



PEDRO HENRIQUE ANDRADE LIMA

**FORMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO LINEAR VIA MEF PARA
ANÁLISE DE ESTRUTURAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO**

LAVRAS – MG

2021

PEDRO HENRIQUE ANDRADE LIMA

**FORMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO LINEAR VIA MEF PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS
MISTAS DE AÇO E CONCRETO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes
Orientador

Prof. M.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias
Coorientador

LAVRAS – MG

2021

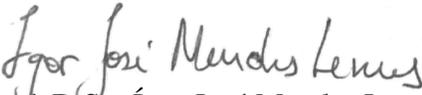
PEDRO HENRIQUE ANDRADE LIMA

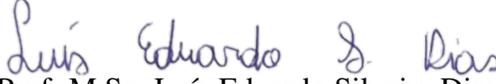
**FORMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO LINEAR VIA MEF PARA ANÁLISE DE
ESTRUTURAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para obtenção do título de Bacharel.

APROVADA em 24 de fevereiro de 2021.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes	UFLA
Prof. M.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias	UNILAVRAS
Prof. D.Sc. Maykmiller Carvalho Rodrigues	UFLA
Prof. D.Sc Ricardo Azoubel da Mota Silveira	UFOP


Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes
Orientador


Prof. M.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2021**

Dedico esta monografia aos meus pais, Marcio e Angélica, que batalharam muito para me garantir esse privilégio de concluir um curso superior, e me serviram de inspiração e força, para que fosse possível realizar esse sonho. Também gostaria de dedicar aos meus professores Maykmiller e Igor, que sempre me auxiliaram com todos seus conhecimentos durante minha graduação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer meus pais, Marcio e Angélica, por terem garantido que esse sonho pudesse ser realizado, pois me deram total apoio para que eu conseguisse me dedicar exclusivamente a minha graduação. Gostaria de agradecer as minhas irmãs Maria Fernanda e Ana Clara por todo carinho e amor incondicional.

Agradeço a minha namorada Giovana por todo apoio e incentivo que me deu durante a graduação. Agradeço ao filho que tivemos, Gustavo, que foi um anjo na minha vida, repleto de amor e felicidade.

Também sou grato a todos meus amigos que conheci durante a graduação e que vou levar para a vida toda, vocês são minha família de Lavras. Giovanna, Maycon (Isaac), Breno, Isadora e Gabriel Teles, vocês são os melhores amigos que a Engenharia Civil me trouxe, foram muitos trabalhos, projetos e perrengues vividos juntos, mas também teve muita coisa boa e divertida. Um agradecimento a todos da Republica Perdidão que me acolheram quando cheguei em Lavras sem conhecer ninguém. Agradeço também ao Wilgner e Wesley por essa amizade desde o início do curso, foi muito bom morar com vocês. Agradeço também ao núcleo de estudos em estruturas (NEEST) que me apresentou a pessoas incríveis e me ajudou muito no crescimento pessoal e profissional. Um agradecimento a equipe 170 do segundo concurso do CBCA, fizemos um trabalho incrível e não teríamos chegado aonde chegamos se não fosse com a ajuda de todos vocês.

Sou muito grato a todos professores da UFLA, por todo ensinamento passado e pelas palestras e seminários. Vocês me garantiram uma formação completa e de qualidade. Agradeço principalmente ao meu orientador Igor e ao Professor Maykmiller, que estiveram totalmente a disposição para me ensinar e me apresentar a área de estruturas, na qual me encontrei dentro da Engenharia Civil.

Um agradecimento especial a Universidade Federal de Lavras, por toda infraestrutura a disposição para um ensino de qualidade, repleta de profissionais qualificados.

RESUMO

O trabalho visou o estudo do comportamento não linear de estruturas mistas de aço e concreto via Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Molas rotacionais fictícias foram usadas nas extremidades dos elementos finitos, onde a perda gradual de rigidez à flexão foi determinada pela combinação de esforços normais e de flexão (NM) na seção transversal. Os limites dos regimes não fissurado, elástico e plástico da seção foram feitos no diagrama de interação NM. Este diagrama foi obtido via Método da Compatibilidade de Deformações, onde foi feita a análise não linear da seção transversal. A fissuração do concreto e a interação parcial foram explicitamente simuladas com a introdução desses efeitos na equação do momento de inércia efetivo da seção. A formulação via método dos deslocamentos foi referenciada ao sistema corrotacional e acoplada a estratégias de continuação para extrapolar possíveis pontos críticos nas curvas carga-deslocamento. Para a validação das simulações numéricas, os resultados encontrados com a formulação proposta foram confrontados com dados numéricos e experimentais presentes na literatura. Foram simulados vigas, pilares e pórticos mistos de aço e concreto. Em uma análise estatística das cargas limites, foi possível verificar, em termos médios, a precisão da formulação apresentada que também apresenta baixa dispersão dos dados. A perda gradativa de rigidez devido a fissuração eliminou problemas observados em trabalhos anteriores, aproximando a trajetória de equilíbrio numérica do comportamento real da estrutura. A interação parcial foi calibrada através do estudo de uma viga contínua e posteriormente aplicada na simulação de um pórtico simples. As respostas obtidas foram condizentes com o esperado. Houve uma queda de rigidez, para cada grau de interação. Quanto menor o grau de interação menor a rigidez. E também quanto menor o grau de interação menor foi a capacidade resistente de cada um dos sistemas analisados.

Palavras-chave: Estruturas mistas aço-concreto, curvas de interação, pseudo-molas, fissuração, interação parcial

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Relações constitutivas adotadas para o concreto e para o aço	21
Figura 2.2 – Campo de deformações para um problema plano	23
Figura 2.3 – Processo iterativo para construção da curva momento-curvatura	24
Figura 2.4 – Campo de deformações descontínuo	25
Figura 2.5 – Curva de interação $N \times M$	29
Figura 2.6 – Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas	30
Figura 2.7 – Concreto sob compressão: definição da deformação elástica	32
Figura 2.8 – Tipos de interação em vigas mistas de aço-concreto	33
Figura 2.9 – Elemento finito híbrido	34
Figura 2.10 – Elemento finito híbrido deformado	35
Figura 3.1 – Fluxograma das etapas de desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso	39
Figura 3.2 – Rotinas trabalhadas no programa CS-ASA	41
Figura 3.3 – Montagem do arquivo de entrada	44
Figura 4.1 – Trajetória de equilíbrio da viga mista contínua (dimensões em cm)	47
Figura 4.2 – Modelo idealizado para análise de pilares isolados com excentricidade	50
Figura 4.3 – Pilar de Foure	51
Figura 4.4 – Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais	52
Figura 4.5 – Equilibrium paths for composite portal frame	54
Figura 4.6 – Trajetória de equilíbrio para o pórtico simples misto com diferentes graus de interação	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Dados dos materiais e cargas limites	48
Tabela 4.2 – Propriedades geométricas e dos materiais	50
Tabela 4.3 – Comparação das cargas últimas	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Considerações iniciais	19
2.2	Comportamento dos materiais	20
2.2.1	Aço dos perfis, aço das armaduras e concreto	20
2.2.2	Conectores de cisalhamento	21
2.3	Comportamento dos elementos fletidos	22
2.3.1	Relação Momento-curvatura	22
2.3.2	Elementos com interação parcial	24
2.3.3	Elementos com interação total	26
2.4	Comportamento dos elementos flexo-comprimidos	28
2.5	Degradação da rigidez à flexão	28
2.5.1	Plastificação	28
2.5.2	Fissuração	30
2.5.3	Interação parcial	32
2.6	Formulação do elemento	34
3	METODOLOGIA	39
3.1	Considerações iniciais	39
3.2	Rotinas no software CS-ASA	40
3.2.1	Critérios para seleção de exemplos	42
3.3	Arquivo de entrada de dados	43
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	47
4.1	Viga mista contínua com interação parcial	47
4.2	Pilares curtos com materiais de alta resistência	47
4.3	Pilares mistos retangulares totalmente preenchidos com concreto	49
4.4	Pórtico simples de aço/misto	52
4.5	Aplicação numérica	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57

5.1	Conclusões	57
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	58
	REFERÊNCIAS	59
	APENDICE A – Dedução do método iterativo de Newton Raphson para a obtenção da relação momento curvatura	63
	APENDICE B – Dedução da matriz constitutiva da seção transversal com interação Parcial	65
	APENDICE C – Dedução da matriz constitutiva da seção transversal com interação total	67

1 INTRODUÇÃO

As estruturas mistas de aço e concreto podem ser definidas pela união total ou parcial de um perfil de aço a um elemento de concreto, visando o melhor aproveitamento físico e mecânico dos dois materiais. O comportamento dos dois materiais em um único elemento estrutural pode ser definido como conjunto se houver: atrito, aderência ou uso de meios mecânicos (conectores) para ligá-los. É importante ressaltar também, que as áreas das seções transversais do aço e do concreto apresentam ordem de grandeza semelhante, permitindo que o comportamento da peça seja regido por ambos, sem o domínio de um material sobre o outro.

Para uma análise estrutural com resultados mais próximos da realidade, é necessário considerar os efeitos não lineares, que são provenientes da fissuração e plastificação dos materiais, da geometria das estruturas e do comportamento das ligações da estrutura, sendo no caso das estruturas mistas, o efeito da interação parcial ou total da ligação aço-concreto. A consideração desses efeitos na análise é extremamente importante para que, além de representar de maneira mais adequada o que ocorre na prática, a estrutura exerça satisfatoriamente a função para a qual foi projetada, já que eles contribuem para o aumento das solicitações e a deslocabilidade nos elementos. Já a análise estrutural linear elástica não considera nenhum desses fatores, se tornando assim um método pouco confiável na descrição do comportamento real das estruturas.

Para a obtenção da capacidade resistente dos elementos estruturais e sistemas mistos de aço e concreto, é necessário levar em consideração diversas fontes de não linearidade. O sistema estrutural misto é bastante difundido mundialmente, porém os complexos efeitos oriundos dessa tipologia estrutural ainda necessitam de estudos para uma avaliação numérica mais precisa. Dessa forma, torna-se necessário o estudo de formulações numéricas eficientes. Encontram-se na literatura formulações que consideram os efeitos não lineares concentrados nos pontos nodais que são precisas na simulação da não linearidade geométrica e da plastificação dos materiais. Ainda assim, os efeitos da fissuração do concreto e da interação parcial são fontes de estudos para a obtenção de metodologias numéricas cada vez mais realistas.

A busca por formulações mais eficientes para análise de estruturas mistas de aço e concreto induz a utilização da análise da plasticidade de forma generalizada pelo Método da Zona Plástica (MZP). Considera-se as deformações de maneira direta, facilitando a modelagem. Embora seja

considerado mais preciso (CHEN; KIM, 1997), o MZP demanda um intenso esforço computacional. Já o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) é uma metodologia com boa precisão e com menor esforço computacional. O MRPR está associado à análise de estruturas metálicas (CHAN; CHUI, 2000; SILVA, 2009) e mistas (FONG; CHAN, 2012; LEMES, 2015). Nesse modelo a degradação da rigidez é feita por pseudo-molas inseridas nas extremidades dos elementos finitos. A degradação da rigidez inicia-se quando a combinação de esforço normal e momento fletor ultrapassa a curva de início de plastificação. Em que a seção transversal apresenta comportamento linear elástico até alcançar a curva de início de plastificação.

Segundo Lemes et al. (2017b) a simulação de elementos de concreto armado perde a precisão pelo fato do regime linear limitado pela curva de início de plastificação contrapõe o comportamento não linear do concreto sob compressão, excluindo os seus efeitos de fissuração tanto em estruturas de concreto armado quanto em estruturas mistas. A degradação da rigidez através da pseudo-molas foi inicialmente definida para elementos metálicos com comportamento elasto-plástico perfeito e isotrópico (CHAN; CHUI, 2000). O uso de pseudo-molas proporciona bons resultados para a análise não linear de aços, porém também pode ser utilizado em seções mistas de aço e concreto através da homogeneização da seção transversal (FONG; CHAN, 2012; LEMES, 2015; LEMES et al., 2017a; LEMES et al., 2017b).

Análise de estruturas mistas com interação parcial ainda é pouco explorado, sendo encontrado em poucos trabalhos (LIEW; CHEN; SHANMUGAM, 2001; IU; BRADFORD; CHEN, 2009; IU, 2016). Sendo que os três trabalhos citados apresentam suas simulações numéricas introduzindo a conexão deformável da mesma forma. As considerações feitas na simulação se baseiam na norma americana para vigas mistas de aço e concreto (AISC LRFD, 2016). Basicamente é feito a redução do momento de inércia da seção mista conforme o grau de interação proporcionado pelos conectores de cisalhamento. A NBR 8800 (ABNT, 2008) utiliza do mesmo procedimento para calcular o momento de inércia efetivo da seção transversal de estruturas mistas com interação parcial.

O objetivo do presente estudo é utilizar a plataforma *Computational System for Advanced Structural Analysis* (CS-ASA) (SILVA, 2009; CARVALHO, 2020) para avaliar o comportamento de estruturas mistas de aço e concreto considerando os efeitos da não linearidade geométrica, do material e a consideração da fissuração e da interação parcial. Tais efeitos foram considerados con-

centrados nos pontos nodais usando o MRPR. Os efeitos da fissuração e da interação parcial foram explicitamente considerados no momento de inércia da seção transversal, implicando diretamente na queda de rigidez à flexão dos elementos. Nestes casos, as equações normativas prescritas pela NBR 6118 (ABNT, 2014) e pela NBR 8800 (ABNT, 2008) foram consideradas. O presente estudo se torna único na literatura pela forma da consideração dos efeitos não lineares concentrados acoplados à fissuração e à interação parcial definidas pela degradação do momento de inércia da seção.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Considerações iniciais

A busca pela descrição realista do comportamento de estruturas mistas por metodologias computacionais está diretamente ligada aos métodos que consideram os efeitos não lineares distribuídos ao longo do comprimento dos elementos gerados na discretização da estrutura. Nessa abordagem, a formulação considera as deformações explicitamente, permitindo a modelagem dos mais diversos materiais desde que suas relações constitutivas uniaxiais fossem introduzidas na análise. Embora seja considerada mais precisa, esta metodologia requer intenso esforço computacional. Como solução alternativa, Ngo-Huu e Kim (2012) e outros trataram a região central do elemento finito como linear-elástica, e em comprimentos pré-definidos próximos aos pontos nodais o comportamento inelástico foi avaliado.

