



OTTO GALVÃO ELISEI

**ANÁLISE COMPARATIVA DE TÉCNICAS DE CONTROLE
PARA O MODELO TRMS (TWIN ROTOR MIMO SYSTEM)**

LAVRAS-MG

2021

OTTO GALVÃO ELISEI

**ANÁLISE COMPARATIVA DE TÉCNICAS DE CONTROLE PARA O MODELO
TRMS (TWIN ROTOR MIMO SYSTEM)**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia de Controle e Automação, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Daniel Augusto Pereira

Orientador

LAVRAS-MG

2021

OTTO GALVÃO ELISEI

**ANÁLISE COMPARATIVA DE TÉCNICAS DE CONTROLE PARA O MODELO
TRMS (TWIN ROTOR MIMO SYSTEM)
COMPARATIVE ANALYSIS OF CONTROL TECHNIQUES FOR A TWIN ROTOR
MIMO SYSTEM**

Monografia apresentada à Universidade Federal de
Lavras, como parte das exigências do Curso de
Engenharia de Controle e Automação, para a
obtenção do título de Bacharel

APROVADA em 16 de abril de 2021.

Prof.^a Alessandra Rose Crosara Rios Campos DAT UFLA

Prof. Belisario Nina Huallpa DAT UFLA

Prof. Daniel Augusto Pereira

Orientador

LAVRAS-MG

2021

RESUMO

Este trabalho trata dos desafios de controle encontrados na plataforma didática TRMS (Twin-rotor MIMO system), um sistema multivariável com altos níveis de acoplamento e não-linearidade. Nesse contexto, os objetivos do estudo são: apresentar a modelagem da planta segundo a abordagem Euler-Lagrangiana, desenvolver algumas estratégias de controle e comparar os resultados utilizando critérios de robustez e desempenho. O modelo matemático do sistema obtido inicialmente é não-linear, o que justificou os esforços de trimagem e linearização. Assim, gerou-se um sistema linearizado que foi utilizado no projeto dos controladores. As técnicas desenvolvidas foram um controlador PID descentralizado, um sistema de realimentação de estados sintetizado com a técnica LQG com ação integral e um controlador H_∞ . Em seguida, os controladores foram testados em ambiente simulado no modelo não-linear. Os resultados indicaram um excelente desempenho do regulador LQG com ação integral, um bom comportamento do controlador PID e uma fraca performance do controlador H_∞ . Também foram conduzidas análises em frequência e feitas algumas considerações sobre aplicabilidade prática de cada controlador.

Palavras-chave: Sistema TRMS. Controle Multivariável. Controle Ótimo. Controle Robusto.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	6
2.	REFERENCIAL TEÓRICO	8
2.1.	Revisão de trabalhos sobre o tema	8
2.2.	Mecânica de Lagrange	9
2.3.	Performance e robustez MIMO.....	11
2.4.	Trimagem e linearização de sistemas dinâmicos	13
2.5.	Controle descentralizado.....	14
2.6.	Controle LQG	16
2.7.	Controle H_2 e H_∞	17
3.	MATERIAIS E MÉTODOS	21
3.1.	Modelo matemático	22
3.2.	Trimagem e linearização	27
3.3.	Síntese dos controladores	30
3.3.1.	Controle PID descentralizado.....	30
3.3.2.	Controle LQG com ação integral	31
3.3.3.	Controle H_∞	32
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	34
4.1.	Análise linear.....	34
4.2.	Resposta temporal no modelo linear	38
4.3.	Resposta temporal no modelo não-linear	42
5.	CONCLUSÃO.....	49
	REFERÊNCIAS.....	50

1. INTRODUÇÃO

“Kelly had sold the idea brilliantly, but now it was up to us peons to deliver the goods.”- Ben Rich, Skunk Works: A Personal Memoir of My Years at Lockheed

O modelo TRMS (Twin Rotor MIMO System) é uma plataforma didática para modelagem e controle de sistemas dinâmicos com dois graus de liberdade. O aparato é formado por uma barra rígida articulada em torno de uma base fixa de modo que essa barra pode girar livremente em torno de seus eixos vertical e horizontal. Em cada extremidade da barra existe um rotor movido por um motor de corrente contínua de velocidade variável. Além disso, tem-se um pêndulo conectado ao eixo, que atua como um contrapeso. As entradas do sistema são as tensões dos motores, e as saídas, os ângulos de arfagem e guinada. A Figura 1.1 ilustra um típico modelo TRMS.

Figura 1.1 – Exemplo de bancada didática TRMS.



Fonte: Feedback Instruments Ltd.

Fundamentalmente, o TRMS é um sistema não-linear com duas entradas e duas saídas acopladas, de dinâmica rápida e equipado com atuadores pouco potentes. Além disso, a dinâmica do TRMS aproxima, em alguns aspectos, a dinâmica real de voo de um helicóptero. Esses fatores fazem do TRMS uma das bancadas MIMO (multiple-input multiple-output) mais populares para a pesquisa e desenvolvimento de técnicas de controle.

Nesse trabalho, apresentamos a modelagem matemática do sistema segundo a abordagem Euler-Lagrangiana e desenvolvemos três técnicas de controle: um controlador clássico (PID descentralizado), um controlador ótimo (LQG com ação integral) e um controle robusto (H_∞). Nesse sentido, buscamos comparar as técnicas com relação às respostas em frequência produzidas, os esforços de controle e o desempenho temporal para rastreabilidade da entrada, resposta a distúrbios exógenos e atenuação de ruído de medição.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1.Revisão de trabalhos sobre o tema

Nas últimas duas décadas, uma grande quantidade de trabalhos sobre o TRMS foi publicada, cobrindo uma ampla variedade de estratégias de controle robusto, ótimo, inteligente e não-linear. López-Martinez, Días e Rubio (2004) propuseram uma estrutura de controle baseada em linearização da malha de feedback do sistema longitudinal do TRMS. Como o processo produziu uma lei de controle que não pôde ser usada em todo o envelope de trabalho, foi desenvolvido um controle escalonado entre dois pontos de operação. Mais tarde, López-Martinez, Vivas e Ortega (2005) consideraram uma extensão do controlador robusto H_∞ para sistemas não-lineares – produzindo assim uma lei de controle que mais se parece com um controlador PID com ganhos variantes no tempo.

Belkheiri et al. (2009) desenvolveram um controlador não-linear baseado no método de *backstepping* com estimação de estados por modos deslizantes. A modelagem foi baseada na abordagem Newtoniana. Um trabalho similar foi desenvolvido por Zeghlache et al. (2014). Bouguerra et al. (2013) sintetizaram um controlador tolerante a falhas (FTC – Fault-Tolerant Control) baseado no controlador H_∞ , e simularam situações de falhas dos atuadores da planta. O trabalho de Rotondo, Nejjari e Puig (2013) utilizou a técnica de variação de parâmetros quasi-linear (quasi-LPV – quasi-Linear Parameter Varying) para modelar, identificar e controlar um sistema TRMS. O modelo e o controlador propostos foram validados com dados experimentais.

Zeghlache, Kara e Saigaa (2014) desenvolveram um controle PID com lógica Fuzzy usando a modelagem Newtoniana para modelar o sistema e apresentaram simulações com ruídos e incertezas de parâmetros. Chulapa, Příklad e Novák (2014) apresentaram um modelo melhorado para o TRMS baseado na abordagem Newtoniana e na modelagem caixa-cinza.

Carrillo-Ahumada et al. (2015) utilizaram a abordagem de Pareto para minimizar simultaneamente a integral dos quadrados das somas dos erros e a integral do quadrado das somas dos esforços de controle. Os pesquisadores partiram do modelo Newtoniano e fizeram validação dos resultados em laboratório. Ulasyar e Zad (2015) conduziram um estudo comparativo teórico entre o controlador robusto MPC (Model Predictive Controller) e um controlador LQR (Linear Quadratic Regulator), apontando um melhor resultado para o controlador robusto. Paul e Jacob (2019) fizeram um estudo similar com controladores H_2 e H_∞ .

O trabalho de conclusão de curso de Pato (2016) consistiu em modelar o TRMS utilizando uma modelagem caixa-preta e propor dois controladores para a planta: um PID que foi validado experimentalmente, e um robusto que foi apenas simulado em função das dificuldades práticas de implementar um controlador de ordem muito elevada.

Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017) produziram um dos mais completos trabalhos sobre modelagem do sistema TRMS, ao desenvolver e validar experimentalmente um modelo do sistema segundo a abordagem Euler-Lagrangiana de forma detalhada e precisa. Os autores apontaram deficiências na abordagem Newtoniana de modo geral e em alguns trabalhos passados. Segundo os pesquisadores, a abordagem Newtoniana não captura a dinâmica do TRMS de forma precisa e leva em conta uma variedade de forças viscosas cujos parâmetros não são facilmente obtidos. Além disso, faz uso de um momento giroscópico para expressar o acoplamento gerado pelo rotor principal, algo que não é justificável para os pesquisadores. Os trabalhos de Rahided e Shaheed (2007) e de Rotondo, Nejjari e Puig (2013) são apontados como falhos. Segundo Tastemirov e seus colegas, o primeiro artigo apresenta inconsistências dimensionais, e ambos os trabalhos utilizam o contestável momento giroscópico e faltam na modelagem dos torques de reação e dos termos de Coriolis. O trabalho de López-Martínez et al. (2007) também reportou o uso da abordagem de Euler-Lagrange, mas não divulgou o desenvolvimento das equações ou os valores numéricos dos parâmetros.

Palliser, Costa-Castelló e Ramos (2017), com o objetivo de obter alta precisão na tarefa de seguir trajetórias de forma repetitiva e valendo-se da abordagem Euler-Lagrangiana, formularam um controlador baseado na técnica de controle por aprendizado iterativo (ILC – Interactive Learning Control). Rao, Akhila e Morales-Viviescas (2019) projetaram alguns controladores clássicos e robustos e apresentaram o comportamento dos sistemas de controle em situações de falhas. O modelo utilizado foi o Euler-Lagrangiano.

2.2.Mecânica de Lagrange

A mecânica de Lagrange é uma formulação da mecânica clássica que combina a conservação do momento linear com a conservação de energia em coordenadas generalizadas. Em comparação ao formalismo Newtoniano, a mecânica de Lagrange é mais sofisticada e sistemática. Em contrapartida, para problemas complexos, frequentemente produz soluções mais simples e elegantes. O uso de coordenadas generalizadas, que podem ser escolhidas da forma mais conveniente, permite explorar simetrias, simplificar a resolução do problema e

assim evitar restrições do espaço cartesiano que causariam grande desconforto no formalismo Newtoniano.

A principal grandeza na mecânica Lagrangiana é o Lagrangiano (L), uma função que sumariza a dinâmica de todo o sistema. Em vez de forças, como no formalismo Newtoniano, a abordagem Lagrangiana trata das energias do sistema. Conforme Brizard (2007), dado um conjunto de coordenadas generalizadas $q = \{q_i\}$ para i conjuntos de coordenadas, temos¹:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i) \quad (2.1)$$

Onde T é a soma das energias cinéticas, U a soma das energias potenciais do sistema e as derivadas $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$ são as velocidades generalizadas. A expressão genérica para energia cinética de um corpo rígido com movimento arbitrário no espaço tridimensional é dada por (WOODHOUSE, 2009, citado por TASTEMIROV; LECCHINI-VISINTINI; MORALES, 2017, p. 4):

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_A^T \mathbf{V}_A + M \mathbf{V}_A^T (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{AG}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I}_A \boldsymbol{\Omega} \quad (2.2)$$

Faça A um ponto arbitrário fixo no corpo. M é a massa do corpo, \mathbf{I}_A é a matriz de inércia com respeito ao ponto A , \mathbf{V}_A é o vetor de velocidade linear instantâneo, $\boldsymbol{\Omega}$ é o vetor velocidade angular instantâneo e \mathbf{r}_{AG} o vetor entre o centro de massa G e o ponto A .

O princípio de Hamilton diz que o trajeto real da partícula entre os instantes de tempo t_i e t_f é aquele que minimiza a ação $S \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$. De acordo com Brizard (2007), através deste princípio obtemos as equações de Euler-Lagrange (ou equações de Lagrange do segundo tipo):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.3)$$

A mecânica Lagrangiana é ideal para lidar com sistemas de forças conservativas. Mas ainda assim forças dissipativas (como atrito) podem ser tratadas, ao separar as forças externas em uma soma de forças potenciais e não-potenciais. O processo gera um conjunto de equações

¹ Não existe uma única expressão para todos os sistemas físicos. De modo geral, qualquer função que expresse as equações de movimento de forma correta, de acordo com os princípios da Física, pode ser usada como Lagrangiano.

de Euler-Lagrange modificadas (José e Saletan, 1998). Portanto, para sistemas não-conservativos, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i \quad (2.4)$$

Em que Q_i é a soma das forças generalizadas externas.

2.3. Performance e robustez MIMO

Um sistema de controle generalizado pode ser visto na Figura 2.1. $G(s)$ é um modelo matemático da planta, que assumimos poder ser descrita por um conjunto de equações diferenciais, e $K(s)$ é o controlador. Os sinais de entrada são a referência $r(s)$, o distúrbio $d(s)$ e o ruído de medição $n(s)$. Os demais sinais são o erro $e(s)$, o sinal de controle $u(s)$ e a saída $y(s)$.

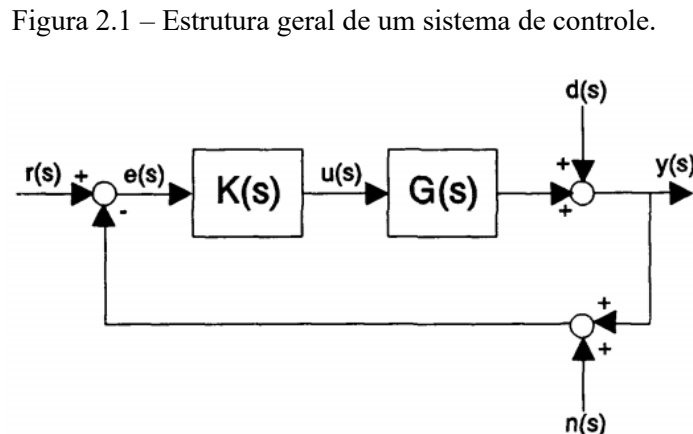


Figura 2.1 – Estrutura geral de um sistema de controle.

Fonte: Bibel e Malyevac (1992).

Definimos as funções de transferência de malha aberta $L(s)$, sensibilidade $S(s)$ e sensibilidade complementar $T(s)$ conforme as equações a seguir²:

$$L(s) = G(s)K(s) \quad (2.5)$$

$$S(s) = (I + L(s))^{-1} \quad (2.6)$$

$$T(s) = (I + L(s))^{-1}L(s) \quad (2.7)$$

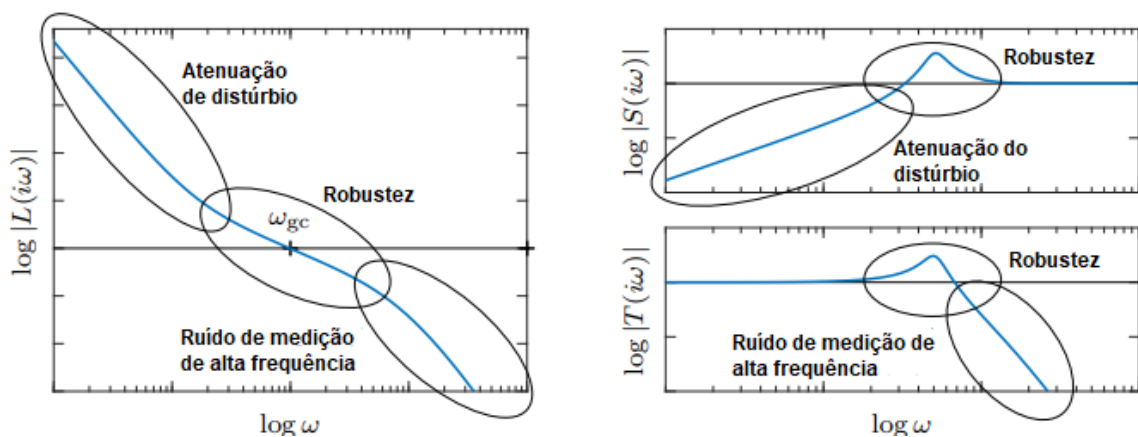
² Existem funções de transferência de entrada (com índice I) e de saída (com índice O). A diferença entre elas está na ordem de multiplicação das matrizes da planta e do controlador: $K(s)G(s)$ para entrada e $G(s)K(s)$ para saída (Åström e Murray, 2020). Nesse trabalho, assumiremos sempre as funções de saída, sem entrar no mérito das implicações de utilizar uma ou outra formulação.

