gradiente do cálculo diferencial, porém ele faz parte da parte par do FCET, uma vez que as derivadas espaciais nas direções x , y e z , são geradas pelas 1-formas σ_k .

Usando a definição da ref. (HESTENES, 2015), que relaciona o produto vetorial com o produto exterior, em outras palavras, uma relação de dualidade entre estes produtos, multiplicado à esquerda pelo pseudoescalar do espaço \mathbf{i} , que por sua vez, também é o pseudoescalar do espaço-tempo γ^5 , temos que

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \equiv -\mathbf{i}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \longrightarrow -\gamma^5(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}). \quad (\text{C.15})$$

Em termos de componentes, temos $\mathbf{x} = x_i \sigma_i$ e $\mathbf{y} = y_j \sigma_j$, logo $\sigma_i \times \sigma_j = \epsilon_{ijk} \sigma_k = -\gamma^5(\sigma_i \wedge \sigma_j)$.

APÊNDICE D –

Neste apêndice calculamos as expressões para as partes temporal e espacial da força de Lorentz elétrica e magnética, eq. (3.104) e obtemos os invariantes eletromagnéticos de um modo menos trabalhoso, em termos do formalismo tensorial.

Escrevendo as componentes das forças de Lorentz generalizadas associadas às cargas elétricas e monopolos magnéticos como

$$K_e \gamma^\nu = (K_e)^\nu = -(J_e)_\mu F^{\mu\nu}, \quad K_m \gamma^\nu = (K_m)^\nu = -(J_m)_\mu (*F^{\nu\mu}), \quad (\text{D.1})$$

podemos identificar as componentes temporal e espacial da parte elétrica:

$$(K_e)^0 = -(J_e)_1 E^1 - (J_e)_2 E^2 - (J_e)_3 E^3, \quad (\text{D.2})$$

$$(K_e)^1 = \rho_e E^1 + (J_e)_2 B^3 - (J_e)_3 B^2, \quad (\text{D.3})$$

$$(K_e)^2 = \rho_e E^2 - (J_e)_1 B^3 + (J_e)_3 B^1, \quad (\text{D.4})$$

$$(K_e)^3 = \rho_e E^3 + (J_e)_1 B^2 - (J_e)_2 B^1. \quad (\text{D.5})$$

Portanto, em relação a um observador inercial γ_0 , temos

$$K_e \gamma_0 = (K_e)_0 + \mathbf{K}_e, \quad (\text{D.6})$$

permitindo escrever

$$(K_e)_0 = -\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J}_e \times \mathbf{B}. \quad (\text{D.7})$$

Por outro lado, notando que o campo eletromagnético dual pode ser escrito como

$$(*F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\nu\mu[\alpha\beta]} F_{[\alpha\beta]}, \quad (\text{D.8})$$

temos que as componentes da parte magnética, assumem a forma de

$$K_m^\nu = -(J_m)_\mu \epsilon^{\nu\mu[\alpha\beta]} F_{[\alpha\beta]}. \quad (\text{D.9})$$

logo as componentes temporal e espacial da parte magnética podem ser escritas como:

$$K_m^0 = (J_m)_1 B^1 + (J_m)_2 B^2 + (J_m)_3 B^3, \quad (\text{D.10})$$

$$K_m^1 = -\rho_m B^1 - (J_m)_2 E^3 + (J_m)_3 E^2, \quad (\text{D.11})$$

$$K_m^2 = -\rho_m B^2 + (J_m)_1 E^3 - (J_m)_3 E^1, \quad (\text{D.12})$$

$$K_m^3 = -\rho_m B^3 - (J_m)_1 E^2 + (J_m)_2 E^1. \quad (\text{D.13})$$

Desta forma, em relação a um observador inercial, podemos escrever a força magnética generalizada de Lorentz por meio de

$$K_m \gamma_0 = (K_m)_0 + \mathbf{K}_m \quad (\text{D.14})$$

em que

$$(K_m)_0 = \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{K}_m = -\rho_m \mathbf{B} - \mathbf{J}_m \times \mathbf{E}. \quad (\text{D.15})$$

Observe ainda que as partes temporal e espacial das forças de Lorentz elétrica, eq. (D.7), e magnética, eq. (D.15), são invariantes perante as substituições das eqs. (4.6) e (4.10).

Obtidas as expressões para as forças de Lorentz generalizadas, podemos calcular, em seguida, os invariantes associados ao eletromagnetismo, eq. (3.110). Para este fim, devemos calcular os termos da seguinte expressão:

$$F^2 = FF = F \cdot F + F \wedge F. \quad (\text{D.16})$$

Lembrando da eq. (3.97), temos $F \cdot F = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, então escrevendo

$$F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu, \quad F = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta, \quad (\text{D.17})$$

temos

$$F \wedge F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta.$$

Usando a relação $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\alpha \wedge \gamma_\beta = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5$, encontramos que

$$F^2 = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_5. \quad (\text{D.18})$$

Por outro lado, a partir da eq. (3.127), temos que $F^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2\gamma^5(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$, permitindo identificar as partes escalar e pseudoescalar

$$F \cdot F = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \quad F \wedge F = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5 = -2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})\gamma_5, \quad (\text{D.19})$$

que de uma vez por todas, seguem os resultados

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{\mu\nu}(*F_{\mu\nu}) = -4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}), \quad (\text{D.20})$$

os quais definem os invariantes associados ao campo eletromagnético e que, em geral, são utilizados para definir as densidades Lagrangeanas do campo eletromagnético em teorias clássicas de campo.