Outra forma de consideração dos efeitos não lineares, é aquela que os considera exclusivamente nos pontos nodais. Apesar de ser um modelo mais simples, apresentou resultados com precisão considerável em suas respostas numéricas (LIU; LIU; CHAN, 2012b), (LEMES et al., 2017a). O Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) clássico tem sua formulação baseada no elemento finito híbrido com pseudo-molas (molas fictícias) nas extremidades do elemento, onde a degradação da rigidez dessas molas é responsável pela simulação da não linearidade do material sob possibilidade de três regimes: linear-elástico, elastoplástico e plástico. O regime elástico-linear contradiz o comportamento não linear do concreto sob compressão, além de não haver considerações sobre a fissuração nesta metodologia. Para corrigir esses problemas, Lemes et al. (2017c) propuseram o acoplamento do método da compatibilidade de deformações ao MRPR, onde tanto a capacidade de carga quanto a rigidez foram avaliadas com eficácia, melhorando a precisão da análise baseada na plasticidade concentrada.

De modo a corrigir os problemas gerados pela fissuração do concreto dentro do MRPR, Lemes (2018) propôs a consideração explícita da fissuração por meio da imposição dos regimes fissurado e não fissurado dentro das curvas de interação. Assim, a partir do instante em que uma seção apresenta sollicitação maior que a resistida pelas tensões de tração do concreto, o momento de inércia da seção transversal inicia a degradação por meio da equação de Branson e Metz (1963).

A proposição dos referidos autores gerou resultados precisos em relação a dados experimentais presentes na literatura.

Para que um sistema construtivo seja competitivo no mercado, o mesmo deve ser economicamente viável e mecanicamente eficiente. As estruturas mistas de aço e concreto apresentam vantagens no que se diz respeito à capacidade resistente, ductilidade, custo benefício, rigidez, proteção do aço quando submetido a incêndio, proteção à corrosão quando o perfil metálico é envolto por concreto, entre outros. Segundo Griffis (1986), os elementos metálicos apresentam redução do peso total da estrutura e conseqüentemente uma redução dos custos atrelados a fundação, e os elementos de concreto garantem um amortecimento considerável à estrutura. Outro fator de destaque desse tipo de estrutura é a redução do tempo de execução da obra e gastos com escoramentos, pois durante a cura do concreto, a estrutura é suportada pelos perfis metálicos e formas, aumentando o espaço de circulação na obra (LEMES et al., 2017a).

As metodologias numéricas para simulação do comportamento de estruturas são abordagens muito valiosas para os projetistas e analistas estruturais. Isso se deve às equações diferenciais dos problemas de engenharia estrutural serem inviáveis de serem solucionadas analiticamente. A metodologia numérica com maior destaque é o Método dos Elemento Finitos (MEF), que consiste na divisão do elemento em subelementos unidos através de pontos nodais, gerando assim uma malha. Quanto mais refinada for essa malha, maior o número de elementos e nós, mais precisa será a análise estrutural, porém o esforço computacional pode ser elevado.

2.2 Comportamento dos materiais

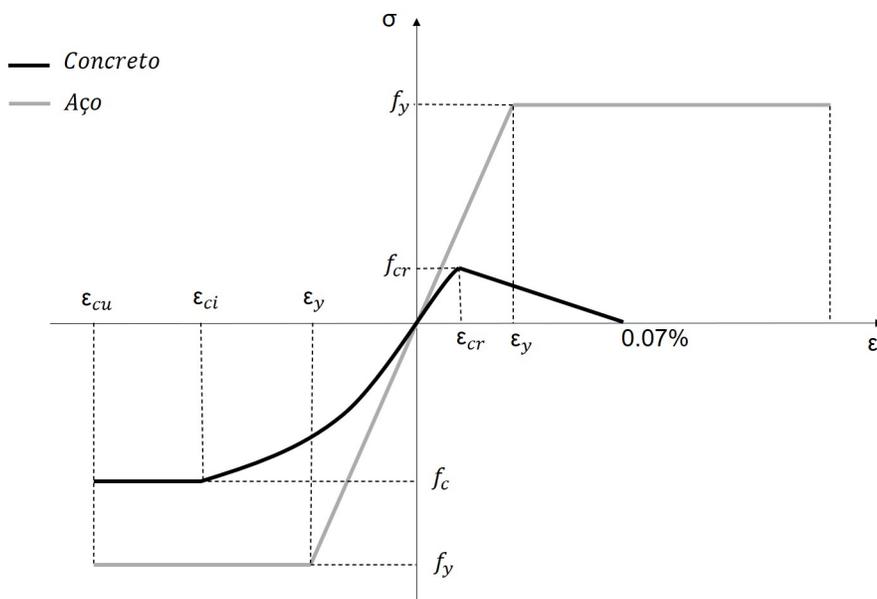
2.2.1 Aço dos perfis, aço das armaduras e concreto

A descrição do comportamento uniaxial do concreto comprimido é feita pela relação constitutiva parábola-retângulo apresentada na NBR 6118 (ABNT, 2014). Sob tração, adotou-se para o concreto o modelo constitutivo bilinear sendo a máxima deformação de tração limitada em 0.07% (BRATINA; SAJE; PLANINC, 2004).

Para as armaduras e perfis de aço, desprezou-se totalmente o efeito de encruamento, estabelecendo assim um modelo elastoplástico perfeito. Na Figura 2.1 são ilustrados os comportamentos

dos materiais que compõem a seção mista. Devido às diferenças constitutivas dos aços das armaduras e perfis, deve-se fazer um ajuste nos valores das tensões e deformações para cada material.

Figura 2.1 – Relações constitutivas adotadas para o concreto e para o aço



Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 2.1, f_{cr} e ϵ_{cr} são, respectivamente, o limite máximo de resistência e deformação para o concreto sob tração, sendo que após atingir essa resistência máxima, inicia-se o processo de fissuração; f_c e ϵ_{cu} são os valores máximos de resistência e deformação do concreto sob compressão, respectivamente; ϵ_{ci} é a deformação inicial no instante que o concreto atinge a sua tensão máxima f_c . Como o aço é um material isotrópico, as variáveis de compressão e tração são as mesmas, sendo f_y o valor máximo de tensão (tração ou compressão) do aço das armaduras e perfis metálicos, e a variável ϵ_y é a deformação limite do regime elástico.

2.2.2 Conectores de cisalhamento

A interação parcial é representada através da introdução de um coeficiente na análise. Diversos modelos constitutivos são apresentados na literatura, sendo o de maior destaque o de Ollgaard, Slutter e Fisher (1971) que descreve a curva força cortante \times deslizamento relativo. Nesse sentido, um grau de liberdade deve ser adicionado para simular a conexão deformável entre a laje de concreto e o perfil de aço.

Nesse trabalho, para consideração da interação entre os elementos foi tomado com base o que é descrito na NBR 8800 (ABNT, 2008), ou seja, a inserção de um fator que propõem uma redução no valor do momento de inércia como uma forma simplificada de avaliar a perda ou ganho de rigidez do elemento estrutural em função do grau de interação.

2.3 Comportamento dos elementos fletidos

2.3.1 Relação Momento-curvatura

Foi utilizada a abordagem matemática definida pelo método iterativo de Newton-Raphson para a montagem da curva momento-curvatura. Para um mesmo valor de força axial, N , são incrementados momentos fletores solicitantes, M , até que o último momento resistente seja atingido. A estratégia para a obtenção dos incrementos é baseada em uma função entre momento fletor e curvatura, tal como segue (ZUBYDAN, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (2.1)$$

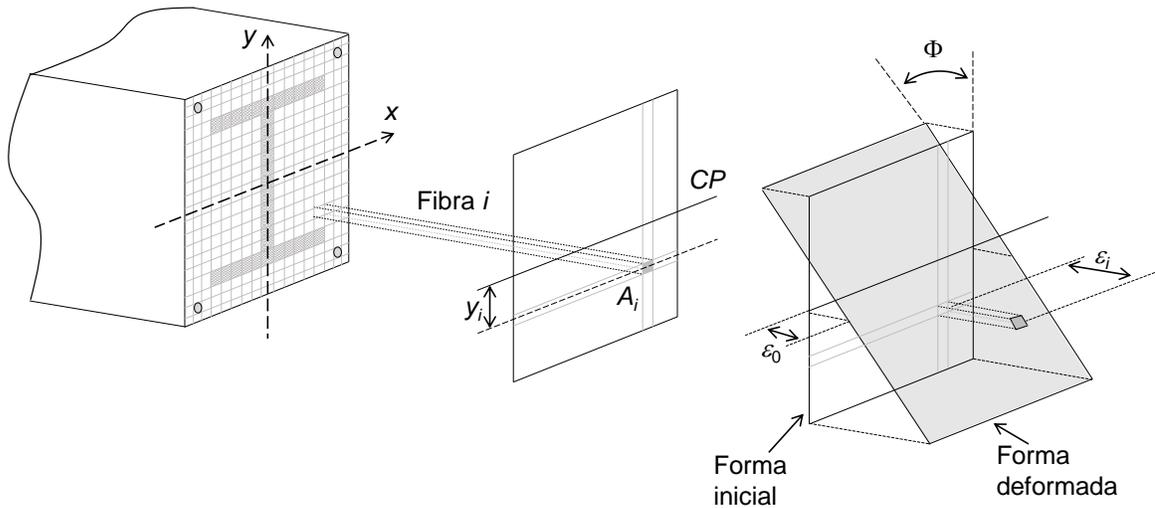
no qual o índice j refere-se ao incremento anterior, Φ é um valor constante de incremento para curvatura e EI é a rigidez à flexão da seção transversal. Nessa função, verifica-se que caso a seção transversal apresente perda de rigidez à flexão, os incrementos são reduzidos. Assim, é possível diminuir o número de iterações quando a relação momento curvatura se aproximar do seu ponto limite de momento fletor.

Uma forma bastante eficiente para descrever a distribuição de deformações, é a discretização da seção transversal de forma bidimensional (x e y). Essa divisão tem como objetivo captar a deformação axial no centroide plástico (CP) de cada subárea, e através das relações constitutivas dos materiais, obter as tensões σ_i . Esse processo é demonstrado na Figura 2.2, sendo necessário para essa metodologia saber as áreas das subdivisões, A_i , e sua respectiva posição em relação ao CP da seção transversal (LEMES, 2018).

Para a obtenção do equilíbrio da seção transversal deve se respeitar a seguinte equação:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (2.2)$$

Figura 2.2 – Campo de deformações para um problema plano



Fonte: (LEMES, 2018).

em que o vetor de forças externas \mathbf{f}_{ext} é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M , aplicados na seção transversal. Já as forças internas, componentes do vetor \mathbf{f}_{int} , são obtidas por meio de integrais clássicas definidas nas Seções 2.3.2 e 2.3.3.

Para que a Equação 2.2 atinja o equilíbrio, e sabendo que essa mesma equação é não linear, devido às relações constitutivas dos materiais embutidas no vetor \mathbf{f}_{int} , um procedimento iterativo é necessário. Uma forma eficiente de iniciar tal processo é considerar o vetor de deformações $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (esse vetor é definido nas Seções 2.3.2 e 2.3.3), porém a convergência só é atingida na primeira iteração se forem nulos os valores dos esforços externos. Dessa maneira, o vetor de deformações para a próxima iteração $k + 1$, segundo o método de Newton Raphson, deduzido no Apêndice A, é descrito na equação a seguir:

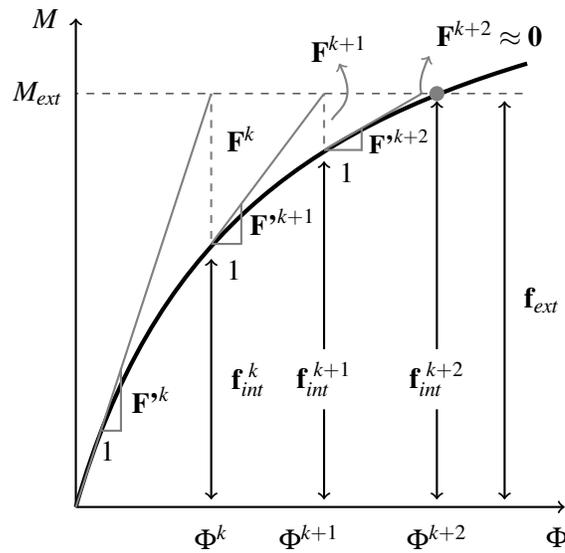
$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \left[\mathbf{F}'(\mathbf{X}^k) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (2.3)$$

em que \mathbf{F}' é a matriz jacobiana (2.13) do problema não linear.

O critério de tolerância proposto por Chiorean (2013), foi adotado neste trabalho. É um modelo baseado na razão das normas Euclidianas do vetor força, \mathbf{F} , e do vetor forças externas, \mathbf{f}_{ext} . Como já verificado em trabalhos anteriores (LEMES et al., 2017c), a tolerância é assumida como 10^{-5} .

O procedimento não linear descrito nesta seção é ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Processo iterativo para construção da curva momento-curvatura



Fonte: (LEMES, 2018).

2.3.2 Elementos com interação parcial

Seguindo a teoria de Euler-Bernoulli, considera-se que a curvatura das seções são iguais na laje de concreto e no perfil de aço, independente do grau de interação entre ambos. Assim, o deslizamento na interface aço-concreto pode ser descrito por uma repartição não uniforme da força axial entre a laje e o perfil (LEMES, 2018). São considerados no problema local três graus de liberdade correspondentes às forças atuantes na seção transversal componentes do vetor de forças externas:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N_{ext,l} \\ N_{ext,p} \\ M_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{ext,l} \\ N - N_{ext,l} \\ M_{ext} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

na qual $N_{ext,l}$ e $N_{ext,p}$ são as forças axiais externas atuantes na laje e no perfil de aço, respectivamente, M_{ext} é o momento fletor externo.