As funções de sensibilidade e sensibilidade complementar são muito importantes para determinar a performance do sistema. A função de sensibilidade está associada ao comportamento da saída com relação ao distúrbio e ao erro. A função de sensibilidade complementar está associada à capacidade do sistema de rejeitar ruídos de medição. Um sistema de controle ideal deve apresentar boa rastreabilidade de entrada, minimizar os sinais de controle e ser robusto a distúrbio, ruídos de medição e incertezas no modelo. Cada uma dessas características pode ser transformada em uma demanda de $S(s)$ e $T(s)$. De acordo com Bibel e Malyevac (1992):

- Para boa rastreabilidade de entrada, queremos $S(j\omega) \approx 0$ e $T(j\omega) \approx 1$, implicando em $L(j\omega) \gg 1$.
- Para rejeição ao distúrbio, queremos $S(j\omega) \approx 0$.
- Para atenuação do ruído de medição, queremos $T(j\omega)$ pequeno, o que acarreta em $L(j\omega) \ll 1$.
- Para minimizar o esforço de controle, $T(j\omega)$ deve ser próximo de zero.
- Para que o controlador seja robusto a incertezas do modelo, $T(j\omega)$ deve ter baixo ganho.

Como pôde ser visto, as demandas são frequentemente antagônicas. Além disso, a restrição $S(s) + T(s) = I$ surge da própria definição das funções de transferência. Portanto, durante o projeto e análise de sistemas de controle, é importante definir em que frequências os requisitos devem ser válidos. Ruídos e incertezas no modelo ocorrem geralmente em altas frequências, enquanto entradas e distúrbios estão relacionados a frequências mais baixas. A Figura 2.2 ilustra alguns formatos ideais para essas funções, destacando as faixas de frequência de interesse para cada objetivo de controle.

Figura 2.2 – Ganhos típicos para funções de transferência de malha aberta de um sistema de controle.



Fonte: Åström e Murray (2020) (adaptado).

2.4. Trimagem e linearização de sistemas dinâmicos

Trimagem é um termo com origem na aviação. Por definição, trimar uma aeronave é encontrar um conjunto de posições das superfícies aerodinâmicas que faz com que a aeronave mantenha uma determinada atitude sem a necessidade de comandos adicionais do piloto. De maneira análoga, trimar um modelo dinâmico é encontrar um conjunto de valores constantes para as entradas e estados que produz um determinado comportamento do sistema. Tal ponto de operação também é conhecido como ponto de equilíbrio ou ponto de operação de regime permanente (MathWorks®, 2021).

Nem sempre é possível encontrar um ponto de trimagem e é possível que um sistema apresente vários pontos de trimagem que satisfaçam um mesmo requerimento. Portanto, ao trimar um sistema, é importante utilizar valores iniciais próximos aos esperados para garantir convergência. A função *findop* do MATLAB® utiliza, por padrão, o algoritmo *graddescent-elim* para encontrar pontos de operação. Segundo o fabricante, o algoritmo:

graddescent-elim: Impõe uma restrição de igualdade para forçar as derivadas de tempo dos estados a serem zero ($dx/dt = 0, x(k + 1) = x(k)$) e os sinais de saída a serem iguais aos seus valores conhecidos especificados. O otimizador corrige os estados, x , e as entradas, u , que são marcados como conhecidos em uma especificação de ponto operacional e otimiza as variáveis restantes. (MathWorks®, 2021).

Encontrar um ponto de trimagem adequado é essencial para linearizar o sistema. Linearizar é encontrar uma função linear que aproxima a resposta de um sistema não-linear em torno de um ponto de operação. A necessidade de linearizar um modelo se justifica pelo fato de que, embora a maioria dos sistemas físicos seja não-linear, os algoritmos de projeto de sistemas de controle são frequentemente desenvolvidos para sistemas lineares. Um sistema não-linear contínuo pode ser representado pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.8)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.9)$$

Em que $x(t)$ é o vetor de estados do sistema, $y(t)$ é a saída do sistema e $u(t)$ é o vetor de entradas. Próximo ao ponto de trimagem, é possível expressar essas quantidades como:

$$\delta \dot{u}(t) = u(t) - u_0 \quad (2.10)$$

$$\delta \dot{y}(t) = y(t) - y_0 \quad (2.11)$$

$$\delta \dot{x}(t) = x(t) - x_0 \quad (2.12)$$

Se as dinâmicas do sistema não são variáveis no tempo e o ponto de operação é de regime permanente, é possível aproximar as respostas dinâmicas por um sistema linear e invariante no tempo. Teremos, portanto, um sistema linear representado em notação de espaço de estados na forma:

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad (2.13)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \quad (2.14)$$

Em que A, B, C e D são as matrizes Jacobianas do sistema, avaliadas no ponto de operação:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad (2.15 - 2.18)$$

A função *linearize* do MATLAB® produz um sistema linear ao integralizar os resultados das linearizações de cada bloco do modelo Simulink®. O algoritmo determina as entradas e os valores de estado no ponto de operação e obtém o Jacobiano. Em muitas situações, não é possível obter o Jacobiano de forma analítica. Por padrão, o software do MATLAB® lineariza o modelo perturbando as entradas e estados do bloco e medindo a resposta a essas perturbações.

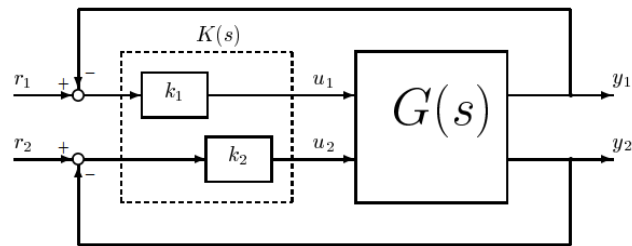
2.5. Controle descentralizado

Uma das estratégias para controle de sistemas MIMO é usar uma configuração de controladores descentralizada. De acordo com Skogestad (2001):

O controle descentralizado é quando o sistema de controle consiste em controladores de feedback independentes que interconectam um subconjunto das medições / comandos de saída com um subconjunto das entradas manipuladas. Esses subconjuntos não devem ser usados por qualquer outro controlador. (Skogestad, 2001, p. 420).

Uma arquitetura típica de controle descentralizado pode ser vista na Figura 2.3. Se o sistema for desacoplado (isto é, dizer que as entradas e saídas não causam influência entre si), há grande chance da arquitetura proposta funcionar bem. Nesse caso, o problema de controle consiste em escolher os pares de entradas e saídas para os controladores e projetar cada controlador independentemente (Skogestad, 2001). De fato, um sistema MIMO com uma matriz de transferência diagonal nada mais é que um conjunto de sistemas SISO.

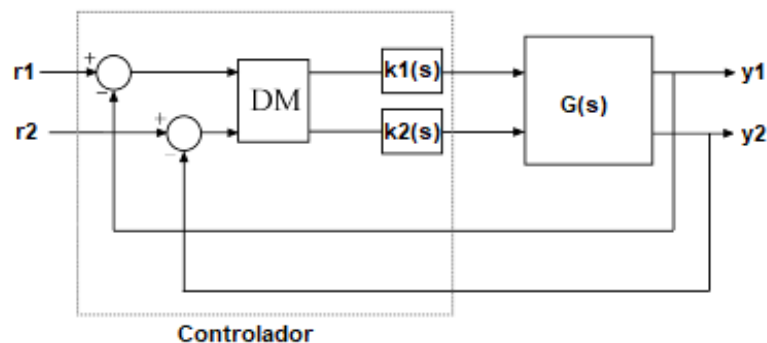
Figura 2.3 – Controle descentralizado diagonal de uma planta 2x2.



Fonte: Skogestad (2001).

Caso o sistema tenha alto grau de acoplamento, como o TRMS, é preciso considerar uma alternativa para a interação entre as malhas, como usar um bloco desacoplador. Uma alternativa é usar pré-compensadores estáticos otimizados para a frequência de cruzamento (*crossover*) do sistema. A Figura 2.4 ilustra a arquitetura, com bloco desacoplador DM posicionado de forma a ponderar as entradas do controlador.

Figura 2.4 – Estrutura de controle descentralizado com bloco desacoplador DM.



Fonte: MathWorks® (2021) (adaptado).

Segundo Skogestad (2001):

Elementos desacoplantes vinculam um conjunto de entradas manipuladas com outro conjunto de entradas manipuladas. Eles são usados para melhorar o desempenho dos sistemas de controle descentralizados e são frequentemente vistos como elementos de *feedforward* (embora isso não seja correto quando vemos o sistema de controle como um todo), onde a "perturbação medida" é a entrada manipulada computada por outro controlador descentralizado. (Skogestad, 2001, p. 421).

A matriz desacoplante DM é uma matriz de ganhos fixos. Os valores diagonais são unitários e os demais podem ser obtidos por otimização³.

³ Para mais informações, consultar o artigo "Static normalizing pre-compensator: the first step for addressing robustness in the design of multivariable controllers using the Characteristic Locus Method" de Marcos Vicente Moreira e João Carlos Basilio, apresentado na Conferência Europeia de Controle de 2007.

As estratégias de controle descentralizado nem sempre produzem as soluções mais robustas e eficientes para sistemas MIMO. No entanto, sua utilização ainda pode ser interessante em alguns casos. Essa abordagem não requer modelagem da planta tão precisa quanto os demais controladores centralizados, o que permite economizar recursos nesta fase do projeto. Além disso, é mais facilmente compreensível (os parâmetros tendem a ter efeitos bem localizados em um único ramo de feedback) e frequentemente são menos sensíveis a incertezas nos canais de entradas. Por fim, o custo computacional de implementação é menor.

2.6. Controle LQG

O Controle Linear Quadrático Gaussiano (LQG – Linear Quadratic Gaussian) é um problema de otimização com origens na engenharia aeroespacial. De acordo com Skogestad (2001), a formulação tradicional assume que a planta é linear e conhecida, e que os eventuais distúrbios de processo e de medição são ruídos brancos com as seguintes covariâncias:

$$E\{\omega_d(t)\omega_d(t)^T\} = W\delta(t - \tau) = 0 \quad (2.19)$$

$$E\{\omega_n(t)\omega_n(t)^T\} = V\delta(t - \tau) = 0 \quad (2.20)$$

Onde ω_d indica o sinal de distúrbio de processo, ω_n o sinal de ruído, e as matrizes W e V são as matrizes de densidade espectral de potência constante para o distúrbio e o ruído, respectivamente. O operador E é o operador esperança, e $\delta(t - \tau)$ é a função delta. O problema LQG é encontrar o sinal de controle $u(t)$ que minimiza a expressão:

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \quad (2.21)$$

Onde Q e R são matrizes de ganhos constantes que ponderarão a minimização dos estados e do esforço de controle. Quanto maior o valor de Q , maior será a penalização sobre os valores dos estados. Da mesma forma, quanto maior R , menor será o esforço de controle.

Skogestad (2001) explica que a solução do problema consiste em primeiramente encontrar um regulador linear quadrático (LQR – Linear Quadratic Regulator), o que implica na seguinte lei de feedback:

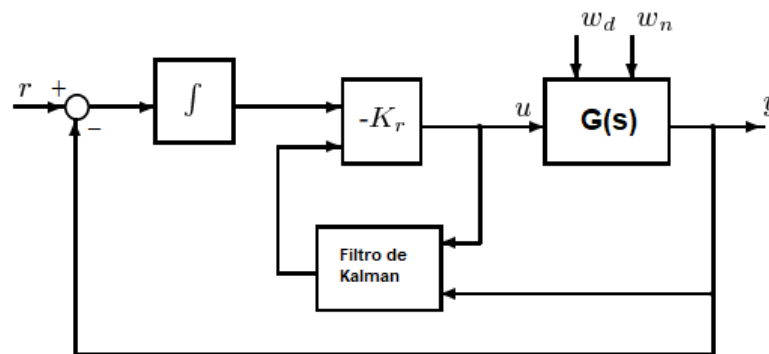
$$u(t) = -K_r x(t) \quad (2.22)$$

Onde K_r é uma matriz constante.

Devido a limitações de instrumentação ou de projeto, nem sempre é possível conhecer os valores de todos os estados da planta. Nesse caso, é preciso encontrar uma estimativa ótima \hat{x} para os estados x , de modo que $E\{[x - \hat{x}]^T [x - \hat{x}]$ seja minimizado. Isso é obtido através de um filtro de Kalman. Assim, resolve-se o problema LQG substituindo-se o vetor de estados da Equação 2.22 (problema LQR) por um vetor de estados estimados.

Um sistema com realimentação de estados não garante, necessariamente, convergência para o valor de referência do sistema. Uma estratégia para resolver a questão e garantir boa rastreabilidade é adicionar uma malha de realimentação com ação integração do sinal de erro. A arquitetura resultante é a LQI (controle LQR com ação integral) quando há realimentação direta dos estados. Quando há estimação dos estados, tem-se um controle LQG com ação integral. Esse conceito é ilustrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Controlador LQG com ação integral.



Fonte: Skogestad (2001) (adaptado).

2.7. Controle H_2 e H_∞

Os problemas H_2 e H_∞ podem ser apresentados de diversas formas. O mais comum é utilizar a formulação generalizada para a planta P , conforme a Figura 2.6, onde u é o sinal de controle, v são as variáveis medidas, w são os sinais externos (distúrbio e ruído) e z são os sinais de desempenho que serão minimizados. P é a planta generalizada e K é o controlador.

Segundo Skogestad (2001), a função de transferência de malha fechada de w para z pode ser representada pela transformação fracionária linear (LFT – Linear Fractional Transformation) abaixo:

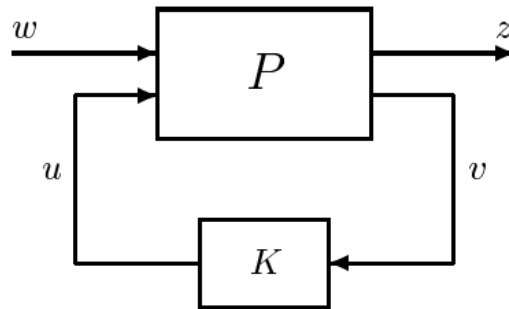
$$z = F_l(P, K)w \quad (2.23)$$

Onde:

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.24)$$

Os controles H_2 e H_∞ procuram minimizar as normas H_2 e H_∞ , respectivamente, de $F_l(P, K)$.

Figura 2.6 – Arquitetura geral de controle para os problemas H_2 e H_∞ .



Fonte: Skogestad (2001).

A norma H_2 está relacionada à energia total do sistema. Portanto, a otimização ocorre em todas as frequências. A formulação geral do problema de controle H_2 é encontrar um controlador K que minimiza a expressão:

$$\|F(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[F(j\omega)F(j\omega)^H] d\omega}; \quad F \triangleq F_l(P, K) \quad (2.25)$$

Skogestad (2001) aponta que o problema LQG é uma formulação específica do problema H_2 em que a entrada exógena w é um ruído branco.

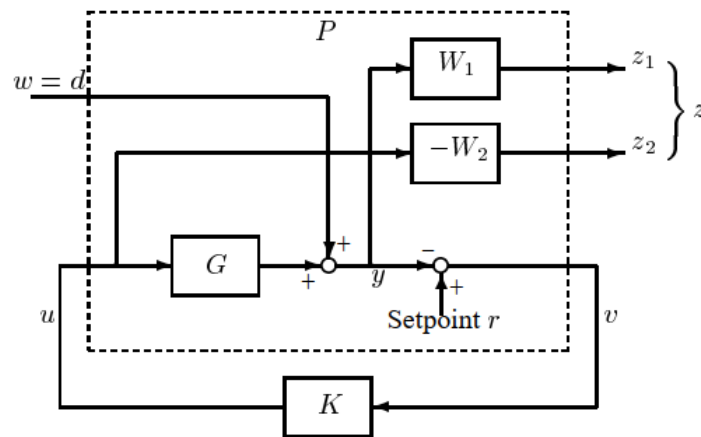
A norma H_∞ , por sua vez, está relacionada ao máximo ganho de energia da entrada w para z . Logo, o controlador H_∞ tenta minimizar o pico de amplificação em uma determinada frequência (máximo valor singular de $F_l(P(j\omega), K(j\omega))$). O problema clássico é encontrar um controlador K que minimiza a expressão:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)) \quad (2.26)$$

Uma formulação alternativa muito eficiente do controlador H_∞ é o controlador H_∞ com sensibilidade mista. O objetivo é conformar a função de sensibilidade S ou qualquer outra função em malha fechada, como KS ou a função de sensibilidade complementar T (Skogestad, 2001). A escolha adequada de funções de ponderação permite escolher o peso que é dado a cada

função durante a otimização. Assim, através da análise das propriedades do sistema (baixa propensão a ruídos de medição, ou necessidade de boa rastreabilidade, por exemplo) é possível escolher quais características devem ser minimizadas. A Figura 2.7 traz um exemplo de formulação da planta generalizada com duas funções de ponderação.

