



WÉLSON ANTÔNIO DE OLIVEIRA

EQUAÇÃO DA ONDA – AS CORDAS DO PIANO

LAVRAS – MG

2021

WÉLSON ANTÔNIO DE OLIVEIRA

EQUAÇÃO DA ONDA – AS CORDAS DO PIANO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do curso de Matemática para a obtenção do título de Licenciado.

Profa. Dra. Ana Claudia Pereira

Orientadora

LAVRAS – MG

2021

WÉLSON ANTÔNIO DE OLIVEIRA

EQUAÇÃO DA ONDA – AS CORDAS DO PIANO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do curso de Matemática para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADA em 13 de Abril de 2021.

Prof. Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho UFLA
Profa. Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré UFLA
Prof. Dr. Ricardo Edem Ferreira UFLA

Profa. Dra. Ana Claudia Pereira
Orientadora

**LAVRAS – MG
2021**

Dedico este trabalho aos meus pais José Adair e Izaura.

AGRADECIMENTOS

Ao final deste ciclo, gostaria de fazer alguns agradecimentos especiais para quem sempre esteve presente, de alguma forma colaborando para a realização deste sonho. Agradeço primeiramente a Deus pelo dom e privilégio da vida. Aos meus pais José Adair e Izaura, ao meu irmão Weider, e a minha orientadora Ana Cláudia, pela paciência, incentivo, apoio e compreensão. Também não posso de deixar de agradecer aos meus amigos(as) Franciana e Luis por estarem sempre por perto. Aos meus amigos da república Toa-Toa, onde morei, e em especial ao João Antônio e ao Gabriel. Enfim, sou muito grato pela presença de vocês em minha vida.

*"Faça o teu melhor,
na condição que você tem,
enquanto você não tem condições melhores,
para fazer melhor ainda!"
(Mario Sergio Cortella)*

RESUMO

O presente trabalho consiste em apresentar uma breve introdução dos conceitos básicos de Equações Diferenciais Parciais, com ênfase no estudo e aplicação da equação da onda unidimensional em sua forma homogênea e não homogênea para modelagem de fenômenos envolvendo a vibração transversal de cordas elásticas. O problema matemático proposto consiste na determinação de solução da equação da onda, considerando condições iniciais e de contorno que são relacionadas com elementos da estrutura do piano. Tais soluções são expressões representativas da vibração da corda do piano responsável pela emissão do som. No trabalho consta um estudo de conceitos básicos de equações diferenciais e séries de Fourier, contendo: observações sobre condições para garantia de convergências pontuais, um estudo geral de ondas com exemplo da onda sonora e destaque para percepções do som através da descrição do sistema auditivo humano, descrição matemática da equação da onda na corda, contendo a solução da equação homogênea e não homogênea considerando condições iniciais e de contorno, e, por fim, a descrição e aplicação da equação da onda sobre elementos do piano.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Séries de Fourier. Equação da onda. Aplicação sobre o piano. Ondas sonoras.

ABSTRACT

The proposed mathematical problem consists in determining the solution of the wave equation, considering initial and boundary conditions that are related to elements of the piano structure. Such solutions are representative expressions of the vibration of the piano string responsible for the sound emission. The work includes a study of basic concepts of differential equations and Fourier series, containing: observations on conditions to guarantee point convergences, a general study of waves with an example of the sound wave and emphasis on perceptions of sound through the description of the human auditory system, mathematical description of the wave equation on the string, containing the solution of the homogeneous and non-homogeneous equation considering initial and boundary conditions, and, finally, the description and application of the wave equation on piano elements.

Keywords: Partial Differential Equations. Fourier Series. Wave equation. Application on the piano. Sound waves.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Representação da emissão de uma onda sonora.	42
Figura 4.2 – Emissão de uma onda sonora com fonte e receptor em repouso.	46
Figura 4.3 – Emissão de onda sonora com fonte ou receptor em movimento ou ambos em movimento.	46
Figura 4.4 – Som resultante formado pela soma de três harmônicos.	50
Figura 4.5 – Divisão do aparelho auditivo.	50
Figura 5.1 – Corda elástica sob tensão.	55
Figura 5.2 – Elemento da corda deslocado.	55
Figura 5.3 – Resolução da tensão T em componentes.	56
Figura 5.4 – Velocidade de uma onda na corda.	58
Figura 5.5 – Corda elástica	59
Figura 6.1 – Piano de cauda.	68
Figura 6.2 – Frequência das notas do piano.	69
Figura 6.3 – Cordas do piano.	70
Figura 6.4 – Mecanismo de ação do piano.	70
Figura 6.5 – Massa da cabeça dos martelos de um piano de cauda.	71
Figura 6.6 – Pedais do piano.	72
Figura 6.7 – Visão superior do piano.	73
Figura 6.8 – Função $g(x)$	74
Figura 6.9 – Gráfico da função $f(x)$	76
Figura 6.10 – Gráfico da função $g(x,t)$ para $t = 0$	79
Figura 6.11 – Gráfico da função $g(x,t)$ para $t = 1$	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Algumas equações diferenciais parciais lineares.	16
Tabela 4.1 – Velocidade de propagação do som em diferentes meios.	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	13
2.1	Conceitos básicos de EDP	14
2.2	Linearidade e o Princípio de Superposição	15
2.3	Problemas com valores iniciais e de contorno (PVIC)	17
3	SÉRIES DE FOURIER	19
3.1	Funções periódicas	19
3.2	Funções pares e ímpares	20
3.3	Funções ortogonais seno e cosseno	23
3.4	Coefficientes de Fourier	25
3.5	Séries de Fourier em funções pares e ímpares	27
3.6	Convergência das séries de Fourier	28
3.6.1	Convergência pontual	31
4	ONDAS	39
4.1	Caracterizações Gerais de Ondas	39
4.1.1	Tipos de Ondas	39
4.1.2	Classificação das Ondas	40
4.1.3	Propriedades das Ondas	40
4.1.4	Fenômenos Ondulatórios	41
4.2	Ondas Sonoras	42
4.2.1	Propagação do Som	43
4.2.2	Propriedades fisiológicas do Som	44
4.2.3	Efeito Doppler	45
4.2.4	Som Puro e Complexo	48
4.2.5	Sistema Auditivo Receptor	49
5	DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE ONDA NA CORDA	54
5.1	Dedução da Equação da Onda Unidimensional	54
5.2	Velocidade de uma Onda na Corda	57
5.3	Vibração de uma Corda Elástica	59
5.4	Vibração da Corda Elástica com ação de força externa	64
6	APLICAÇÃO NO PIANO DE CAUDA	68

6.1	Estrutura do Piano	69
6.2	Aplicações	73
6.2.1	Situação 1	74
6.2.2	Situação 2	75
6.2.3	Situação 3	77
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	Referências Bibliográficas	83

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu a partir do interesse em estudar equações diferenciais e sobre a possibilidade de relacioná-las em conceitos ligados a música, tendo assim, como principal objetivo apresentar uma introdução das Equações Diferenciais Parciais, fazendo o estudo da equação da onda com aplicação em elementos do piano.

A teoria de equações diferenciais foi desenvolvida a partir dos estudos de cálculo diferencial por Newton e Leibniz, em motivação pelas leis de Newton e a lei da gravitação universal, sendo utilizadas por vários físicos e matemáticos do século XVIII auxiliando-os a avançarem em suas descobertas, e desde então vem se desenvolvendo através da resolução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento (BOYCE; DiPRIMA, 2010).

O estudo de ondas é um dos principais campos de pesquisa da física, e que permite uma descrição matemática dada por uma Equação Diferencial Parcial e expressa pela equação da onda (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012).

A equação da onda é uma importante ferramenta matemática de uso frequente e eficaz na modelagem de fenômenos envolvendo movimentos oscilatórios e propagação de ondas. Em sua versão unidimensional, pode ser utilizada para modelagem de vibrações em uma corda elástica. Também utilizamos das séries de Fourier na determinação das soluções, que é uma teoria utilizada na decomposição de funções periódicas e conseqüentemente, ondas, em somas infinitas de senos e cossenos (FIGUEIREDO, 1977).

O piano, por sua vez, é um instrumento musical criado no século XVIII na Itália, pelo fabricante de instrumentos Bartolomeu Cristofori. Ele emite som através da percussão de cordas, possível, graças a um mecanismo composto de alavancas e um martelo acionado pelo teclado (HENRIQUE, 2002). Para aplicação da equação de onda no piano, estabelecemos as condições iniciais, de contorno e ação de força externa que são relacionados com elementos do instrumento, motivados por situações cotidianas ocorrentes, de modo que, a solução para os problemas, representem modelos de vibração da corda do piano responsável pela emissão do som.

Este trabalho se divide em cinco partes principais, que são: *Equações Diferenciais Parciais*, *Séries de Fourier*, *Ondas*, *Descrição Matemática de Ondas na Corda* e *Aplicações no Piano*.

Em *Equações Diferenciais Parciais*, faremos a apresentação dos conceitos básicos contemplando definições importantes e alguns exemplos, seguidos de algumas considerações com

relação a suas classificações, condições iniciais e de contorno e princípio da superposição. No capítulo *Séries de Fourier*, apresentaremos sucintamente a teoria de Fourier, no qual consistirá no estudo de funções periódicas pares e ímpares, a determinação dos coeficientes, e condições para que se estabeleça a convergência pontual das séries.

No capítulo *Ondas*, apresentaremos as caracterizações gerais, tais quais, algumas classificações, propriedades e fenômenos ondulatórios, e como exemplo, apresentaremos as ondas sonoras, no qual falaremos da propagação do som, propriedades fisiológicas do som; falaremos do efeito Doppler, definiremos som puro e complexo e ainda concluiremos com um parecer sobre a recepção de um som com estudo do sistema auditivo humano.

Seguiremos com a *Descrição Matemática de Ondas na Corda*, onde faremos a dedução da equação de onda e velocidade de onda na corda, e solucionaremos problemas envolvendo uma corda presa a extremidade na forma homogênea e não homogênea. Por fim, em *Aplicações no Piano*, faremos a descrição do instrumento, apresentando suas características principais para a geração do som, e ainda buscaremos apresentar modelos com respectivas soluções, almejando representar a vibração de cordas do piano em determinadas situações.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Muitos dos princípios ou leis, que regem o comportamento do mundo físico, são proposições ou relações envolvendo a taxa segundo o qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são *Equações Diferenciais* e evoluíram dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Isaac Newton (1644-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), durante o século XVII, para resolver problemas motivados por considerações de natureza física ou geométrica (SOTOMAYOR, 2009).

As descobertas de Newton em cálculo e leis mecânicas datam de 1665, e foram publicados em seu livro mais famoso chamado *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Nesta época, o grande destaque estava nas três leis de Newton e na lei da gravitação universal, possibilitando o aparecimento das primeiras equações diferenciais ordinárias. Entre suas contribuições, Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com suas formas: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$, e também a equação $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, no qual desenvolveu um método para solucioná-la, usando séries infinitas, para o caso que f é um polinômio em x e y .

Das contribuições de Leibniz, podemos observar seus estudos e publicações sobre cálculo independente, o qual descobriu o método de separação de variáveis e desenvolveu procedimentos para resolver equações lineares de primeira ordem, além ainda da compreensão da importância de uma notação eficaz, sendo o responsável pelo uso de notação matemática de derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e integral (\int) , utilizadas nos dias de hoje.

Outros nomes também trouxeram importantes contribuições para o campo das equações diferenciais, tais como, os irmãos Bernoulli, Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) e Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, que fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações, como a resolução da equação $y' = \left[\frac{a^3}{b^2y - a^3}\right]^{\frac{1}{2}}$ por Jakob e $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ por Johann, que resultou no descobrimento inédito das funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707-1783) foi outro matemático que trouxe contribuições importantíssimas. Entre elas, Euler identificou condições para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria de fatores integrantes encontrando a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, estendendo ainda para equações não homogêneas. Usava séries de potências para resolver equações diferenciais e ainda

fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais, dando o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Outro nome importante para as equações diferenciais foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Podemos destacar demonstrações de resultados que afirma que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Desenvolveu ainda completamente o método de variação dos parâmetros, sendo conhecido pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) é outro matemático que trouxe contribuições a partir de investigações de questões teóricas de existência e unicidade de soluções, o que possibilitou o estudo de várias equações que não poderiam ser solucionadas explicitamente. Também investigou o desenvolvimento de métodos baseados em expansão de séries de potência entre outras contribuições.

A partir do século XX, as soluções numéricas e posteriormente, a implementação nos computadores, revolucionaram e ampliaram grandemente as possibilidades de estudo e trabalho com equações diferenciais, além ainda, de métodos geométricos e topológicos de resolução de equações não lineares e estudos qualitativos comportamentais de estabilidade de soluções, omitindo a recorrência de formas analíticas e que atualmente é uma área de inúmeras linhas de pesquisa interdisciplinares e aplicadas em vários contextos (BOYCE&DIPRIMA, 2010).

2.1 Conceitos básicos de EDP

Muitas das equações diferenciais surgem a partir de modelos físicos, que além de prover uma motivação para o estudo de determinada equação, sugere as propriedades matemáticas que as soluções desta equação devem ter e, muitas vezes, métodos para resolvê-la ou até mesmo a expressão exata da solução (BIEZUNER, 2011). É extensa a listagem de áreas que fazem uso destas equações, como por exemplo a geometria diferencial, biologia, engenharias entre outras. Neste capítulo serão apresentadas algumas das mais importantes caracterizações das Equações diferenciais Parciais.

Definição 2.1.1. Uma *Equação Diferencial Parcial (EDP)* é uma equação matemática que envolve uma (ou mais de uma) variável dependente de duas ou mais variáveis independentes, de

modo a possuir derivadas parciais destas em sua composição. A expressão da forma

$$F \left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_n^m} \right) = g(x). \quad (2.1)$$

com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma EDP escrita em sua forma geral, com n variáveis independentes (x_1, x_2, \dots, x_n) e $u(x)$ a variável dependente. Para o caso particular em que $g(x) = 0$, dizemos que a EDP é homogênea, caso contrário, é dita não homogênea.

Definição 2.1.2. Chama-se **solução** da EDP (2.1), uma função m -derivável $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (2.1). Ou seja, φ é solução se:

$$F \left(\varphi(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x_n^m} \right) = g(x)$$

Definição 2.1.3. Chama-se **ordem** da EDP, a ordem do elemento que apresenta a maior ordem da derivada parcial.

Observação 2.1.4. A ordem da Equação (2.1) é m pois é a ordem da derivada do termo de maior ordem da equação.

2.2 Linearidade e o Princípio de Superposição

Uma caracterização fundamental das equações diferenciais, é com relação a sua linearidade. Dizemos que a EDP (2.1) é linear se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é dita não linear. A Tabela 2.1 apresenta exemplos das mais importantes equações diferenciais parciais lineares.

A existência de uma solução não trivial ou não nula para uma EDP linear homogênea implica na existência de infinitas soluções. Isso acontece, pois, se $u \neq 0$ é solução, então para qualquer $k \in \mathbb{R}$, ku também é solução. Em geral, quando se tem u e v soluções de uma dada EDP linear e homogênea, combinações lineares das mesmas também são soluções. De fato, defina o operador diferencial linear dado por:

$$L[u(x)] = F \left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_n^m} \right).$$

Tabela 2.1 – Algumas equações diferenciais parciais lineares.

Nome	Equação	Classificação
<i>Equação do Transporte</i>	$u_t + u_x = 0$	primeira ordem
<i>Equação de Laplace</i>	$\Delta u = 0$	segunda ordem
<i>Equação de Poisson</i>	$\Delta u = f(x)$	segunda ordem
<i>Equação de Helmholtz</i>	$-\Delta u = \lambda u$	segunda ordem
<i>Equação da difusão (ou do calor)</i>	$u_t = \Delta u$	segunda ordem
<i>Equação da onda</i>	$u_{tt} = \Delta u$	segunda ordem
<i>Equação de Schrödinger</i>	$iu_t + \Delta u = V(x)u$	segunda ordem
<i>Equação de Klein-Gordon</i>	$u_{tt} = \Delta u - m^2 u$	segunda ordem
<i>Equação do telégrafo</i>	$u_{tt} + 2du_t = u_{xx}$	segunda ordem
<i>Equação de Airy</i>	$u_{tt} + u_{xxx} = 0$	terceira ordem
<i>Equação biharmônica</i>	$\Delta^2 u = 0$	quarta ordem
<i>Equação de vibração da chapa</i>	$u_{tt} = \Delta^2 u$	quarta ordem

Fonte: Adaptado de Biezuner, 2011.