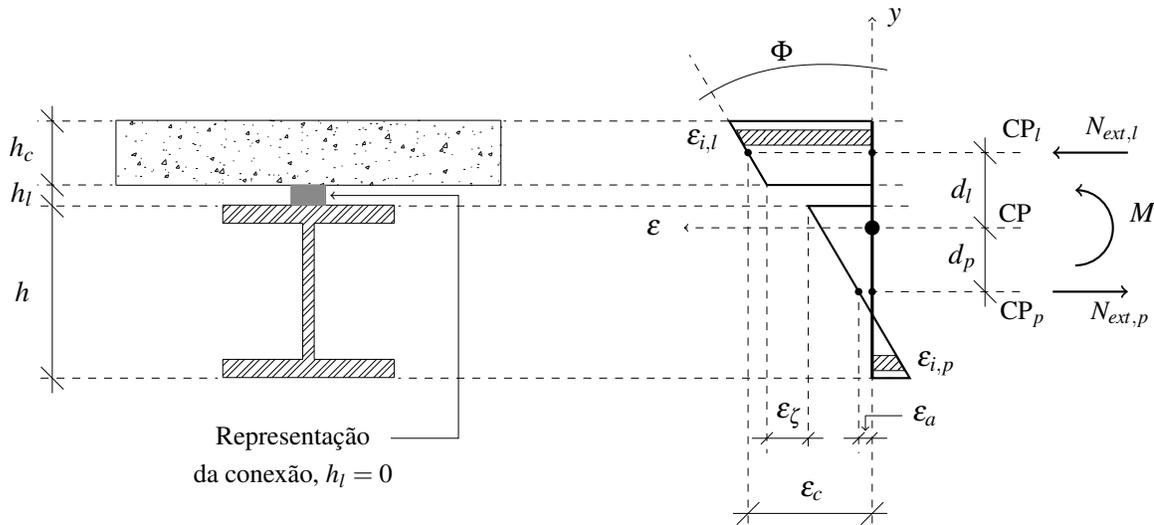
É necessário definir a carga axial absorvida pela laje, $N_{ext,l}$. Segundo Chiorean e Buru (2017), esse valor é uma fração da carga axial que atuaria na laje caso houvesse interação total, N_l^{tot} , dado por:

$$N_{ext,l} = \eta_i N_l^{tot} \quad (2.5)$$

sendo o η_i o grau de interação, definido na Seção 2.5.3.

Em uma seção de viga mista aço-concreto com interação parcial, o campo de deformações é descontínuo na interface aço-concreto como mostrado na Figura 2.4. Assim, as equações lineares que descrevem a forma da seção transversal deformada, na laje ($\varepsilon_{i,l}$) e na seção de aço ($\varepsilon_{i,p}$) são expressas como uma função da deformação axial nos centroides plásticos da seção (CP), da laje (CP_l), ε_c , e da seção de aço (CP_p), ε_a , respectivamente. Isso é:

Figura 2.4 – Campo de deformações descontínuo



Fonte: (LEMES, 2018).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,p} &= \varepsilon_a + \Phi(y_i - d_p) + \varepsilon_{ri} \\ \varepsilon_{i,l} &= \varepsilon_c + \Phi(y_i - d_l) \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que d_p e d_l são, respectivamente, as distâncias do CP_p e do CP_l ao CP da seção transversal indeformada (destaca-se que d_p é negativo). ε_{ri} é o termo correspondente das tensões/deformações residuais da fibra correspondente ao perfil de aço.

Na notação de matriz que se segue, ε_c , ε_a e Φ , são três graus de liberdade da seção de viga mista aço-concreto e são componentes do vetor de deformação \mathbf{X} , descrito como:

$$\mathbf{X}^T = [\varepsilon_c \quad \varepsilon_a \quad \Phi] \quad (2.7)$$

O vetor de forças internas para este caso é expresso pela integração das tensões atuantes na área de cada material constituinte da seção e somatórios representando as armaduras discretizadas presentes na laje de concreto. Portanto:

$$\mathbf{f}_{int} = \left\{ \begin{array}{l} N_{int,l} = \int_{A_l} \sigma [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_i [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\ N_{int,p} = \int_{A_a} \sigma [\varepsilon_p (\varepsilon_a, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_{A_l} \sigma [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] y dA + \int_{A_a} \sigma [\varepsilon_p (\varepsilon_a, \Phi)] y dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_i [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

em que A_l e A_a são as áreas da laje e do perfil de aço, respectivamente, M_{int} é o momento fletor interno e as forças axiais internas atuantes na laje de concreto e no perfil de aço são $N_{int,l}$ e $N_{int,p}$. Já as armaduras são tidas como elementos discretos de área individual A_{bi} devendo ser feita a varredura nas n_b barras.

O procedimento não linear aqui descrito está desenvolvido no Apêndice B, tem-se ainda a definição da matriz constitutiva da seção transversal:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_c} & f_{12} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_a} & f_{13} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_c} & f_{22} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_a} & f_{23} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \Phi} \\ f_{31} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_c} & f_{32} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_a} & f_{33} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.3.3 Elementos com interação total

Para elementos com interação total, a distribuição das deformações na seção mista para uma combinação de esforços axiais e de momento fletor pode ser observado na Figura 2.2, onde a deformação axial na i -ésima fibra, ε_i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri} \quad (2.10)$$

sendo ε_0 a deformação axial no CP, y_i a distância entre os centróides plásticos (CP) da fibra analisada e da seção transversal, e Φ a curvatura da respectiva fibra deformada. ε_{ri} é o termo correspondente das tensões/deformações residuais do perfil de aço, ou seja, esse termo só é necessário quando a fibra analisada for correspondente a um perfil de aço.

Para a equação de equilíbrio da seção (Equação 2.2), o vetor de forças externas f_{ext} é dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

O vetor de forças internas f_{int} é calculado através de integrais clássicas para o momento fletor, M_{int} , e esforço axial, N_{int} , ε_0 e Φ são posições do vetor de deformações e n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção. Sendo conhecidos os valores das áreas, A_i , e a posição de y_i , as integrais se tornam somatórios como descrito:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{Bmatrix} N_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)] y dA \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} N_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \Phi)] A_i \\ M_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \Phi)] y_i A_i \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Através da equação de interação 2.3, tem-se que o termo \mathbf{F}' é a matriz constitutiva da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Equação 2.2, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i & f_{12} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i & f_{22} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

em que E_T é o módulo de elasticidade tangente. A dedução da Equação 2.13 se encontra no Apêndice C.

2.4 Comportamento dos elementos flexo-comprimidos

Quando aplicado um esforço axial, e o mesmo atingir o momento máximo da relação momento-curvatura, ocorre a plastificação total da seção transversal. Esse par de esforços representam um ponto na curva de interação $N \times M$. A mesma forma de raciocínio é utilizada para a criação das curvas de início de fissuração e início da plastificação. Para um dado esforço combinado N e M , quanto a primeira subárea de concreto atingir uma deformação superior à deformação de início de fissuração do concreto, ε_{cr} , tem-se o momento de início de fissuração, M_{cr} . E, quando a primeira subárea atingir a deformação axial $\varepsilon_{ci}/2$ (FONG, 2012) para o concreto ou as deformações de escoamento do aço (do perfil ou da armadura), tem-se o momento de início de plastificação, M_{er} .

As curvas de interação são construídas antes da análise estrutural, fora do ciclo incremental-iterativo. Assim, as curvas nada mais são que uma série de pares ordenados $N \times M$. Assim, a relação momento-curvatura é feita para cada incremento de momento fletor até que a matriz jacobiana (Equação 2.13) se torne singular.

Após iniciada a análise estrutural é necessário conhecer os valores do momento de plastificação reduzido, M_{pr} , além dos demais momentos fletores críticos, M_{er} e M_{cr} , para um dado valor de esforço normal, N . Possibilitando assim que qualquer ponto da curva de interação, mostrado na Figura 2.5, possa ser obtido com a interpolação, definida como segue:

$$M_{pr} = \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N - N_j) + M_j \quad (2.14)$$

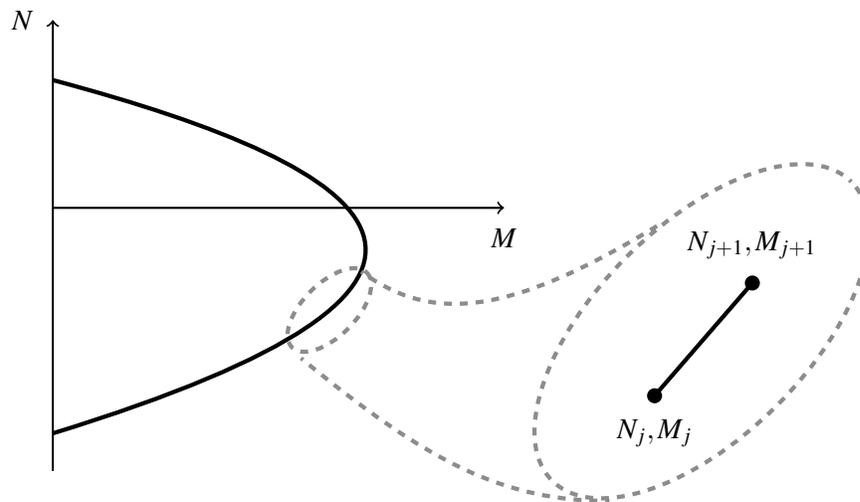
sendo j e $j+1$ os pontos que apresentam esforço normal N_j e N_{j+1} imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor de N .

A Equação 2.14 pode ser adaptada às curvas de início de fissuração e início de plastificação.

2.5 Degradação da rigidez à flexão

2.5.1 Plastificação

O MRPR simula a plasticidade através da degradação da rigidez à flexão da seção através de pseudo-molas. Dessa forma é necessário obter formas de degradação da rigidez dessas molas condizentes com o material empregado na seção transversal. Essa metodologia foi criada para si-

Figura 2.5 – Curva de interação $N \times M$ 

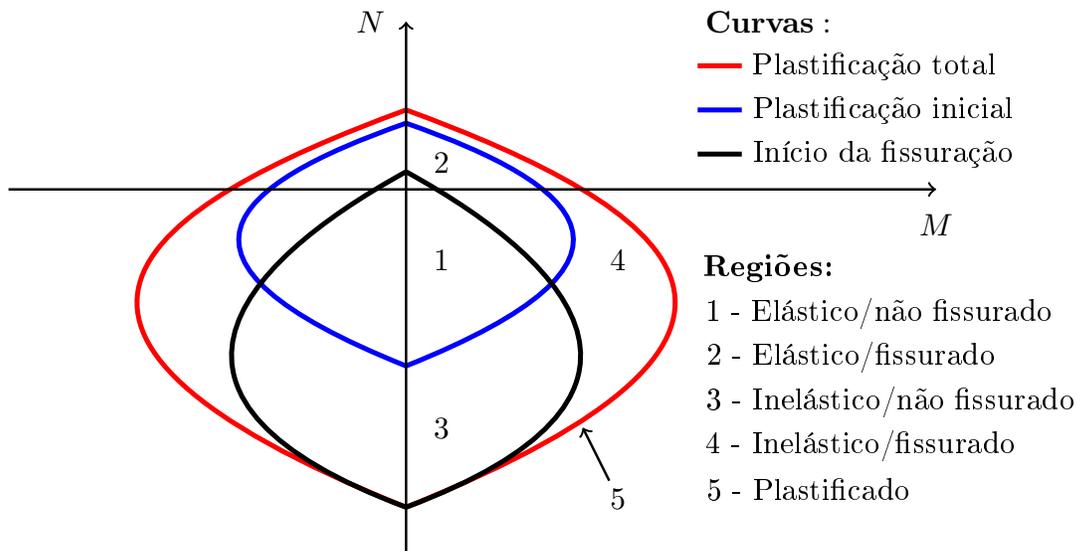
Fonte: (LEMES, 2018).

mular o comportamento elastoplástico perfeito do elemento de aço. Então se tratando de elementos de concreto armado, foi necessário realizar uma modificação na metodologia original conforme proposto no presente trabalho.

A Figura 2.6 ilustra três curvas de interação referente a uma dada seção transversal. A curva de plastificação total indica o limite resistente, já a curva de início de plastificação define a região elástica, e a curva de início de fissuração delimita o estado não fissurado da seção transversal. Todas essas curvas são frutos de uma combinação entre o esforço axial e um momento fletor atuante em torno de um dos eixos principais de inércia. A curva de início de fissuração não era necessária na proposta original do MRPR (CHAN; CHUI, 2000), uma vez que se tratava exclusivamente de sistemas estruturais de aço. Porém, na evolução do método nota-se a necessidade de introduzir essa curva para melhor se aproximar do comportamento real de estruturas de concreto armado, como observado por Lemes et al. (2017b).

Na Figura 2.6 é possível observar também quatro regiões. Dessa forma, necessita-se da definição de expressões para a simulação da rigidez da pseudo-mola em cada uma das regiões descritas.

Figura 2.6 – Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas



Fonte: (LEMES, 2018).

$$\text{se } M \leq M_{er} : S_p = 1 \times 10^{10}$$

$$\text{se } M_{er} \leq M \leq M_{pr} : S_p = \frac{E_a I_{hom}}{L} \left(\frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \quad (2.15)$$

$$\text{se } M_{pr} \leq M : S_p = 1 \times 10^{-10}$$

em que L é o comprimento do elemento finito, M_{pr} e M_{er} são, respectivamente, os momentos resistente último e de início de plastificação; E_a é o módulo de elasticidade do aço; e I_{hom} é o momento de inércia da seção homogeneizada, como demonstrado no próximo item.

Observando as Equações 2.15 e a Figura 2.6, e levando em consideração o modelo clássico do MRPR, as três equações definem a rigidez das pseudo-molas para as regiões anteriormente citadas. Nas regiões 1 e 2, tem-se que a seção está em regime elástico. Nas regiões 3 e 4, a mesma se encontra em processo de degradação da rigidez devido a deformações plásticas. E por fim, quando a plastificação completa da seção ocorre (região 5).

2.5.2 Fissuração

O efeito da fissuração é simulado através da equação proposta por Branson e Metz (1963), que é utilizada em várias formas por normas de projeto. Nesta proposta, uma interpolação cúbica

entre o momento de inércia da seção intacta e o momento fletor da seção totalmente fissurada é feito tal como segue:

$$\begin{aligned} \text{se } M \leq M_{cr} : \quad I_{ef} &= I_c \\ \text{se } M > M_{cr} : \quad I_{ef} &= \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3\right] I_{cr} \quad I_{ef} \leq I_c \end{aligned} \quad (2.16)$$

sendo M_{cr} e M , respectivamente, o momento de início de fissuração e o momento fletor atuante na seção; I_{cr} o momento de inércia da seção fissurada, obtido na avaliação do ponto limite da análise não linear da seção transversal; I_c o momento de inércia da seção intacta, sendo a inclinação inicial da relação momento curvatura para esforço normal nulo.