Figura 2.7 – Estrutura de controle para otimização com sensibilidade mista.



Fonte: Skogestad (2001).

Encontrar as funções de ponderação não é trivial. Como colocado por Bibel e Malyevac (1992):

(...) o método de design H_∞ depende das funções de ponderação para ajustar o projeto do controlador. No entanto, atualmente existem poucas informações sobre como isso deve ser feito. Como resultado, a seleção de peso é atualmente uma arte que depende fortemente de procedimentos ad hoc e experiência em projeto de sistema de controle. (Bibel e Malyevac, 1992, p. 11).

Algumas das regras práticas apontadas pelos autores para a escolha das funções de ponderação são⁴:

- Para resposta temporal adequada, é preciso que a função de ponderação $W_s(s)$ da sensibilidade de entrada de referência para a saída reflita⁵ uma função de sensibilidade com baixo ganho em baixas frequências (aproximadamente igual ao inverso do erro em regime permanente desejado) e alto ganho em altas frequências (para limitar *overshoot*).

⁴ Para mais detalhes, ver publicação “*Guidelines for the selection of weighting functions for H-infinity Control*” de John E. Bibel e Stephen Malyevac, publicado pelo Naval Surface Warfare Center, Dahlgren, Virginia, janeiro de 1992.

⁵ Corresponde à inversa, ou seja, $W_s(s)^{-1}$ deve ter o formato desejado da função de sensibilidade. O mesmo princípio vale para as demais escolhas das funções custo.

- Para boa robustez, a função $W_T(s)$ que pondera a sensibilidade complementar deve possuir a forma de um filtro passa-alta. Isto implica na função sensibilidade complementar com ganho unitário em baixas frequências (garantindo boa rastreabilidade) e baixo ganho em altas frequências (limitando ruído).
- Para limitar saturação do sinal de controle, a função $W_U(s)$ pode ser escolhida como inverso do limite de saturação.

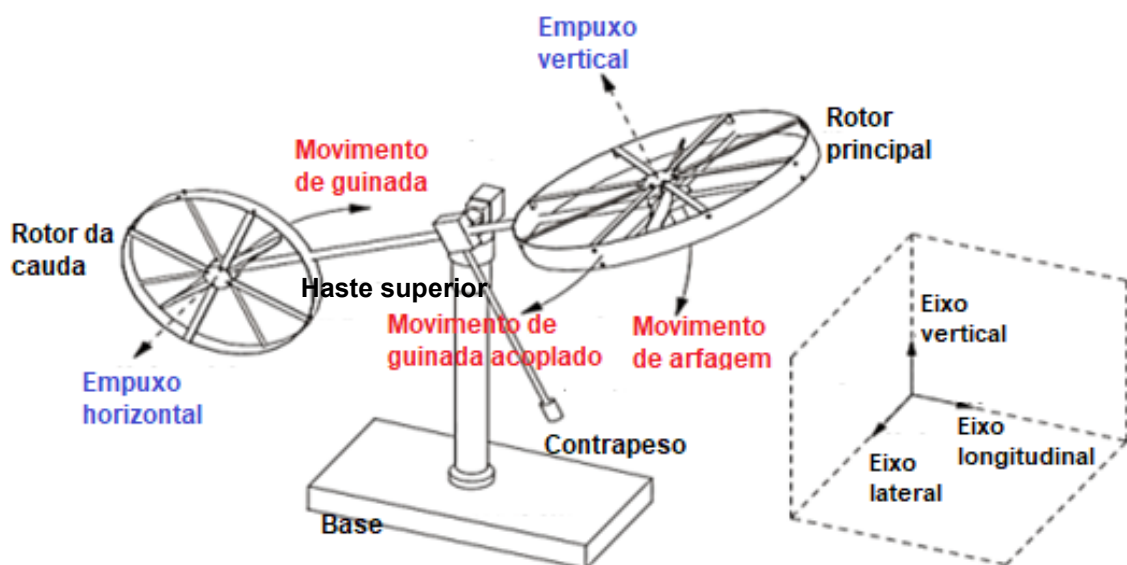
O desenvolvimento das técnicas de controle H_2 e H_∞ foi, de certa forma, influenciado pelas críticas à baixa robustez dos controladores LQG e à suposição de que os distúrbios podem ser modelados como ruídos brancos. O resultado das pesquisas foi um conjunto de arquiteturas de controle que lida muito bem com acoplamentos e perturbações em sistemas MIMO. No entanto, é importante lembrar que os controladores sintetizados são ótimos apenas em relação às funções custo estabelecidas – ou seja, não são necessariamente os melhores controladores possíveis. Além disso, os controladores H_2 e H_∞ dependem de uma descrição matemática precisa da planta e o controlador tem a mesma ordem da planta P (modelo acrescido das funções de ponderação), o que pode implicar em dificuldades computacionais na implementação.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

O TRMS é uma bancada didática utilizada para fins de pesquisa e desenvolvimento de sistemas de controle. Nesse trabalho, todas as análises foram conduzidas considerando o TRMS produzido pela Feedback Instruments Ltd, da mesma maneira que no trabalho de Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017). Esse trabalho foi usado como base para obtenção do modelo não-linear.

O sistema, conforme mostrado na Figura 3.1, é formado por uma haste apoiada de tal forma a permitir sua livre rotação em torno dos eixos lateral (movimento de arfagem) e vertical (movimento de guinada) do aparelho. O sistema conta com um contrapeso que atua como amortecedor e dois rotores, que são os atuadores aerodinâmicos responsáveis por movimentar o equipamento. Esses rotores estão montados ortogonalmente na haste superior (o rotor da cauda gira sobre no eixo lateral, e o rotor principal gira no eixo vertical). O rotor da cauda gera um empuxo que movimenta o aparelho ao redor do eixo vertical (movimento de guinada). O rotor principal gera um empuxo que movimenta o TRMS em torno do eixo lateral (movimento de arfagem) e induz um momento de guinda acoplado (CHULAPA; PŘIKRYL; NOVÁK, 2014, BELKHEIRI et al., 2009, RAO; AKHILA; MORALES-VIVIESCAS, 2019). Em outras palavras, um comando de arfagem gera, além do movimento de arfagem, um movimento de guinada.

Figura 3.1 – Esquema funcional do sistema TRMS.



Fonte: Jadhav e Gadgune (2019) (adaptado).

Os rotores produzem a mesma quantidade de empuxo independentemente do sentido de rotação. Assume-se que os rotores da cauda e principal são idênticos e que o sinal de controle é uma tensão que varia entre -2,5V e 2,5V. Existem sensores para medir os ângulos de arfagem e guinada, e rolamentos nos acoplamentos entre as partes móveis do TRMS. As entradas do sistema são as tensões dos motores $U_m(V)$ e $U_t(V)$, e as saídas são os ângulos de arfagem ψ (rad) e de guinada⁶ φ (rad).

3.1. Modelo matemático

Nesse trabalho, desenvolve-se o modelo do sistema utilizando o formalismo Euler-Lagrangiano. Essa abordagem é caracterizada pelo uso de sistemas de referência de corpo fixo para expressar todas as quantidades vetoriais dos sistemas translacionais, o que simplifica consideravelmente o cálculo das energias cinéticas (TASTEMIROV; LECCHINI-VISINTINI; MORALES, 2017).

Utiliza-se a abordagem Euler-Lagrangiana padrão conforme Brizard (2008 citado por TASTEMIROV; LECCHINI-VISINTINI; MORALES, 2017, p. 3) e adotam-se as seguintes coordenadas genéricas:

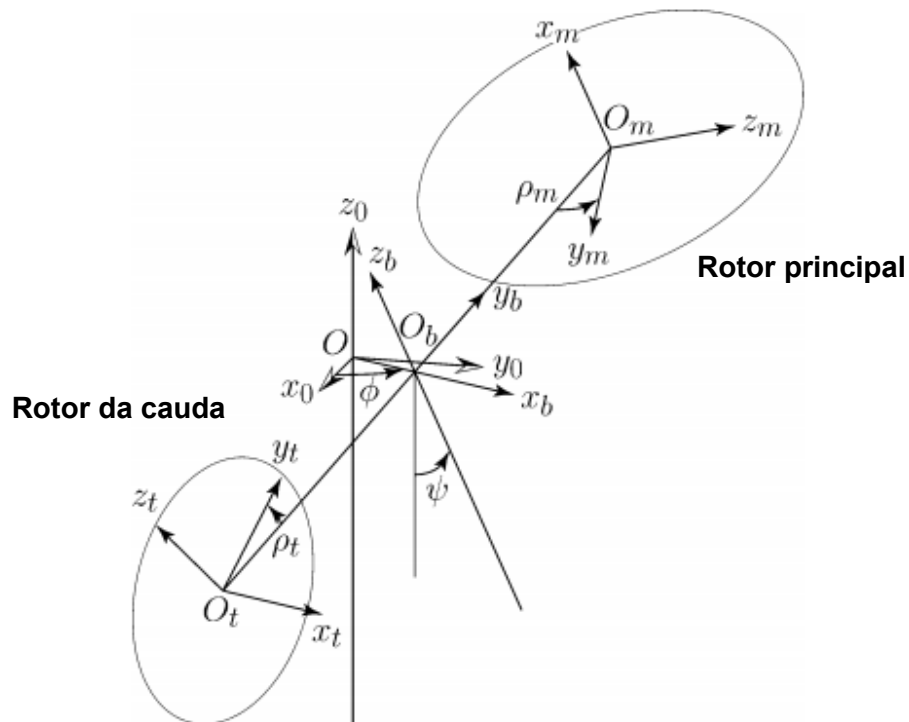
$$\mathbf{q} = [\psi \ \varphi \ \rho_m \ \rho_t]^T \quad (3.1)$$

Onde ψ e φ são os ângulos de arfagem e guinada, e ρ_m e ρ_t são, respectivamente, os ângulos dos rotores principal e da cauda, conforme a Figura 3.2.

Na análise, os rotores principal e da cauda são considerados iguais e a dinâmica dos motores é considerada passível de ser aproximada por uma equação diferencial de primeira ordem. Para cálculo das energias cinéticas, considera-se que o TRMS é formado por quatro corpos rígidos: rotor principal, rotor da cauda, haste superior e corpo (conjunto dos rotores, haste superior e contrapeso). Aplica-se a equação fundamental da Mecânica Lagrangiana (Equação 2.1) para cada parte do sistema.

⁶ A notação mais usual para aeronaves é utilizar a letra θ para indicar arfagem e a letra ψ para guinada. No entanto, todos os trabalhos sobre o TRMS utilizam a letra ψ para arfagem e letra φ (ou variação ϕ) para guinada. Decidimos manter a notação dos trabalhos passados nesta monografia por uma questão de compatibilidade.

Figura 3.2 – Sistema de referência para abordagem Euler-Lagrangiana.



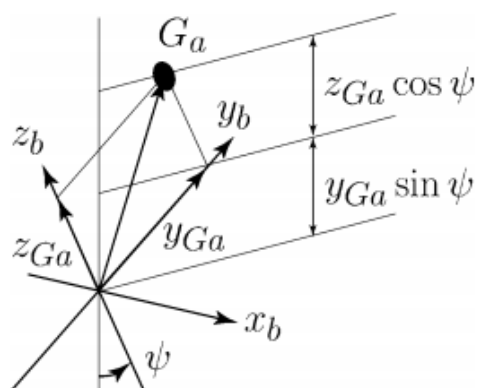
Fonte: Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017) (adaptado).

Para cálculo da energia potencial, vale-se da expressão a seguir:

$$U = M_a g (z_{Ga} \cos \psi + y_{Ga} \sin \psi) \quad (3.2)$$

Em que G_a é o centro de massa do corpo agregado M_a . z_{Ga} e y_{Ga} são coordenadas genéricas, conforme a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Posição vertical do centro de massa.



Fonte: Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017).

As forças externas, segundo Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017) são:

- Forças aerodinâmicas criadas pelos rotores. O rotor principal gera uma propulsão $C_{Tm}\dot{\rho}_m|\dot{\rho}_m|$, um torque de propulsão $C_{Tm}\dot{\rho}_m|\dot{\rho}_m|l_m$ atuando sobre o ângulo ψ , um torque de reação $-C_{Rm}\dot{\rho}_m|\dot{\rho}_m|l_m$ atuando sobre o ângulo ρ_m e um torque de reação $-C_{Rm}\dot{\rho}_m|\dot{\rho}_m|\cos\psi$ atuando sobre o ângulo φ . De maneira análoga, o rotor da cauda gera um torque de propulsão $C_{Tt}\dot{\rho}_t|\dot{\rho}_t|l_t\cos\varphi$ atuando sobre o ângulo φ , um torque de reação $-C_{Rt}\dot{\rho}_t|\dot{\rho}_t|$ atuando sobre o ângulo ρ_m e um torque de reação $-C_{Rt}\dot{\rho}_t|\dot{\rho}_t|$ atuando sobre o ângulo ψ . As derivadas $\dot{\rho}_m$ e $\dot{\rho}_t$ são as velocidades de rotação dos motores (ver Equações 3.7 e 3.8), e os termos C_{Tm} , C_{Rm} , C_{Tt} e C_{Rt} são constantes obtidas experimentalmente.
- Forças eletromagnéticas geradas pelos motores. Cada motor gera um torque eletromagnético equivalente a $k_t i$, onde k_t é a constante de torque do motor e i é a corrente elétrica.
- Atritos gerados nos rolamentos. Assume-se um modelo de atrito viscoso que gera as seguintes expressões para cada uma das coordenadas: $F_\psi = -(f_{c\psi}\dot{\psi} + f_{c\psi}\text{sign}\dot{\psi})$, $F_\varphi = -(f_{c\varphi}\dot{\varphi} + f_{c\varphi}\text{sign}\dot{\varphi})$, $F_{\rho_m} = -f_{vm}\dot{\rho}_m$ e $F_{\rho_t} = -f_{vt}\dot{\rho}_t$. O termo $f_{c\psi}$ é a constante de atrito para o rolamento do eixo de arfagem, $f_{c\varphi}$ é a constante de atrito para o rolamento do eixo de guinada, f_{vm} é a constante de atrito do rotor principal e f_{vt} é a constante de atrito do rotor da cauda. A função $\text{sign}()$ é a função sinal, definida como

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
- Força gerada pelos cabos. Modela-se o torque gerado pelos cabos que conectam os dispositivos elétricos da haste superior com a base pela expressão $-C_c(\varphi - \varphi_0)$, em que φ_0 é o ângulo de repouso do TRMS e C_c é uma constante obtida experimentalmente.