Dados $u_1 = u_1(x)$ e $u_2 = u_2(x)$ soluções de $L(u) = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, pela linearidade de L , segue da definição que,

$$L[u_1 + \alpha u_2] = L[u_1] + \alpha L[u_2] = 0 + \alpha 0 = 0$$

ou seja, $u_1 + \alpha u_2$ é solução. Generalizando, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 (Princípio da Superposição). *Seja L um operador diferencial linear de ordem k , cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea. Se $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é k vezes diferenciável termo a termo em Ω uniformemente convergente, e ainda que série formada por suas derivadas também seja uniformemente convergente, então u satisfaz $L[u] = 0$.

Demonstração. Seja L o operador diferenciável linear de ordem k dado por:

$$L[u](x) = a(x)u + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \cdots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

Por hipótese, temos que para quaisquer $x \in \Omega$, $1 \leq i, i_1, \dots, i_k \leq n$, temos que as séries

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^k u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \end{aligned}$$

são convergentes. Assim, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} L[u](x) &= a(x)u + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \cdots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \\ &= a(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 i_2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \cdots + \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^k u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left[a(x)u_m + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial^k u_m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (L[u_m])(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é solução do operador L . ■

2.3 Problemas com valores iniciais e de contorno (PVIC)

Uma equação diferencial, quando é solucionada na sua forma explícita, admite uma família de soluções. Em geral, do ponto de vista matemático, isso não é um problema, mas se

torna quando é aplicada em situações reais que exigem unicidade nesta determinação, fazendo necessário acrescentar informações no modelo. Estas informações são chamadas *condições iniciais e condições de contorno*, utilizadas para melhor adequação ao problema.

Um Problema de Valor Inicial (PVI), ou Problema de Cauchy, consiste em uma Equação Diferencial que é acompanhada do valor da função em um determinado ponto. Um Problema de Valores de Contorno (PVC), ou Problemas de fronteira, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo ou fronteira da região de domínio.

Exemplo 2.3.1. Considere o exemplo da equação de fluxo de calor ao longo de um fio, considerando temperaturas fixas T_1 e T_2 em suas extremidades. Temos então:

$$u_t = Ku_{xx}, \quad (2.2)$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.4)$$

onde L é o comprimento do fio, K a constante de difusibilidade térmica e $f(x)$ é a temperatura inicial do fio.

As expressões em (2.3) são condições de contorno para o problema (2.2) e estabelecem temperaturas fixas na posição 0 e L , ou seja, nas extremidades do fio, em todo tempo. Em (2.4) temos uma condição inicial, sendo $f(x)$ a observação no tempo 0, que representa temperaturas locais em todo ponto x do fio. Quando se considera (2.2)-(2.4), dizemos que se trata de um problema de *Problema de Valor Inicial e de Contorno* (PVIC).

3 SÉRIES DE FOURIER

A ideia de representar funções por meio de séries surgiu na Índia em meados do século XIV, período no qual foram concebidas as técnicas precursoras para tratar do que hoje é conhecido como Séries de Potências ¹. Exemplos particulares desse tipo de série são as Séries de Taylor e de Maclaurin (PUPIN, 2011).

A série de Taylor é assim chamada em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) e a série de Maclaurin, caso especial da série de Taylor, é assim denominada em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) (STEWART, 2001). A expansão de uma função f por estas séries sugere que a função possua derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo (SOUZA, 2015).

Outras séries foram criadas para representação das funções periódicas como é o caso das *Séries de Fourier*. A Série de Fourier é uma ferramenta matemática que surgiu por volta do século XIX, quando Joseph Fourier (1768-1830) analisava o problema de condução de calor (FIGUEIREDO, 1977) e são análogas às séries de Taylor no sentido de que ambos os tipos de séries fornecem um modo de expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares familiares (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Este método propõe que uma dada função f periódica de período $2L$ pode ser definida pela série de Fourier (3.1), desde que o domínio de f seja o conjunto de pontos onde a série seja convergente. Nesse caso, dizemos que a série (3.1) é a série de Fourier de f .

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1)$$

Lembrando ainda que os coeficientes a_n e b_n serão definidos mais adiante onde também serão discutidos alguns aspectos importantes sobre f , e que a justificativa para a escolha de $\frac{1}{2}a_0$ é por conveniência, de modo a termos uma fórmula comum para todos os coeficientes a_n .

3.1 Funções periódicas

Definição 3.1.1. Uma dada função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

¹ Séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ com x variável e c_n constante.

Observe que, se T é período, $n \cdot T$ com $n \in \mathbb{N}$ também é, pois, da definição, temos:

$$f(x+nT) = f(x+(n-1)T) = f(x+(n-2)T) = \cdots = f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$$

Observação 3.1.2. O menor valor positivo de T que satisfaz a condição da definição (3.1.1) chama-se *período fundamental*.

Exemplo 3.1.3. As funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ são periódicas de período 2π , pois:

$$\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}(x)\text{cos}(2\pi) + \text{cos}(x)\text{sen}(2\pi) = \text{sen}(x) \cdot 1 + \text{cos}(x) \cdot 0 = \text{sen}(x)$$

$$\text{cos}(x+2\pi) = \text{cos}(x)\text{cos}(2\pi) - \text{sen}(x)\text{sen}(2\pi) = \text{cos}(x) \cdot 1 - \text{sen}(x) \cdot 0 = \text{cos}(x)$$

Exemplo 3.1.4. Encontre o período fundamental T da função $f(x) = \text{sen}\frac{n\pi x}{L}$.

Como $\text{sen}(x)$ é uma função periódica, temos que:

$$\text{sen}\frac{n\pi(x+T)}{L} = \text{sen}\frac{n\pi x}{L}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

sendo T o período fundamental, então temos,

$$\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\text{cos}\frac{n\pi T}{L} + \text{cos}\frac{n\pi x}{L}\text{sen}\frac{n\pi T}{L} = \text{sen}\frac{n\pi x}{L}. \quad (3.2)$$

Para o caso particular $x = \frac{L}{2n}$, temos:

$$\text{sen}\frac{\pi}{2}\text{cos}\frac{n\pi T}{L} = \text{sen}\frac{\pi}{2} \quad (3.3)$$

e então, de (3.3) e da identidade $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$, temos que:

$$\text{cos}\frac{n\pi T}{L} = 1 \text{ e } \text{sen}\frac{n\pi T}{L} = 0. \quad (3.4)$$

Basta então encontrar o menor valor não nulo para T que satisfaça (3.4), dado por $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi$. Portanto, o período fundamental de $\text{sen}\frac{n\pi x}{L}$ é $T = \frac{2L}{n}$. O mesmo vale para a função $\text{cos}(x)$.

3.2 Funções pares e ímpares

Definição 3.2.1. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *par* se $f(x) = f(-x)$, e dita *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 3.2.2. As funções pares são simétricas em relação ao eixo y enquanto as funções ímpares possuem simetria com relação a origem.

Exemplo 3.2.3. Funções pares e ímpares:

- i. As funções $f(x) = \cos(nx)$ e $g(x) = x^n$ com n par, são funções pares.
- ii. As funções $f(x) = \sin(nx)$ e $g(x) = x^n$ com n ímpar, são funções ímpares.

Proposição 3.2.4. Operando funções pares e ímpares, temos:

- i. A soma de duas funções pares é uma função par;
- ii. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- iii. O produto de duas funções pares é uma função par;
- iv. O produto de duas funções ímpares é uma função par;
- v. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar;

Demonstração. (i) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares. Então,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

Logo, $(f + g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par.

(ii) Sejam $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares. Então,

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) = [-u(-x)] + [-v(-x)] = -[u(-x) + v(-x)] = -(u + v)(-x).$$

Logo, a função $(u + v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar.

(iii) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções pares. Então,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x).$$

Logo, $(fg) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par.

(iv) Sejam $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções ímpares. Então,

$$(uv)(x) = u(x)v(x) = [-u(-x)][-v(-x)] = u(-x)v(-x) = (uv)(-x).$$

Logo, $(uv) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par.

(v) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar. Então,

$$(fu)(x) = f(x)u(x) = f(-x)[-u(-x)] = -[f(-x)u(-x)] = -(fu)(-x).$$

Logo, $(fu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar. ■

Proposição 3.2.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em um intervalo $[-L, L]$.*

i. *Se f é uma função par, então:*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

ii. *Se f é uma função ímpar, então:*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

Demonstração. De (i) temos que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo $y = -x$, e pela propriedade de paridade de f , temos,

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(-y)dy = \int_0^L f(y)dy.$$

Portanto,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$$

De (ii) temos,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Fazendo $y = -x$,

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(-y)dy = - \int_0^L f(y)dy.$$

Portanto,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

■

3.3 Funções ortogonais seno e cosseno

Definição 3.3.1. O produto interno usual (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo de $\alpha \leq x \leq \beta$ é dado por:

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)d(x). \quad (3.5)$$

Definição 3.3.2. Duas funções u e v são ditas ortogonais em $\alpha \leq x \leq \beta$ se seu produto interno é nulo, ou seja,

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)d(x) = 0.$$

Um conjunto de funções é dito conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes do conjunto é ortogonal.

Proposição 3.3.3. As funções $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\text{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $m = 1, 2, \dots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo de $-L \leq x \leq L$ satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{-L}^L \text{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases} \\ (ii) \quad & \int_{-L}^L \text{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = 0, \quad \text{para todo } m, n; \\ (iii) \quad & \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstração. Utilizaremos das seguintes propriedades trigonométricas na demonstração:

$$(1) \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$(2) \quad \operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)}{2}$$

$$(3) \quad \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$(4) \quad \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$(5) \quad \cos(a)\operatorname{sen}(a) = \frac{\operatorname{sen}(2a)}{2}$$

$$(6) \quad \operatorname{sen}^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

(i) Se $m = n$, então por (4) temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx = L$$

Se $m \neq n$, então por (1) temos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) d(x) &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Como $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx = 0$$

(ii) Se $n = m$, então por (5) temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx = 0$$

Se $m \neq n$, então por (2) temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d(x) = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Como $\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx \right] = 0$$

(iii) Se $m = n$, então por (6) temos:

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx = L$$

Se $m \neq n$, então por (3) temos:

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx - \int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx \right] = 0$$

■

3.4 Coeficientes de Fourier

Suponha que para uma função f , exista a série (3.1) convergente, de modo que (3.6) seja satisfeita.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen}\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.6)$$

Tentaremos encontrar relações entre os coeficientes a_n e b_n com f , e para isso, comecemos por multiplicar $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ com n inteiro, positivo e fixo, em ambos lados da igualdade, e integrando com relação a x no intervalo de $-L$ a L . Supondo que a série pode ser integrada termo a termo, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como m é fixo e n varia tomando inclusive o próprio valor m , segue das relações de ortogonalidade que o único termo não nulo à direita da equação (3.7) é o correspondente ao

primeiro somatório quando $m = n$. Logo,

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = La_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

e portanto,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.8)$$

Para o caso particular de determinação do termo a_0 , basta integrar a série de ambos lados, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} (2L) + 0 + 0 = La_0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (3.9)$$

A determinação de b_n , segue análoga a a_n . Basta multiplicar toda série (3.1) e $f(x)$ por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e integrando da mesma forma, chega-se em,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, utilizando das relações de ortogonalidade, com as mesmas condições anteriores, temos que os termos não nulos do lado direito da equação (3.10) é respectivo ao segundo somatório. Dessa forma, temos,

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = Lb_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

e portanto,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.11)$$

3.5 Séries de Fourier em funções pares e ímpares

Funções pares e ímpares são particularmente importantes em aplicações de séries de Fourier, já que as séries de Fourier têm uma forma especial e ocorrem frequentemente em problemas físicos (BOYCE;DIPRIMA, 2010).

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, e seja,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

a expansão pela série de Fourier correspondente, com coeficientes apresentados na seção 3.4.

Para o caso em que $f(x)$ é uma função par, temos pelas proposições (3.2.4) e (3.2.5) que:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0 \end{aligned}$$

Então, supondo que a série seja convergente, a função f é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Se $f(x)$ for ímpar, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0 \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \end{aligned}$$

logo, se f é ímpar, supondo que a série seja convergente, f é dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

3.6 Convergência das séries de Fourier

Até o presente momento, foi sempre assumida a igualdade entre a função f e sua série de Fourier, mas isso acontece em casos bem particulares. Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes são calculados, é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função. De um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse e, ainda, simples o suficiente para serem facilmente verificadas para funções particulares (BOYCE; DIPRIMA, 2010). Seguimos apresentando algumas definições:

Definição 3.6.1. Uma função é dita *seccionalmente contínua* em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser particionado em um número finito de pontos $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b$, de modo que:

- i. f é contínua em cada subintervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n-1$.
- ii. f tende a um limite nas extremidades de cada subintervalo quando aproximadas do interior do intervalo, ou seja, existem os limites, $f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ e $f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$.

Definição 3.6.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Definição 3.6.3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo $[a, b]$ se $|f|$ for integrável. E quando f e $|f|$ forem integráveis, diremos que f é uma função de \mathcal{L}^1 .

Neste trabalho faz-se o uso da integral Riemann, e para uma função definida em um intervalo limitado $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deve-se considerar dois casos:

- i. f limitada: Integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores.
- ii. f não limitada: f é integrável (chamada integral imprópria) se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos I_1, \dots, I_n com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que, para

todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$, f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$. Neste caso, a integral imprópria de f é

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

O próximo resultado, será importante em auxílio das demonstrações dos resultados da próxima seção.

Teorema 3.6.4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de \mathcal{L}^1 . Então dado $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon \quad e \quad \psi(a) = \psi(b) = 0$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos. Suponha inicialmente que f seja integrável. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$ de modo que

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^k m_j(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.12)$$

onde $m_j = \inf \{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$.

Defina uma função dada por

$$\chi(x) = m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x < x_j.$$

Então pode-se reescrever (3.12) como

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \chi(x)dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.13)$$

visto que o somatório em (3.12) equivale a integral de $\chi(x)$ em $[a, b]$ onde está definida.

Note que a função $\chi(x)$ é do tipo escada, e que para todo j , a união das retas $y = 0, y = \chi(x) = m_j, x = m_{j-1}, x = m_j$ forma um retângulo. A ideia para o próximo passo da demonstração, é definir para cada n , uma função ψ_n que terá a característica de substituir os retângulos, em trapézios, formados por retas laterais com inclinação n .

Com isso, temos que,

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)|dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{n}. \quad (3.14)$$

Vejam os casos em que $f(x)$ é limitada. Seja agora, $0 < |f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$, temos de (3.14) que,

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{kM^2}{n}. \quad (3.15)$$

Como k está fixo, existe n , tal que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.16)$$

Portanto, $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ e de (3.13) e (3.16) obtemos

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Finalizamos a primeira parte da demonstração tomando $\psi = \psi_n$.

Suponha agora que f não seja limitada, mas que pertença a \mathcal{L}^1 no sentido das integrais impróprias. Suponha que f se torne ilimitada somente nas vizinhanças de a e b . Dessa forma, segue do caso anterior, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.17)$$

Como $f|_{[a+\delta, b-\delta]}$ é limitada e integrável, existe uma função contínua $\psi : [a+\delta, b-\delta] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a+\delta) = \psi(b-\delta) = 0$ tal que,

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.18)$$

Defina uma função $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi, & \text{para } a+\delta \leq x \leq b-\delta; \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a+\delta, \quad \text{e } b-\delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

E então temos:

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx \quad (3.19)$$

De (3.17) e (3.18) concluimos que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}| dx < \varepsilon \quad (3.20)$$

completando a demonstração. ■

3.6.1 Convergência pontual

O próximo resultado fornece condições suficientes para convergência pontual da série de Fourier de uma função f .

Teorema 3.6.5 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , dada em (3.1), converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.21)$$

onde $f(x \pm 0) = \lim_{a \rightarrow x^\pm} f(a)$.