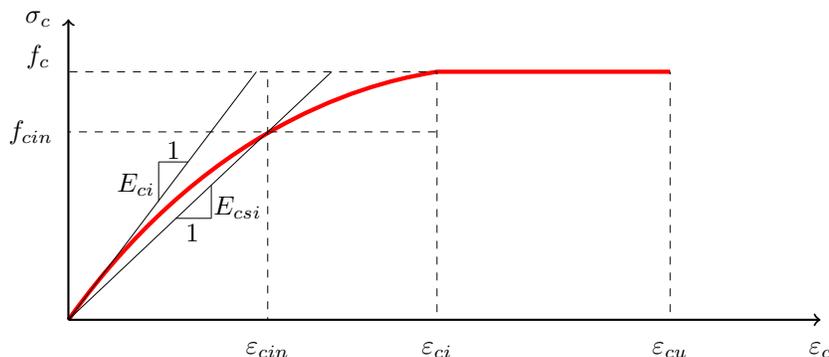
Para se obter um momento de inércia único para a seção transversal, considerando os diferentes elementos que a compõem (perfil, concreto, armaduras), faz-se a homogeneização da seção transversal, conforme a equação a seguir:

$$I_{hom} = I_a + \frac{E_b}{E_a} I_b + \frac{E_c}{E_a} I_{efc} \quad (2.17)$$

onde E_b e I_b são o módulo de elasticidade e a inércia das armaduras que podem estar presentes na laje de concreto; I_{efc} é o momento de inércia efetivo do concreto considerando os efeitos da fissuração (BRANSON; METZ, 1963). O módulo de elasticidade do concreto, E_c , é obtido de uma maneira particular. Quando o módulo de elasticidade tangencial inicial (E_{ci}), ilustrado na Figura 2.7, é utilizado como E_c , o valor do mesmo é superestimado. Isso ocorre devido ao comportamento não linear do concreto sob compressão, baixas taxas de deformação implicam em uma redução do módulo de elasticidade. Por outro lado, o uso do módulo secante elástico E_{csi} , entre 0 e $(\epsilon_{cin}, f_{cin})$ (IZZUDDIN; SMITH, 2000), gera resultados conservadores para baixos valores de deformação. Assim, propõe-se usar o valor médio entre E_{ci} e E_{csi} para E_c , que é usado na análise estrutural global. Os valores de ϵ_{cin} e f_{cin} podem ser facilmente calculados considerando a equação de Hooke ($f_c = \epsilon E_c$) e a relação constitutiva da NBR 6118 (ABNT, 2014), resultando em $\epsilon_{cin} = \epsilon_{ci} / 2$ e $f_{cin} = 0.75 f_c$. Assim, $E_{csi} = 1.75 f_c / \epsilon_{cin}$.

Após a inserção na matriz de rigidez dos efeitos da plastificação (MRPR) e da fissuração, é possível determinar a curva força x deslocamento e compará-la com o comportamento real das

Figura 2.7 – Concreto sob compressão: definição da deformação elástica



Fonte: (LEMES et al., 2018).

estruturas submetidas a algum tipo de esforço, e buscar resultados cada vez mais convergentes com os valores obtidos na literatura através da experimentação de estruturas reais.

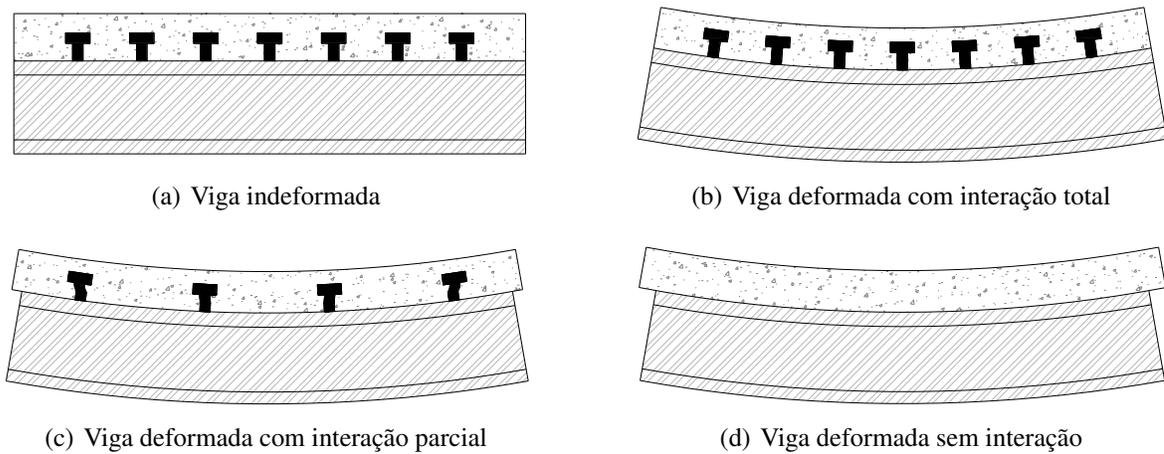
2.5.3 Interação parcial

Existem dois tipos de interação entre os materiais, a interação total e a parcial. A interação total é definida como a conexão perfeita, com isso a deformação na seção transversal é de forma aproximadamente linear. Para que isso seja possível, por exemplo, é necessário garantir um número suficiente de conectores de cisalhamento para evitar o deslizamento da interface dos materiais (Figura 2.8(b)). Esse tipo de interação é muito utilizada para elementos reticulados (FONG; CHAN, 2012; CHIOREAN, 2013; GONÇALVES; CARVALHO, 2014; LEMES et al., 2017c).

A interação é considerada parcial quando há trabalho conjunto entre os materiais, porém com a ligação entre eles sendo deformável. O deslizamento da interface implica no comportamento não monolítico do elemento estrutural (Figura 2.8(c)). Segundo Spacone e El-Tawil (2004), a interação parcial é um problema inerente às estruturas mistas e influenciam principalmente nos estados limites de utilização, dissipação de energia, distribuições locais de tensão e estados limites últimos. Esse tipo de interação é objeto de diversos estudos (SCHELLEKENS; DE BORST, 1993; SILVA, 2006; GOODMAN; TAYLOR; BREKKE, 1968), podendo assim descrever uma situação mais realista do que considerar a perfeita conexão entre os materiais.

Na Figura 2.8(d) é possível observar uma viga mista sem interação, ou seja, a laje de concreto trabalha independentemente do perfil de aço. Assim, as verificações nos elementos são feitas separadamente, não caracterizando uma estrutura mista.

Figura 2.8 – Tipos de interação em vigas mistas de aço-concreto



Fonte: (LEMES, 2018)

É denominado como grau de interação, a grandeza que define a relação da ligação entre a laje e o perfil de aço. Para se obter o valor dessa grandeza é necessário conhecer algumas variáveis, como: a rigidez e a resistência dos conectores de cisalhamento, além do esmagamento localizado do concreto na região de contato com os conectores. Dessa forma, segundo a NBR 8800 (ABNT, 2008), o grau de interação é definido como a relação entre a força resistente do conjunto dos elementos de conexão, H_{Rd} , e a força de cisalhamento solicitante de cálculo entre a laje e o perfil de aço, H_{Sd} , ou seja:

$$\eta_i = \frac{\Sigma H_{Rd}}{H_{Sd}} \quad (2.18)$$

Apesar da norma brasileira fornecer os limites inferiores do grau de interação para os casos de seções duplamente simétricas e monossimétricas, não se faz referência a uma margem onde a interação possa ser dita total, a não ser que $\eta_i = 1$. Dessa forma, para regiões de momento positivo em vigas mistas de alma cheia, é feita a redução do momento de inércia efetivo segundo a NBR 8800 (ABNT, 2008):

$$I_{ef} = I_a + \sqrt{\eta_i} (I_{hom} - I_a) \quad (2.19)$$

em que I_a e I_{hom} são os momentos de inércia da seção do perfil de aço isolado e da seção mista homogeneizada, respectivamente.

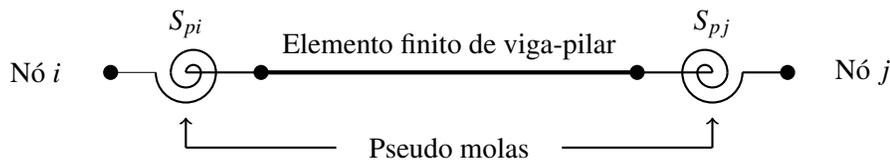
De acordo com a NBR 8800 (ABNT, 2008), para as regiões com momento fletor negativo, o momento de inercia efetivo é dado pela seção transversal do perfil de aço e as barras longitudinais da largura efetiva da laje de concreto.

2.6 Formulação do elemento

No presente trabalho, é aplicada a formulação baseada em deslocamento com plasticidade concentrada nos pontos nodais. Neste caso, a degradação da rigidez axial e à flexão ocorre exclusivamente nos nós. Em seguida, o método é apresentado, introduzindo os efeitos da não linearidade geométrica e do material. Algumas considerações e simplificações desta formulação podem ser vistas em Lemes (2018) e Lemes et al. (2018).

Na modelagem do sistema estrutural, é utilizado o elemento finito viga-pilar híbrido de comprimento L , delimitado pelos pontos nodais i e j (Figura 2.9). Este elemento possui pseudo-molas de comprimento zero em suas extremidades, que são responsáveis pela simulação da plasticidade por meio do parâmetro S_p . O elemento finito é referenciado ao sistema corrotacional onde os graus de liberdade são as rotações nos nós i e j , dados por θ_i e θ_j , e o deslocamento axial em j , δ . Os termos M_i , M_j e P representam os momentos fletores e a força axial nos respectivos graus de liberdade. Assim, tem-se:

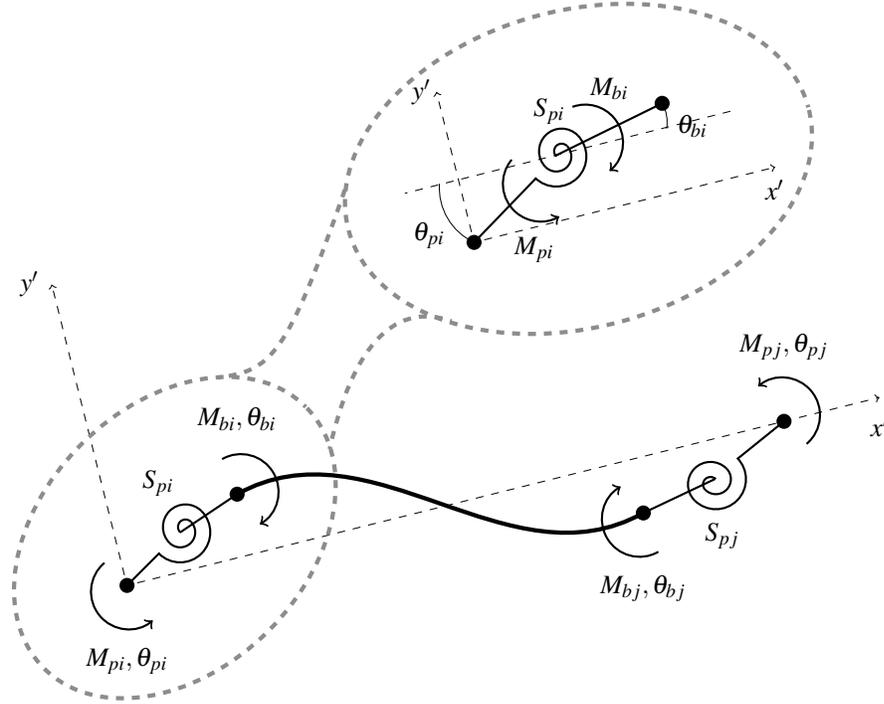
Figura 2.9 – Elemento finito híbrido



Fonte: (LEMES, 2018)

A rotação relativa das molas fictícias (ϕ_p) é definida entre os ângulos de rotação da parte conectada ao nó global do elemento estrutural (θ_p) e também da parte conectada a um outro elemento de viga-pilar (CHAN; CHUI, 2000). As relações cinemáticas, constitutivas e de equilíbrio, são escritas de forma incremental com base na configuração deformada do elemento finito, por meio da ação de momentos fletores ilustrada na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Elemento finito híbrido deformado



Fonte: (LEMES, 2018)

$$\Delta\phi_{pi} = \Delta\theta_{pi} - \Delta\theta_{bi} \quad (2.20)$$

$$\Delta\phi_{pj} = \Delta\theta_{pj} - \Delta\theta_{bj}$$

$$\Delta M_{pi} = S_{pi}\Delta\phi_{pi} \quad (2.21)$$

$$\Delta M_{pj} = S_{pj}\Delta\phi_{pj}$$

$$\Delta M_{pi} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (2.22)$$

$$\Delta M_{pj} + \Delta M_{bj} = 0$$

em que ΔM_{pi} e ΔM_{pj} são, respectivamente, os momentos fletores atuantes nos elementos de mola dos nós i e j , ΔM_{bi} e ΔM_{bj} são os momentos atuantes na extremidade do elemento de viga, $\Delta\phi_{pi}$ e $\Delta\phi_{pj}$ descrevem as rotações relativas incrementais referentes à não linearidade dos materiais simulada pelas molas fictícias.

A partir da manipulação algébrica das Equações (2.20) - (2.22) geram-se três sistemas de equações matriciais que representam o equilíbrio das molas nos nós i e j e ainda o equilíbrio no elemento de viga, conforme mostradas a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{pi} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pi} & -S_{pi} \\ -S_{pi} & S_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{pi} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{pj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pj} & -S_{pj} \\ -S_{pj} & S_{pj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{pj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Condensando os três sistemas de equações matriciais em uma única relação força-deslocamento para o elemento finito híbrido, considerando todos os graus de liberdade, pode se chegar a seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_{pi} \\ \Delta M_{pj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{pi} - \frac{S_{pi}^2(S_{pj} + k_{33})}{\beta} & \frac{S_{pi}k_{23}S_{pj}}{\beta} \\ 0 & \frac{S_{pj}k_{32}S_{pi}}{\beta} & S_{pj} - \frac{S_{pj}^2(S_{pi} + k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{pi} \\ \Delta \theta_{pj} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

na qual $\beta = (S_{pi} + k_{22})(S_{pj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$.

Os termos k_{11} , k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} , são componentes da matriz de rigidez do elemento de viga-pilar, sem as pseudo-molas, descritos por (LEMES et al., 2017c):

$$k_{11} = \frac{E_a A}{L} \quad (2.27)$$

$$k_{22} = \frac{E_a (3I_{hom,i} + I_{hom,j})}{L} + \frac{2NL}{15} \quad (2.28)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{E_a (I_{hom,i} + I_{hom,j})}{L} + \frac{NL}{30} \quad (2.29)$$

$$k_{33} = \frac{E_a (I_{hom,i} + 3I_{hom,j})}{L} + \frac{2NL}{15} \quad (2.30)$$

sendo N a força axial interna atuante, E_a o módulo de elasticidade do aço do perfil, A a área da seção transversal homogeneizada, I_{hom} o momento de inércia da seção homogeneizada, avaliado nos pontos nodais i e j , e L o comprimento do elemento finito.