A soma dos termos das forças externas para cada coordenada e a aplicação do método de Lagrange (Equações 2.1 e 2.3) produzem as seguintes equações do movimento⁷:

⁷ O desenvolvimento das equações do método de Euler-Lagrange foi omitido por questão de brevidade. Para conferir o desenvolvimento completo da modelagem, assim as considerações feitas, consultar o artigo “*Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation*” de Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017). Lá, também é possível ver a definição dos termos omitidos nesse trabalho.

$$I_\psi \ddot{\psi} - (H_z \cos \psi + H_y \sin \psi) \ddot{\phi} + I_{t1} \dot{\omega}_t = -\frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2 \sin(2\psi) - I_{m1} \omega_m \dot{\phi} \sin \psi + G_z \sin \psi - G_y \cos \psi + C_{Tm} \omega_m |\omega_m| l_m - C_{Rt} \omega_t |\omega_t| - f_{v\psi} \dot{\psi} - f_{c\psi} \text{sign} \dot{\psi} \quad (3.3)$$

$$-(H_z \cos \psi + H_y \cos \psi) \ddot{\psi} + (I_\phi + I_c \cos^2 \psi) \ddot{\phi} + I_{m1} \dot{\omega}_m \cos \psi = -(H_z \sin \psi - H_y \cos \psi) \dot{\psi}^2 + I_c \dot{\phi} \dot{\psi} \sin(2\psi) + I_{m1} \omega_m \dot{\psi} \sin \psi + C_{Tt} \omega_t |\omega_t| \cos \psi - f_{v\phi} \dot{\phi} - f_{c\phi} \text{sign} \dot{\phi} - C_c (\phi - \phi_0) \quad (3.4)$$

$$I_{m1} \dot{\omega}_m + I_{m1} \ddot{\phi} \cos \psi = I_{m1} \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi + k_{tm} \dot{i}_m - f_{vm} \omega_m - C_{Rm} \omega_m |\omega_m| \quad (3.5)$$

$$I_{t1} \dot{\omega}_m + I_{t1} \ddot{\psi} = k_{tt} \dot{i}_t - f_{vt} \omega_t - C_{Rt} \omega_t |\omega_t| \quad (3.6)$$

Onde:

$$\omega_m = \dot{\rho}_m \quad (3.7)$$

$$\omega_t = \dot{\rho}_t \quad (3.8)$$

São quatro equações do movimento pois foram definidas quatro coordenadas genéricas em (3.1). Rearranjando as equações, é possível obter as seguintes equações de estado não-lineares com o vetor de estados $X = [\psi \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi} \ \omega_m \ \omega_t]^T$, conforme conduzido por Rao, Akhila e Morales-Viviescas (2019). Os estados representam os ângulos e taxas de arfagem (ψ e $\dot{\psi}$), os ângulos e taxas de guinada (ϕ e $\dot{\phi}$) e as velocidades dos rotores principal e da cauda (ω_m e ω_t). Com estas equações, foi possível obter o modelo não-linear utilizado no projeto e nas simulações, conforme as Equações (3.9 – 3.16) a seguir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\frac{1}{2} I_c x_4^2 \sin 2x_1 - I_{m1} x_5 x_4 \sin x_1 + G_z \sin x_1 - G_y \cos x_1 + C_{Tm} x_5 |x_5| l_m - C_{Rt} x_6 |x_6| - f_{v\psi} x_2 - f_{c\psi} \text{sgn} x_2 - k_{tt} (i_t) + f_{vt} x_6 + C_{Rt} x_6 |x_6| + \{M\{(N)x_2^2 + I_c x_4 x_2 \sin 2x_1 + I_{m1} x_5 x_2 \sin x_1 + C_{Tt} x_6 |x_6| l_t \cos x_1 - f_{v\phi} x_4 - f_{c\phi} \text{sgn} x_4 - C_c (x_3 - \phi_0) - \cos x_1 \{ I_{m1} x_2 x_4 \sin x_1 + k_{tm} (i_m) - f_{vm} x_5 - C_{Rm} x_5 |x_5| \}\}}}{I_\psi - I_{t1} - M} \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(N)x_2^2 + I_c x_4 x_2 \sin 2x_1 + I_{m1} x_5 x_2 \sin x_1 + C_{Tt} x_6 |x_6| l_t \cos x_1 - C_{Rm} x_5 |x_5| \cos x_1 - f_{v\phi} x_4 - C_c (x_3 - \phi_0) + (H_z \cos x_1 + H_y \sin x_1) \dot{x}_2 - f_{c\phi} \text{sgn} x_4 - \cos x_1 \{ I_{m1} x_2 x_4 \sin x_1 + k_{tm} (i_m) - f_{vm} x_5 - C_{Rm} x_5 |x_5| \}}{(I_\phi + (I_c - I_{m1}) \cos^2 x_1)} \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{-I_{m1}\dot{x}_4 \cos x_1 + I_{m1}x_2x_4 \sin x_1 + k_{tm}(i_m) - f_{vm}x_5 - C_{Rm}x_5|x_5|}{I_{m1}} \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{k_{tt}(i_t) - f_{vt}x_6 - C_{Rt}x_6|x_6| - I_{t1}\dot{x}_2}{I_{t1}} \quad (3.14)$$

Onde:

$$M = \left(\frac{(H_z \cos x_1 + H_y \sin x_1)}{(I_\phi + (I_c - I_{m1}) \cos^2 x_1)} \right), \quad N = (-H_z \sin x_1 + H_y \cos x_1) \quad (3.15 - 3.16)$$

Foram utilizados os valores das Tabelas 3.1 e 3.2, obtidos por Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017), para caracterizar o modelo do TRMS. Na Tabela 3.2, foram considerados, sempre que possível, os parâmetros identificados. Além disso, para algumas constantes, os autores obtiveram valores ligeiramente diferentes para estimação pelo eixo positivo e pelo negativo. Nesse caso, foi considerada a média aritmética entre eles.

Tabela 3.1 – Parâmetros TRMS.

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
l_m	0,254	m	Distância entre o pivô central e o rotor principal
l_t	0,275	m	Distância entre o pivô central e o rotor da cauda
R_m, R_t	8,000	Ω	Resistência dos motores
k_{vm}, k_{vt}	0,0202	$N \, m \, A^{-1}$	Constantes eletromagnéticas dos motores
k_{tm}, k_{tt}	0,0202	$V \, rad^{-1} \, s$	Constantes de torque dos motores
k_{um}	8,5		Ganho de entrada do motor principal
k_{ut}	6,5		Ganho de entrada do motor da cauda

Fonte: Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017).

Tabela 3.2 – Parâmetros das equações do movimento do TRMS.

Parâmetro	Valor estimado	Valor calculado	Valor identificado	Unidade
I_{m1}	-	$2,7332 \times 10^{-4}$	$1,7249 \times 10^{-4}$	$kg \, m^2$
I_{t1}	-	$3,7800 \times 10^{-5}$	$3,2170 \times 10^{-5}$	$kg \, m^2$
I_ψ	-	$6,3764 \times 10^{-2}$	$6,1644 \times 10^{-2}$	$kg \, m^2$
I_ϕ	-	$1,0408 \times 10^{-2}$	$2,1117 \times 10^{-2}$	$kg \, m^2$
I_c	-	$5,4244 \times 10^{-2}$	$8,3286 \times 10^{-2}$	$kg \, m^2$
$f_{v\psi}$	-	-	$4,2150 \times 10^{-4}$	$N \, m \, rad^{-1} \, s$
$f_{c\psi}$	-	-	$4,0548 \times 10^{-4}$	N m
$f_{v\phi}$	-	-	$1,1243 \times 10^{-4}$	$N \, m \, rad^{-1} \, s$
$f_{c\phi}$	-	-	$1,1758 \times 10^{-5}$	N m
f_{vm}	-	-	$4,1993 \times 10^{-6}$	$N \, m \, rad^{-1} \, s$
f_{vt}	-	-	$3,2498 \times 10^{-6}$	$N \, m \, rad^{-1} \, s$
C_{Tm}	$1,2050 \times 10^{-5}$	-	$1,1984 \times 10^{-5}$	$N \, s^2 \, rad^{-2}$
C_{Tt}	$2,4850 \times 10^{-6}$	-	$3,0400 \times 10^{-6}$	$N \, s^2 \, rad^{-2}$
C_{Rm}	$4,5000 \times 10^{-7}$	-	$4,7815 \times 10^{-7}$	$N \, m \, s^2 \, rad^{-2}$

C_{Rt}	$9,7000 \times 10^{-8}$	-	$9,8104 \times 10^{-8}$	$\text{N m s}^2 \text{ rad}^{-2}$
C_c	-	-	$9,8664 \times 10^{-3}$	N m rad^{-1}
ψ_0	-	-0,6801	-0,5369	rad
φ_0	-	-	0,2500	rad
G_z	-	-0,18585	-0,25254	N m
G_y	-	0,15032	-	N m
H_z	-	$-1,1367 \times 10^{-3}$	$-1,9525 \times 10^{-3}$	kg m^2
H_y	-	$6,6120 \times 10^{-3}$	-	kg m^2

Fonte: Tastemirov, Lecchini-Visintini e Morales (2017).

3.2. Trimagem e linearização

O modelo foi trimado em torno de um ponto de operação em regime permanente com ângulos e taxas de arfagem e guinada nulas, o que é equivalente a uma posição estável e equilibrada no plano horizontal. A escolha desse ponto ocorre em função da região de operação que desejamos exercitar os controladores nesse trabalho, que é em torno de $\psi = 0$ e $\varphi = 0$. Nada impede que outros pontos dentro do envelope operacional sejam escolhidos para atender outros requisitos de projeto.

Para fazer a trimagem, foi preciso informar ao algoritmo que os estados ψ , $\dot{\psi}$, φ e $\dot{\varphi}$ devem estar em regime permanente com valor 0. Não são impostas restrições sobre os estados ω_m e ω_t , uma vez que sabemos que para que a estabilização do sistema no ponto desejado é preciso que os dois rotores possuam alguma rotação. As entradas U_m (V) e U_t (V) ficam livres para se movimentar dentro de valores um pouco abaixo dos limites de saturação dos motores. Essa medida evita que o algoritmo por ventura encontre um ponto de operação configurado com algum motor saturado. Tal situação não é desejada, pois deixa o sistema de controle sem margem para ação. Utilizando-se a função *findop* do MATLAB®, obteve-se o ponto de trimagem expresso na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Ponto de trimagem.

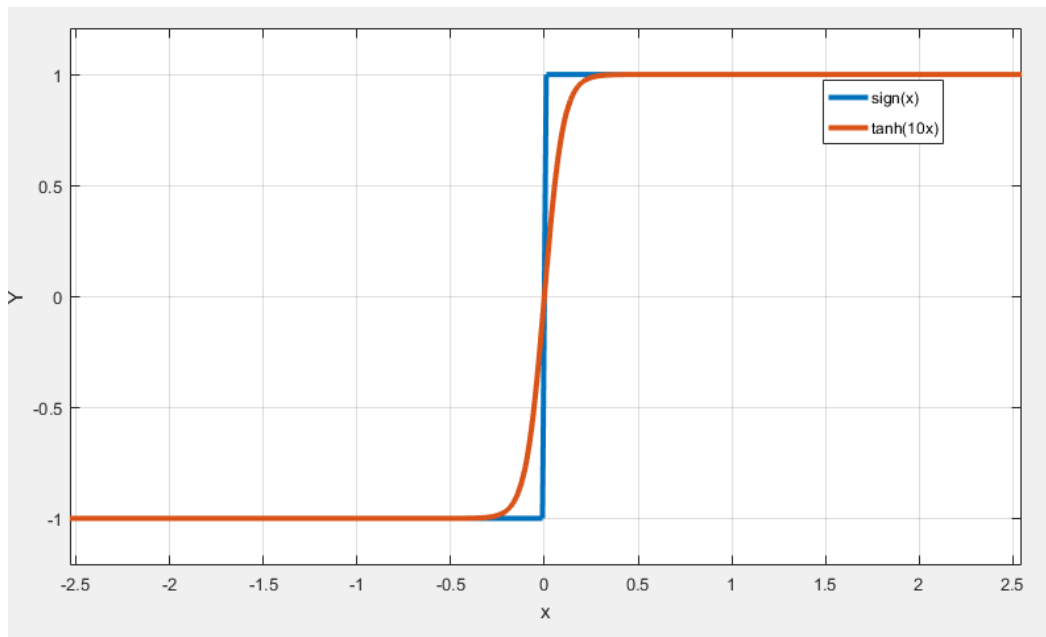
Entradas		Estados						Saídas	
U_m	U_t	ψ	$\dot{\psi}$	φ	$\dot{\varphi}$	ω_m	ω_t	ψ	φ
2.00	-1.65	0.00	0.00	0.00	0.00	193.00	189.00	0.00	0.00

Fonte: Autor.

A linearização em torno do ponto de operação foi feita com o comando *linearize* do MATLAB®. O algoritmo apresentou, inicialmente, um erro de execução devido a presença da função não-linear *sign(x)* nas Equações 3.4, 3.5, 3.10 e 3.12. Para corrigir esse erro, foi

necessário substituir a função por uma função linear aproximada. Uma boa alternativa foi encontrada pelo autor na forma de $\tanh(10x)$. É possível a semelhança entre as duas funções na Figura 3.4. Testes feitos durante o desenvolvimento indicaram que não houve desvio significativo do comportamento dinâmico em relação ao modelo original.

Figura 3.4 – Aproximação linear para função $\text{sign}(x)$.



Fonte: Autor.

Após a linearização, obteve-se um sistema no espaço de estado na forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.17)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.18)$$

Em que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\omega}_t \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \omega_m \\ \omega_t \end{bmatrix} \quad u = [U_m \quad U_t] \quad (3.19 - 3.21)$$

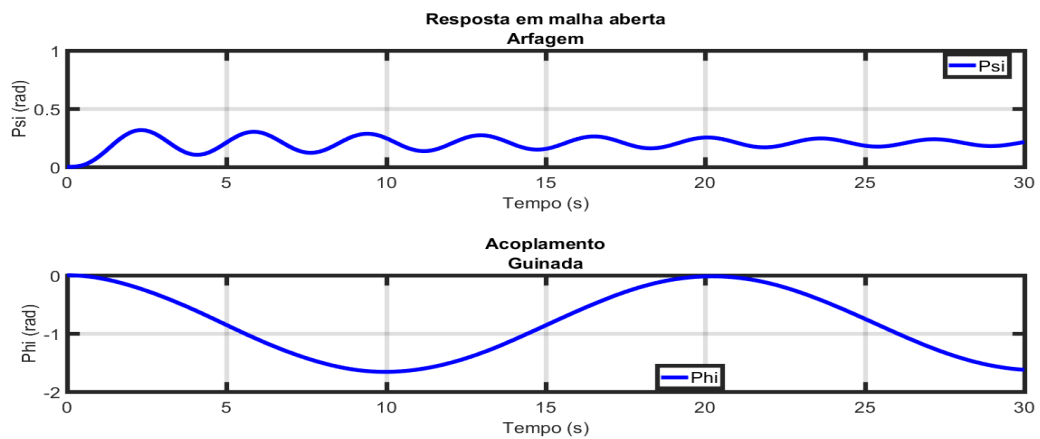
E as matrizes A, B, C e D são:

$$A = \begin{pmatrix} 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ -3,129 & -0,106 & 0,002 & 0,000 & 0,015 & 0,001 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,059 & 0,002 & -0,095 & -0,003 & 0,000 & 0,0030 \\ -0,059 & -0,002 & 0,095 & 0,003 & -1,390 & -0,003 \\ 3,129 & 0,106 & -0,002 & -0,001 & -0,015 & -2,839 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,000 & 0,000 \\ 0,005 & -0,204 \\ 0,000 & 0,000 \\ -0,206 & 0,004 \\ 124,6000 & -0,004 \\ -0,005 & 510,400 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

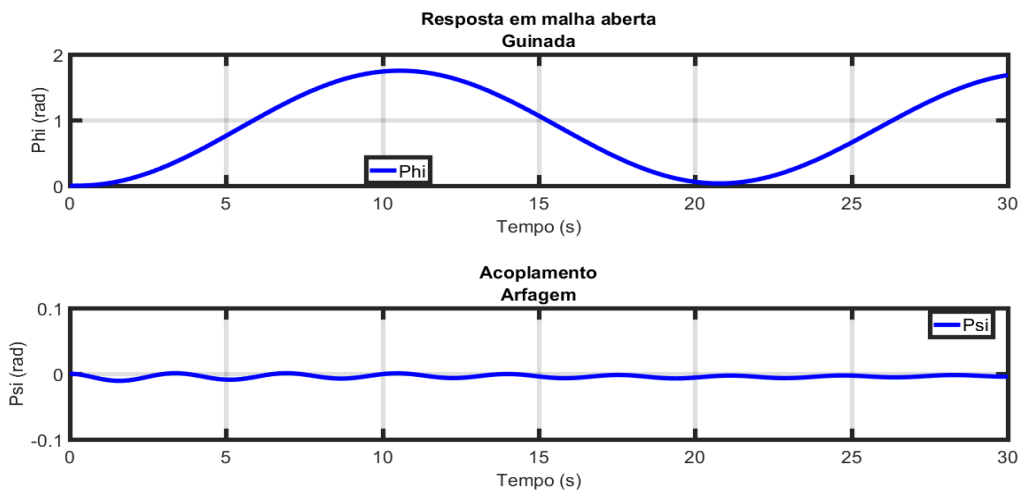
As plotagens abaixo mostram o comportamento do sistema em malha aberta para uma entrada em degrau em cada motor (aplicadas separadamente). A Figura 3.5 ilustra a resposta do sistema para a aplicação de uma tensão de 0,5V no motor principal. A Figura 3.6 mostra a resposta do sistema quando uma tensão de 0,15V é aplicada no motor da cauda. É possível perceber que o comando de arfagem induz bastante movimento de guinada acoplado, e que o comando de guinada perturba um pouco a saída adjacente.

Figura 3.5 – Resposta em malha aberta – Aplicação de tensão de 0,5V no motor principal.



Fonte: Autor.

Figura 3.6 – Resposta em malha aberta – Aplicação de tensão de 0,15V no motor da cauda.



Fonte: Autor.

3.3. Síntese dos controladores

O projeto e a simulação dos controladores foram feitos no software MATLAB®. Os objetivos gerais de controle escolhidos foram:

- Bom rastreamento entrada-saída;
- Baixo acoplamento;
- Robustez a distúrbios e incertezas do modelo.

É desejável que o sistema também possua baixa sensibilidade a ruídos de medição e minimize os esforços de controle. Para atingir esses objetivos, os requisitos de projeto escolhidos são:

- Margem de fase mínima de 35°;
- Margem de ganho mínima de 6dB;
- Frequência de cruzamento (*crossover*) do controlador de 1 rad/s;
- *Overshoot* máximo de 10%;
- Tempo de acomodação de até 10s.