A demonstração deste resultado depende de dois lemas que serão apresentados a seguir. Antes disso, vamos fazer algumas considerações formulando hipóteses com relação ao comportamento de f nas vizinhanças de x . Definamos uma estimativa (ou erro de aproximação) e_n , dada por,

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (3.22)$$

onde

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right). \quad (3.23)$$

tal que

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos \left(\frac{k\pi y}{L} \right) dy \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \text{sen} \left(\frac{k\pi y}{L} \right) dy. \quad (3.24)$$

De (3.23) e (3.24), temos

$$s_n(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \left\{ \int_{-L}^L f(y) \left[\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \right] dy \right\}$$

e pela identidade trigonométrica $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, chegamos em

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) f(y) dy \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy. \end{aligned}$$

A expressão (3.25) é conhecida como *núcleo de Dirichlet*:

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Proposição 3.6.6. *O núcleo de Dirichlet satisfaz as seguintes afirmações:*

- i. $D_n(x)$ é uma função par;
- ii. $D_n(x)$ é uma função contínua;
- iii. $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;
- iv. $D_n(0) = \frac{n+\frac{1}{2}}{L}$;
- v. $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$

Demonstração. (i) Basta observar que cosseno e a função constante $\frac{1}{2}$ são funções pares, portanto, pelo resultado (i) da proposição (3.2.4), temos que $D_n(x)$ é par.

(ii) Como $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ é uma função contínua, segue que, a soma finita de funções contínuas é uma função contínua, ou seja, $D_n(x)$ é contínua.

(iii) Basta verificar nos exemplos (3.1.3) e (3.1.4), onde foram trazidas considerações sobre a periodicidade da função cosseno.

(iv) Basta observar que,

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi \cdot 0}{L} \right) \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + n \right] = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}$$

(v) Como $\int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, é observado que,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2L} dx + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2L} (L - (-L)) + 0 = \frac{2L}{2L} = 1. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.6.7. Dado $n \in \mathbb{N}$, e $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$, tem-se que:

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}. \quad (3.26)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} 2L \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) D_n(x) &= 2 \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\ &= \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + 2 \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \\ &= \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \\ &= \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + \sum_{k=1}^n \left[\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{k\pi x}{L} \right) - \text{sen} \left(\frac{-\pi x}{2L} + \frac{k\pi x}{L} \right) \right]. \end{aligned}$$

A última passagem é justificada através da utilização da identidade trigonométrica de soma adição de arcos: $\text{sen}(a)\cos(b) = \frac{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(-a+b)}{2}$.

Desenvolvendo a última expressão do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} &\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{\pi x}{L} \right) - \text{sen} \left(\frac{-\pi x}{2L} + \frac{\pi x}{L} \right) + \\ &\quad + \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{2\pi x}{L} \right) - \text{sen} \left(\frac{-\pi x}{2L} + \frac{2\pi x}{L} \right) + \\ &\quad + \dots + \text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{n\pi x}{L} \right) - \text{sen} \left(\frac{-\pi x}{2L} + \frac{n\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Note que o termo $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{(k-1)\pi x}{L}\right)$ sempre se cancela com $-\text{sen}\left(-\frac{\pi x}{2L} + \frac{k\pi x}{L}\right)$, pois,

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L} + \frac{(k-1)\pi x}{L}\right) - \text{sen}\left(-\frac{\pi x}{2L} + \frac{k\pi x}{L}\right) &= \text{sen}\left(\frac{\pi x + 2k\pi x - 2\pi x}{2L}\right) - \text{sen}\left(\frac{-\pi x + 2k\pi x}{2L}\right) \\ &= \text{sen}\left(\frac{-\pi x + 2k\pi x}{2L}\right) - \text{sen}\left(\frac{-\pi x + 2k\pi x}{2L}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$2L\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)D_n(x) = \text{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right].$$

E com isso, conclui-se

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right]}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}.$$

■

Voltaremos agora a reescrever s_n apresentado na equação (3.23), fazendo a mudança $t = x - y$, com a pretensão de obter estimativas para $e_n(x)$.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt \end{aligned}$$

sendo D_n o núcleo de Dirichlet. Como D_n e f são periódicas de período $2L$, e D_n é par, podemos reescrever

$$s_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt = \int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt$$

para então obter,

$$s_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.22), e usando a propriedade (v) chegamos em

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \left[\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right] = \\ &= \int_0^L D_n(t) ([f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]) dt. \end{aligned}$$

Podemos definir,

$$g(x,t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)] \quad (3.28)$$

e chegamos em

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) g(x,t) dt. \quad (3.29)$$

Seguiremos com resultados que irão garantir a convergência pontual da série de Fourier.

Lema 3.6.8 (Riemann - Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 , então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0 \quad (3.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0. \quad (3.31)$$

Demonstração. Dividiremos nossa demonstração em dois casos, para quando f é limitada (i), e quando f é uma função de \mathcal{L}^1 qualquer (ii).

(i) Suponhamos inicialmente f limitada. Então existe $M > 0$, de modo que $|f(x)| < M$, para todo $x \in [a, b]$. O fato de f ser limitada, implica na existência de $\varepsilon > 0$ e uma partição $\pi : a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, de $[a, b]$, tal que

$$\sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.32)$$

onde $m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ e $M_j = \sup\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$.

Considere a partição π de $[a, b]$ determinada por $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$ com $j = 0, 1, \dots, n$. Então temos que

$$\int_a^b f(x) \cos(tx) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \cos(tx) dx.$$

Observe que,

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(tx) dx \right| = \left| \frac{\text{sen}(tx)}{t} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} = \left| \frac{\text{sen}(tx_j) - \text{sen}(tx_{j-1})}{t} \right| \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{2}{t} \quad (3.33)$$

visto que o número 1 é limitante da função $\text{sen}(x)$. E observe ainda que,

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j. \quad (3.34)$$

De (3.33) e (3.34), temos que,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \quad (3.35)$$

Note que o somatório da expressão (3.35) equivale à diferença entre os somatórios obtidos em (3.32). Portanto, basta tomar t_0 , tal que $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, e $t > t_0$, obtemos

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(tx) dx \right| < \varepsilon$$

completando a demonstração. Analogamente, concluímos (3.31).

(ii) Suponhamos agora, que f seja uma função de \mathcal{L}^1 qualquer. Para um dado $\varepsilon > 0$, tome uma função $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.36)$$

obtida através do Teorema (3.6.4). Como toda função contínua definida em um intervalo compacto (fechado e limitado, no caso de um subconjunto da reta), é limitada e integrável, pode-se aplicar a parte (i) da demonstração que garante a existência de t_0 , de tal forma que sempre que $t > t_0$, tem-se

$$\left| \int_a^b \psi(x) \cos(tx) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.37)$$

Como,

$$\int_a^b f(x) \cos(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \cos(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \cos(tx) dx \quad (3.38)$$

tem-se de (3.36),(3.37) e (3.38) que,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\cos(tx)dx \right| &= \left| \int_a^b \psi(x)\cos(tx)dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)]\cos(tx)dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \psi(x)\cos(tx)dx \right| + \left| \int_a^b [f(x) - \psi(x)]\cos(tx)dx \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema. ■

Lema 3.6.9 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixado x , em $[-L, L]$, suponha que $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (3.39)$$

Então $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $s_n(x) \rightarrow \frac{[f(x+0)+f(x-0)]}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. A ideia inicial para demonstrar este resultado está na decomposição da expressão da estimativa (3.29) em duas partes. Para isso, utilizando de (3.26) temos,

$$e_n(x) = \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt + \int_\delta^L \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}]}{\text{sen}(\frac{\pi t}{2L})} g(x,t) dt$$

com $\delta \in (0, L)$. Tentaremos fazer a estimativa da primeira integral. Para isso, observe que de (3.26), temos

$$|tD_n(t)| \leq \frac{t}{2L\text{sen}(\frac{\pi t}{2L})} \quad (3.40)$$

Para o segundo membro de (3.40), a função é contínua, pois é dada pelo quociente de duas funções contínuas e crescente em $(0, L]$, visto que sua derivada é positiva para todo $t \in (0, L]$. Sendo assim, para $t \in (0, L]$, obtemos a estimativa

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

Então, como $\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty$ por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta < \min\{L, \eta\}$ suficientemente pequeno, tal que

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \varepsilon \quad (3.42)$$

e então, de (3.41) e (3.42), teremos

$$\left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x,t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.43)$$

Para a segunda integral

$$\int_\delta^L \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}]}{\text{sen}(\frac{\pi t}{2L})} g(x,t) dt,$$

usaremos os argumentos do lema (3.6.8) provado anteriormente. Para isso, basta verificar se a função

$$w(t) = \frac{g(x,t)}{2L \text{sen}(\frac{\pi t}{2L})}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável. Mas isso é imediato, pois o denominador $2L \text{sen}(\frac{\pi t}{2L})$ não se anula em $[\delta, L]$, e g é integrável.

Logo, para n suficientemente grande, temos pelo lema (3.6.8), que

$$\left| \int_\delta^L \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}]}{\text{sen}(\frac{\pi t}{2L})} g(x,t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.44)$$

Portanto, de (3.43) e (3.44), tem-se que

$$|e_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0 \quad (3.45)$$

ficando provado o teste de Dini. ■

A demonstração do Teorema (3.6.5) segue diretamente do teste de Dini, teorema este que nos dá condições para garantir convergência pontual das séries de Fourier.

4 ONDAS

Em nosso meio, estamos rodeados por ondas. Graças a elas é que existem muitas maravilhas do mundo moderno, como a televisão, o rádio, telecomunicações via satélite, o radar, o forno de micro-ondas, imagens eletrônicas e as mais recentes aplicações do sistema GPS, Raio X, etc. (BORGES, 2009).

As ondas são perturbações periódicas ou oscilantes, que se deslocam ou se propagam com velocidade definida, transportando energia sem transporte de matéria, e surgem quando algum sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio (YOUNG & FREEDMAN, 2008). Apresentaremos a seguir, algumas considerações gerais de ondas.

4.1 Caracterizações Gerais de Ondas

Nessa seção, apresentaremos as principais características de uma onda, tal como, os tipos de ondas existentes, classificações direcionais, características físicas e alguns dos principais fenômenos ondulatórios existentes.

4.1.1 Tipos de Ondas

As ondas podem ser **mecânicas**, **eletromagnéticas** ou de **matéria**.

Ondas mecânicas: São as mais conhecidas e presentes por toda parte, como exemplo das ondas do mar, ondas sonoras, ondas sísmicas, entre outras. Têm características de serem governadas pelas leis de Newton e existem apenas em meios naturais (gasosos, líquidos e sólidos por exemplo).

Ondas eletromagnéticas: Não necessitam de um meio material para existir, ou seja, se propagam também no vácuo. São exemplos, a luz visível e ultravioleta, ondas de rádio, televisão, raio-x, entre outras.

Ondas de matéria: São menos conhecidas, estão associadas a elétrons e prótons e outras partículas tais como átomos.

4.1.2 Classificação das Ondas

Uma onda pode ser classificada pela direção de propagação e também pela direção de vibração.

Direção de propagação de uma onda: São distinguidas em *unidimensionais*, quando se propagam ao longo de uma única direção do espaço, como por exemplo, a onda de uma corda elástica. *Bidimensionais*, quando se propagam em duas direções, como exemplo das ondas do mar. E *tridimensionais*, quando se propagam em três dimensões, como é o caso da onda sonora.

Direção de vibração de uma onda: São chamadas de *ondas transversais*, quando a vibração e a propagação são perpendiculares, como por exemplo, as ondas sísmicas e eletromagnéticas; e *ondas longitudinais*, quando a vibração é paralela à propagação da onda, como exemplo das ondas sonoras. Quando a onda possui vibrações transversais e longitudinais, dizemos que se trata de uma onda *mista*, como é o caso, por exemplo, da onda do mar, que se movimenta, em geral, em uma trajetória elíptica.

4.1.3 Propriedades das Ondas

É necessário conhecer algumas das propriedades e relações estabelecidas em ondas, tais quais: comprimento de onda, amplitude, período, frequência e velocidade de propagação da onda.

Comprimento de onda λ : Distância entre duas cristas (ponto mais alto da onda) ou dois vales (ponto mais baixo da onda), consecutivos.

Amplitude γ : Corresponde à distância entre o ponto de equilíbrio e o ponto mais alto (crista), ou o ponto mais baixo (vale) da onda.

Período T : Equivale ao período de um ciclo completo de uma oscilação de uma onda.

Frequência f : É o período dividido por uma unidade de tempo, sendo expressa em Hertz - Hz - equivalente a oscilações por segundo, estabelecida como unidade de medida padronizada

pelo Sistema Internacional de Unidades¹.

$$f = \frac{1}{T}. \quad (4.1)$$

Velocidade da onda v : A velocidade média v de uma onda, é a variação da posição Δs durante um dado intervalo de tempo Δt . Temos,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Sendo $\Delta s = \lambda$ (comprimento da onda) e $\Delta t = T$ (período), temos que

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Como $f = \frac{1}{T}$, chegamos à *Equação fundamental da ondulatória*, dada pela equação (4.2):

$$v = \lambda \cdot f \quad (4.2)$$

que estabelece que a velocidade de propagação de uma dada onda é o produto do comprimento de onda pela frequência.

4.1.4 Fenômenos Ondulatórios

As ondas estão sujeitas a fenômenos de **refração**, **reflexão** e **difração** qualquer que seja seu tipo e classificação.

Reflexão: Ocorre quando a onda atinge uma superfície e volta a se propagar no meio de origem. Neste caso, não há mudança do meio, logo se mantém na mesma velocidade. A frequência não é alterada pois depende da fonte que é a mesma. O comprimento de onda também se mantém o mesmo, já que depende proporcionalmente da velocidade. Portanto, a reflexão implica na mudança de nenhuma das características da onda. Um exemplo é o que chamamos de *eco*, que traz a percepção de repetição dependendo do tempo com que é refletida.

Refração: Ocorre refração quando a onda muda seu meio de propagação. Neste caso há mudança de velocidade, seu comprimento de onda muda, mas a frequência mantém a mesma

¹ Responsável por fornecer referências que permitem definir todas as unidades de medidas.

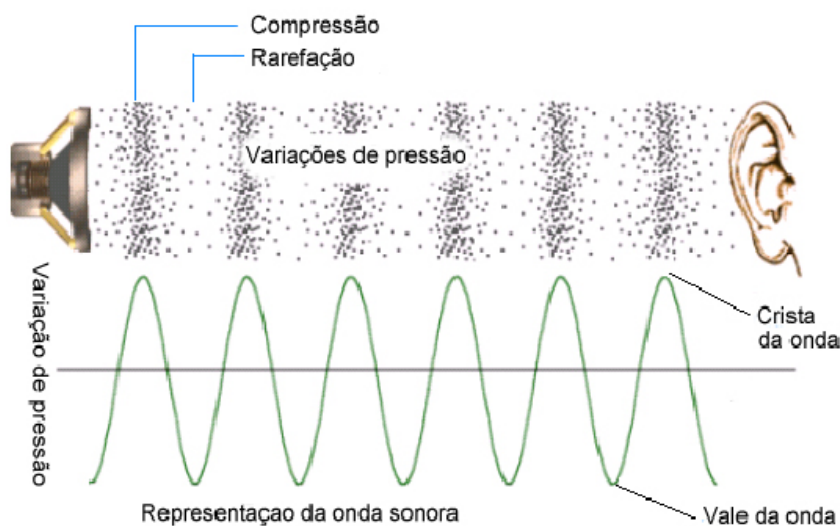
por depender da fonte que se mantém a mesma. Um exemplo é uma luz emitida no ar que passa a ser propagada na água.

Difração: Caracteriza-se pela capacidade da onda em contornar fendas ou obstáculos. Na difração não há mudança das características da onda, apenas em seu formato, seguindo uma única condição, de que o comprimento de onda seja de mesma grandeza do tamanho da fenda ou obstáculo. Isso explica duas pessoas separadas por um muro, quando uma delas dá um grito a outra consegue ouvir mas não consegue vê-la, pois, o comprimento de onda associado à fala é de 2 a 6 metros, o suficiente para contornar o muro, enquanto o comprimento de onda da luz é em torno de 10^{-7} metro.

4.2 Ondas Sonoras

As ondas sonoras são um exemplo de ondas familiares e presentes em nosso cotidiano. São caracterizadas como ondas mecânicas e longitudinais, e sua propagação ocorre numa sucessão de compressões e rarefações como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação da emissão de uma onda sonora.



Fonte: Som e Vibração, 2017.

Antes de prosseguirmos, precisamos fazer um comentário a respeito da diferenciação de ondas sonoras e o som, visto que as seções seguintes fazem o uso frequente dessas terminologias de modo a parecer que são coisas iguais. As ondas sonoras são perturbações periódicas de partículas do meio elástico e caracterizadas como mecânicas e longitudinais como já dito. Já o som, é a sensação ocasionada no receptor a partir do contato com a onda sonora. Por este

motivo que falar de onda sonora se referindo ao som é natural, pois, sem a existência da onda sonora não há a sensação do som (HENRIQUE, 2002).