A consideração da não linearidade geométrica é inserida através de uma formulação simplificada com a simples adição dos termos lineares da matriz de rigidez geométrica nos termos referentes à flexão (Equações 2.28-2.30). Optou-se pela utilização desse modelo matemático de forma simplificada, pois nas análises numéricas anteriores, com termos de ordem elevada, pouco influenciaram na resposta geral dos sistemas de concreto armado de pequeno porte simulados (LEMES et al., 2017c).

3 METODOLOGIA

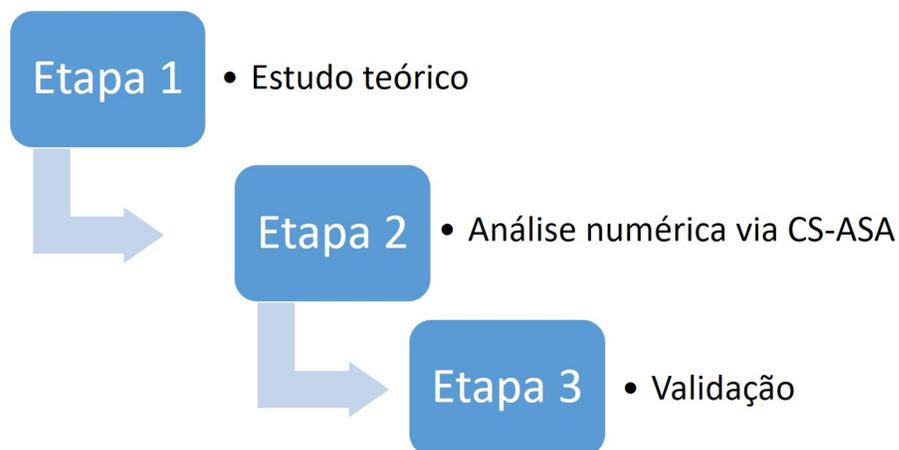
3.1 Considerações iniciais

Toda a metodologia de cálculo apresentada no Referencial Teórico (Tópico 2) foi implementada no *software* CS-ASA e foi feita a validação da formulação através de comparações com resultados experimentais e numéricos obtidos por Ansourian (1981), Liu, Gho e Yuan (2003), Iu, Bradford e Chen (2009) e Bridge (1976).

A linguagem computacional utilizada foi a *Fortran 90/95*, que foi a primeira linguagem criada para fins de pesquisa, e a mais utilizada no meio acadêmico (FILHO, 2015). Além de ser uma linguagem fácil de ser utilizada, existem muitas referências bibliográficas na literatura com esse tema.

Pelo fato de o trabalho ser teórico-numérico, sem realização de experimentos práticos, não foram necessários muitos materiais, sendo apenas necessário o computador do autor com os devidos softwares instalados. O trabalho desenvolvido pode ser dividido em 3 etapas como descrito no fluxograma da Figura 3.1.

Figura 3.1 – Fluxograma das etapas de desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso



Fonte: Do autor (2021).

Na primeira etapa foram realizados os estudos apresentados no Referencial Teórico (Tópico 2). Primeiramente, foi feito um estudo sobre o Método dos deslocamentos clássico, para a solução de problemas lineares, realizando análises estruturais à mão. Foi realizado o entendimento, montagem e dedução da matriz de rigidez, local e global, vetor das forças e deslocamentos (as

deduções se encontram no trabalho de Carvalho (2020)). Foram avaliados os regimes de comportamento de uma peça tomando como referência as curvas de interação. Por último foi introduzido os conceitos do método da Rótula Plástica Refinado, da rigidez rotacional das pseudo-molas e o método de degradação da rigidez a flexão devido à fissuração e à interação parcial, pelo momento de inércia efetivo (BRANSON; METZ, 1963; ABNT, 2008).

Na segunda etapa foi realizado um estudo da plataforma CS-ASA, onde foi apresentada a formulação já implementada no programa, a linguagem computacional, a forma de entrada de dados e o arquivo de saída. Foram gerados gráficos para os exemplos selecionados conforme item 3.2.1, para serem comparados com a literatura posteriormente.

Na última etapa foi feita a comparação com valores numéricos e experimentais encontrados na literatura (ANSOURIAN, 1981; LIU; GHO; YUAN, 2003; IU; BRADFORD; CHEN, 2009; BRIDGE, 1976). Também foram escritos artigos científicos para congressos nacionais e internacionais.

3.2 Rotinas no software CS-ASA

O *software* CS-ASA já possui uma gama de formulações implementadas na sua programação para realização das análises estruturais. Neste trabalho, foram feitas implementações e conferências do código em três macro-rotinas e três sub-rotinas.

Na Figura 3.2 está representado uma parte do código das 3 macro-rotinas (**define_akts**, **iter** e **nexinc**), porém foram excluídas partes já existentes na formulação para facilitar a visualização das rotinas que foram utilizadas nesse trabalho de conclusão de curso.

Na rotina **define_akts** é feita a montagem da matriz de rigidez através do processamento dos dados de entrada fornecidos ao programa. Essa rotina é formada por várias sub-rotinas que tem sua formulação espalhada pelo extenso código, porém com a Linguagem Fortran é possível trazer essas formulações secundárias em uma principal para realizar os cálculos requeridos. A matriz de rigidez se encontra deduzida no trabalho de Carvalho (2020).

O processo iterativo apresentado no Tópico 2.3.1 é semelhante ao realizado pela rotina **iter**, a diferença entre eles se dá basicamente pela aplicação. A Seção 2.3.1 apresenta o processo não linear na seção transversal, e a rotina **iter** faz o processo iterativo na estrutura completa. Essa macro-

Figura 3.2 – Rotinas trabalhadas no programa CS-ASA

```

=====
!          INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL/ITERATIVO
=====

incrementos: do while (flag_continua)

    inc = inc + 1
    incremento = inc

!--- Controle dos parâmetros para inicializar o processo incremental
    call ininc

!--- Montagem da matriz de rigidez tangente
    call define_akts (nddof,hing,idel,mats,secs,gama,ilg,ilgs,ilge,coord,      &
                    coorda,pt,pit,ptto,pi,fxb1,dmpc,delpi,ss,mpr,akts,psdfi,secsl,ys,ba,yb,&
                    Addv,secsf,xf,yf,er,CRES,Icrs,dslz,nclcod,alphIP,Fgef,DNint1)

!--- Calcula através da fatorização Crout os deslocamentos tangentes
    call vetor_deslocamentos      ! Subrotina interna

!=== CÁLCULO DA SOLUÇÃO PREDITA
    call scalup (fact,fload,dl,ddl,wl,GSP,CSP,cstif,qfi,nddof,pt1,ptold,pt10, &
                pt,ptto,pttoo,dt,gm,idl,dd,d,faci0,FR,dld,stifi,stif0,dt10,dt1oi,dt10)

!=== REALIZA O PROCESSO ITERATIVO
    call iter (dl,fact,faci0,fload,bet,iwinc,nddof,idel,coord,coorda,gama,mats, &
              secs,lengths,akts,d,qfi,qdl,pt1,pt,ptto,pito,gm,dt,pto,ptoo,pttoo, &
              filt1,pi1,fil1,ddl,coorda2,ptt,dt10,pit,fxb1,ilg,ilgs,ilge,hing, &
              dmpc,delpi,ss,mpr,secsl,ys,ba,yb,Addv,secsf,xf,yf,er,CRES,Icrs,dslz, &
              nclcod,alphIP,Fgef,DNint1)

!--- Impressão dos valores dos incrementos calculados
    call impressao_inc      ! Subrotina interna

!=== DEFINE O PRÓXIMO INCREMENTO
    call nexinc (bet,dl,ddl,wl,fact,fload,nddof,idel,coord,      &
                secs,mats,lengths,qfi,ptt,pt,ptold,ptto,pttoo,pi,pit,pt1,filt1,coorda, &
                szero,eload,cstif,pi1,fil1,coorda2,GSP,CSP,afact,tfact,nincr,ttl, &
                FR,gama,Fxb1,ilg,ilgs,ilge,ilgs0,Ci,fil2,Hing,DMpc,piold,fiold, &
                DelPi,ss,Sso,Mpr,iwinc,ilgphi,rot_mom,Mer,secsl,ys,ba,yb,Addv, &
                secsf,xf,yf,er,CRES,Icrs,dslz,nclcod,alphIP,Fgef,DNint1)

!--- IMPRIME OS ESFORÇOS RESULTANTES NO ELEMENTO
    call esforcos_modelo_estrutural (nddof,idel,szero,ptto,fil1,fload)

!--- VERIFICA A NECESSIDADE DE CONTINUAR A ANÁLISE
    if (inc == ninc) call define_continua(ninc,opcao_seguir,flag_continua)

    IF ((opcao_pl == 'N').or.(opcao_pl == 'n')) EXIT

end do incrementos

=====
!          FINAL DO PROCESSO INCREMENTAL
=====

```

Fonte: Do autor (2021).

rotina leva a matriz de rigidez calculada no passo anterior para dentro do seu código, atualizando-a em cada passo do processo iterativo. Após alcançar a convergência, é calculado um novo incremento de carga na rotina **nexinc**.

Na sub-rotina **defKc2_Chan_Chui_por2D_Gen** é realizada a homogeneização da seção transversal, transformando toda a seção mista aço-concreto em uma seção equivalente de aço. Também é nessa parte em que é calculada a rigidez das pseudo-molas para a matriz de rigidez que é utilizada na análise. Essa sub-rotina é usada na montagem do vetor de forças internas. Como montagem da matriz de rigidez, é usada a sub-rotina **defKg2_Chan_Chui_por2D_Gen**, em que os mesmos passos são seguidos.

O Tópico 2.6 é calculado pela sub-rotina **defkcc2_Chan_Chui_por2D**, onde é feita a montagem da matriz de rigidez no referencial corrotacional (Equação 2.26). Já a montagem das curvas de interação $N \times M$, demonstrada no Tópico 2.4, é realizada pela sub-rotina **CurvasNM**.

Após a introdução de algumas partes da presente formulação no código do CS-ASA, feita por Carvalho (2020), principalmente na avaliação da interação parcial, o presente trabalho se destaca pelas seguintes intervenções no código:

- aplicação das equações de fissuração para pilares mistos totalmente revestidos, parcialmente revestidos, tubulares circulares e retangulares;
- adequação da construção das curva de interação $N \times M$ de início de fissuração e início de plastificação. Vale lembrar que as intervenções de Carvalho (2020) foram feitas exclusivamente para vigas, onde apenas a relação momento curvatura para força normal nula era importante.
- a possibilidade da avaliação de estruturas compostas por elementos com seções transversais diferentes entre si para esta formulação. Novamente, vale ressaltar que a formulação de Carvalho (2020) permitia apenas a análise de vigas mistas.

3.2.1 Critérios para seleção de exemplos

Foram escolhidos os exemplos para validação numérica com bastante cuidado, para que nenhum fator desconsiderado na simulação numérica pudesse ocorrer na experimentação, causando assim uma divergência de dados. Os efeitos não considerados na análise numérica foram, por

exemplo, a flambagem local dos elementos constituintes do perfil de aço, flambagem distorcional da seção e flambagem lateral com torção que apesar de ser um efeito raro em vigas mistas, pode ocorrer em função da distância entre conectores. Foram usados pilares para testar a interação total, vigas mistas aço-concreto para analisar a interação parcial e pórticos para a análise do sistema como um todo.

Os artigos utilizados para o referencial teórico e validação dos resultados obtidos são provenientes do *ScienceDirect*, com acesso obtido através de *login* institucional.

3.3 Arquivo de entrada de dados

O *software* CS-ASA necessita do fornecimento de dados de entrada pelo usuário para que seja possível haver o reconhecimento da estrutura e da metodologia a ser empregada na análise. Esses dados são fornecidos através de dois arquivos de entrada, sendo o primeiro (Figura 3.3) o responsável por fornecer todos os dados da estrutura e o segundo arquivo para indicar as estratégias e parâmetros para a solução não linear. Como o foco do trabalho era a simulação de efeitos relativos à não linearidade física, não foram feitas alterações no segundo arquivo durante as análises.

Na Figura 3.3 são ilustrados os dados de entrada da coluna C1-1 de Liu, Gho e Yuan (2003) que foi utilizado para montar sua respectiva linha na Tabela 4.1, na próxima seção do texto. Em que cada variável apresentada no arquivo de entrada representa:

- para o presente trabalho o tipo de análise é sempre estática, embora seja possível realizar análises dinâmicas no *software* CS-ASA;
- modelo estrutural define o tipo de estrutura que vai ser analisado, nesse caso seria um modelo de pórtico;
- o tipo de solução adotado é a análise não linear, representada no programa pelo número 1;
- ligação semi-rígida é considerada como 0 por ser desconsiderada;
- análise plástica refinada utiliza 2 para descrever a análise elastoplástica refinada via MRPR;
- *opcaoss*, *norma* são as formulações usadas para fazer a degradação da rigidez do elemento através das molas, a combinação 4 e 3 é a que leva a formulação implementada nesse trabalho;

Figura 3.3 – Montagem do arquivo de entrada

```

COLUNA LIU ET AL(2003) - ANALISE NAO LINEAR INELASTICA - c1-1
estatica          ...tipo de analise
por              ...modelo estrutural
1               ...tipo de solucao (0 - linear; 1 - não-linear)
0              ...ligações semi-rígidas
2              ...analise plastica refinada
4 3            ...opcaoss,norma
5 4 2 2 3 1 11 1 4 8 1 ...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats(n de materiais),npmat,nsecs,npsec,nol,nobr
coor            ...MACRO-COMANDO
ppor           ...MACRO-COMANDO
5              ...npoin
1 1 0.d0       ...no,x,y
5 1 0.d0       ...no,x,y
              ...no,x,y
boun           ...MACRO-COMANDO
1 1 1 1 0     ...no,ng,dx,dy,mz
5 1 1 0 0     ...no,ng,dx,dy,mz
elem           ...MACRO-COMANDO
1 1 2 1       ...el,noi,noj,lx
4 4 5 1       ...el,noi,noj,lx
mate          ...MACRO-COMANDO
200.d3 0.d0 53.2d3 550.d0 0.d0 60.8d0 1.d0 1.d0 ...Ea, Eb, Ec, fyd, fys, fcd, alpha, beta
0.002d0 0.0035d0 0.01d0 ...eci, ecu, eu
1             ...ngelm
1 4           ...kel1,kel2
seca          ...MACRO-COMANDO
0.1003d0 0.00984d0 0.00418d0 1.d0 ...bf,h0,tf,eixo
3 4           ...st, op
0.d0 0.d0     ...Ba,yb |
1             ...ngelm
1 4           ...kel1,kel2
graf         ...MACRO-COMANDO
0 5 5        ...autopl,npl,ndl
load        ...MACRO-COMANDO
1           ...nc - numero de casos de carregamento
1 0          ...iplod,iedge
1 0.d0 0.d0 0.0d0 ...no,px,py,mz
5 0.d0 -1.d0 0.0d0 ...no,px,py,mz
end

```

Fonte: Do autor (2021).