As definições de margens de fase e ganho estão relacionadas à estabilidade do sistema, e os demais requisitos são associados à performance.

3.3.1. Controle PID descentralizado

O projeto do controlador PID desacoplado foi inspirado na implementação *Decoupling Controller for a Distillation Column*, disponível no site da MathWorks®. A arquitetura proposta é a mesma da Figura 2.2, o que corresponde a dois controladores PID (um para controle do ângulo de arfagem e outro para controle do ângulo de guinada) e uma matriz desacopladora 2×2 de ganhos sintonizáveis.

Foi usada a função *looptune* com requisitos para frequência de *crossover* de 0,8rad/s, margem de fase de 35°, margem de ganho de 6dB, *overshoot* de 10%, além de algumas especificações de rejeição e sensibilidade. Essa função do MATLAB® recebe como entradas o modelo linear da planta, instruções para arquitetura do sistema de controle e os requisitos de projeto. A função então calcula por otimização os melhores valores de ganhos para atingir os objetivos de controle e retorna um controlador. O controlador obtido foi:

- Matriz desacopladora $DM = \begin{pmatrix} -1,000 & 0,020 \\ 0,185 & -1,000 \end{pmatrix}$
- Controlador PID para arfagem $K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \frac{s}{T_f(s+1)}$ com $K_p = 0,468$, $K_I = -0,643$, $K_D = -1,170$ e $T_f = 3,470 \times 10^{-3}$.
- Controlador PID para guinada com estrutura similar e $K_p = -0,845$, $K_I = -0,341$, $K_D = -2,750$ e $T_f = 7,62 \times 10^{-4}$.

3.3.2. Controle LQG com ação integral

O projeto do controlador LQG com ação integral consiste, basicamente, em escolher as matrizes de ponderação diagonais Q e R , tendo em mente que valores elevados de Q implicam em minimização dos estados, e valores elevados de R resultam em menor esforço de controle. A matriz Q tem a dimensão 8×8 (são seis estados da planta e dois sinais de erro) e a matriz R tem dimensão 2×2 (são dois sinais de controle). Foram escolhidos os valores de ponderação 1000 para os erros e os estados ψ , $\dot{\psi}$, φ e $\dot{\varphi}$; 0,01 para ω_m e ω_t ; e 1 para a matriz R . O objetivo foi minimizar os ângulos e as taxas de arfagem e guinada, enquanto as velocidades e tensões dos motores ficam menos restritas para garantir os objetivos de controle. Foi utilizada a função *lqi* do MATLAB® para obter os ganhos da realimentação de estados.

É interessante ressaltar que a ponderação também leva em conta as ordens de grandeza das variáveis: os ângulos e taxas de azimute, assim como as tensões dos motores, são de ordem 10^0 , enquanto as velocidades de rotação dos motores são de ordem 10^2 . Se essa consideração não é feita, o algoritmo de otimização não produz os resultados esperados pelo projetista.

A arquitetura proposta é a mesma da Figura 2.5. A matriz de ganhos obtida foi

$$K = \begin{bmatrix} 33,268 & 38,664 & -17,653 & -9,684 & 0,122 & 0,014 & -30,154 & 9,525 \\ -13,947 & 11,678 & 71,258 & 77,594 & 0,123 & 0,104 & -9,525 & -30,154 \end{bmatrix}$$

Os termos de K das duas primeiras colunas são ganhos para o termo integral, e os demais são usados como ganhos para os seis estados da planta.

Além da realimentação de ganhos, o controlador conta com um filtro de Kalman para estimar os estados da planta. O projeto desse filtro envolve fornecer o modelo da planta linearizada e duas matrizes: Q (matriz de covariância do ruído de processo) e R (matriz de

covariância do ruído de medição). Foram escolhidas matrizes diagonais com ponderação 1000 para a matriz Q e ponderação 0,1 para matriz R .

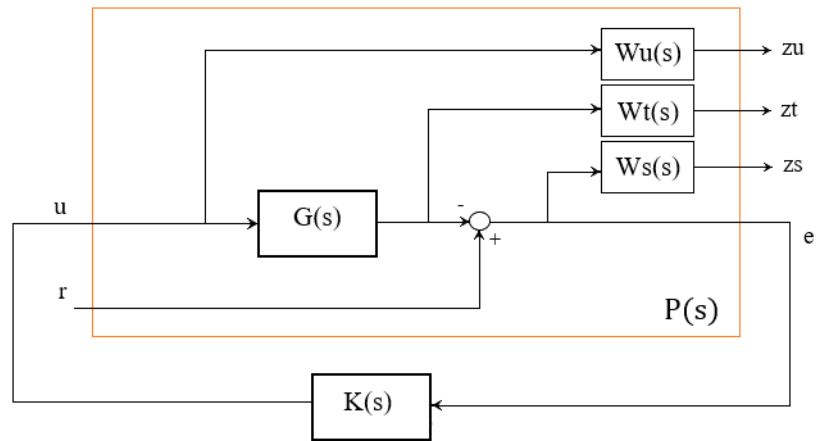
3.3.3. Controle H_∞

Para o projeto de um controlador H_∞ , construiu-se uma planta generalizada $P(s)$ conforme a arquitetura da Figura 3.7. Foram escolhidas três funções de ponderação:

- $W_s(s)$ – Função de ponderação para sensibilidade. A sensibilidade deve ter baixo ganho em baixas frequências para boa rastreabilidade e alto ganho em altas frequências para limitar *overshoot*. A função de ponderação escolhida foi um filtro passa-baixa com ganho na passagem de 40dB, ganho na rejeição de -20dB e frequência de corte de 1 rad/s.
- $W_t(s)$ – Função de ponderação para sensibilidade complementar. Para atingir robustez, escolheu-se como função de ponderação um filtro passa-alta com ganho de passagem de 60dB, ganho na rejeição de -40dB e frequência de corte de 1 rad/s.
- $W_u(s)$ – Função de ponderação para o sinal de controle. Desejável limitar a ação de controle em frequências muito elevadas. A função escolhida tem a forma de um filtro passa-alta com ganho na passagem de 20dB, ganho na rejeição de -20dB e frequência de corte de 500 rad/s.

Para a escolha das funções de ponderação foram seguidas as orientações gerais presentes em Bibel e Malýevac (1992). A escolha dos valores exatos é, no entanto, um exercício iterativo e um tanto quanto experimental. Os valores foram obtidos depois de várias tentativas e ajustes.

O controlador foi sintetizado com o comando *hinfsyn* e possui uma estrutura no espaço de estados com duas entradas, duas saídas e dez estados. Diferentemente dos blocos dos controladores PID descentralizado e LQG com controle integral, esse controlador tem um grau de liberdade. Testes conduzidos durante o desenvolvimento mostraram um melhor desempenho do controlador que é alimentado pelo erro em relação a um controlador de dois graus de liberdade com quatro entradas (duas referências e dois sinais de saída da planta).

Figura 3.7 – Estrutura de controle generalizada utilizada no projeto do controlador H_∞ .

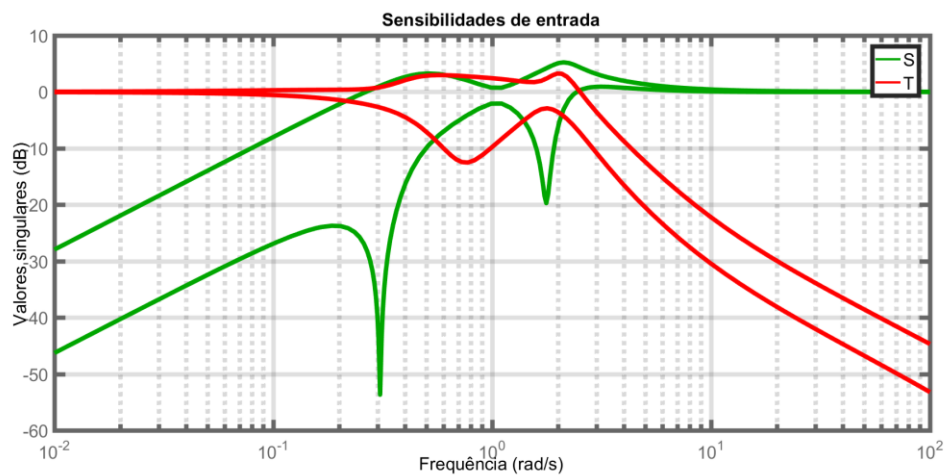
Fonte: Autor.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Análise linear

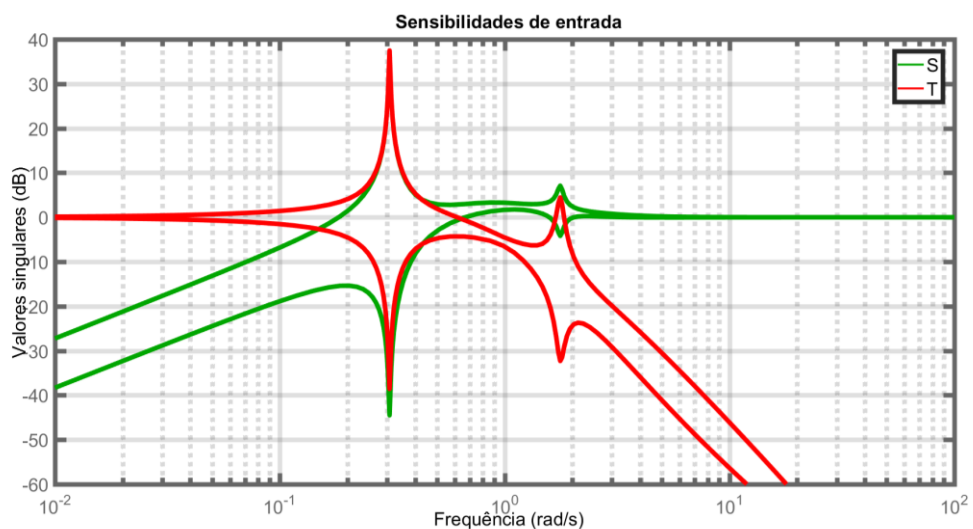
Avaliou-se a resposta em frequência com quatro parâmetros para cada conjunto de controlador e modelo linear da planta: diagramas de valor singular da sensibilidade, da sensibilidade complementar e da malha aberta, além das margens de estabilidade do sistema. As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 são os diagramas de valor singular para sensibilidade (em verde) e sensibilidade complementar (em vermelho) para cada um dos controladores.

Figura 4.1 – Sensibilidades de entrada para planta com controlador PID.

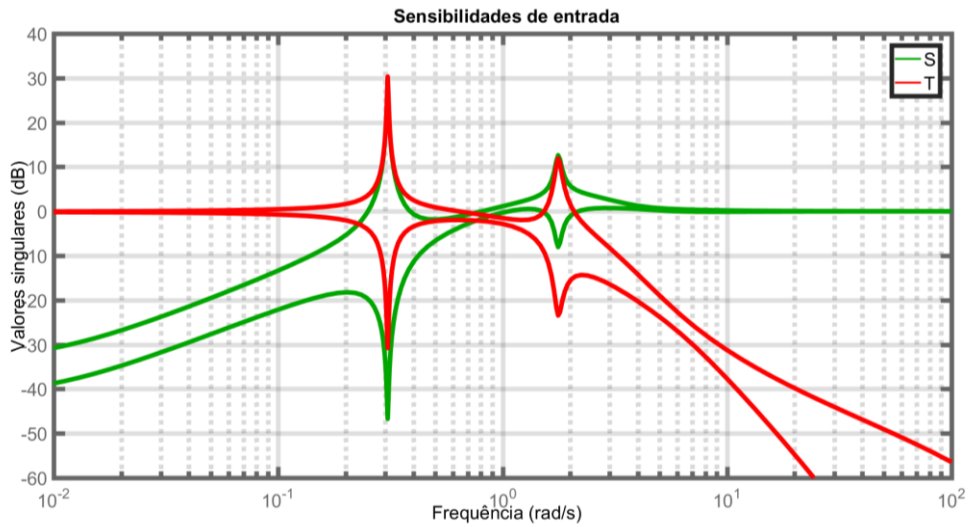


Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Sensibilidades de entrada para planta com controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

Figura 4.3 – Sensibilidades de entrada para planta com controlador H_∞ .

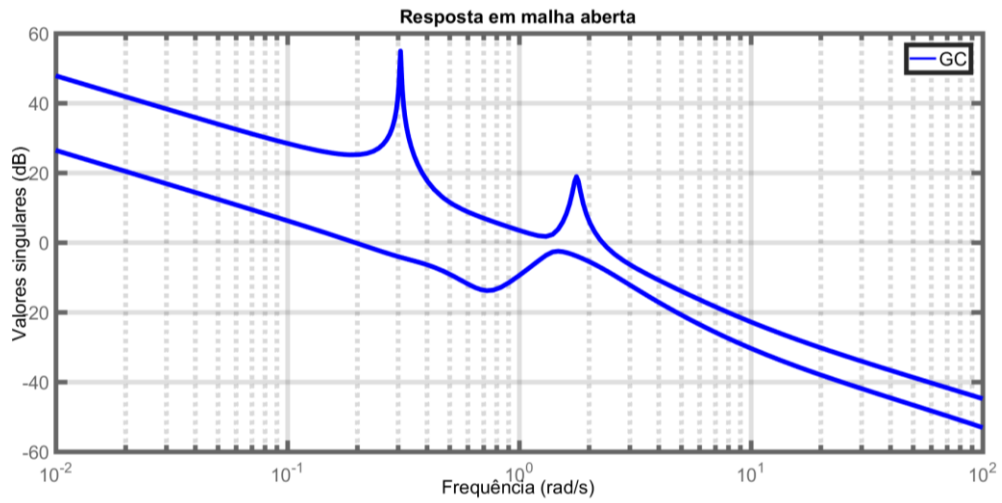
Fonte: Autor.

Os diagramas de sensibilidade e sensibilidade complementar não apresentaram as formas mais canônicas, e todos apresentando picos de ganhos. No entanto, a forma geral foi respeitada. Em baixas frequências, a sensibilidade complementar apresenta ganho unitário e a sensibilidade apresenta ganho negativo para boa rastreabilidade. Em altas frequências, para boa robustez e atenuação do ruído, vale o inverso.

O controlador LQG com ação integral foi o que mais atenuou a sensibilidade complementar em altas frequências, o que garante boa robustez. O controlador H_∞ , apesar dos esforços por mais robustez, foi mais bem sucedido em atenuar a sensibilidade, o que garante respostas mais rápidas.

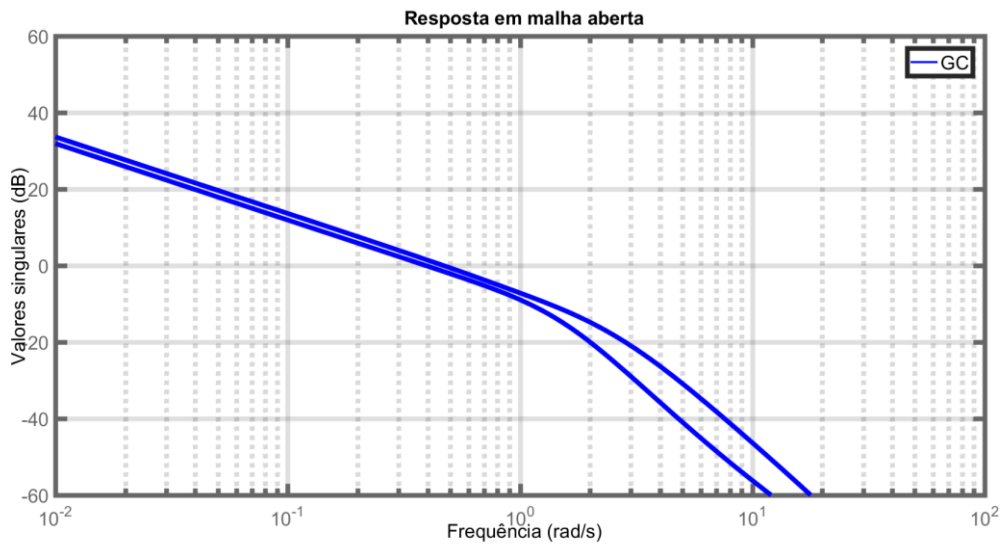
Com relação aos valores singulares da planta em malha aberta, percebemos que o controlador PID não atenuou os picos existentes na malha aberta, enquanto os demais projetos promoveram valores com variações menos bruscas, sem picos de ganhos. Novamente, o sistema com realimentação de estados do controlador LQG com ação integral foi o que mais atenuou a resposta em alta frequência. Os controladores PID e H_∞ tiveram baixa atenuação nessa faixa, o que tem implicações na robustez do sistema a ruídos e erros de modelagem da planta. A frequência de corte de todos os controladores ficou em torno de 1 rad/s, o que é adequado em termos da capacidade dos atuadores da planta e o objetivo da aplicação. As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 são os diagramas de valor singular para cada um dos sistemas.