A existência do som depende da presença de três fatores importantes que pretendemos, de forma breve, apresentar. Primeiro, a *fonte sonora*² para a produção de vibrações. Como exemplo apresentaremos as cordas do piano no capítulo (6).

O segundo fator é o *meio elástico*³ por onde a onda se propaga. Em exemplo do ar, de acordo com BENSON, 2008, "o ar consiste em um gás, o que significa que os átomos e as moléculas de ar não são tão próximos uns dos outros como eles estão na forma de um sólido ou um líquido, e estão sempre em movimento, de modo que a velocidade média das moléculas de ar à temperatura ambiente sob condições normais pode chegar até $500m/s$. Nós não sentimos as colisões com a nossa pele, só porque cada molécula de ar é extremamente leve, mas o efeito combinado sobre a nossa pele é a pressão do ar que nos impede de explodir".

Por último nesta composição, está o receptor⁴ causando a sensação de som, e neste estudo, será apresentado na seção (4.2.5) considerando o sistema auditivo humano.

O estudo do som é assunto de interesse de diversas áreas. A acústica, área específica da Física que estuda o som, o entende fazendo relação com a fonte sonora, e com a onda sonora. Para a Física, o som é uma forma de energia vibratória que se propaga em um meio. A Psicologia ou Psicofísica, procura entender o som nas reações causadas no indivíduo através da audição. A Fisiologia e Anatomia, que se preocupam com o percurso do som pelas vias auditivas no transporte de estímulos ao cérebro, entre outras (HENRIQUE, 2002). Neste trabalho, não se almeja o estudo detalhado do som, mas como forma de contextualização, algumas considerações serão necessárias.

4.2.1 Propagação do Som

A maioria dos sons que ouvimos são transmitidos pelo ar, mas a propagação de um som pode ocorrer em qualquer meio elástico, como ambientes gasosos, líquidos ou sólidos. Observando como o processo ocorre no ar, é necessário entender que sempre que existe dissipação de energia da fonte sonora para o meio, as moléculas de ar sofrem minúsculos movimentos

² Corpo, instrumento, artefato ou objeto capaz de oscilar, provocando perturbação das moléculas existentes no meio.

³ Ambiente que se deforma sob a ação de uma força externa.

⁴ Aparelho capaz de fazer a captação da onda.

vibratórios, que são transmitidos às moléculas vizinhas, funcionando como um transporte das vibrações até o receptor.

Em relação ao meio sólido e líquido, o ar é um mau transmissor do som, isso ocorre, pois, estes são mais densos que o ar, facilitando o transporte de energia sonora. Isto explica o fato de que quanto mais denso o ambiente de propagação, maior a velocidade com que isto acontece, como é o caso dos sólidos em relação aos meios líquidos e gasosos. A Tabela 4.1 apresenta a velocidade de propagação do som em diferentes meios com a variação de temperatura em alguns exemplos.

Tabela 4.1 – Velocidade de propagação do som em diferentes meios.

Meio	Velocidade (m/s)	Meio	Velocidade (m/s)
GASES		SÓLIDOS	
Ar (0°C)	331	Aço	5050
Ar (20°C)	343	Alumínio	5240
Azoto (0° C)	334	Chumbo	1250
Hélio	965	Cobre	3580
Hidrogênio (0° C)	1280	Ferro	5170
		Granito	3950
LÍQUIDOS		Latão	3420
Água (17° C)	1430	Madeira	4100
Etanol (20° C)	1170	Ouro	2030
Benzeno (20° C)	1320	Prata	2640
Mercúrio (20° C)	1450	Vidro	5370

Fonte: Adaptado de Henrique, 2002.

4.2.2 Propriedades fisiológicas do Som

As propriedades físicas do som estão relacionadas com o que se pode perceber através da emissão de uma determinada onda sonora, que possui quatro atributos principais: a altura, o timbre, a duração e a intensidade.

Altura: A altura ou tonalidade do som, é o elemento que distingue a frequência de vibração da onda sonora. Através desta, é possível justificar se um dado som é grave (baixa frequência), médio (média frequência) ou agudo (alta frequência). Quanto maior for a frequência da nota soada, mais alto (agudo) será o som.

Timbre: O timbre corresponde à forma do espectro de frequência do som. Em outras palavras, é comum definirmos timbre como a “cor do som”. Em língua alemã, a tradução da palavra

timbre é *Klangfarbe*, que significa a “cor do som”.(Rossetti, D. 2017). O timbre permite que o ouvinte identifique e diferencie distintos instrumentos musicais emitindo uma nota de mesma frequência.

Duração: A duração é o período ou intervalo de tempo em que se manteve soando um determinado som.

Intensidade: A intensidade de um som está associada à amplitude da onda sonora, ou o tamanho de vibração, caracterizando a variação de pressão do meio em que se verifica sua propagação. Através desta variação, torna-se possível caracterizar e distinguir o som como sendo forte, médio ou baixo.

4.2.3 Efeito Doppler

O efeito Doppler foi descrito pela primeira vez no ano de 1852 pelo cientista austríaco Johann Christian Doppler. Trata-se de uma variação da frequência do som obtida através do movimento relativo entre a fonte sonora e o receptor. Um exemplo bem comum que pode ser explicado através desta teoria pode ser observado quando presenciamos uma ambulância ou um carro de polícia passando com a sirene ligada. É provável que já tenham obtido uma sensação de que o som sofreu alguma alteração com relação a sua altura (Young & Freedman, 2012).

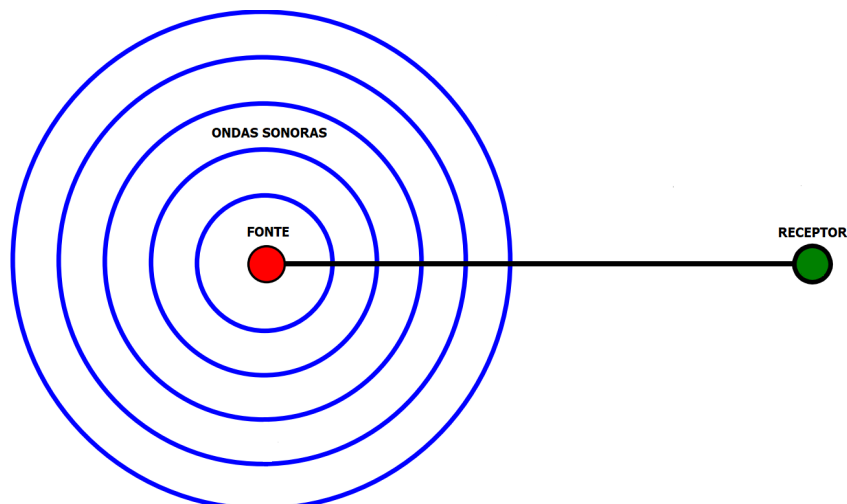
O tipo de onda captada pelo receptor dependerá do movimento entre o mesmo e a fonte sonora em relação ao meio de propagação da onda. Para o caso em que ambos estão em repouso (Figura 4.2), o receptor perceberá uma onda de mesma frequência com que foi emitida pela fonte, satisfazendo a equação fundamental da ondulatória:

$$v = \lambda f \Leftrightarrow f = \frac{v}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{f}. \quad (4.3)$$

Quando há movimento entre fonte e receptor, desconsiderando movimentação do meio, poderão ocorrer três situações: fonte em movimento e receptor em repouso, receptor em movimento e fonte em repouso, e fonte e receptor em movimento.

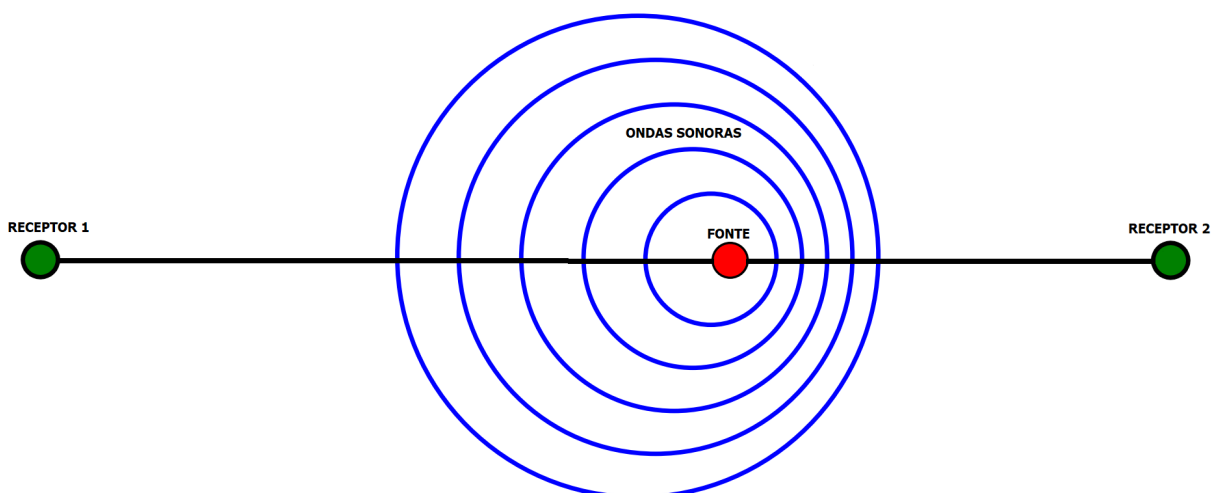
De maneira bem simplificada, quando há movimento entre fonte e receptor, a aproximação de ambos implica no aumento da frequência, fazendo a sensação do som, obtida através da emissão da onda ficar mais alta ou agudo (observar fonte se aproximando do receptor 2 na

Figura 4.2 – Emissão de uma onda sonora com fonte e receptor em repouso.



Fonte: Adaptado de Young & Freedman, 2012.

Figura 4.3 – Emissão de onda sonora com fonte ou receptor em movimento ou ambos em movimento.



Fonte: Adaptado de Young & Freedman, 2012.

Figura 4.3). Da mesma forma quando se afastam, a frequência diminui e portanto o som fica mais baixo, mais grave (fonte se afastando do receptor 1 na Figura 4.3) (HALLIDAY; *et al.*, 2012). Explicaremos melhor estes conceitos a seguir:

Vamos considerar inicialmente o caso em que fonte e receptor estejam parados. No intervalo de tempo t , as frentes de ondas⁵ percorrem uma distância vt . O número de comprimentos de onda nessa distância é o número de comprimentos de onda que interceptado pelo receptor R no intervalo t , dado por $\frac{vt}{\lambda}$. Nesse caso, a frequência com que R recebe as frentes de

⁵ Conjunto de pontos que são atingidos pela onda que separa a região perturbada pela região que ainda não foi perturbada pela mesma.

onda é:

$$f = \frac{vt}{\lambda} = \frac{v}{\lambda}. \quad (4.4)$$

Fonte em repouso e receptor em movimento: Considere que R está se afastando das ondas produzidas pela fonte F . No intervalo de tempo t , as frentes de ondas percorrem uma distância vt para direita, como antes, mas agora, R percorre uma distância $v_R t$ para direita, sendo v_R a velocidade do receptor. Assim, nesse intervalo t , as distâncias percorridas pelas frentes de onda em relação a R é $vt - v_R t$. Dessa forma, a nova frequência f' em que R recebe as frentes de onda, como a Equação (4.4), é dada por:

$$f' = \frac{vt - v_R t}{\lambda} = \frac{v - v_R}{\lambda}.$$

De (4.4) temos que,

$$f' = \frac{v - v_R}{\frac{v}{f}} = f \frac{v - v_R}{v}. \quad (4.5)$$

Note que $f' < f$ a menos que $v_R = 0$, ou seja, que o receptor esteja em repouso.

Dentro desta mesma ideia, observe que quando R se aproxima de F , as frentes de onda se movem a uma distância $vt + v_R t$. E então, f' é dado por

$$f' = f \frac{v + v_R}{v}. \quad (4.6)$$

$f' < f$ a menos que $v_R = 0$, ou seja, que o receptor esteja em repouso.

Com isso, podemos considerar a Equação (4.7) como geral para percepção de onda quando a fonte está em repouso e receptor em movimento:

$$f' = f \frac{v \pm v_R}{v}. \quad (4.7)$$

Receptor em repouso e fonte em movimento: Considere o receptor R em repouso e a fonte F em movimento em direção a R com velocidade v_F . Chamaremos de T o intervalo de tempo entre a emissão de duas frentes de ondas sucessivas O_1 e O_2 . Durante o intervalo T , a frente de onda O_1 percorre uma distância de vT e a fonte percorre uma distância $v_F T$. Ao fim do intervalo T , ocorre a emissão da frente de onda O_2 .

Estando F se aproximando de R , temos que o comprimento de onda entre as frentes O_1 e O_2 é dado por $\lambda' = vT - v_F T$. Dessa forma, a frequência atualizada f' percebida por R é

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_F T}.$$

Como $T = \frac{1}{f}$ dado pela Equação (4.1), temos

$$f' = \frac{v}{\frac{v}{f} - \frac{v_F}{f}} = f \frac{v}{v - v_F}. \quad (4.8)$$

Observe que $f' > f$ a menos que $v_F = 0$.

Analogamente, para o caso em que F se distancia de R , temos

$$f' = f \frac{v}{v + v_F}. \quad (4.9)$$

com $f' < f$ a menos que $v_F = 0$.

Dessa forma, obtemos a Equação (4.10) como geral para percepção de onda quando a fonte está em movimento e o receptor em repouso:

$$f' = f \frac{v}{v \pm v_F}. \quad (4.10)$$

Receptor e fonte em movimento: Basta fazer a união das duas equações, obtendo a *equação geral do Efeito Doppler*:

$$f' = f \frac{v \mp v_R}{v \pm v_F}. \quad (4.11)$$

Observe que $f' \neq f$, a menos que $v_R = v_F = 0$ ou $v_R = -v_F$. Isso nos diz que considerando o repouso do meio, então a percepção das ondas sonoras ocorrerá com frequência igual a forma com que foi emitida desde que receptor e emissor não estejam em movimento, ou que o movimento realizado por ambos seja no mesmo sentido e velocidade.

4.2.4 Som Puro e Complexo

Outra característica apresentado a seguir são de um som puro ou complexo.

Som puro: A denominação de som puro, ou sinusoidal, é a caracterização mais elementar de sons. A forma de onda de um som puro é a de um seno ou cosseno, sendo o fato de ser

constituído por uma única frequência sua principal característica. A teoria de Fourier desenvolvida anteriormente pode ser bastante eficaz, intuitivamente, na compreensão desta seção, pois, sem muito rigor, qualquer função ou onda periódica pode se compor em somatórios de senos e cossenos, isto é, pode-se pensar que qualquer som é constituído por sons sinusoidais, ou sons puros. A sinusóide tem duração infinita, o que foge da realidade, no entanto, um som real pode ser constituído de sons puros truncados naturalmente pelo tempo (HENRIQUE,2002).

Matematicamente, o som puro é uma função temporal descrita por

$$x(t) = A \text{sen}(2\pi ft + \phi), \quad (4.12)$$

onde A é a amplitude, t o tempo, ϕ a fase inicial em radianos e f a frequência. O som puro traz uma sensação melhor ao ouvinte se comparado com sons complexos que definiremos a seguir.

Som complexo: São constituídos por mais de uma frequência, podendo ser considerados somatórios de sons puros. Cada uma delas gera o que chamamos de componente ou parcial do som. O primeiro destes parciais é chamado *som fundamental*. Quando um dos demais parciais possuir a frequência múltipla da fundamental (do parcial fundamental), denomina-se *harmônico*. Observe a Figura 4.4 na apresentação de um som constituído da soma de três harmônicos.