- *npoint* é o número de nós da estrutura; *nelem* é o número de elementos; *nnode* o número de nós por elemento; *ndime* é o número de dimensões, aqui sempre adotado bidimensional; *ndofn* é o número de graus de liberdade por nó; *nmats* é o número de materiais diferentes por seção transversal (ressalta-se aqui que o uso do valor igual a 1 se refere a 1 concreto, 1 aço para perfis e 1 aço para barras); *npmat* é o número de propriedade dos materiais; *nsecs* é número de seções transversais; *npsec* é o número de propriedades das seções; *nol* é o número de divisões da malha nas seções transversais em cada direção; *nobr* é o número de linhas de barras de armadura;
- o primeiro Macro-comando indica as coordenadas de cada nó em relação a um sistema de coordenadas globais x e y . O segundo macro-comando, na sequência do primeiro indica a entrada de dados para as coordenadas de um pórtico. *ng* é um código de geração dos nós;

- o terceiro Macro-comando representa as restrições em cada nó em relação às translações em x e em y e a rotação em z (indicação do tipo de apoio da estrutura), em que 0 indica que não há restrição e 1 há restrição;
- o quarto Macro-comando indica quais nós (noi, noj) cada elemento (el) possui;
- o quinto Macro-comando é responsável pelas informações dos materiais. Ea é o módulo de elasticidade do perfil de aço; Eb é o módulo de elasticidade da armadura; Ec é o módulo de elasticidade do concreto; f_{yd} é a tensão resistente do perfil de aço; f_{ys} é a tensão resistente da armadura; f_{cd} é tensão de compressão do concreto; $alpha$ e $beta$ são coeficientes que inserem a fissuração através de uma constante, porém não é utilizada essa metodologia no presente trabalho; eci é a deformação de limite do regime parabólico do concreto; ecu é a deformação última à compressão do concreto; eu é a deformação última do aço;
- o sexto Macro-comando é sobre as características geométricas da seção transversal. bf é a base da seção transversal; $h0$ é a altura da seção transversal; tf é a espessura do perfil de aço; $eixo$; st indicam o tipo de seção(1-concreto armado, 2-aço, 3-estrutura mista para pilar e 4-estrutura mista para viga); op é a opção para considerar a tração do concreto ou não, o valor 4 indica a relação constitutiva bilinear do concreto sob tração indicada na Figura 2.1; Ba é a área das linhas das armaduras; yb é a posição das linhas das armaduras;
- $ngelm$ é o indicador de quantidade de grupos de elementos que receberão aqueles materiais e seções transversais; $kel1$ e $kel2$ indicam o intervalo, inferior e superior, dos grupos de elementos para aplicação dos dados das seções transversais e materiais;
- no sétimo Macro-comando, $graf$, indicam-se os nós para o acompanhamento dos dados pós-processados. npl e ndl são parâmetros ligados aos nós em que serão acompanhados o parâmetro de carga e o deslocamento, respectivamente, no arquivo de saída;
- No oitavo Macro-comando, $load$, relativo às cargas incrementais, nc é o número de casos de carregamento, se há carga concentrada, distribuída uniforme, distribuída triangular, etc. $iplod$ é o parâmetro de indicação de cargas nodais e $iedge$ é a indicação de cargas nos elemento. Por fim, são adicionados os carregamentos nos nós da estrutura, inserindo as cargas nas direções x e y (px e py) e o momento fletor (mz);

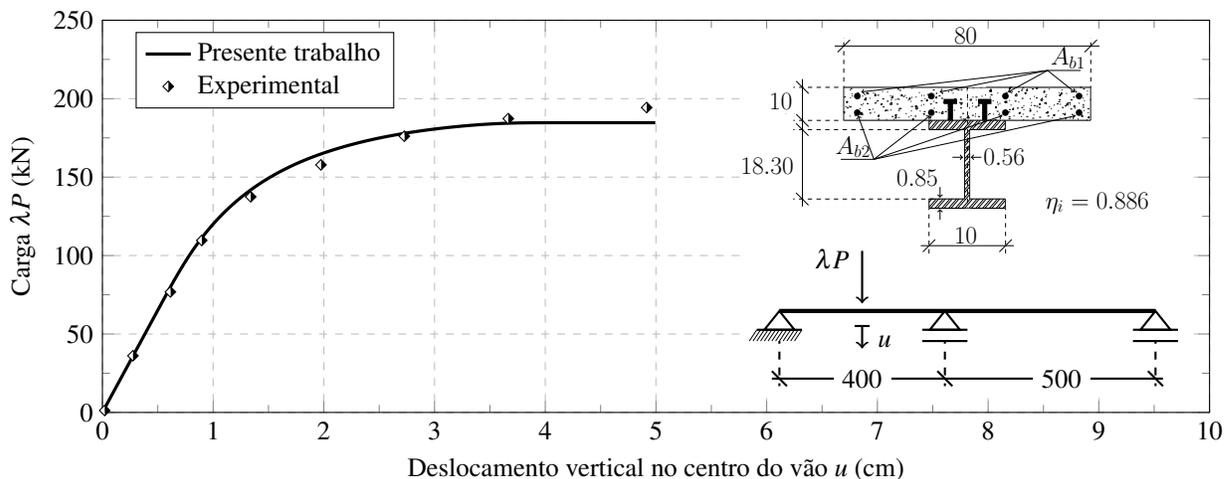
- o ultimo Macro-comando *end* encerra a entrada de dados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Viga mista contínua com interação parcial

A primeira aplicação para calibração do modelo numérico é feita considerando uma viga mista aço-concreto contínua com interação parcial. Nesta simulação, o concreto foi considerado como tendo uma resistência à compressão de $2,46 \text{ kN/cm}^2$ e a tensão de escoamento do aço foi considerada como $29,11 \text{ kN/cm}^2$, desconsiderando o encruamento. As áreas das barras presentes na laje de concreto A_{b1} e A_{b2} são iguais a 8 cm^2 e $3,16 \text{ cm}^2$ nas regiões do momento negativo e 0 cm^2 e $1,6 \text{ cm}^2$ nas regiões de momento positivo. A Figura 4.1 ilustra as trajetórias de equilíbrio da viga composta contínua. Considerando os demais dados fornecidos nesta mesma figura, é possível verificar uma aproximação satisfatória dos resultados numéricos e experimentais (ANSOURIAN, 1981).

Figura 4.1 – Trajetória de equilíbrio da viga mista contínua (dimensões em cm)



Fonte: (LIMA et al., 2020).

4.2 Pilares curtos com materiais de alta resistência

Liu, Gho e Yuan (2003) realizaram o ensaio experimental de 21 espécimes tubulares retangulares mistos. As dimensões da base, b , da altura, h , e da espessura da parede do tubo, t , dos corpos de prova são apresentados na Tabela 4.1. Os materiais utilizados eram de alta resistência, sendo o aço com f_y igual a 55 kN/cm^2 , deformação última ϵ_{cu} igual a $-0,01$ e um módulo de elas-

tidade considerado como 20000 kN/cm². A tensão de compressão característica do concreto (f_c) variou entre 60.8 e 72.1 kN/cm² e os parâmetros ε_{ci} e ε_{cu} são -0,002 e -0,0035, respectivamente. O ensaio foi realizado em pilares curtos, para que sua seção transversal desenvolvesse a sua capacidade resistente máxima. Durante a experimentação, a carga axial foi aplicada de forma concêntrica, evitando assim os esforços de flexão. Os pilares, todos simplesmente apoiados, foram discretizados da mesma forma, utilizando quatro elementos e cinco pontos nodais. Quanto às divisões da seção transversal, nível local, foram adotadas 128 subáreas.

Tabela 4.1 – Dados dos materiais e cargas limites

Espécime	b	h	t	L	f_{ck}	P_{Teste}	P_{EC4}	P_{PT}	$\frac{P_{PT}}{P_{Teste}}$	$\frac{P_{PT}}{P_{EC4}}$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(kN)	(kN)	(kN)		
C1-1	100,3	98,2	4,18	300	60,8	1490	1376	1377,25	0,924	1,001
C1-2	101,5	100,6	4,18	300	60,8	1535	1413	1413,28	0,921	1,000
C2-1	101,2	101,1	4,18	300	72,1	1740	1513	1513,32	0,870	1,000
C2-2	100,7	100,4	4,18	300	72,1	1775	1499	1499,31	0,845	1,000
C3	182,8	181,2	4,18	540	60,8	3590	3468	3468,73	0,966	1,000
C4	181,8	180,4	4,18	540	72,1	4210	3778	3778,88	0,898	1,000
C5-1	120,7	80,1	4,18	360	60,8	1450	1375	1375,26	0,948	1,000
C5-2	119,3	80,6	4,18	360	60,8	1425	1368	1368,25	0,960	1,000
C6-1	119,6	80,6	4,18	360	72,1	1560	1461	1462,29	0,937	1,001
C6-2	120,5	80,6	4,18	360	72,1	1700	1470	1471,30	0,865	1,001
C7-1	179,7	121,5	4,18	540	60,8	2530	2525	2525,11	1,001	1,000
C8-1	180,4	119,8	4,18	540	72,1	2970	2724	2724,19	0,917	1,000
C8-2	179,2	121,3	4,18	540	72,1	2590	2734	2734,44	1,056	1,000
C9-1	160,2	81,4	4,18	480	60,8	1710	1747	1746,73	1,021	1,000
C9-2	160,7	80,5	4,18	480	60,8	1820	1739	1738,78	0,955	1,000
C10-1	160,1	81,0	4,18	480	72,1	1880	1865	1864,85	0,992	1,000
C10-2	160,6	80,1	4,18	480	72,1	2100	1856	1855,75	0,884	1,000
C11-1	199,8	101,2	4,18	600	60,8	2350	2426	2426,17	1,032	1,000
C11-2	200,2	98,9	4,18	600	60,8	2380	2393	2392,87	1,005	1,000
C12-1	199,2	102,1	4,18	600	72,1	2900	2637	2636,76	0,909	1,000
C12-2	199,8	99,6	4,18	600	72,1	2800	2598	2597,57	0,928	1,000
								Média	0,945	1,000
								Desvio padrão	0,056	0,000

Junto aos dados das seções na Tabela 4.1, as cargas limites da literatura (P_{teste} e P_{EC4}) (LIU; GHO; YUAN, 2003) e obtidas com a formulação numérica apresentada (P_{PT}) são confrontadas. Verificou-se a concordância entre os resultados numéricos e experimentais. Em termos médios, os dados obtidos no presente trabalho apresentam uma variação de 5% em relação aos dados experimentais. Destaca-se a baixa dispersão dos resultados em relação à média calculada, como mostrado pelo desvio padrão, demonstrando assim, a confiabilidade dos resultados obtidos neste trabalho.

Nos resultados experimentais obtidos por Liu, Gho e Yuan (2003) é possível identificar em alguns casos onde dois espécimes com o mesmo material, o corpo de prova com maior área de seção transversal apresentou uma capacidade resistente menor. Esse efeito deveria ser o contrário, pois a redução da seção transversal implica diretamente na redução da capacidade resistente. Tal efeito pode ser observado comparando os pilares C2-1 e C2-2. No caso dos pilares C8-1 e C8-2 com dimensões das seções transversais próximas e mesmos materiais, a capacidade resistente experimental apresentou diferença de aproximadamente 13% entre os corpos de prova, sendo o pilar com as menores dimensões o com maior resistência. Nos pilares C6-1 e C6-2 é possível ver nos testes que a seção levemente maior apresentou uma capacidade de carga 9% maior. Nos casos citados, é possível observar as maiores discrepâncias comparadas com os resultados do presente trabalho. Vários motivos podem ter ocasionado essa diferença de capacidade resistente em pilares com seções transversais parecidas. Uma das principais causas pode ser o efeito de confinamento do concreto em seções tubulares, sendo este efeito desconsiderado na presente formulação.

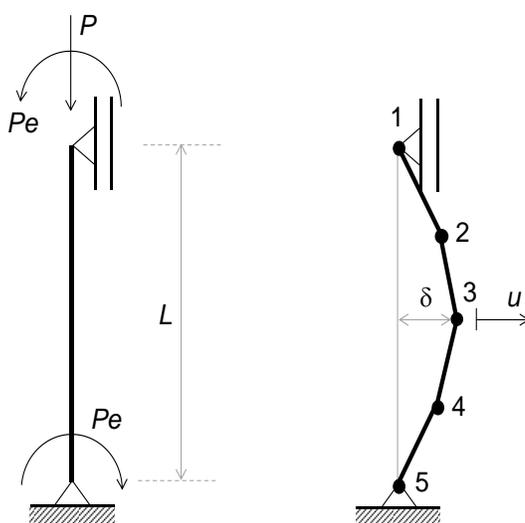
Liu, Gho e Yuan (2003) avaliaram também o comportamento dos pilares ensaiados perante as considerações da norma europeia EC 4 (1992), em que a carga limite foi denominada aqui como P_{EC4} . Comparando os resultados obtidos no presente trabalho com as análises realizadas com base na metodologia normativa europeia, tem-se a mesma resposta numérica convergente com baixo desvio padrão. Isso demonstra que a formulação apresentada satisfaz os critérios normativos de avaliação de seções de pilares mistos tubulares retangulares.

4.3 Pilares mistos retangulares totalmente preenchidos com concreto

Bridge (1976) realizou um estudo sobre pilares retangulares preenchidos por concreto. Inicialmente foram estudados 8 pilares através de experimentos com cargas excêntricas. Dentre os

oito ensaios, 3 apresentam flexão composta normal (considerados no presente trabalho), e os outros 5 flexão composta oblíqua. Os protótipos se diferenciam basicamente pela sua geometria, excentricidade da carga e propriedades dos materiais constituintes. O pilar denominado P1 apresenta menor comprimento, maior seção transversal e materiais mais resistentes do que os demais. Já os pilares P2 e P3 são semelhantes, apresentando diferença apenas na excentricidade da carga vertical aplicada. Esses dados são apresentados na Tabela 4.2. Foi adotado o módulo de elasticidade do aço igual a 205 GPa e uma imperfeição geométrica inicial no centro do pilar de $\delta = L/1000$. A Figura 4.2 ilustra um pilar com dados genéricos e a malha de elementos finitos adotada.