Figura 4.4 – Diagrama de valor singular para planta em malha aberta com controlador PID.



Fonte: Autor.

Figura 4.5 – Diagrama de valor singular para planta em malha aberta com controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

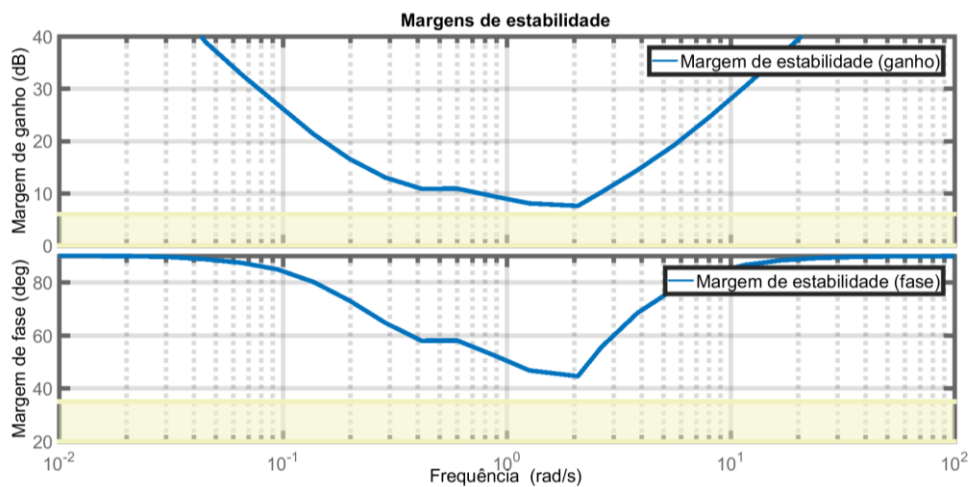
Figura 4.6 – Diagrama de valor singular para planta em malha aberta com controlador H_∞ .



Fonte: Autor.

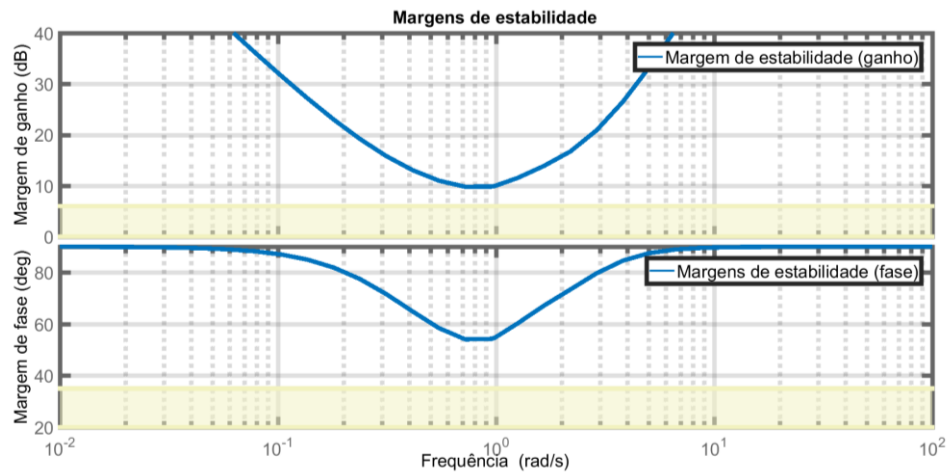
A análise das margens de estabilidade indica que todos os controladores consumiram bastante margem, com valores mínimos de, em média, 10dB de margem de ganho e 50° de margem de fase. Em um sistema tão complexo, as margens não implicam necessariamente em boa performance. A conclusão que pode ser tirada é que, para a arquitetura de controle escolhida, os ganhos estão otimizados. Para melhorar o desempenho muito além disso, é preciso obter atuadores mais potentes. Nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 é possível ver as margens de estabilidade para os três controladores propostos.

Figura 4.7 – Margens de estabilidade para planta com controlador PID descentralizado.



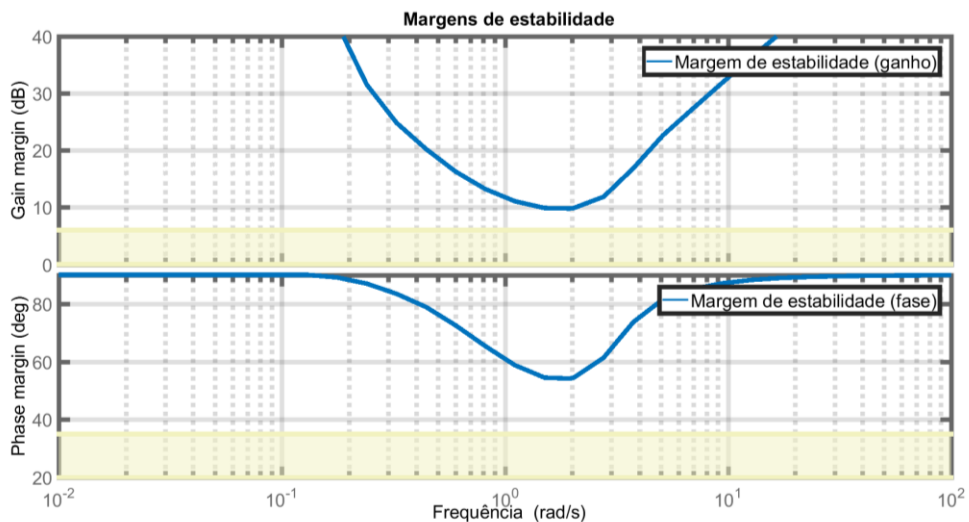
Fonte: Autor.

Figura 4.8 – Margens de estabilidade para planta com controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

Figura 4.9 – Margens de estabilidade para planta com controlador H_∞ .



Fonte: Autor.

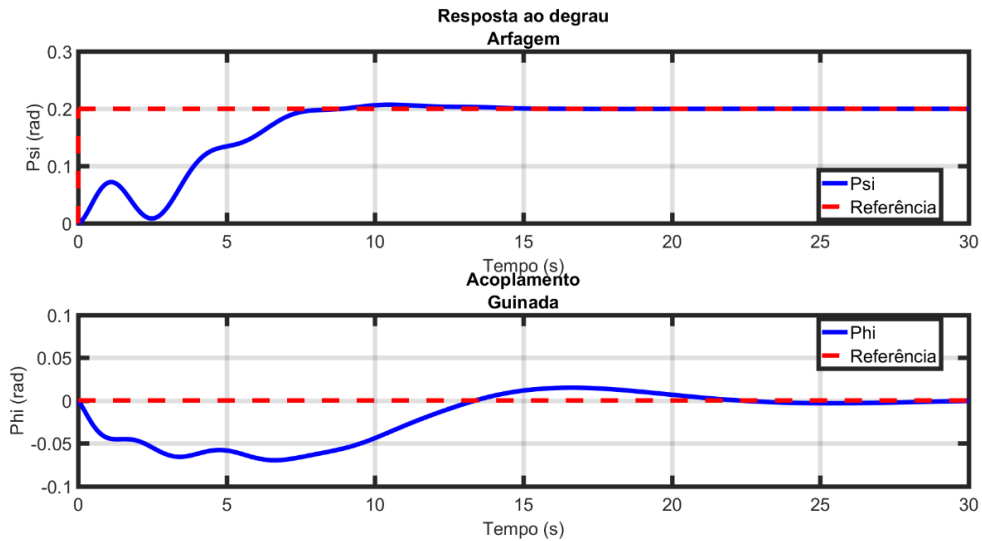
4.2. Resposta temporal no modelo linear

Nesta seção, serão avaliadas as respostas dos controladores a demandas de arfagem e guinada na forma de um degrau de 0,2 rad. Os sistemas são simulados com o modelo linear utilizado durante a síntese dos controladores.

Para comando de arfagem, o controlador PID apresentou uma resposta um pouco ruidosa. O tempo de acomodação foi de cerca de 7,2s e o controlador causou um acoplamento na guinada com pico de -0,07rad, o que corresponde a um pico de 35% da referência de arfagem.

Além disso, as flutuações de guinada demoraram quase 20s para se estabilizarem, como pode ser visto na Figura 4.10.

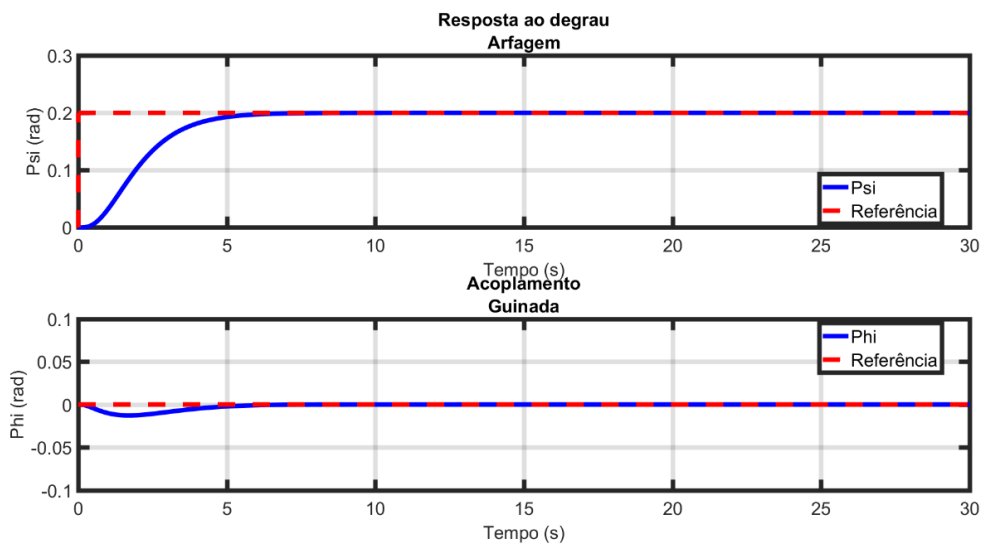
Figura 4.10 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo linear – Controlador PID.



Fonte: Autor.

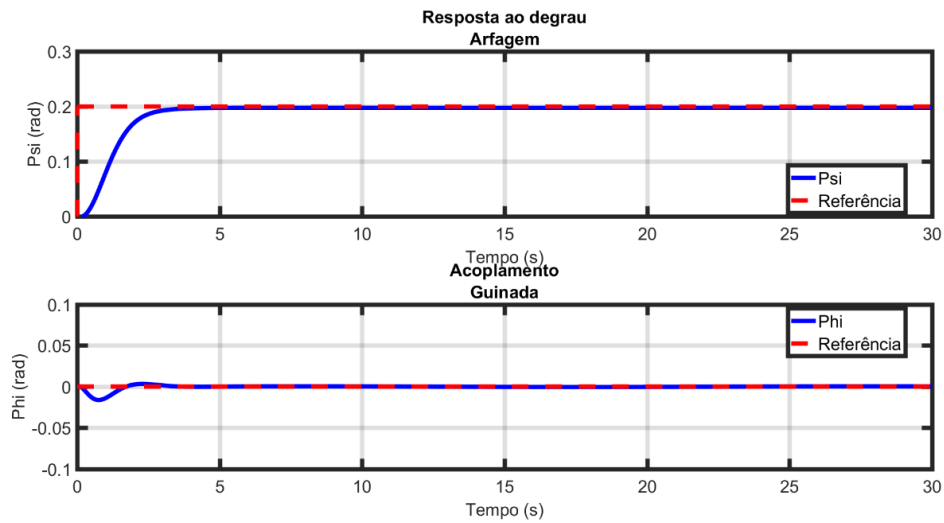
Para a mesma situação, o controlador LQG com ação integral obteve um tempo de acomodação de 4,5s. O acoplamento na guinada foi da ordem de 0,01rad e demorou menos de 5s para ser estabilizado. O controlador H_∞ foi mais agressivo, com tempo de acomodação de apenas 2,8s e baixo acoplamento. As Figuras 4.11 e 4.12 ilustram as duas respostas.

Figura 4.11 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo linear – Controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

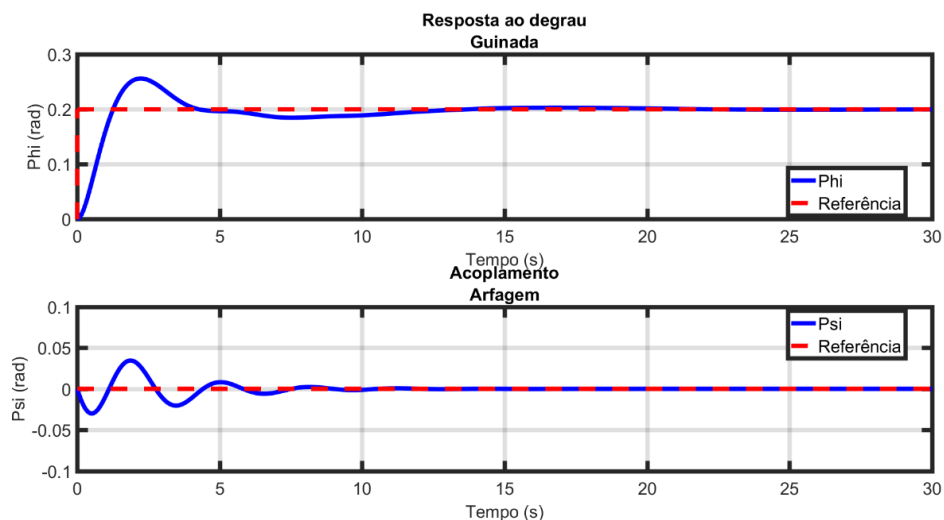
Figura 4.12 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo linear – Controlador H_∞ .



Fonte: Autor.

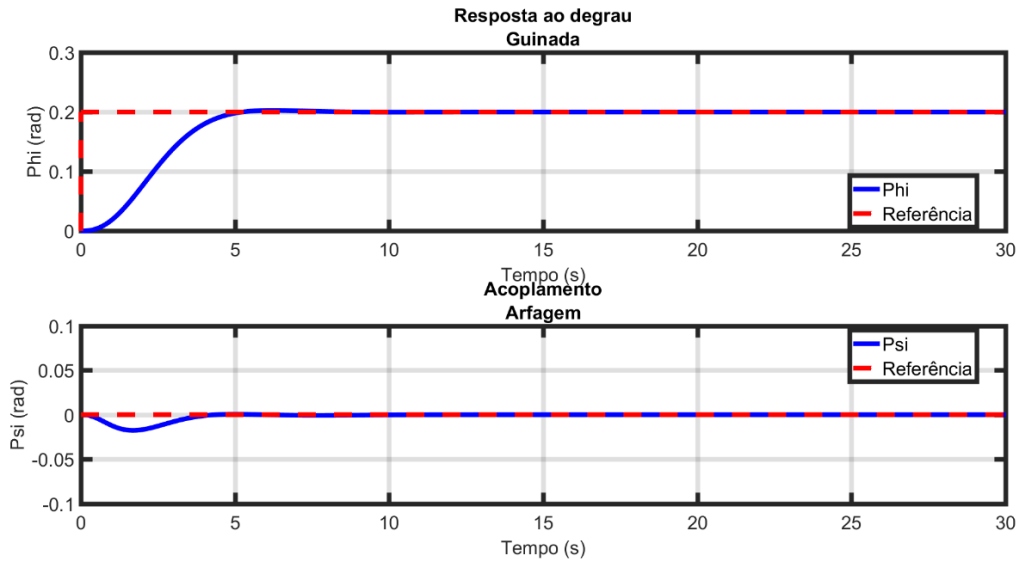
Repetiu-se o mesmo procedimento com a entrada em degrau para referência de guinada. O controlador PID demorou mais de 10s para responder à demanda de guinada, ainda que com menos de 5s o valor estava muito próximo da referência. Houve um *overshoot* de 16% e certo nível de acoplamento oscilatório no canal de medição adjacente. Nessas condições, os controladores LQG e H_∞ tiveram um desempenho bem próximo do apresentado para a rastreabilidade de arfagem, com tempos de acomodação de menos de 5s, nenhum *overshoot* e baixo acoplamento. As Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 são plotagens das respostas de cada sistema simulado.

Figura 4.13 – Resposta ao degrau de guinada no modelo linear – Controlador PID.