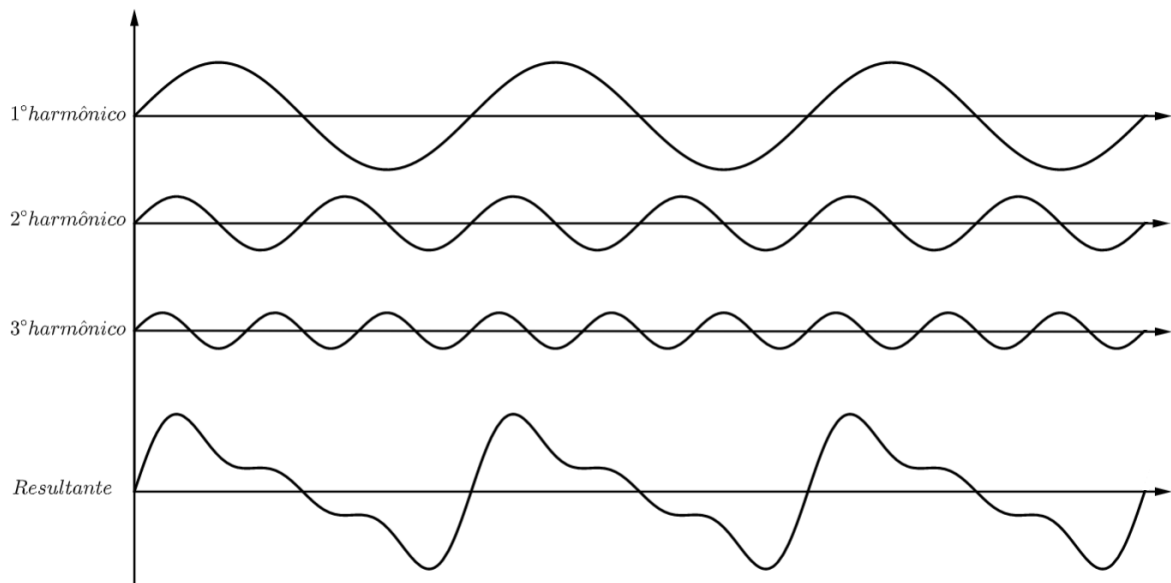
Quando um som é formado apenas de harmônicos, é chamado periódico, mas se pelo menos um de seus parciais for não harmônico o som é não periódico. Um som não periódico refere-se a sua anarmonicidade, e promove uma sensação sonora de altura indefinida, sendo esse tipo de som, na maioria das vezes, classificado como um ruído mas aprofundar nestes conceitos foge do escopo do trabalho.

4.2.5 Sistema Auditivo Receptor

O aparelho auditivo humano é um órgão que tem a função de fazer a transformação da energia obtida das ondas sonoras, em sinais elétricos, que são levados até o cérebro. É um órgão com características extraordinariamente complexas, permitindo a captação de sons dentro de um intervalo de frequência, podendo ainda diferenciá-los de acordo com sua característica mecânica.

O sistema auditivo humano consegue fazer a captação de ondas sonoras dentro de um intervalo de frequência de 16 Hz a 20000 Hz chamadas ondas sonoras audíveis. As ondas com frequências inferiores a 16 Hz e superiores a 20000 Hz, são chamados infrassons e ultrassons,

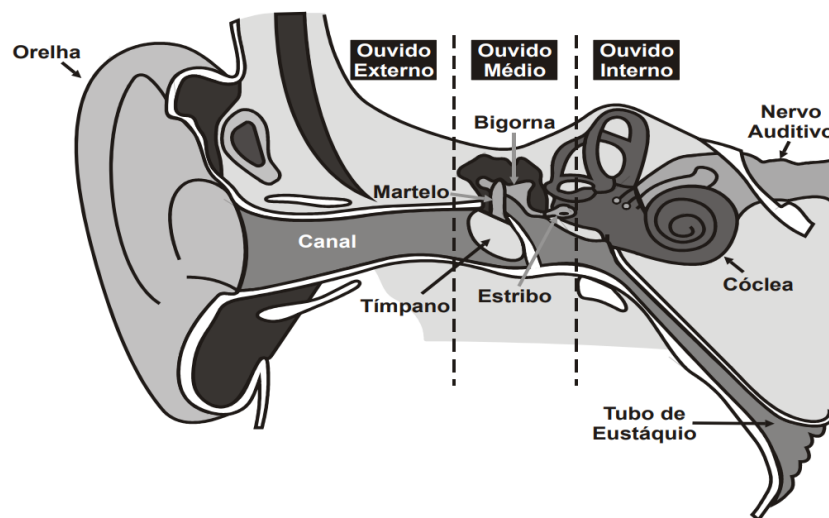
Figura 4.4 – Som resultante formado pela soma de três harmônicos.



Fonte: Adaptado de Henrique, 2002.

respectivamente. Essas até chegam no aparelho auditivo humano, mas de maneira imperceptível (GAYTON *et al.*, 2002). O aparelho auditivo humano é dividido em ouvido externo, médio e interno, como é ilustrado na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Divisão do aparelho auditivo.



Fonte: Spada, 2004.

Ouvido Externo: O ouvido externo é formado por dois membros, que são eles: o pavilhão auditivo ou orelha e meato auditivo externo ou meato da orelha, canal que se encerra no tímpano. O pavilhão é um composto de cartilagem e pele e apresenta superfície constituída por saliências e dobras. É também a parte mais visível do aparelho.

O meato ou canal auditivo externo, é formado por cartilagem e por tecidos ósseos com variação de 25 a 30 mm de comprimento e em média 8 mm de diâmetro. Juntos, têm funções de captação, transmissão e amplificação do som, levando-o pelo canal auditivo externo até a membrana do tímpano, membrana que separa o ouvido externo do ouvido médio.

Ouvido Médio: O ouvido médio é composto pelo tímpano ou membrana timpânica e a cadeia ossicular onde encontram três pequenos ossos denominados: martelo, bigorna e estribo. Este último faz conexão com o osso do labirinto pela janela oval situada no ouvido interno. Importante destacar, que no ouvido médio se conecta a faringe pelo tubo de Eustáquio ou tuba auditiva.

O tímpano ou membrana timpânica é uma fina membrana que possui área de aproximadamente 85mm^2 e espessura média de $0,1\text{mm}$ construída por três camadas: uma camada exterior fina, cutânea, ao lado do meato, uma camada fibrosa intermediária e uma camada de mucosa ao lado da cavidade timpânica. A função do tímpano é a de transmitir som do meio gasoso ao meio sólido dado pelos ossículos no ouvido médio.

A cadeia ossicular presente no ouvido médio é a menor cadeia de ossos do corpo humano. O maior destes ossículos é o martelo, medindo aproximadamente de 8 a 9 mm. Está fortemente ligado à membrana timpânica. O segundo ossículo da cadeia é a bigorna, medindo cerca de 7 mm. O estribo é o último e menor ossículo da cadeia, medindo aproximadamente 3,3 mm.

Sua principal função é transmitir as vibrações sonoras que recebe da orelha externa aos líquidos da orelha interna e, juntamente com os músculos da orelha média, tem a função de evitar que a orelha interna seja invadida por vibrações excessivamente fortes.

Além da proteção do ouvido interno, a cadeia ossicular tem a função de transmitir energia sonora até a orelha interna. Existe ali uma transformação da energia sonora em mecânica com a movimentação óssea. Como a orelha interna é preenchida por líquidos, se não existisse a orelha média haveria uma perda.

Ouvido Interno: O ouvido interno está conectado ao ouvido médio pela janela oval. É um órgão extremamente frágil, e por isso está localizado numa cavidade óssea denominada labirinto, que se divide em três partes: o vestíbulo, os canais semicirculares e a cóclea. O vestíbulo é a parte central do labirinto ósseo, por onde partem três canais semicirculares, estruturas associadas ao equilíbrio. A cóclea constitui em um tubo cônico de diâmetro decrescente enrolado

assemelhando um caracol. Seu objetivo é separar o som em vários componentes de frequência antes de transmitir para as vias nervosas.

A cóclea se divide em dois canais, a rampa timpânica e a rampa vestibular, que passam um líquido chamado perilinfa. Esses canais se comunicam entre si pela helicotrema⁶ localizada no ápex (vértice) da cóclea. Entre as rampas timpânica e vestibular, está situado o canal coclear ou rampa média, cheio de um líquido chamado endorlinfa⁷, e a separação destes canais se dá através de duas membranas, a membrana Reissner ou membrana vestibular, e a membrana basilar.

A membrana basilar, é uma camada fibrosa e elástica, e ao longo de sua extensão, existem inúmeras células ciliadas denominadas órgão de corti, próximas a membrana tectorial que se ligam ao cérebro através do nervo acústico (GAYTON, et al., 2002).

Funcionamento do sistema auditivo na presença de um som Ao ser emitida pela fonte, a onda sonora se propaga e ao encontrar com o receptor, é focada diretamente para o meato auditivo, onde faz-se vibrar o tímpano. Isto faz com que o martelo, bigorna e estribo se movam como um sistema de alavancas, e assim o estribo alternadamente empurra e puxa a membrana secundária do tímpano em sucessão rápida. Assim, as ondas de fluido fluem para trás e para a frente em volta do comprimento da cóclea, em sentidos opostos na rampa vestibular e a escala timpânica, fazendo com que a membrana basilar, que é elástica, se mova para cima e para baixo, ficando as células ciliadas contidas no órgão de corti, atritando a membrana tectorial, desencadeando assim impulsos elétricos ao cérebro através do nervo acústico (GAYTON, et al., 2002).

Podemos ainda, ter uma visão matemática nos elementos da audição humana. De acordo com Benson, o sistema auditivo funciona como um analisador harmônico, que influi em sua capacidade de ouvir sons dos simples aos mais complexos, pela possibilidade de decomposição deles em sons puros. E mais ainda, as ondas sonoras em descrição de sons puros descrita pela equação (4.12) é a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem que modela movimentos harmônicos e que descreve o movimento da membrana basilar que é elástica. Lembrando que, nesta membrana está localizado o órgão de corti, e sua movimentação que faz

⁶ Pequena abertura que conecta a rampa vestibular na rampa timpânica.

⁷ Líquido de aquosidade e transparência parecidas com a perilinfa, porém de composição iônica diferente.

com que os estímulos nervosos cheguem ao cérebro provocando a sensação do som (Benson, 2008).

5 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE ONDA NA CORDA

O estudo da equação de onda foi um dos principais problemas matemáticos de meados do século XVIII. A equação foi deduzida e estudada pela primeira vez pelo físico e matemático Jean le Rond d'Alembert em 1746, mas atraiu também a atenção de outros nomes como Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) e Lagrange (1759) (BOYCE; *et al.*, 2010). Em estudos, Euler e D'Alembert trouxeram contribuições no que diz respeito a soluções pertinentes à equação da onda. Para eles, elas deveriam ser sobreposições da propagação de duas funções em sentidos contrários mas com a mesma velocidade (FIGUEIREDO, 1977).

Atualmente, a equação da onda é uma importante ferramenta matemática de uso frequente e eficaz na modelagem de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo, como por exemplo, as ondas eletromagnéticas, sonoras, do mar, entre outras. Para uma possível visualização de sua utilidade, imagine uma corda elástica de comprimento L presa às extremidades e levemente tensionada. Pode-se imaginar como sendo uma corda de violão, violino, de piano, de arpa, entre diversas outras.

Denotando por $u(x, t)$ o deslocamento da corda de comprimento L em seu ponto x no tempo t a partir do movimento da corda, e, ignorando a resistência do ar, temos que a função $u(x, t)$ satisfaz a equação (5.1)

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (5.1)$$

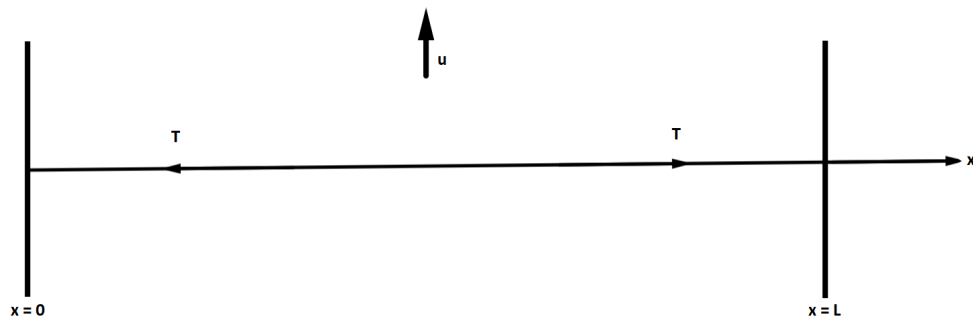
com $0 < x < L, t > 0$ e a representando a velocidade de onda na corda. O problema matemático, consiste em determinar a solução da equação (5.1) considerando algumas condições iniciais e de contorno que serão definidas mais adiante, mas antes de trazer considerações a respeito destas, vamos observar como determiná-la.

5.1 Dedução da Equação da Onda Unidimensional

Nesta seção será deduzida a equação da onda para o caso unidimensional para uma corda tensionada e presa às extremidades (Figura 5.1). Para isto, suponha que a corda esteja no eixo x e presa por suas extremidades em dois suportes rígidos nos pontos $x = 0$ e $x = L$ da corda. De modo a ignorar qualquer tipo de amortecimento, até mesmo a resistência do ar, ao ser colocada em movimento.

Vamos analisar as forças que agem em um pequeno elemento da corda de comprimento Δx , entre os pontos x e $x + \Delta x$ (Figura 5.2). Suponha que o movimento da corda seja pequeno

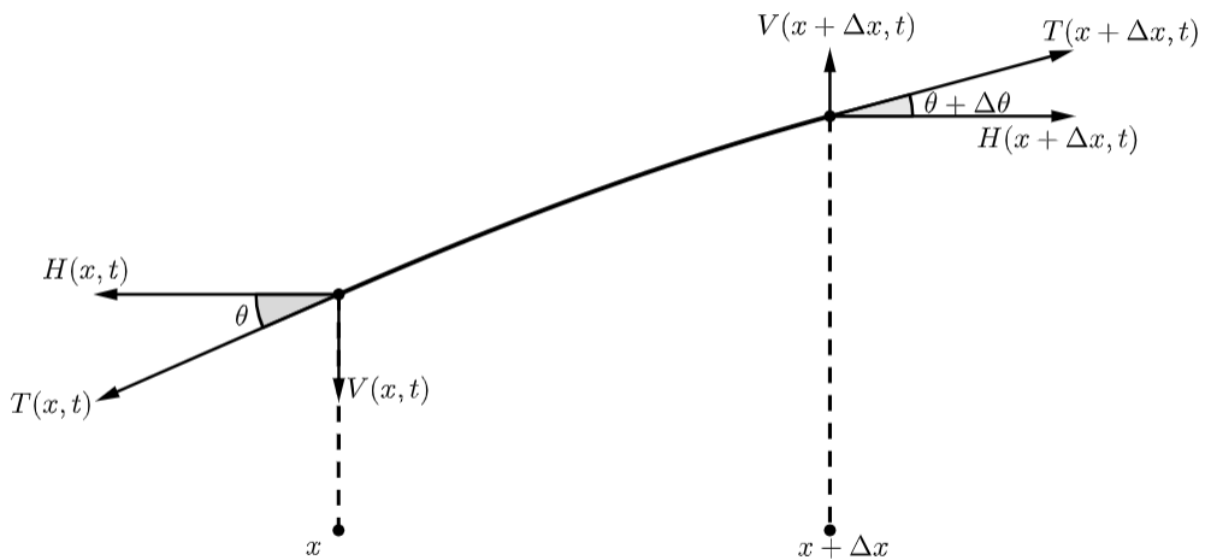
Figura 5.1 – Corda elástica sob tensão.



Fonte: Adaptado de Boyce e DiPrima (2006), pg.347.

de modo que cada ponto da corda só se mova na direção vertical. Denote $u(x, t)$ o deslocamento vertical do ponto x no instante t , $T(x, t)$ a tensão da corda, que atua sempre na direção tangente a corda no ponto x , θ o ângulo formado pela tensão e ρ a massa da corda por unidade de comprimento.

Figura 5.2 – Elemento da corda deslocado.



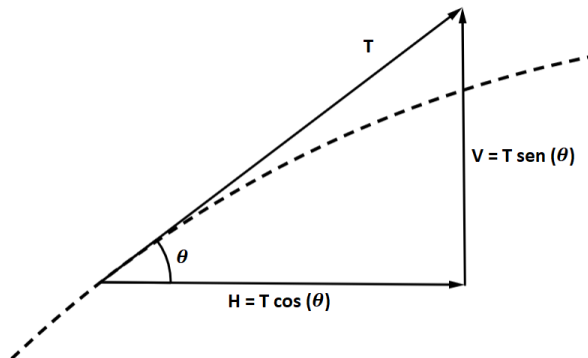
Fonte: Adaptado de Boyce e DiPrima (2010), pg.347.

Denotando a componente de tensão, com relação a direção vertical V e horizontal H , temos que $V = T(x, t)\sin(\theta)$ e $H = T(x, t)\cos(\theta)$ (Figura 5.3).

Aplicando a segunda lei de Newton¹ ao elemento de comprimento Δx da corda, obtemos que a força externa total dada pela tensão em suas extremidades equivale ao produto da massa do elemento pela aceleração de seu centro de massa. Como não há aceleração horizontal no sistema, temos que a equação (5.2) diz que H é independente de x .