Figura 4.2 – Modelo idealizado para análise de pilares isolados com excentricidade



Fonte: Do autor (2021).

Tabela 4.2 – Propriedades geométricas e dos materiais

Espécime	L (mm)	e (mm)	b (mm)	h (mm)	t (mm)	f_{ck} (kN/mm ²)	f_y (kN/mm ²)
P1	2130	38	203,7	203,9	9,96	0,291	0,0302
P2	3050	38	152,5	152,3	6,48	0,254	0,035
P3	3050	64	152,5	152,3	6,48	0,254	0,035

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 4.3(a) são ilustradas as curvas carga-deslocamento obtidas pelo presente trabalho comparando-as aos dados fornecidos por Bridge (1976), demonstrando o comportamento do elemento estrutural ao longo do histórico de carregamento. É possível observar nesta figura que as

trajetórias de equilíbrio são convergentes com os dados experimentais, tanto no contexto da rigidez, quanto na obtenção das cargas limites. Assim, destaca-se, em complemento ao exemplo anterior, que a formulação apresentada consegue capturar com precisão a perda gradual de rigidez do elemento estrutural. Já na Figura 4.3(b) são ilustradas as curvas de interação para a seção P1 e na 4.3(c) as curvas de interação para as seções P2 e P3, que são iguais.

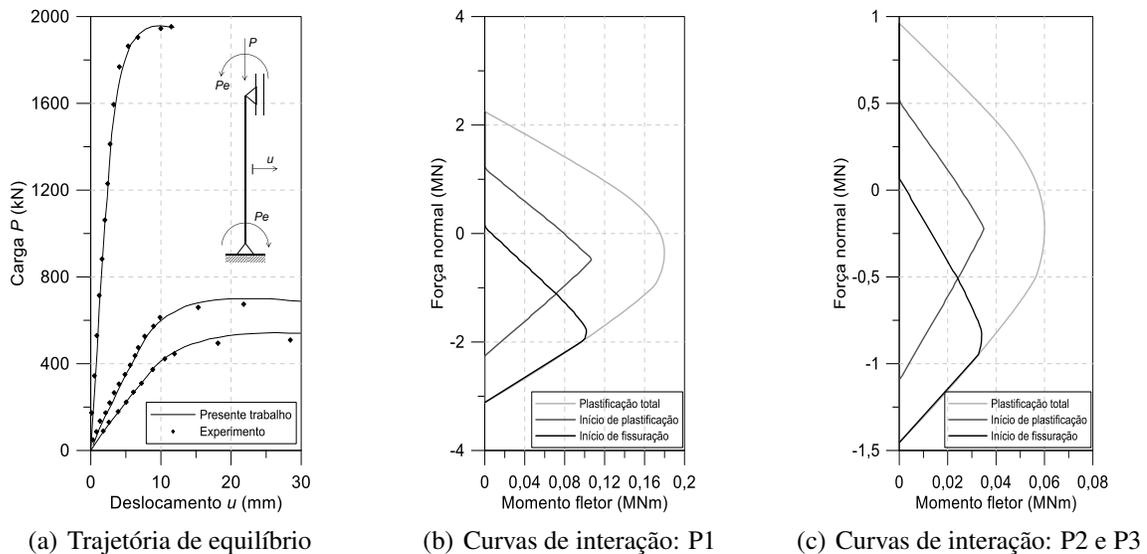
Na Tabela 4.3 são disponibilizadas as cargas críticas numéricas e experimentais, além dos valores médios e estatísticos. Em termos estatísticos, verifica-se uma diferença média entre os resultados numéricos e experimentais de apenas 2.8%. Destaca-se também a pequena dispersão dos resultados através do desvio padrão.

Tabela 4.3 – Comparação das cargas últimas

Espécime	P_{Teste}	P_{PT}	$\frac{P_{PT}}{P_{Teste}}$
	(kN)	(kN)	
P1	1956	1957,53	1,001
P2	680	699,42	1,029
P3	513	540,46	1,054
		Média	1,028
		Desvio padrão	0.019

Fonte: Do autor (2021).

Figura 4.3 – Pilar de Fouré

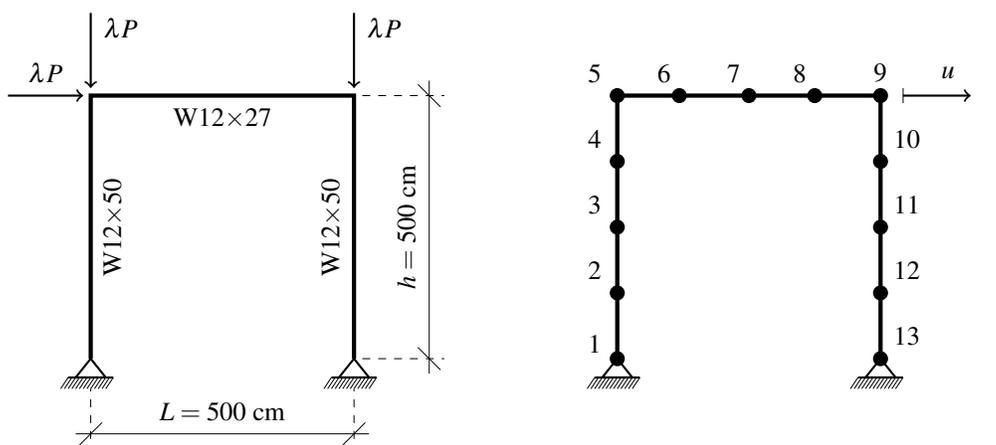


Fonte: Do autor (2021).

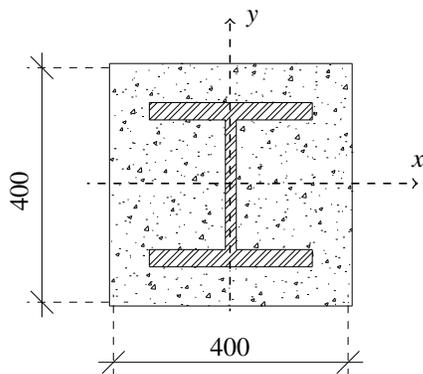
4.4 Pórtico simples de aço/misto

O pórtico simples ilustrado na Figura 4.4 é analisado e comparado com os resultados numéricos da literatura (IU; BRADFORD; CHEN, 2009). A estrutura tem altura e vão iguais a 5 metros. Os pilares são constituídos pela seção de aço W12 × 50 e a viga com W12 × 27. A laje de concreto tem uma altura de 102 mm e uma largura de 1219 mm. Os pilares são inicialmente considerados como de aço e como de aço totalmente revestido em uma segunda análise, apresentando uma seção quadrada mista com base igual a 400 mm. Não são consideradas imperfeições geométricas iniciais no pórtico.

Figura 4.4 – Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais

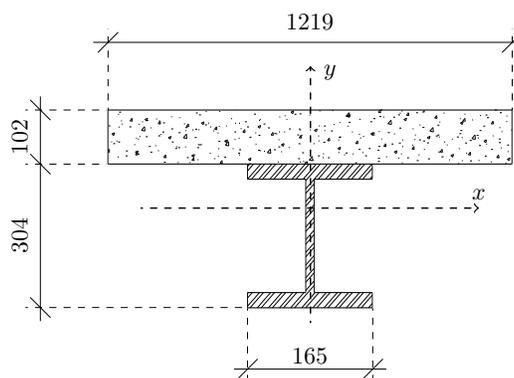


(a) Pórtico simples: geometria, discretização adotada



Perfil: W 12 × 50

(b) Pilares (dimensão em mm)



Perfil: W 12 × 27

(c) Viga (dimensão em mm)

Fonte: Do autor (2021).

Foram realizadas duas análises: estrutura com pilares de aço e viga mista (SC) e o sistema estrutural totalmente misto (CC). Os caminhos de equilíbrio para esses sistemas são definidos pela variação da carga incremental em relação ao deslocamento u no topo da coluna direita. Para o aço, uma tensão de escoamento f_y igual a $24,82 \text{ kN/cm}^2$, deformação última ϵ_{eu} igual a $-0,01$ e um módulo de elasticidade considerado como 20000 kN/cm^2 são considerados. A resistência à compressão do concreto, f_c , adotada é $1,6 \text{ kN/cm}^2$ e os parâmetros ϵ_{ci} e ϵ_{cu} são $-0,002$ e $-0,0035$, respectivamente.

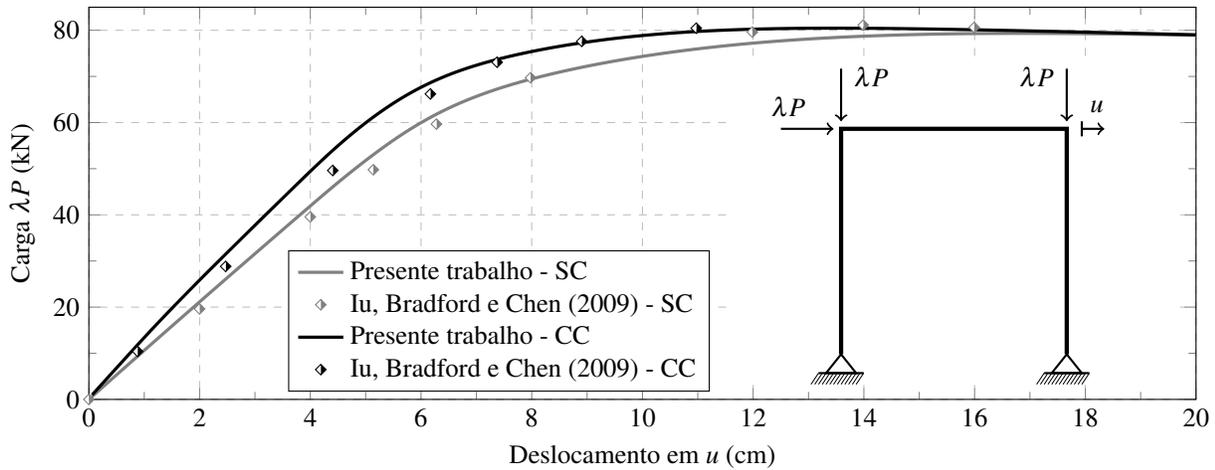
As curvas carga-deslocamento para os dois casos descritos são ilustradas na Figura 4.5. Observando a Figura 4.5(a), pode-se concluir que a metodologia utilizada neste trabalho é consistente com os resultados obtidos por Iu, Bradford e Chen (2009). É possível verificar na Fig. 4.5(b) que a queda acentuada da rigidez obtida em Lemes et al. (2017b). No resultado usado como referência, os autores adotaram a simulação da fissuração de forma aproximada, reduzindo a rigidez da seção transversal por um coeficiente constante igual a 60% do valor inicial. Assim, ao iniciar o processo de fissuração, uma queda acentuada de rigidez ocorria. Aqui, a fissuração é feita gradualmente, por meio da equação de Branson (BRANSON; METZ, 1963), suavizando a trajetória de equilíbrio e aproximando a simulação da realidade.

4.5 Aplicação numérica

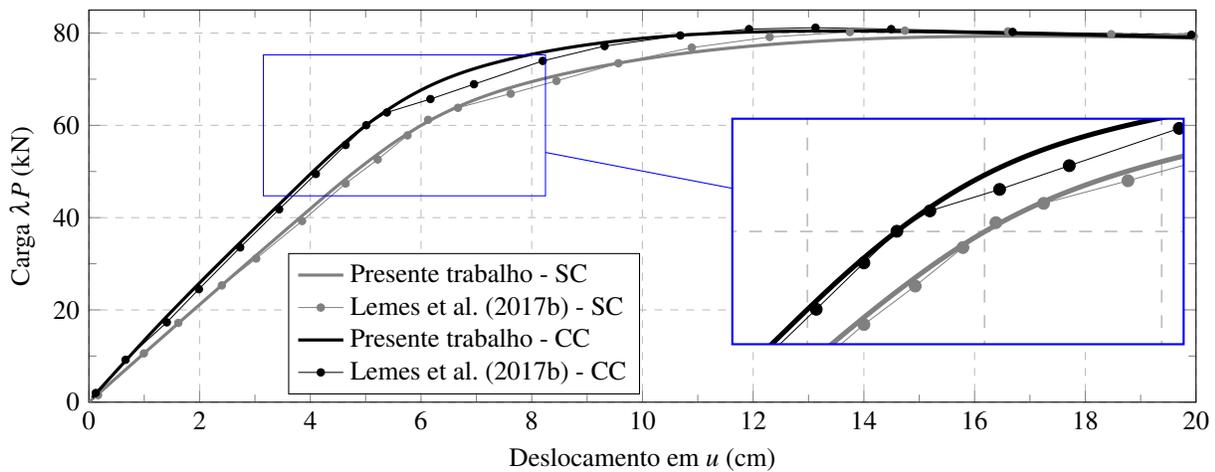
Após a verificação da precisão da formulação numérica apresentada no presente trabalho, é feito um estudo do comportamento do pórtico misto com pilares de aço e viga mista aço-concreto. O pórtico é exatamente o mesmo testado no item 4.4, considerando os pilares de aço. Nesta análise, vários graus de interação são aplicados à viga, e os caminhos de equilíbrio são obtidos para cada caso, conforme apresentado na Figura 4.6. O valor mínimo ($\eta_i = 0,4$) foi definido com base no NBR 8800 (ABNT, 2008).

Considerando a formulação apresentada, a conexão de cisalhamento parcial tem pouca influência na rigidez inicial do sistema, conforme destacado na Figura 4.6. Também é possível verificar que o início da degradação da rigidez, em todos os pórticos, ocorre em momentos diferentes, Figura 4.6. Em todos os casos, o nó mais solicitado é o nó 9 (extremidade direita da viga, Figura

Figura 4.5 – Equilibrium paths for composite portal frame



(a) Comparação com os resultados de Iu, Bradford e Chen (2009)



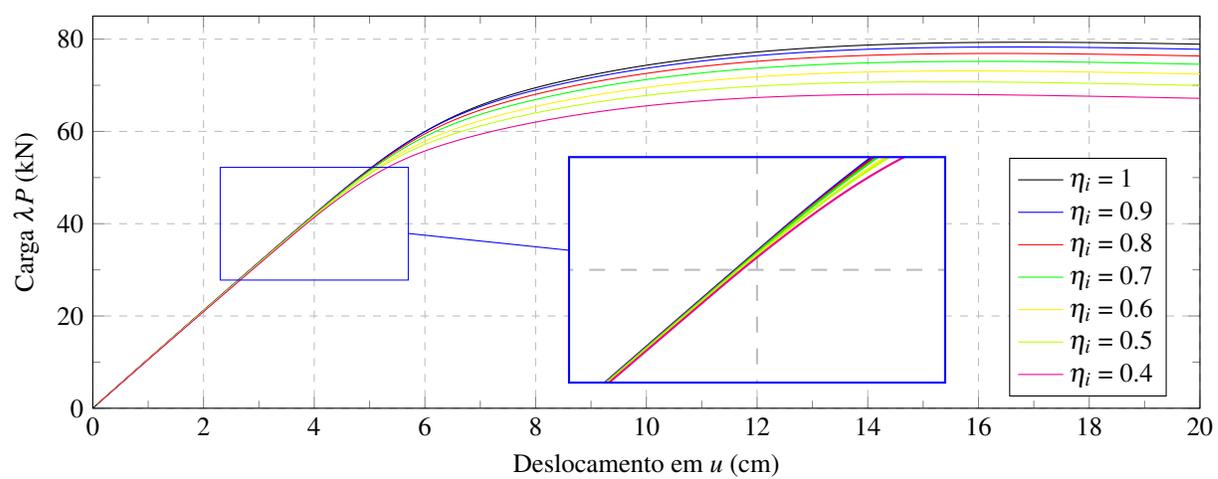
(b) Comparação com os resultados de Lemes et al. (2017b)

Fonte: Do autor (2021).