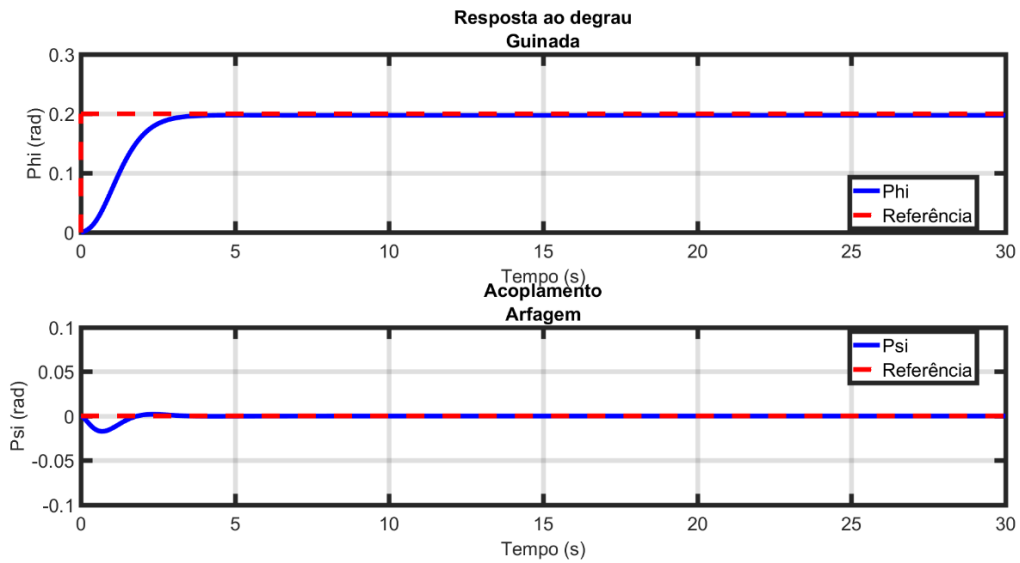
Fonte: Autor.

Figura 4.14 – Resposta ao degrau de guinada no modelo linear – Controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

Figura 4.15 – Resposta ao degrau de guinada no modelo linear – Controlador H_∞ .



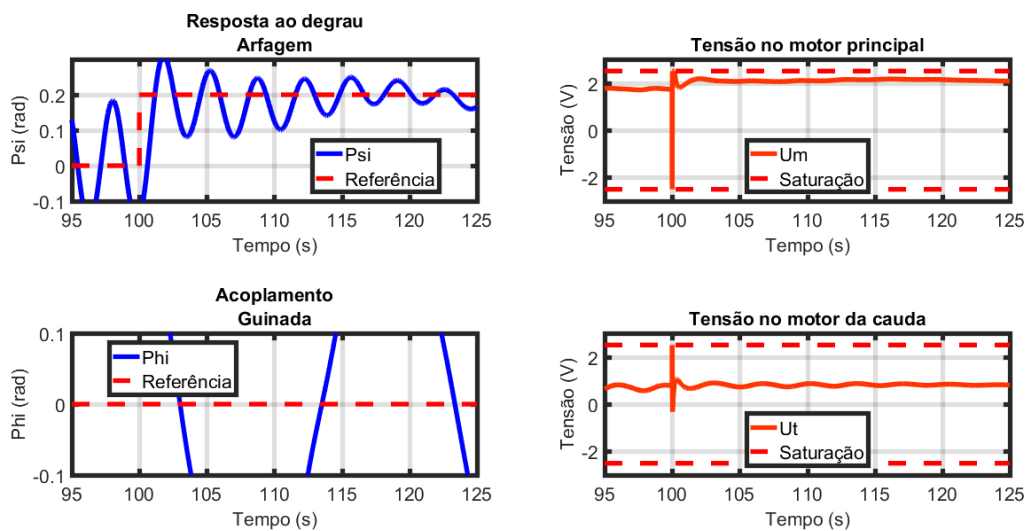
Fonte: Autor.

Uma observação interessante é que o controlador H_∞ , diferentemente dos demais, não possui um integrador do erro em sua estrutura. Portanto, existe um erro de regime permanente associado à resposta. Nas simulações, esse erro ficou em torno de 1%.

4.3. Resposta temporal no modelo não-linear

Nesta seção, serão expostos os resultados da simulação dos controladores no modelo não-linear. O grande ponto de destaque é o desempenho muito ruim do controle H_∞ nas simulações. O sistema não foi capaz de controlar a planta, que oscilou livremente. Apesar dos esforços durante a fase de projeto para tornar o controlador mais robusto às incertezas do modelo, os resultados obtidos não foram bons, como pode ser visto na Figura 4.16.

Figura 4.16 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo não-linear – Controlador H_∞ .

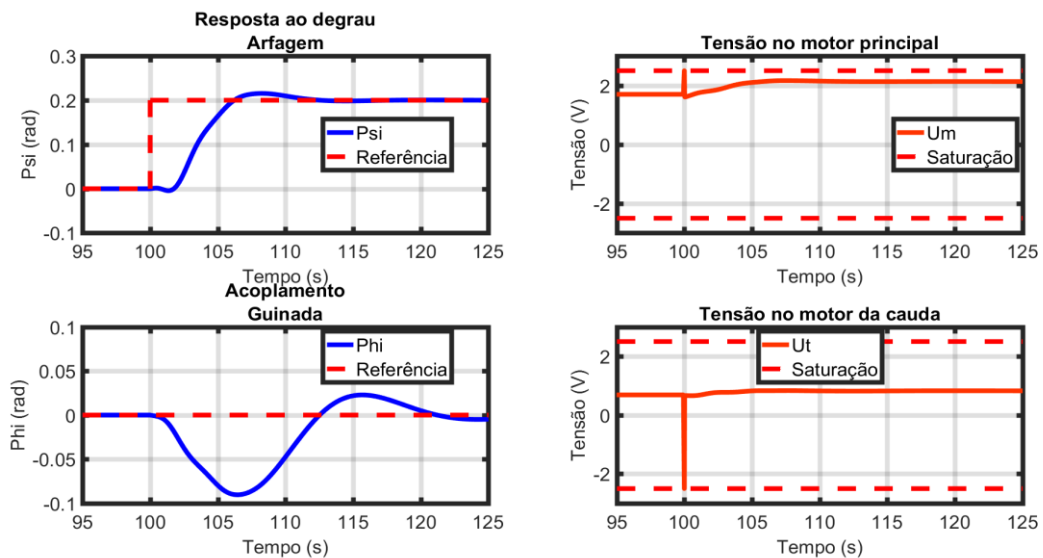


Fonte: Autor.

Durante o projeto, foram testadas diversas funções de ponderação e condições iniciais para simulação do controlador H_∞ , sem sucesso. Mesmo ao aplicar a entrada depois que as oscilações desaparecem, o resultado é o mesmo, com novas oscilações sendo induzidas. O fato é um tanto quanto surpreendente, pois o controlador H_∞ deveria ser justamente o mais robusto. No entanto, Gu, Petkov e Konstantinov (2012) já haviam apontado que essa arquitetura de controlador talvez não fosse a mais eficaz para essa planta, e a análise em frequência mostrou que o controlador LQG com ação integral era mais robusto que o H_∞ .

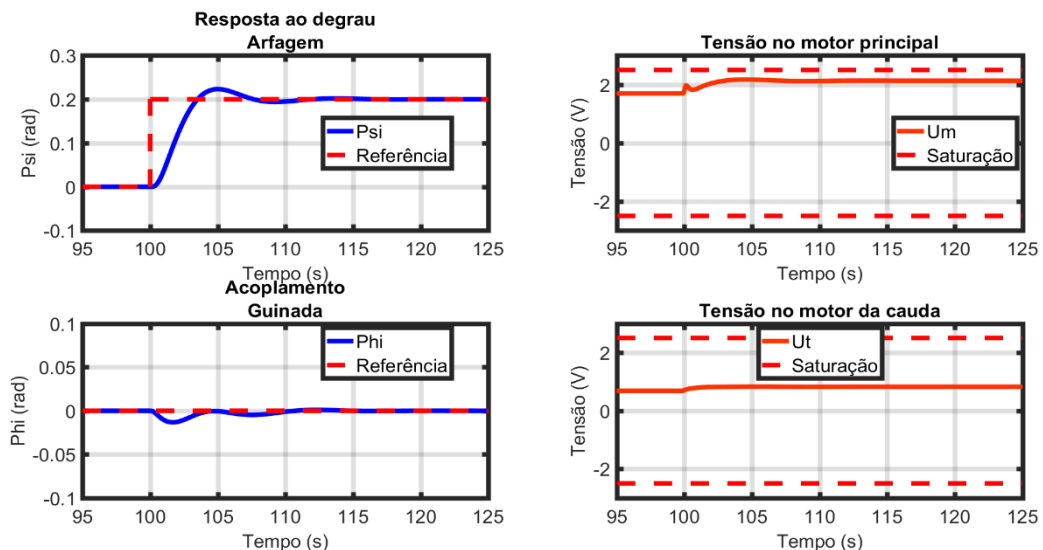
Por outro lado, os controladores PID descentralizado e LQG com ação integral tiveram melhor desempenho. As Figuras 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20 ilustram as rastreabilidades para entradas de arfagem e guinada. Para demanda de arfagem, o controlador PID teve um tempo de acomodação de cerca de 10s, 7,5% de *overshoot* e 45% de acoplamento na saída adjacente. Para a mesma situação, o controlador LQG com ação integral conseguiu estabilizar a saída em 7s com pouco mais de 10% de *overshoot*. O acoplamento na guinada foi praticamente nulo.

Figura 4.17 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo não-linear – Controlador PID descentralizado.



Fonte: Autor.

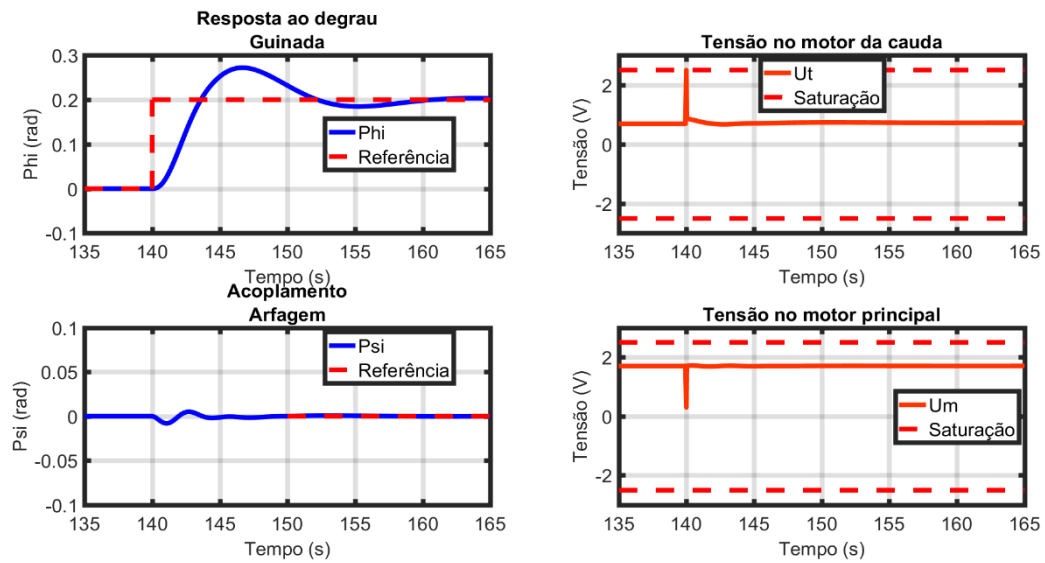
Figura 4.18 – Resposta ao degrau de arfagem no modelo não-linear – Controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

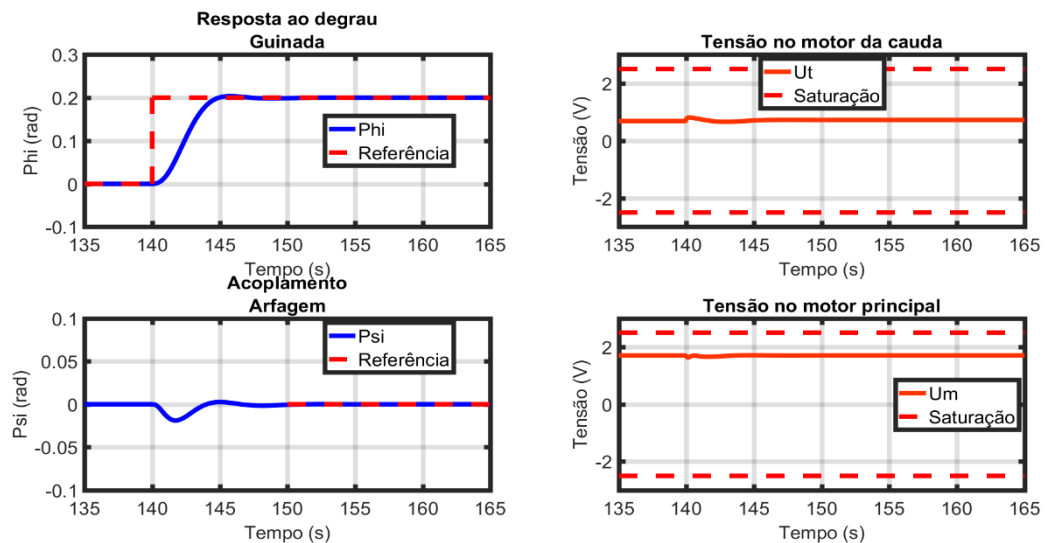
Para a demanda de guinada, o controlador PID precisou de mais de 15s para estabilizar a saída completamente. Houve aproximadamente 35% de *overshoot*, mas quase nenhum acoplamento. Por outro lado, o controlador LQG demorou menos de 5% para controlar a guinada, apresentando, durante o processo, um acoplamento oscilatório de quase 10% quase 7s para desaparecer. As Figuras 4.19 e 4.20 ilustram o comportamento dos sistemas.

Figura 4.19 – Resposta ao degrau de guinada no modelo não-linear – Controlador PID descentralizado.



Fonte: Autor.

Figura 4.20 – Resposta ao degrau de guinada no modelo não-linear – Controlador LQG com ação integral.

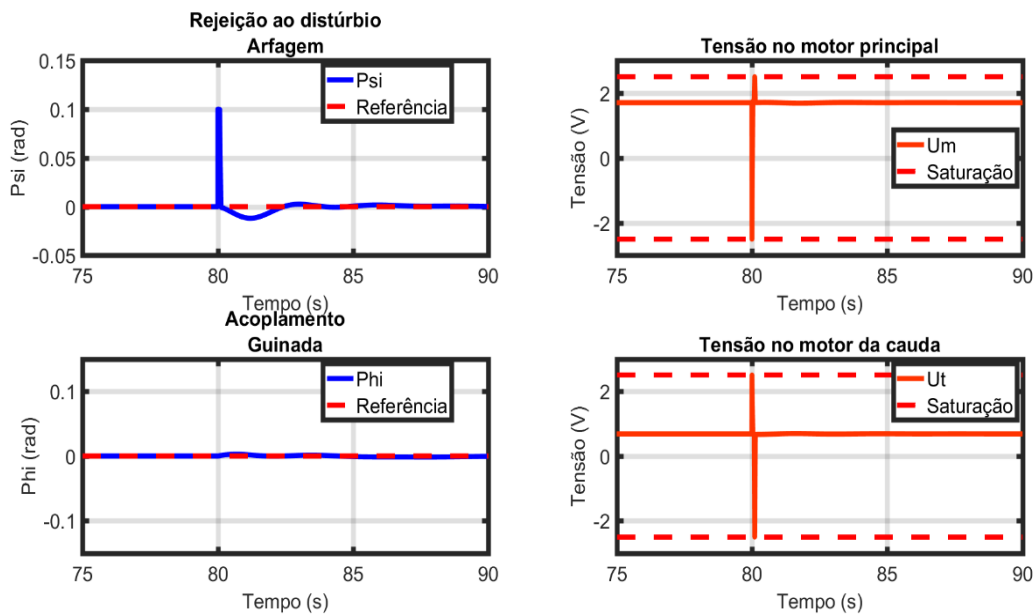


Fonte: Autor.

É interessante ressaltar que, na planta em malha aberta, o acoplamento significativo ocorre entre a entrada de arfagem e a saída de guinada do TRMS. Portanto, era esperado que a demanda de arfagem de fato induzisse algum acoplamento na guinada, mas não o contrário. As reações nas Figuras 4.19 e 4.20 são originárias dos compromissos feitos nas estruturas do controlador, e não essencialmente da planta. Ademais, percebe-se que os controladores controlam mais facilmente a guinada de que a arfagem.