¹ Lei que diz que a força resultante que age sobre um corpo deve ser igual ao produto da massa do corpo por sua aceleração.

Figura 5.3 – Resolução da tensão T em componentes.



Fonte: Adaptado de Boyce e DiPrima (2006), pg.347.

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos(\theta) = 0. \quad (5.2)$$

Por outro lado, observando pelo sentido vertical, desprezando a gravidade e o peso do elemento de corda, temos:

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t), \quad (5.3)$$

onde, $x < \bar{x} < x + \Delta x$.

Sendo $V = T(x, t) \sin(\theta)$, então a equação (5.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt},$$

e ao tomar o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \quad (5.4)$$

Para expressar a equação (5.4) somente em função de u , note que

$$V(x, t) = T(x, t) \sin(\theta) = \frac{T(x, t) \cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = H(t) \tan(\theta) = H(t) u_x(x, t).$$

Com isso, temos

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt}. \quad (5.5)$$

Como H é independente de x ,

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}. \quad (5.6)$$

Para movimentos pequenos da corda, podemos substituir $H = T \cos(\theta)$ por T , pois movimentos pequenos geram ângulos pequenos, com cossenos próximos de 1. Com isso, chegamos em,

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (5.7)$$

onde $a^2 = \frac{T}{\rho}$, sendo que a corresponde à velocidade da onda na corda, e explicaremos melhor na seção (5.2).

A equação (5.7) é chamada **equação da onda** em uma dimensão. Apresentaremos nas seções (5.3) e (5.4) aplicações desta equação, e também de sua forma não homogênea, na modelagem da vibração de uma corda elástica de comprimento finito e presa às extremidades.

5.2 Velocidade de uma Onda na Corda

Considere um pequeno elemento de comprimento Δl de uma corda de densidade linear² ρ na região do pulso, formando um arco relativo a 2θ de uma circunferência de raio R definida sobre o pulso de onda. Duas forças de tensão T puxam tangencialmente a região pelas extremidades (Figura 5.4).

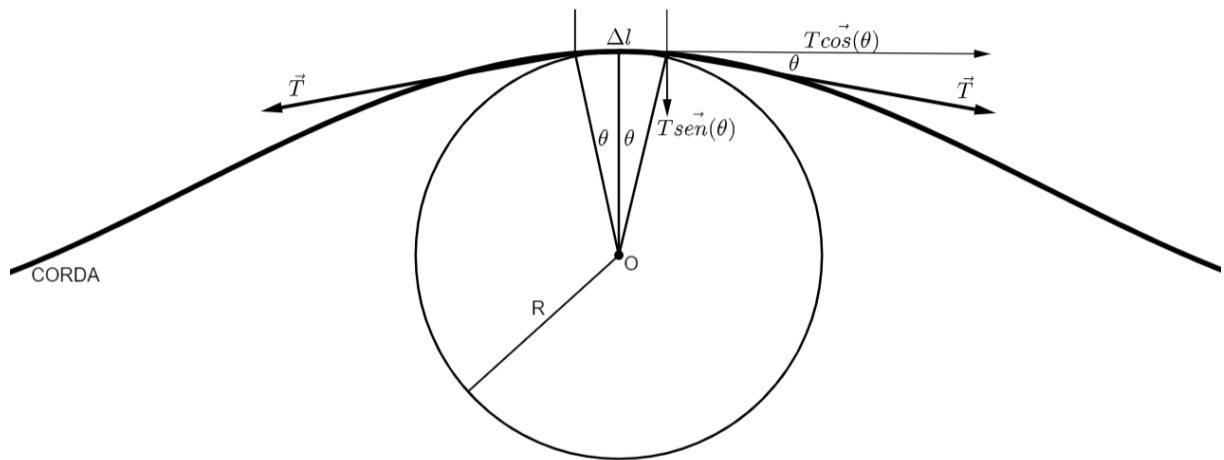
Note que as componentes de decomposição na direção vertical e horizontal são $T \sin(\theta)$ e $T \cos(\theta)$ respectivamente. Como as forças horizontais se anulam, visto que são de módulos iguais e sentidos diferentes, temos que a força resultante sobre Δl é dada por

$$F = 2(T \sin(\theta)) = T(2\theta) = T \frac{\Delta l}{R}, \quad (5.8)$$

considerando a aproximação de $2 \sin(\theta) = 2\theta$ para ângulos pequenos, e a relação de comprimento de arco $2\theta = \frac{\Delta l}{R}$.

² Representa a quantidade de massa por unidade de comprimento da corda.

Figura 5.4 – Velocidade de uma onda na corda.



Fonte: Própria.

A massa do comprimento de corda é dada pelo produto da densidade linear pelo comprimento, e neste caso temos,

$$m = \rho \Delta l. \quad (5.9)$$

Observe que neste instante, o elemento de corda Δl se move de acordo com a circunferência, assim, o elemento possui uma aceleração obtida através da força centrípeta³ dada por,

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (5.10)$$

onde a denota aceleração, e v velocidade do elemento da corda Δl .

Pela segunda lei de Newton, temos que $F = m \cdot a$, com isso das equações (5.8), (5.9) e (5.10), temos

$$T \frac{\Delta l}{R} = \rho \Delta l \cdot \frac{v^2}{R}. \quad (5.11)$$

Fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$v^2 = \frac{T}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (5.12)$$

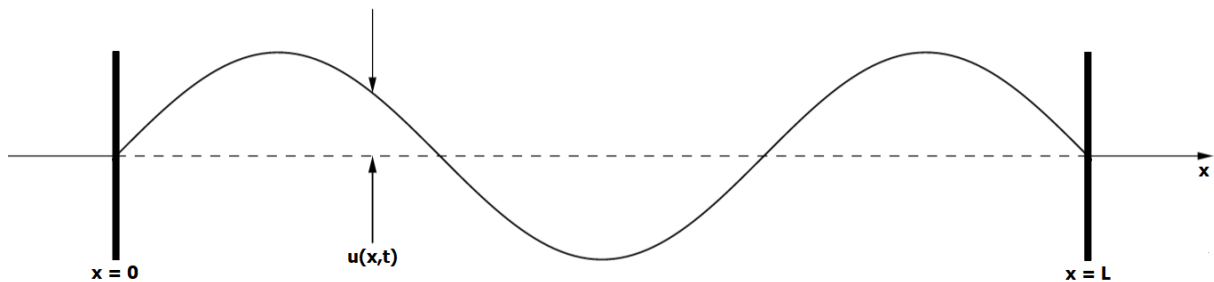
ou seja, a velocidade da onda na corda é proporcional a sua tensão T e inversamente proporcional a sua densidade linear ρ , correspondendo a a da equação (5.7) (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., 2012).

³ Força que age sobre os corpos no movimento circular em determinada trajetória curvilínea, dada por $F_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$ onde: F_c é a força centrípeta, em newton, m é a massa, em quilograma, v é a velocidade, em metros por segundo e r é o raio da trajetória circular, em metros.

5.3 Vibração de uma Corda Elástica

Como já apresentado, a versão unidimensional da equação da onda pode ser descrita pela equação (5.7), mas para melhor descrever a onda gerada pelo movimento da corda elástica (Figura 5.5), é necessário que sejam estabelecidas condições iniciais e de contorno.

Figura 5.5 – Corda elástica



Fonte: Adaptado de Boyce e DiPrima (2006), pg.332.

Considerando os extremos da corda fixos, temos,

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.13)$$

Como a equação (5.7) é de segunda ordem em relação à variável t , faz-se necessário fornecer duas condições iniciais, destinadas a posição inicial e a velocidade inicial, respectivamente

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.14)$$

com f, g funções dadas. Pelas condições de contorno dadas em (5.13), é também necessário considerar sobre f e g :

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (5.15)$$

A estratégia matemática neste momento, é vinculada com a possibilidade de encontrar uma expressão conveniente satisfazendo (5.7), (5.13) e (5.14). Note que esse problema é de valor inicial e de contorno, com valores iniciais para a variável temporal t e valores de contorno para a variável espacial x .

Problema 1: Corda elástica com deslocamento em relação a sua posição de equilíbrio e solta no instante $t = 0$ com velocidade inicial nula:

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para resolvermos este problema, utilizaremos o método de separação de variáveis, supondo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Com isso, temos:

$$u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t) \quad \text{e} \quad u_{tt}(x, t) = X(x)T''(t).$$

Substituindo na equação do problema e separando as variáveis, temos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

com λ constante. Assim sendo, $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem as equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (5.17)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (5.18)$$

De maneira a não se interessar com o caso trivial, vamos supor $\lambda > 0$, substituindo $\lambda = \mu^2$; $\mu > 0$ e resolvendo (5.17) temos um polinômio característico dado por $P(p) = p^2 + \mu^2 = 0$, com soluções da forma $p_1 = \mu i$ e $p_2 = -\mu i$, obtendo a solução da forma,

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x), \quad (5.19)$$

com c_1 e c_2 constantes reais. Pelas condições iniciais do problema, observamos que

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0,$$

e como $T(t) \neq 0$, para que se verifique as expressões acima devemos ter

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0. \quad (5.20)$$

Substituindo $x = 0$ em (5.19), temos:

$$X(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = 0$$

Dáí tiramos que $c_1 = 0$, logo, a solução (5.19) se reduz a $X(x) = c_2 \operatorname{sen}(\mu x)$. Considerando a segunda condição de contorno, chegamos em,

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\mu L) = 0.$$

Supondo $c_2 \neq 0$, obrigatoriamente, $\operatorname{sen}(\mu L) = 0$. Vamos então escolher valores adequados para μ para satisfazer esta condição, e para isso, basta observar que a função seno se anula em múltiplos inteiros de π , ou seja, sempre que $\mu L = n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$ e então $\mu = \frac{n\pi}{L}$.

Observe que desta forma, temos para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução da seguinte maneira:

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (5.21)$$

Substituindo $\lambda = \mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ em (5.18), chegamos em:

$$T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0,$$

com polinômio característico expresso por $P(p) = p^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2}$ e soluções dadas por $p = +\frac{an\pi}{L}i$ e $p = -\frac{an\pi}{L}i$. Com isso temos que para cada n , tem-se uma solução diferente, podendo então reescrevê-la da seguinte maneira:

$$T_n(t) = c_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + c'_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right). \quad (5.22)$$

Dessa forma, como tomamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, as soluções da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \quad (5.23)$$

são ótimas candidatas para soluções do problema (5.16), necessitando apenas conhecer melhor os coeficientes a_n e b_n . Para isso, utilizaremos das condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

De (5.23), temos que:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \end{aligned}$$

O coeficiente a_n é bem determinado na teoria de Fourier, com isso, considerando um período de $2L$, temos:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

Temos ainda, que:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} \left[-a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = 0 \end{aligned}$$

o que implica que $b_n = 0$. Portanto, a solução do problema 1 é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right). \quad (5.25)$$

Note que para os problemas 2 e 3, o passo a passo inicial para encontrarmos suas respectivas soluções é análogo ao problema 1, diferindo apenas nas condições iniciais.

Problema 2: Corda elástica em sua posição de equilíbrio no tempo $t = 0$, com velocidade inicial não nula.

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (5.26)$$

De (5.23), temos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = 0. \end{aligned}$$

Daí tiramos que, $a_n = 0$.

Temos ainda, que:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} \left[-a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} 0 \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = g(x), \end{aligned}$$

o que implica, por Fourier, considerando um período $2L$, que

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

Assim sendo, a solução formal do problema 2 é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} t \right). \quad (5.28)$$

Problema 3: Corda elástica solta fora de sua posição de equilíbrio no tempo $t = 0$, com velocidade inicial.

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (5.29)$$

De (5.23), temos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}0\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \end{aligned}$$

Como determinado na teoria de Fourier, considerando um período $2L$,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Temos ainda, que:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} \left[-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}0\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x), \end{aligned}$$

o que implica, por Fourier, considerando um período $2L$, que

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Dessa forma, a solução formal do problema 3 é dada por (5.23), (5.30) e (5.31), ou seja:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.4 Vibração da Corda Elástica com ação de força externa

Acabamos de apresentar soluções para a equação de onda em uma corda elástica presa às extremidades em diferentes condições iniciais sem considerar efeitos externos, que podem dificultar o movimento da corda. Nesta seção apresentaremos casos de modo a considerar algum tipo de efeito causado nos movimentos da corda, aparecendo como uma função $g(x, t)$.

Considere a equação

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt} - g(x,t), & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0,t) &= 0, & u(L,t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) &= f_1(x), & u_t(x,0) &= f_2(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Tentaremos nos inspirar em soluções baseadas na solução anterior, da forma,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (5.34)$$

com c_n a ser determinado.

Suponha que para cada t fixo, a função g pode ser decomposta em séries de Fourier, da forma,

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.35)$$

Derivando termo a termo, temos que

$$-a^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

E daí, observe que para todo n , desde que $\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \neq 0$, podemos multiplicar ambos lados da igualdade acima por $\frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)} \neq 0$, chegando em:

$$-c_n(t) \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} = c_n''(t) - g_n(t)$$

e então,

$$c_n''(t) + (2\pi\omega_n)^2 c_n(t) = g_n(t) \quad (5.36)$$

para todo $t > 0$, onde $\omega_n = \frac{na}{2L}$ é a frequência do n -ésimo harmônico.

Para resolver (5.36), utilizaremos do método de variação de parâmetros, e para isso devemos encontrar a solução da equação homogênea e posteriormente da equação particular.

Considere a equação homogênea associada a (5.36):

$$c_{nh}''(t) + \alpha_n^2 c_{nh}(t) = 0, \quad (5.37)$$

onde $\alpha_n = 2\pi\omega_n$. Calculando as raízes do polinômio característico $r^2 + \alpha_n^2 = 0$, chegamos em $r_1 = \alpha_n i$ e $r_2 = -\alpha_n i$, onde segue que

$$c_{nh}(t) = c_1 \cos(\alpha_n t) + c_2 \sen(\alpha_n t) \quad (5.38)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Para seguirmos ao encontro da solução particular, defina

$$c_{np}(t) = u_1 \cos(\alpha_n t) + u_2 \sen(\alpha_n t),$$

com $u_1(t), u_2(t)$ dadas por

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \sen(\alpha_n s) ds, \quad u_2 = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds.$$

Com isso, temos

$$c_{np}(t) = -\frac{\cos(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \sen(\alpha_n s) ds + \frac{\sen(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds$$

e portanto, a solução geral de (5.36) é dada por

$$c_n(t) = c_1 \cos(\alpha_n t) + c_2 \sen(\alpha_n t) - \frac{\cos(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \sen(\alpha_n s) ds + \frac{\sen(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds,$$

com,

$$\begin{aligned} c'_n(t) = & -c_1 \alpha_n \sen(\alpha_n t) + c_2 \alpha_n \cos(\alpha_n t) - \frac{1}{\alpha_n} g_n(t) \sen(\alpha_n t) \cos(\alpha_n t) + \frac{1}{\alpha_n} \sen(\alpha_n t) \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds + \\ & + \frac{1}{\alpha_n} g_n(t) \sen(\alpha_n t) \cos(\alpha_n t) + \frac{1}{\alpha_n} \cos(\alpha_n t) \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds. \end{aligned}$$

Em particular, obtemos

$$c_n(0) = c_1, \quad c'_n(0) = c_2 \alpha_n. \quad (5.39)$$

Obtendo as condições iniciais do problema (5.33), dadas por

$$f_1(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$f_2(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(0) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

temos que os coeficientes $c_n(0), c'_n(0)$ estão bem definidos da forma,

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = c_1 \quad (5.40)$$

$$c'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = c_2 \alpha_n. \quad (5.41)$$

E utilizando (5.40) e (5.41), temos que a solução geral para o problema (5.36) é dada por:

$$c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \cos(\alpha_n t) + \frac{2}{L \alpha_n} \int_0^L f_2(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \operatorname{sen}(\alpha_n t) - \frac{\cos(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \operatorname{sen}(\alpha_n s) ds + \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds. \quad (5.42)$$

Portanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

com c_n obtido em (5.42).

Vale ressaltar ainda que, ao supormos a existência de séries de Fourier para as funções f_1, f_2 e g , deverão elas ser periódicas de período $2L$ e de \mathcal{L}^1 .