4.4(a)), portanto, apresenta degradação da rigidez antes dos demais. E no ponto limite de carga, este nó se plastifica em todas as simulações.

Devido à queda na capacidade de carga da viga - visto que a maior degradação ocorre na viga - quanto menor o grau de ação do composto, menor a capacidade de resistência do sistema.

Figura 4.6 – Trajetória de equilíbrio para o pórtico simples misto com diferentes graus de interação



Fonte: Do autor (2021).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

O presente trabalho apresentou uma metodologia de análise não linear baseada no método dos deslocamentos para a simulação de vigas, pilares e pórticos mistos aço-concreto. No presente trabalho foram consideradas a plasticidade, a fissuração, a não linearidade geométrica e a interação parcial entre a seção de aço e a laje de concreto de vigas mistas. Nesse sentido, esses efeitos foram concentrados nos pontos nodais pelo do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). O MRPR clássico foi alterado separando a degradação da rigidez em duas abordagens: a plastificação foi avaliada por meio de pseudo-molas colocadas nas extremidades dos elementos finitos; e a fissuração do concreto e a interação parcial foram consideradas com base nas equações de Branson e Metz (1963) e NBR 8800 ABNT (2008), respectivamente.

Foi utilizado a viga mista contínua com interação parcial para fazer a calibração da formulação numérica. Os resultados encontrados neste trabalho foram consistentes com os dados experimentais obtidos por Ansourian (1981). Foi possível observar boa convergência nas três fases da curva carga-deslocamento: regimes elástico, elasto-plástico e plástico. Além disso, não houve problemas relacionados ao fenômeno de *locking*. Assim, a carga limite obtida no modelo numérico ficou visualmente próxima ao valor experimental.

Os resultados dos pilares mistos apresentaram uma relação média com os dados experimentais próxima de 1 e baixo desvio padrão, indicando para uma eficiência do programa que fornece resultados próximos aos dos experimentos. Também é possível destacar que as trajetórias de equilíbrio obtidas no presente trabalho acompanham o comportamento do elemento ensaiado experimentalmente e dos resultados obtidos pela norma europeia.

Em ambos os casos de pórticos analisados o feixe apresentou interação total e os resultados convergiram para os dados obtidos pelo Iu, Bradford e Chen (2009). Deve-se notar que a formulação aqui apresentada corrigiu a queda brusca de rigidez observada no trabalho de Lemes et al. (2017b). A formulação proposta simula de forma satisfatória o comportamento de vigas mistas aço-concreto com interação total, bem como o comportamento de pilares mistos ou de aço isolado.

Realizou-se um estudo simples em sequência onde o pórtico que já havia sido calibrado foi modificado considerando a viga mista com interação parcial. Vários graus de ação composta foram

testados para analisar o comportamento da formulação. Os resultados foram consistentes com o esperado, evidenciando a validade da formulação. Houve uma queda de rigidez, para cada grau de interação. Quanto menor o grau de interação menor a rigidez. E também quanto menor o grau de interação menor foi a capacidade resistente de cada um dos sistemas analisados.

Com base nos resultados obtidos conclui-se que a formulação implementada alcançou o objetivo de utilizar a plataforma CS-ASA (SILVA, 2009; CARVALHO, 2020) para avaliar o comportamento de estruturas mistas de aço e concreto considerando os efeitos da não linearidade geométrica, do material e a consideração da fissuração e da interação parcial.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se:

- Estudar a viabilidade da implementação de diferentes funções de degradação da rigidez das pseudo-molas para as diferentes regiões de momento na viga mista, ou seja, alterar as equações do parâmetro S_p para os momentos positivos e negativos. Seria uma modificação importante, uma vez que nos exemplos em que as vigas foram submetidas a momentos fletores positivos, a degradação da rigidez ocorreu de maneira mais lenta em relação aos dados experimentais (Seções 4.1 e 4.2). Já no exemplo em que as vigas foram submetidas a momentos negativos primordialmente (Seção 4.3), essa degradação ocorreu de maneira condizente com as curvas obtidas experimentalmente;
- Utilizar equações deduzidas analiticamente para os momentos fletores de plastificação, de início de plastificação e de início de fissuração, tornando o código mais próximo às prescrições normativas;
- Introduzir molas fictícias para simulação de ligações semirrígidas;
- Realizar análises dinâmicas;
- Realizar análises térmicas - situações de incêndio.

REFERÊNCIAS

- ABNT. NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. **Rio de Janeiro**, 2008.
- ABNT. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. **Rio de Janeiro**, 2014.
- AISC LRFD. Specification for structural steel buildings. **American Institute of Steel Construction, Chicago, IL**, 2016.
- ANSOURIAN, P. Experiments on continuous composite beams. **Proceedings of the Institution of Civil Engineer**, v. 71, n. 2, p. 25–51, 1981.
- BRANSON, D.; METZ, G. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University, 1963.
- BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On material and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, p. 7181–7207, 2004.
- BRIDGE, R. Concrete filled steel tubular columns. **Civil Engineering Transactions**, v. 18, n. 2, p. 127–133, 1976.
- CARVALHO, T. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas mistas aço-concreto considerando efeitos não lineares concentrados**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil, Universidade Federal de Lavras, 2020.
- CHAN, S. L.; CHUI, P. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Oxford: Elsevier, 2000.
- CHEN, W.; KIM, S. **LRFD Steel Design using Advanced Analysis**. Boca Raton, Flórida, EUA: CRC Press, 1997.
- CHIOREAN, C. G. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures. **Engineering Structures**, v. 57, p. 125–152, 2013.
- CHIOREAN, C. G.; BURU, S. M. Practical nonlinear inelastic analysis method of composite steel-concrete beams with partial composite action. **Engineering Structures**, v. 134, p. 74–106, 2017.
- EC 4. Final draft prENV 1994-1-1: European prestandard. **Comite Européen de Normalisation, CEN prEN**, 1992.
- FILHO, E. G. M. **DETALHAMENTO DA LINGUAGEM FORTRAN NA SIMULAÇÃO DE EVAPORADORES**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica, Universidade de Rio Verde, 2015.
- FONG, M. **Second-order analysis of imperfect light-weight and composite structures**. Tese (Doutorado) — The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2012.

FONG, M.; CHAN, S. L. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 12, n. 6, 2012.

GONÇALVES, R.; CARVALHO, J. An efficient geometrically exact beam element for composite columns and its application to concrete encased steel I-sections. **Engineering Structures**, v. 75, p. 213–224, 2014.

GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 99, p. 637–659, 1968.

GRIFFIS, L. G. Some design considerations for composite-frame structures. **Engineering Journal**, v. 23, p. 59–65, 1986.

IU, C.; BRADFORD, M.; CHEN, W. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. **Engineering Structures**, v. 31, p. 799–813, 2009.

IU, C. K. Nonlinear analysis for the pre and post yield behaviour of a composite structure with the refined plastic hinge method. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 119, p. 1–16, 2016.

IZZUDDIN, B.; SMITH, D. L. Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3d r/c frames using adaptive techniques. **Computers & Structures**, v. 78, n. 4, p. 549–573, 2000.

LEMES, Í. J. M. **Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2015.

LEMES, Í. J. M. **Estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 2018.

LEMES, Í. J. M. et al. Numerical analysis of rc plane structures: a concentrated nonlinear effect approach. **Latin American Journal of Solid and Structures**, 2018.

LEMES, Í. J. M. et al. Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 33, n. 1-2, p. 24–34, 2017a.

LEMES, Í. J. M. et al. Numerical analysis of nonlinear behavior of steel concrete composite structures. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 10, n. 1, p. 53–83, 2017b.

LEMES, Í. J. M. et al. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. **Engineering Structures**, v. 147, p. 12–26, 2017c.

LIEW, J.; CHEN, H.; SHANMUGAM, N. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 2, p. 194–202, 2001.

- LIMA, P. H. et al. Non-linear analysis of steel-concrete composite frames via rphm considering cracking and partial shear connection. In: **XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S.l.: s.n.], 2020.
- LIU, D.; GHO, W.-M.; YUAN, J. Ultimate capacity of high-strength rectangular concrete-filled steel hollow section stub columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, p. 1499–1515, 2003.
- LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 70, p. 337–349, 2012b.
- NGO-HUU, C.; KIM, S. Practical nonlinear analysis of steel concrete composite frames using fiber hinge method. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 74, p. 90–97, 2012.
- OLLGAARD, J. G.; SLUTTER, R. G.; FISHER, J. W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. **AISC Engineering Journal**, v. 8, n. 2, p. 55–64, 1971.
- SHELLEKENS, J. C. J.; DE BORST, R. On the numerical integration of interface elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, p. 43–66, 1993.
- SILVA, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. 2009. 322 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.
- SILVA, A. R. da. **Análise numérica de vigas mistas com interação parcial**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2006.
- SPACONE, E.; EL-TAWIL, S. Nonlinear analysis of steel-concrete composite structures: State of the art. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 2, p. 159–168, 2004.
- ZUBYDAN, A. H. Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-section members. **Engineering Structures**, v. 48, p. 155–165, 2013.

**APÊNDICE A – Dedução do método iterativo de Newton Raphson para a obtenção da
relação momento curvatura**

O equilíbrio da seção é obtido numericamente através da seguinte equação:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (\text{A.1})$$

na qual os vetores \mathbf{f}_{ext} e \mathbf{f}_{int} variam de acordo com o tipo de interação empregado como demonstrado no item 2.3.

Para que ocorra a convergência na primeira iteração, é eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e os esforços externos necessitam ser nulos. Dessa forma faz-se a expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} (\delta\mathbf{X}) \quad (\text{A.2})$$

Tendo como equilíbrio $\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ no ponto $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$, tem-se $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$. Assim chega-se em:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) + \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} (\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k) \quad (\text{A.3})$$

Isolando os termos \mathbf{X}^{k+1} na equação anterior, definimos a configuração deformada da seção transversal em $k + 1$, sendo k a variável de interação. Assim, define-se:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left[\frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (\text{A.4})$$

A função dada na Equação A.1 é uma função dependente de \mathbf{f}_{ext} e \mathbf{f}_{int} . Como nos casos de interação parcial e total, somente o termo \mathbf{f}_{int} é uma função de \mathbf{X} , sendo assim a derivada de $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ em relação a \mathbf{X} é negativo. Podendo assim reescrever a Equação A.4 como:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \left[\mathbf{F}'(\mathbf{X}^k) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (\text{A.5})$$

em que \mathbf{F}' é a matriz constitutiva da seção transversal que é deduzida nos Apêndices B e C para interação parcial e total, respectivamente.

APÊNDICE B – Dedução da matriz constitutiva da seção transversal com interação Parcial

A rigidez de uma seção transversal é diretamente proporcional às deformações dos pontos discretizados da seção. Para o cálculo da matriz Jacobiana (\mathbf{F}') do problema não linear com interação parcial, temos:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} A_{bi} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$f_{12} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} f_{31} &= \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \Phi} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} (y_i - d_l) A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} (y_i - d_l) A_{bi} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$f_{21} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$f_{22} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} A_{ai} \quad (\text{B.5})$$

$$f_{23} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} (y_i - d_p) A_{ai} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} f_{31} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} y_i A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} y_i A_{bi} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$f_{32} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi) y_i] A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} y_i A_{ai} \quad (B.8)$$

$$f_{33} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \Phi} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi) y_i] A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} (y_i - d_l) y_i A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} (y_i - d_p) y_i A_{ai} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} (y_i - d_l) y_i A_{bi} \quad (B.9)$$

Todos termos apresentados formam a matriz constitutiva da seção para o problema não linear com interação parcial. As variáveis $N_{int,p}$, $N_{int,l}$ e M_{int} representam os esforços internos axial do perfil, axial na laje e momento fletor, respectivamente. ε_p é a função de deformações no perfil metálico, que depende de Φ e da deformação axial no centroide plástico (CP) do perfil ε_a , já ε_l é a função linear de deformação na laje que depende da deformação axial no seu centroide plástico ε_c , da curvatura Φ e da posição y_i do ponto analisado. As distâncias entre os centroides plásticos das lajes e dos perfis em relação ao CP da seção são definidos como d_l e d_p , respectivamente. A variável E_T é o módulo de elasticidade tangente do material e A a área da seção, sendo esses parâmetros associados ao concreto, às barras e ao perfil identificados pelos subíndices c , b e a , respectivamente.

APÊNDICE C – Dedução da matriz constitutiva da seção transversal com interação total

Para o cálculo da matriz Jacobiana (\mathbf{F}') do problema não linear com interação total, temos:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

O primeiro termo da matriz, f_{11} , pode ser determinado como:

$$f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) dA \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri}) dA \right] \quad (\text{C.2})$$

Utiliza-se a Regra da Cadeia para resolver a questão anterior. Dessa forma:

$$f_{11} = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial (\varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri})}{\partial \varepsilon_0} \right) dA = \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} dA \quad (\text{C.3})$$

O módulo de elasticidade Tangente E_T é obtido pela derivada da tensão σ , em relação a deformação ε . temos assim:

$$f_{11} = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i \quad (\text{C.4})$$

São feitos os mesmos cálculos para os outros 3 termos da matriz (\mathbf{F}'), analogamente a f_{11} .

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{22} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Substituindo a Equação C.5 em C.1 temos:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i & f_{12} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i & f_{22} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

sendo essa a matriz constitutiva da seção transversal para o problema não linear com interação total.