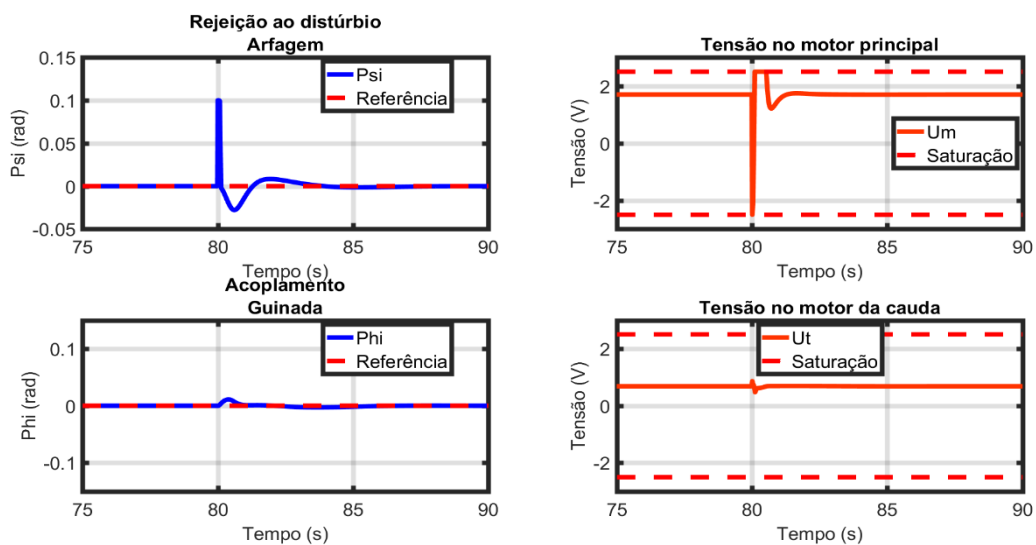
Outra avaliação relevante para o desempenho dos controladores é a capacidade de rejeição do distúrbio. O distúrbio foi modelado como um impulso aplicado diretamente na saída do sistema, como pode ser visto pelo pico no sinal de arfagem em $t = 80s$ nas Figuras 4.21 e 4.22. É o equivalente de uma perturbação aplicada diretamente sobre os eixos do TRMS. Para essa análise e a próxima, omitimos o controlador H_∞ , pois a avaliação faz mais sentido com a planta estabilizada.

Figura 4.21 – Resposta ao distúrbio – Controlador PID descentralizado.



Fonte: Autor.

Figura 4.22 – Resposta ao distúrbio – Controlador LQG com ação integral.



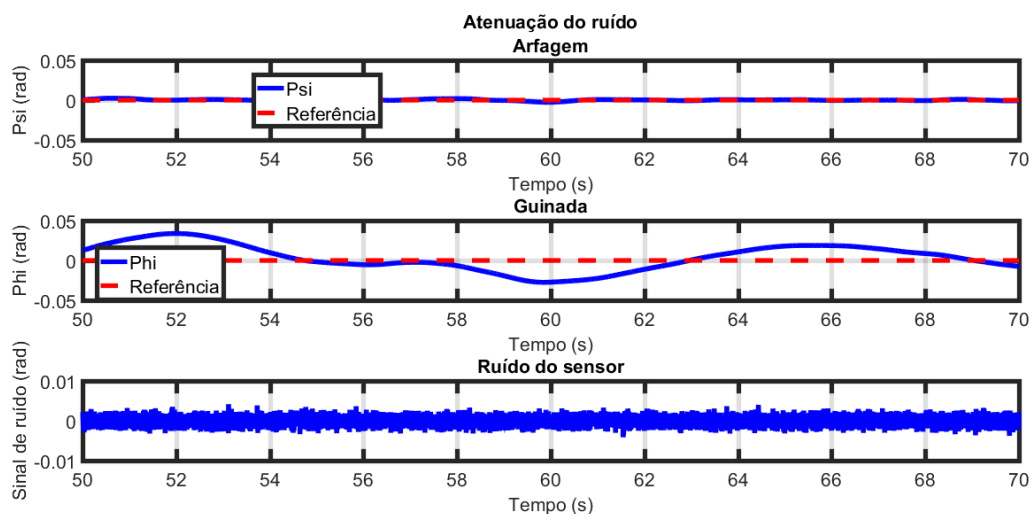
Fonte: Autor.

Com relação à atenuação do distúrbio, percebe-se que o controlador PID foi mais rápido em neutralizar a entrada exógena do que o LQG com ação integral. O sistema com realimentação de estados apresentou um pico de 20% no sinal, contra 11% do PID. No entanto, ambas as respostas são muito boas, já que tiveram como resultado um sistema completamente estabilizado em menos de 3s com mínimo acoplamento gerado no eixo adjacente.

Um ponto de análise muito relevante, principalmente para aplicação prática, é a saída do sinal de controle. Na simulação do sistema não-linear, observa-se que o controlador LQG com ação integral é mais suave na aplicação da tensão nos motores em comparação com as estratégias de PID e H_∞ , o que é positivo pois não desequilibra tanto a planta (Figuras 4.16 – 4.22). O TRMS é controlado por motores elétricos de corrente contínua, que são bastante robustos quanto à faixa de frequências que podem ser aplicadas na entrada. No entanto, não é o caso de todos os atuadores, e o LQG com ação integral leva certa vantagem nesse quesito.

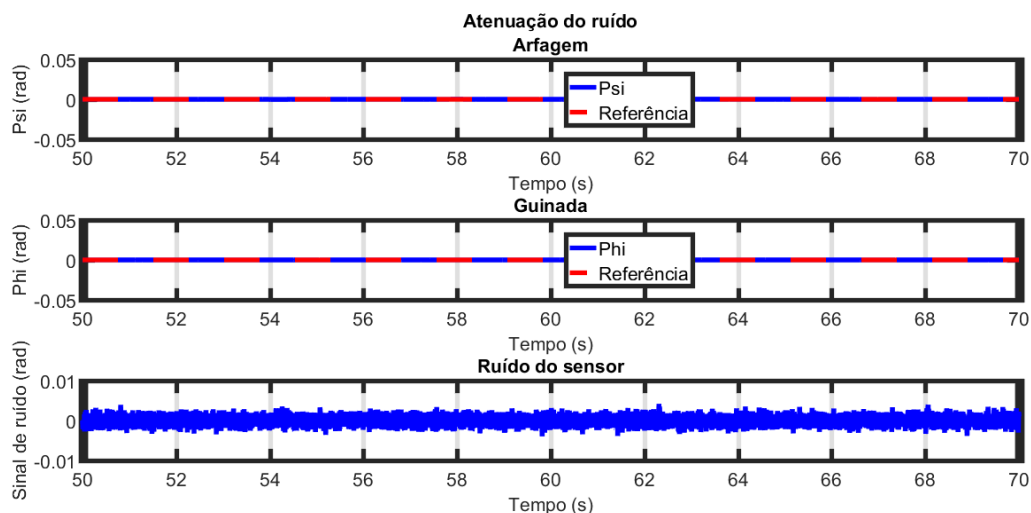
Por fim, analisou-se a capacidade dos sistemas em lidar com os sinais de medição ruidosos. O ruído branco é modelado com um bloco *Band-Limited White Noise* do Simulink® com potência de sinal de 1×10^{-8} e tempo de amostragem 0.001. As Figuras 4.23 e 4.24 mostram a respostas dos controladores PID e LQG com ação integral. Percebe-se o sistema controlado pelo PID descentralizado gera um pouco de oscilação no eixo da guinada, enquanto o LQG com ação integral consegue filtrar muito bem os ruídos de medição (o efeito pode estar relacionado à utilização do filtro de Kalman).

Figura 4.23 – Resposta ao ruído de medição – Controlador PID descentralizado.



Fonte: Autor.

Figura 4.24 – Resposta ao ruído de medição – Controlador LQG com ação integral.



Fonte: Autor.

Em síntese, observamos que o controlador PID descentralizado não obteve as melhores respostas durante a análise em frequência ou simulação linear. O controlador também não foi capaz de atenuar o acoplamento entre as saídas nem os efeitos do ruído de medição, mas o desempenho geral na simulação com o sistema não-linear é aceitável. Merece destaque a ótima capacidade de lidar com distúrbios.

O controlador H_∞ indicava bons resultados na análise em frequência e foi o mais eficiente na simulação com o modelo linearizado. Entretanto, a estratégia de controle robusto falhou na simulação com o modelo não-linear. As causas não foram totalmente investigadas e compreendidas, mas é possível que o problema esteja ligado às perdas de informação sobre a planta que ocorrem durante a linearização. Além disso, o controlador H_∞ não conta com ação integral, o que gera erro residual.

O controle com realimentação de estados estimados apresentou o melhor desempenho geral, corroborando os resultados de sua análise em frequência. A resposta sempre foi adequada, com baixo acoplamento, bom tempo de acomodação e atenuação do ruído de medição. O controlador só foi superado no quesito atenuação do distúrbio pelo controlador PID descentralizado.

Por fim, algumas considerações práticas podem ser feitas. O controlador PID descentralizado é o controlador de mais fácil realização, com apenas dois integradores. Os

ganhos podem ser ajustados durante a operação do aparelho e são de fácil associação com a resposta temporal do sistema.

O controlador LQG com ação integral também tem apenas dois integradores, mas pode apresentar mais dificuldades com relação à realimentação de estados estimados. O filtro de Kalman possui a mesma ordem de grandeza do sistema linearizado.

O controlador H_∞ é um sistema no espaço de estados, cuja quantidade de estados depende do número de estados da planta linearizada e das funções de ponderação escolhidas. Nesse projeto foi obtido um controlador com dez estados e matrizes com valores numéricos extremos (ou muito pequenos, ou muito grandes), o que pode gerar uma implementação bastante desafiadora em um controlador digital.

5. CONCLUSÃO

Nesse trabalho, revisamos a literatura sobre o controle do sistema TRMS, apresentamos a modelagem matemática do sistema seguindo a abordagem Euler-Lagrangiana, desenvolvemos três estratégias de controle e avaliamos os resultados temporais e em frequência dos sistemas em ambiente simulado.

O uso da abordagem Euler-Lagrangiana é consideravelmente mais desafiador que a modelagem Newtoniana tradicional, mas outros trabalhos indicaram ganhos de fidelidade em relação ao modelo real. O resultado da modelagem foi um modelo complexo e não-linear, que foi trimado e linearizado em torno de um ponto de equilíbrio para o projeto dos sistemas de controle. Três técnicas foram desenvolvidas: um PID descentralizado, um regulador LQG com ação integral e um controlador H_∞ .

Os sistemas de controle foram testados no modelo não-linear para rastreabilidade da entrada e rejeição de distúrbio e ruído de medição. Os melhores resultados foram apresentados pelo controlador LQG com ação integral, seguido do PID e do H_∞ . O último falhou, sendo incapaz de estabilizar o modelo não-linear. Por fim, fizemos algumas considerações sobre a implementação prática, evidenciando as vantagens do PID e do regulador LQG com ação integral.

Para futuros trabalhos, sugere-se explorar mais a fundo as técnicas de controle robusto. A falha do controlador H_∞ pode estar ligada à perda de informação no processo de linearização e também à falta da modelagem das incertezas. A técnica de μ *synthesis* pode ser uma alternativa interessante. Outra sugestão é linearizar o sistema em vários pontos de operação, obter os ganhos do controlador para cada ponto e interpolar os ganhos. Assim, é possível determinar a performance do sistema em todo o envelope operacional. Por fim, sugere-se testar as implementações propostas no trabalho na bancada experimental.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, Karl Johan; MURRAY, Richard M. **Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers**. 2. ed. Princeton, New Jersey, US: Princeton University Press, 2020.
- BELKHEIRI, M. *et al.* **Model Parameter Identification and Nonlinear Control of a Twin Rotor MIMO System – TRMS**. Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification. Saint-Malo, France, July 6-8, 2009.
- BIBEL, John E.; MALYEVAC, D. Stephen. **GUIDELINES FOR THE SELECTION OF WEIGHTING FUNCTIONS FOR H-INFINITY CONTROL**. Dahlgren, Virginia, US: Naval Surface Warfare Center – Dahlgren Division, 1992.
- BOUGUERRA, Abderrahmen. *et al.* **Fault-Tolerant Control of a 2 DOF Helicopter (TRMS System) Based on H_∞** . arXiv:1306.4883 (2013).
- BRIZZARD, Alain J. **An introduction to Lagrangian mechanics**. World Scientific, 2007.
- CARRILLO-AHUMADA, J. *et al.* **Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables: Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad**. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12 177–188 (2015).
- CHALUPA, Petr; PŘIKRYL, Jan; NOVÁK, Jakub. **Modelling of Twin Rotor MIMO System**. 25th DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation, DAAAM (2014).
- FEEDBACK INSTRUMENTS LTD. **Twin Rotor MIMO System Control Experiments 33-949S**. 2. ed. UK, 2013.
- GU, Da-Wei; PETKOV, Petko H.; KONSTANTINOV, Mihail M. **Robust Control Design with MATLAB®**. 2. ed. Glasgow: Springer, 2012.
- JADHAV, Tejas; GADGUNE, Swapnil Yashavant. **Controller and Observer Techniques for Twin Rotor MIMO System**. International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT) volume 9 issue-1 (October 2019).
- LÓPEZ-MARTÍNEZ, M. *et al.* **Control of a Laboratory Helicopter using Switched 2-Step Feedback Linearization**. Proceeding of the 2004 American Control Conference. Boston, Massachusetts (June 30 – July 2, 2004).
- LÓPEZ-MARTÍNEZ, M. *et al.* **Nonlinear L2 control of a laboratory helicopter with variable speed rotors**. Elsevier Automatica 43 655–661 (2007).
- LÓPEZ-MARTÍNEZ, M.; VIVAS, C.; ORTEGA, M. G. **Multivariable Nonlinear H_∞ Controller for a Laboratory Helicopter**. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005. Seville, Spain (December 12-15, 2005).
- MATHWORKS. **About Operating Points**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/what-is-an-operating-point.html>. Acesso em: 14 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Decoupling Controller for a Distillation Column**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/control/ug/decoupling-controller-for-a-distillation-column.html>. Acesso em: 15 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Exact Linearization Algorithm**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/exact-linearization-algorithm.html>. Acesso em: 14 fev. 2021.

- MATHWORKS. **Function reference: findop**. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/findop.html>. Acesso em: 14 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Function reference: findopOptions**. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/findopoptions.html>. Acesso em 14 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Function reference: linearize**. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/linearize.html>. Acesso em 14 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Linearize Nonlinear Models**. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/linearizing-nonlinear-models.html>. Acesso em 14 fev. 2021.
- MATHWORKS. **Linearizing at operating point**. Disponível em:
<https://www.mathworks.com/help/physmod/simscape/ug/linearizing-at-an-operating-point.html>.
 Acesso em: 14 fev. 2021.
- PALLISER, R. Mascaró; COSTA-CASTELLÓ, Ramon; RAMOS, G. A. **Iterative Learning Control Experimental Results in Twin-Rotor Device**. Mathematical Problems in Engineering Volume 2017, Article ID 6519497 (2017).
- PATO, Pedro Augusto Viana. **Modelagem e Controle de um Twin-Rotor**. São Carlos: Universidade de São Paulo (2016).
- RAHIDEH, A; SHAHEED, M. H. **Mathematical dynamic modelling of a twin-rotor multiple input-multiple output system**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 221(1):89-101 (2007).
- RAO, Vidya S; AKHILA; MORALES-VIVIESCAS, Rafael M. **Extended Kalman observer based Robust Control of one degree of freedom TRMS**. Proceedings of the 12th Asian Control Conference (ASCC). Kitakyushu, Japan, June 9-12, 2019.
- ROTONDO, Damiano; NEJJARI, Fatiha; PUIG, Vicenç. **Quasi-LPV Modeling, Identification and Control of a Twin Rotor MIMO System**. Control Engineering Practice 21(6):829-846 (2013).
- SALETAN, Eugene J.; JOSE, Jorge. V. **Classical Dynamics: A Contemporary Approach**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.
- SKOGESTAD, Sigurd; POSTLETHWAITE, Ian. **MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL: Analysis and design**. 2. ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2001.
- TASTEMIROV, Azamat; LECCHINI-VISINTINI, Andrea; MORALES, Rafael M. **Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation**. Control Engineering Practice 66, 89-98 (2017).
- TAY, Y. S.; MAILAH M.; TANG, H. H. **Intelligent Active Force Control of a Twin Rotor System**. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 884 012102 (2020).
- ULASYAR, Abasin; ZAD; Haris Shed. **Robust & Optimal Model Predictive Controller design for Twin Rotor MIMO System**. 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO). Bursa, Turkey (26-28 November 2015).
- ZEGHLACHE, Samir. *et al.* **Non linear control Design of the 2-DOF Helicopter (TRMS system)**. Journal of Electrical Engineering 13(3):182-189 (2012).
- ZEGHLACHE, Samir; KARA, Kamel; SAIGAA, Djamel. **Type-2 Fuzzy Logic Control of a 2-DOF Helicopter (TRMS system)**. Central European Journal of Engineering 4(3) 303-315 (2014).