6 APLICAÇÃO NO PIANO DE CAUDA

O piano de cauda foi inventado na cidade de Florença, capital da região Toscana na Itália, pelo construtor e luthier de cravos¹ Bartolomeo Cristofori, datado em 1709. A relação de um construtor de cravos ser o pioneiro na fabricação dos pianos não é uma coincidência. Cristofori se baseou no cravo para a construção deste que inicialmente se chamava "*gravicebalo col piano forte*" e mais tarde começou a se chamar *pianoforte*. Não podemos dizer que o pianoforte é uma evolução ou tampouco um aperfeiçoamento do cravo, ele apenas o serviu de inspiração para o desenvolvimento do instrumento, tanto que os primeiros pianofortes foram construídos com a mesma estrutura e mesmo tamanho do cravo. Sua principal diferença com o cravo era pela possibilidade de emitir sons suaves e fortes, de acordo com a intensidade com que se pressionava as teclas.

Figura 6.1 – Piano de cauda.



Fonte: História do Piano, 2017.

Cristofori construiu cerca de vinte exemplares de sua criação antes de sua morte em 1731, e atualmente existem três pianos datados em 1720 preservando as memórias deste artista que revolucionou a história dos cordofones de teclas. Um destes, está localizado no *Metropolitan Museum of Art* em Nova Iorque, considerado então, o mais antigo do mundo. Com o

¹ Instrumento que produz som através do beliscamento da corda, e isto se dá por um aparelho chamado plectro, fixo em uma barra de madeira chamada martinete. Ao acionar uma tecla do cravo, uma movimentação no sistema faz subir o martinete, permitindo com que o plectro encoste na corda, e após uma determinada tensão imposta na corda, o plectro dobra beliscando a corda e fazendo-a vibrar.

passar dos anos, algumas mudanças foram necessárias até chegarmos na estrutura que se tem atualmente como apresentado na seção 6.1.

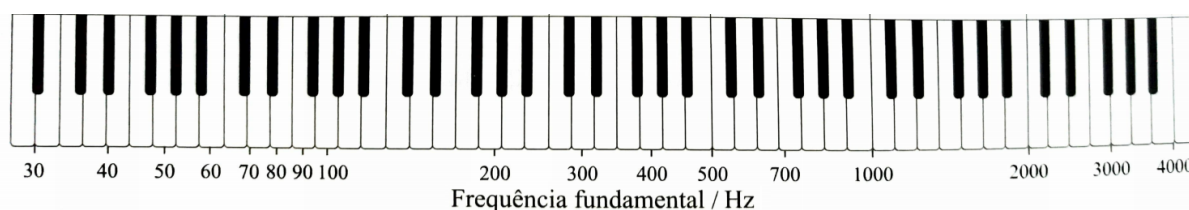
6.1 Estrutura do Piano

A estrutura de um piano é o conjunto de membros que compõe o instrumento. Dentre eles, destacamos os principais para seu funcionamento: o teclado, as cordas, a mecânica, os pedais, e uma base estrutural de sustentação.

O teclado: Chamamos de teclado, o conjunto de teclas existentes no piano. Estas, são elementos manuais de entrada do piano. São alavancas que quando pressionadas acionam o mecanismo de ação. Por elas, é possível definir o tipo de som, (seja ele grave, médio e agudo dependendo da localização da tecla pressionada) e a intensidade (de acordo com a força que a tecla é pressionada) do som emitido.

Atualmente, os pianos possuem 88 teclas, sendo 52 brancas (naturais) e 36 pretas (os acidentes), mas nem sempre foi assim. Devido a sua originalidade, gerados a partir dos cravos, os primeiros pianos foram produzidos com a estrutura bem parecida com eles contendo 54 teclas. As teclas se associam a sons derivados de ondas que podem apresentar uma variação de 27,5 Hz até 4186 Hz de frequência conforme pode ser observado na Figura 6.2.

Figura 6.2 – Frequência das notas do piano.



Fonte: Henrique, 2002.

As cordas: As cordas são os elementos do instrumento responsáveis pela produção de som. São cabos que podem variar desde 5 cm até 2 metros de comprimento esticadas e fixas em suportes rígidos chamados de cravelhas e pinos. Podem ser divididas em cordas planas e bordões como mostra a Figura 6.3. O calibre, o comprimento das cordas e o número de enrolamentos aumentam gradualmente à medida que a nota é mais grave.

O som gerado ao pressionar uma única tecla pode ser emitido por até três cordas distintas. A estrutura de cordas duplas ou triplas é utilizada desde o século XVII em instrumentos de

Figura 6.3 – Cordas do piano.

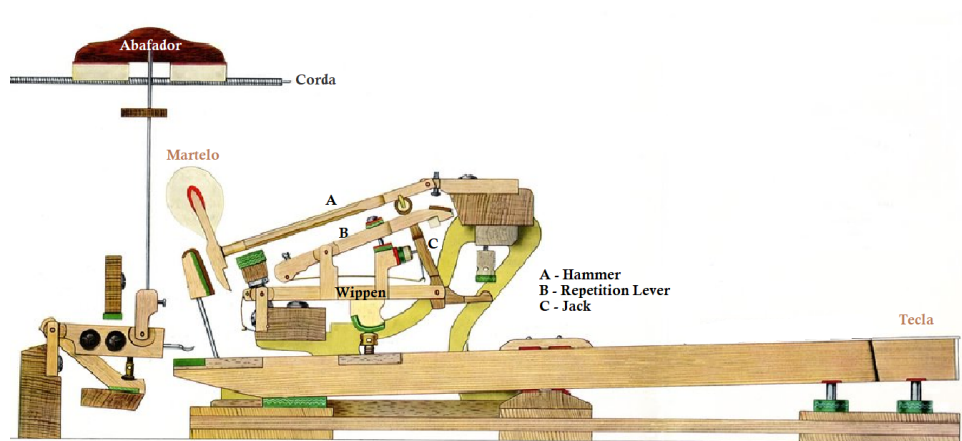


Fonte: História do Piano, 2017.

tecla, e isso é justificado pelo melhoramento do timbre e aumento do volume do som produzido (Henrique, 2002). Ao total, um piano pode ter até 250 cordas associadas a 88 teclas. Uma questão importante a se comentar, é que cada corda tem uma tensão de 70 a 90 quilogramas-força, podendo resultar em um total de mais de 20 toneladas-força de tensão no interior do instrumento.

O mecanismo de ação: A mecânica do piano é o conjunto de dispositivos responsáveis por levar as informações de entrada a partir das teclas, até as cordas do piano. São formadas por um conjunto de alavancas interativas como mostra a Figura 6.4.

Figura 6.4 – Mecanismo de ação do piano.



Fonte: História do Piano, 2017.

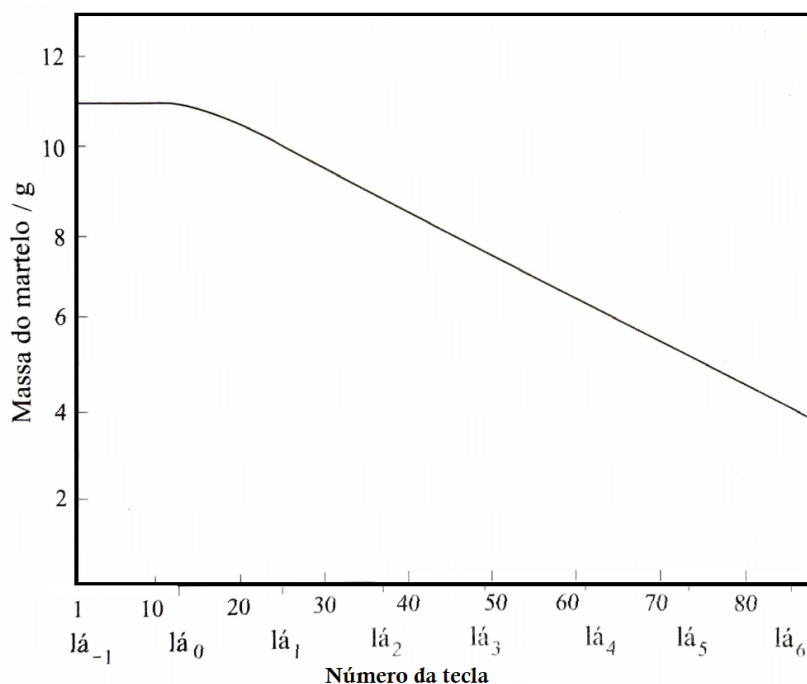
As teclas são como alavancas, que se movem para baixo e para cima como uma gangorra, dando impulso a uma peça chamada *wippen*, sustentada por uma barra fixa que atravessa o instrumento.

No *wippen*, estão ligadas outras duas peças, a alavanca de repetição (*Repetition lever*), com ligação ao seu centro e o *jack*, presa na parte direita do *wippen*. Ao fim temos o martelo

(*hammer*), suspenso por uma superfície fixa ao piano e pela alavanca de repetição e empurrado em direção as cordas pelo topo do *jack*.

Os martelos são dispositivos de madeira revestidos de feltro de lã contendo uma variação decrescente da massa da cabeça dos martelos ao longo do instrumento (observado do mais grave para o mais agudo). Isto pode ser observado no gráfico da Figura 6.5:

Figura 6.5 – Massa da cabeça dos martelos de um piano de cauda.



Fonte: Adaptado de Conklin, (1990) apud., Henrique, (2002).

Podemos ainda citar uma peça fundamental neste processo que são os abafadores, que são mecanismos com revestimentos de feltro apoiados sobre as cordas e apenas se afasta quando as teclas são acionadas, permanecendo afastadas até a tecla retornar a sua posição inicial, desde que não se esteja fazendo uso de pedais que será explicado em sequência.

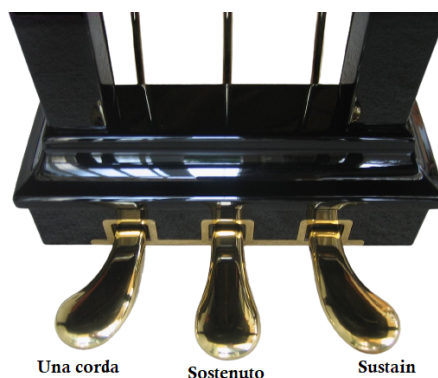
A função dos abafadores, portanto, é o desaceleramento precoce do movimento das cordas após o contato com os martelos, que por sua vez, é o artefato responsável pela percussão das cordas do piano.

Os pedais: O piano de cauda contém três pedais, chamados *Una corda*, *sostenuto* e *sustain* como é apresentado na Figura 6.6. O pedal da direita ou pedal *sustain*, tem a função de sustentação do som. Ao acioná-lo, o pianista mantém os abafadores afastados das cordas mesmo após soltarem as teclas. Isto fará com que as cordas continuem se movimentando prolongando então a emissão do som.

O pedal do centro, o sostenuto, possui funções bem semelhantes aos pedais de sustentação, porém, com ênfase nos abafadores correspondentes às teclas que estejam acionadas naquele momento, podendo então haver o prolongamento de algumas notas e em outras não, ou sustentação em apenas um conjunto restrito de notas.

O pedal da esquerda, o una corda, possui uma função de abafar ou deixar mais brando o som emitido pelo piano. Seu acionamento faz deslocar para o lado toda mecânica do instrumento, de modo a fazer com que os martelos percutam as cordas de maneira diferente ou ainda, em casos de haver mais de uma corda naquele grupo, este recurso faz com que o martelo soe em apenas uma corda. Já nos pianos de armários, este recurso faz com que os martelos se aproximem das cordas de modo a haver menor interação entre martelo e corda. Em ambos os casos, o som é emitido em uma intensidade menor.

Figura 6.6 – Pedais do piano.



Fonte: História do Piano, 2017.

A base estrutural: Chamamos de base estrutural do piano, a composição formada pelos elementos necessários para que o instrumento se constitua. E são estes, o quadro de ferro, a caixa de ressonância e o tampo harmônico.

O quadro de ferro é um elemento muito parecido com uma harpa, onde são fixos os pinos e as cravelhas, elementos utilizados para tensionar as cordas. Interessante lembrar que este aparelho deve ser bastante rígido e resistente, pela alta tensão das cordas.

A caixa e o tampo harmônico são componentes feitos de madeira e possuem duas funções principais, tais quais, a de revestimento, sendo o móvel de madeira que sustenta todos os demais elementos, e de controle de sonoridade, de emissão de som no ambiente.

Figura 6.7 – Visão superior do piano.



Fonte: Adaptado de HENRIQUE, 2002.

6.2 Aplicações

Não almejamos uma aplicação ambiciosa, queremos apenas considerar alguns aspectos do piano que influenciam na vibração das cordas, relacionando com os estudos advindos da equação da onda. Assim, considerando que o movimento vibratório das cordas ocorra no sentido transversal, como se estivesse oscilando dentro de um plano, e supondo a posição espaço-temporal dos elementos de corda através de uma função $u(x,t)$, de modo que $u(x,t)$ representa a posição da corda no ponto x , em um tempo t e satisfaz a equação

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} - g(x,t), \quad (6.1)$$

onde $a^2 = \frac{T}{\rho}$ é a razão entre a tensão da corda, obtida através da afinação, e a densidade linear da corda, variante ao material de aço e de seu revestimento, e $g(x,t)$ é uma função relativa a utilização ou não do pedal de sustentação do piano, fazendo relação ao precoce repouso das cordas obtido através da pressão dos abafadores sobre as cordas, abafando a vibração. Quando se utiliza do pedal de sustentação, a corda soa livremente, e então $g(x,t) = 0$. Todas as cordas são de comprimento definido $5 \leq L \leq 200$ (centímetros), presas nas extremidades, de modo a fazer sentido pensarmos em condições de fronteira dadas por

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 5 \leq L \leq 200, \quad t \geq 0. \quad (6.2)$$

6.2.1 Situação 1

Para o caso em que se pressione uma ou mais teclas, uma única vez em cada tecla, com o pedal de sustentação acionado, obtemos que a vibração de cada uma das cordas pode ser observada através de uma função $u(x, t)$ que satisfaz o seguinte modelo e condições iniciais:

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde a, L são parâmetros já apresentados anteriormente. Neste caso, a vibração é dada através da expressão

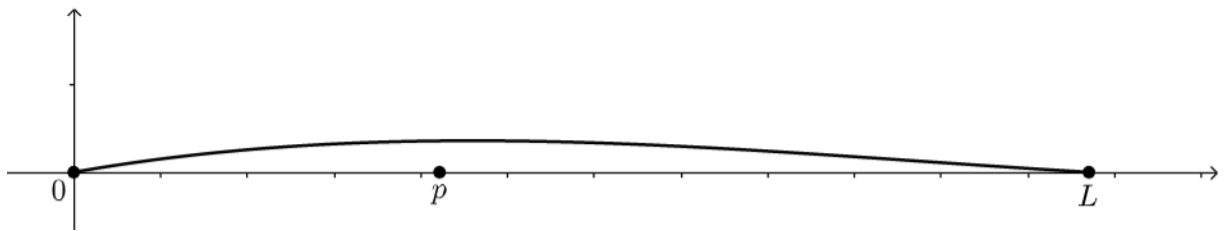
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \left[\int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi t}{L} \right). \quad (6.4)$$

Vejam os a seguir, o caso particular em que

$$g(x) = \frac{x^3 - \frac{3L}{2}x^2 + \frac{L^2}{2}x}{100L}, \quad 0 \leq x \leq L$$

apresentada na Figura 6.8.

Figura 6.8 – Função $g(x)$.



Fonte: Própria.

Para escolha da condição inicial $g(x)$, levamos em consideração que haveria um ponto p no qual a velocidade seria maior que nos demais pontos, sendo p o ponto de contato com o martelo, e os pontos das extremidades da corda teriam uma velocidade igual a 0.

Observe que $g(x)$ é contínua para todo $0 \leq x \leq L$, e logo integrável e absolutamente integrável, com isso podemos calcular sua série de Fourier. Fazendo a extensão para que seja

periódica de período $2L$ e ímpar, segue que g , é dada por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

com $b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$. Como

$$\begin{aligned} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{100L} \int_0^L \left[x^3 - \frac{3L}{2}x^2 + \frac{L^2}{2}x \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{100L} \left[\int_0^L x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx - \frac{3L}{2} \int_0^L x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{L^2}{2} \int_0^L x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{100L} \left[\frac{6(-1)^n L^4}{\pi^3 n^3} - \frac{(-1)^n L^4}{\pi n} - \frac{3L(-\pi^2(-1)^n n^2 L^3)}{2\pi^3 n^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3L(2(-1)^n L^3 - 2L^3)}{2\pi^3 n^3} - \frac{(-1)^n L^4}{2\pi n} \right] \\ &= \frac{3L^3((-1)^n + 1)}{100\pi^3 n^3} \end{aligned}$$

temos que $u(x, t)$ é dado por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L^3((-1)^n + 1)}{50a\pi^4 n^4} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi t}{L} \right). \quad (6.5)$$

6.2.2 Situação 2

Para o caso em que se pressiona a mesma tecla repetidamente com o pedal de sustentação acionado, teremos o seguinte sistema

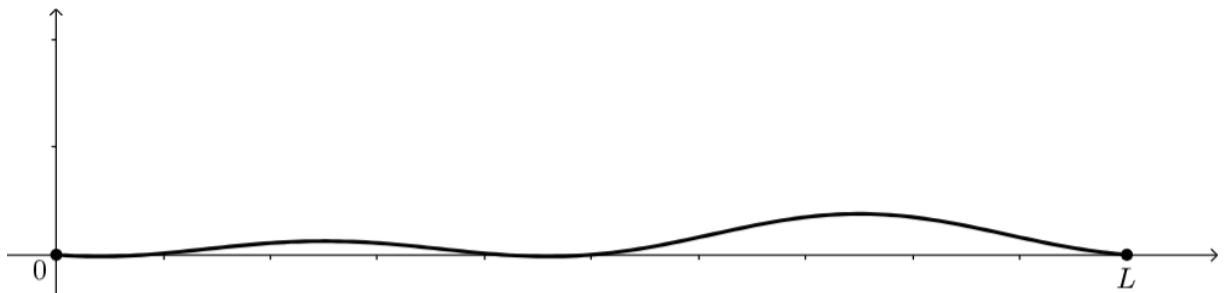
$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (6.6)$$

com a, L fixos. E a vibração da corda pode ser representada através da expressão (6.7):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} t \right) + \left(\frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} t \right) \right]. \quad (6.7)$$

Vamos analisar o caso particular em que a posição inicial da corda, no momento do novo golpe do martelo, é dada por $f(x) = \frac{-L}{80\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right]$ (Figura 6.9) e a velocidade inicial $g(x)$ da forma com que foi apresentado na situação 1. f foi construída de modo que sua amplitude varia com seu comprimento L , ou seja, quanto maior a corda, maior também poderá ser amplitude da oscilação.

Figura 6.9 – Gráfico da função $f(x)$.



Fonte: Própria.

Sendo f contínua e ainda diferenciável em todo $0 \leq x \leq L$, seguiremos fazendo a expansão ímpar da função f , de modo a obter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

com $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$.

Observe que para resolver a integral (6.8), precisamos considerar três casos: $n = 2$, $n = 4$ e ainda quando $n \neq 2$ e $n \neq 4$.

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L \frac{-L}{80\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (6.8)$$

Para o caso em que $n = 2$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} dx &= \int_0^L \frac{-L}{80\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right] \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} dx \\ &= \frac{-L}{80\pi^2} \left[\int_0^L \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} dx + \int_0^L \cos \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} dx - \int_0^L \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{-L}{80\pi^2} [0 + 0 - 0] = 0. \end{aligned}$$

Para o caso em que $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} dx &= \int_0^L \frac{-L}{80\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right] \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} dx \\ &= \frac{-L}{80\pi^2} \left[\int_0^L \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} dx + \int_0^L \cos \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} dx - \int_0^L \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{-L}{80\pi^2} \left[\frac{L}{2} + 0 - 0 \right] = -\frac{L^2}{160\pi^2}. \end{aligned}$$

Para o caso em que $n \neq 2$ e $n \neq 4$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_0^L \frac{-L}{80\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{-L}{80\pi^2} \left[\int_0^L \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx + \int_0^L \cos \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx - \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{-L}{160\pi^3} \left[\frac{L}{2+n} (-(-1)^n + 1) + \frac{L}{2-n} (-(-1)^n + 1) - \frac{2L}{n} (-(-1)^n + 1) \right] \\ &= \frac{-L^2}{160\pi^3} (-(-1)^n + 1) \left(\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n} - \frac{2}{n} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2, n \neq 4}}^{\infty} \frac{-L}{80\pi^3} (-(-1)^n + 1) \left(\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n} - \frac{2}{n} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{an\pi}{L} t \right) + \\ &\quad - \frac{L}{80\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{4a\pi}{L} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L^3 ((-1)^n + 1)}{50a\pi^4 n^4} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{an\pi}{L} t \right). \quad (6.9) \end{aligned}$$

6.2.3 Situação 3

Para o caso em que o pianista pressione uma tecla sem o acionamento do pedal após tê-la pressionado uma ou mais vezes com o pedal acionado, temos que a posição $u(x,t)$ da corda

satisfaz o sistema

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt} - g(x,t), & t > 0, & & 0 < x < L \\ u(0,t) &= 0, & u(L,t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) &= f_1(x), & u_t(x,0) &= f_2(x), & 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (6.10)$$

com a, L fixos, e dada da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

com c_n obtido em (6.11)

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \cos(\alpha_n t) + \frac{2}{L\alpha_n} \int_0^L f_2(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \operatorname{sen}(\alpha_n t) \\ &\quad - \frac{\cos(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \operatorname{sen}(\alpha_n s) ds + \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Veja que o não acionamento do pedal implica na reaproximação dos abafadores sobre as cordas causando a desaceleração das vibrações. Considere $f_1(x) = f(x)$ e $f_2(x) = g(x)$ como apresentado na situação 2. Suponha que o contato do abafador com a corda possa ser reduzido a um único ponto $x = \frac{L}{4}$, e seja uma função $g(x,t)$ dada por

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{-4x}{L} \left(-k + \frac{t}{t+1} f \right), & 0 < x \leq \frac{L}{4} \\ \frac{4(x-L)}{3L} \left(-k + \frac{t}{t+1} f \right), & \frac{L}{4} < x < L. \end{cases} \quad (6.12)$$

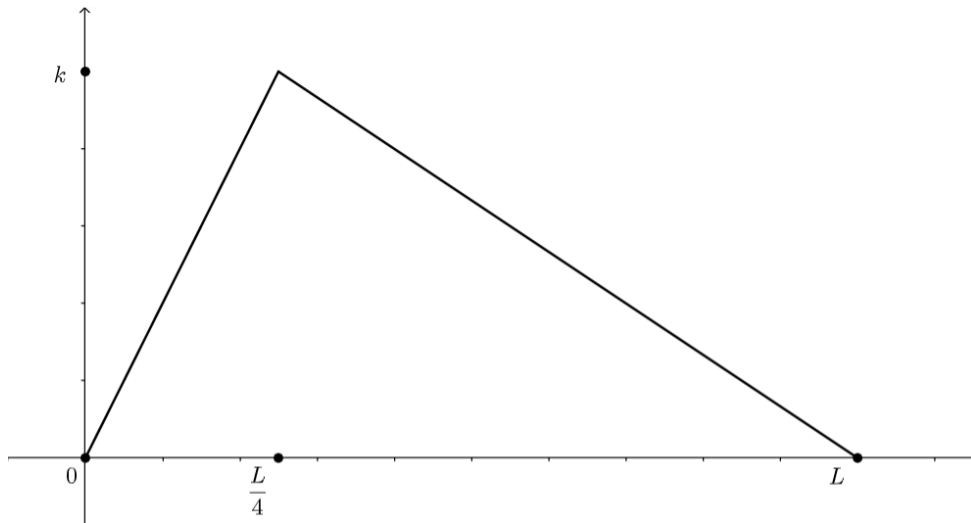
Onde k é a força que o abafador exerce sobre o ponto de contato, f é a força que a corda exerce sobre o abafador e L é o comprimento de corda.

Podemos fazer comentários sobre a função $g(x,t)$, sobre questões que nos levaram a fazer tal escolha. Observe que quando $t = 0$, obtemos

$$g(x,0) = \begin{cases} \frac{4kx}{L}, & 0 < x \leq \frac{L}{4} \\ \frac{-4(x-L)k}{3L}, & \frac{L}{4} < x < L. \end{cases}$$

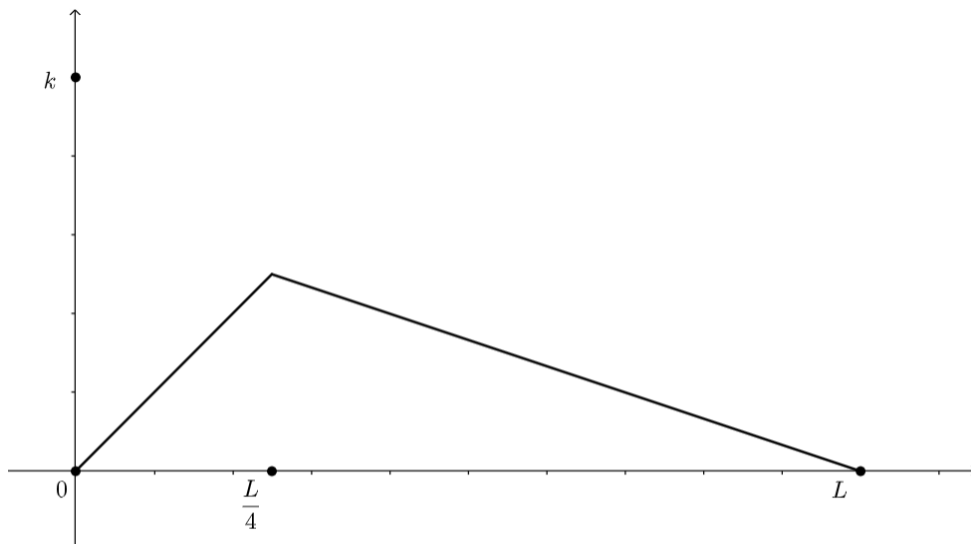
apresentada na figura 6.10.

Observe que nesse primeiro momento, $g(x,t)$ assume maior valor no ponto $\frac{L}{4}$ (onde o abafador encosta na corda) seguido de suas vizinhanças, que apresentam valores maiores quando comparamos com as extremidades, podendo ligar ao fato de haver maior influência do

Figura 6.10 – Gráfico da função $g(x,t)$ para $t = 0$.

Fonte: Própria.

abafador aos pontos mais próximos do contato. À medida que t cresce, observe que $g(x,t)$ se aproxima de 0 em $0 < x < L$ (a Figura 6.11 apresenta $g(x,1)$), neste caso, estamos considerando que a medida que o tempo vai passando e a corda se aproxima de sua posição de equilíbrio.

Figura 6.11 – Gráfico da função $g(x,t)$ para $t = 1$.

Fonte: Própria.

Para solucionarmos o problema, suponhamos que

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (6.13)$$

como fizemos na seção 5.4.

Observe que como $g(x, t)$ é contínua, seccionalmente contínua, integrável e absolutamente integrável, podemos estendê-la para que seja periódica de período $2L$ e ímpar, e obtermos $g(x, t)$ dada por,

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (6.14)$$

com $b_n = g_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$.

Como,

$$\begin{aligned} \int_0^L g(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{-4x}{L} \left(-k + \frac{t}{t+1} f \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx + \\ &+ \int_{\frac{L}{4}}^L \frac{4(x-L)}{3L} \left(-k + \frac{t}{t+1} f \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= -\frac{4L}{n^2 \pi^2} \left(\frac{ft}{t+1} - k \right) \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right) - \frac{n\pi}{4} \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right] \\ &- \frac{4L}{3n^2 \pi^2} \left(\frac{ft}{t+1} - k \right) \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right) + \frac{3\pi n}{4} \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right] \\ &= -\frac{16L}{3n^2 \pi^2} \left(\frac{ft}{t+1} - k \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

segue que,

$$b_n = -\frac{32}{3n^2 \pi^2} \left(\frac{ft}{t+1} - k \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right)$$

Dessa forma, a solução do problema (6.10) é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

com

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \cos(\alpha_n t) + \frac{2}{L\alpha_n} \int_0^L f_2(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \operatorname{sen}(\alpha_n t) \\ &- \frac{\cos(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \operatorname{sen}(\alpha_n s) ds + \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n t)}{\alpha_n} \int_0^t g_n(s) \cos(\alpha_n s) ds. \end{aligned}$$

Incrementado com

$$\int_0^L f_1(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & n = 2 \\ -\frac{L^2}{160\pi^2}, & n = 4 \\ \frac{-L^2}{160\pi^3} (-(-1)^n + 1) \left(\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n} - \frac{2}{n} \right), & n \neq 2 \text{ e } n \neq 4, \end{cases}$$

$$\int_0^L f_2(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{3L^3 ((-1)^n + 1)}{100\pi^3 n^3},$$

$$g_n(t) = -\frac{32}{3n^2\pi^2} \left(\frac{ft}{t+1} - k \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4} \right).$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, o maior interesse neste trabalho foi no estudo da equação da onda, porém, a medida que ela foi sendo estudada, surgiu-se a necessidade de contextualização. Sendo assim, neste trabalho apresentamos alguns conceitos de Equações Diferenciais.

Apresentamos um pouco da teoria de séries de Fourier com resultados que garantem a convergência, e ainda fizemos algumas considerações gerais sobre ondas, e como exemplo, apresentamos e contextualizamos ondas sonoras abrangendo as percepções do receptor, com a descrição do aparelho auditivo humano. Por fim, estudamos a equação da onda unidimensional, em sua forma homogênea e não homogênea, e modelamos a vibração das cordas do piano mediante algumas situações.

Estamos cientes de que as relações de aspectos que envolvem ondas e ondas sonoras dialoga constantemente com a matemática, e que as possibilidades de relação são imensuráveis, necessitando de conhecimentos bem mais específicos para apresentá-las, e ainda, em estudo, percebemos que a complexidade dos elementos que envolvem a mecânica do piano é altamente satisfatória para aplicações físicas e matemáticas.

Portanto, considerando os temas e conteúdos aqui apresentados, pode-se dizer que este trabalho ainda poderá estimular estudantes que queiram estudar as equações da onda, de modo a mostrar ferramentas importantes e a aplicabilidade das Equações Diferenciais Parciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIEZUNER, Rodney Josué. **Equações diferenciais parciais i/ii**, 2011.
- BENSON, D. J. **Music: A mathematical Offering**. Aberdeen: Cambridge, Universidade de Aberdeen, 2008.
- BORGES, Patrícia Duro; MARIA, Santa. **Apostila de física**. UFSM. Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2009.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- GAYTON, Arthur C., M. D.; HALL, John E., PH. D. **Tratado de Fisiologia Médica**. 10ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 2002.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v.1.
- HENRIQUE, L. L. **Acústica Musical**. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- HEWITT, P. G. **Física conceitual**. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015. p376 a 380.
- HISTÓRIA DO PIANO. **Salão Musical de Lisboa**, 2017. Disponível em <<https://www.salaomusical.com/pt/content/17-historia-do-piano>> Acesso em 15 de fevereiro de 2021. il color.
- MEDEIROS, Elisa Ferreira. **Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível**. BS thesis. 2016.
- PUPIN, Josiana Rovatti; SILVA, Karina Schiabel; CARBONE, Vera Lúcia. **Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens**. Trabalho (Conclusão de Curso)-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.
- ROSSETTI, Danilo. A percepção do timbre em Farben Op. 16 n. 3 de Schoenberg: **Uma abordagem estética e psicoacústica**. Revista Música 17.1 (2017): 292-324.
- SOM E VIBRAÇÃO. **Sabina - Escola Parque do Conhecimento**, 2017. Disponível em <<https://www2.santoandre.sp.gov.br/hotsites/sabina/index.php/a-sabina/experimentos/123-pagina-experimento-som-vibracao>> Acesso dia 03 de fevereiro de 2021. il. color.
- SANTOS, Fabiano J. **Introdução às séries de Fourier**. Belo Horizonte: PUC Minas, Instituto de, 2004.

SIMÕES, C. A. E. **Equações diferenciais na física**. Dissertação (Mestrado), Universidade de Évora, 2014..

SOUZA, Uender Barbosa de et al. **Sobre somas infinitas e uma forma recursiva para a soma da série Zeta (2p) de Riemann**. Universidade Federal de Goiás, 2015.

SPADA, Adriano Luiz. **O ouvido humano**. Attack do Brasil. Disponível em:< http://www.attack.com.br/artigos_tecnicos/ouvido_humano.pdf>. Acesso em, 12 de dezembro de 2020.

STEWART, James; CÁLCULO, Volume I: **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. 5ª Edição, Editora Cengage Learning. Judith L. Gersting, , 5ª Edição, LTC, 2001.

YOUNG, Hugh D .; FREEDMAN, Roger A. Física II: **mecânica**. Young e Freedman. [Colaborador A. Lewis Ford]. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. Revisão técnica de Adir Moisés Luiz , v. 12, 2008.

ZILL, D.G., CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Makron Books, Pearson, 2001.