



GUILHERME GARCIA FERNANDES

**NÚMERO DE OURO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR
ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO**

LAVRAS-MG

2021

GUILHERME GARCIA FERNANDES

**NÚMERO DE OURO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Lavras, como parte
das exigências do Curso de Licenciatura em
Matemática, para obtenção do título de
Licenciado.

Profa. Dra. Silvia Maria M. Caporale
Orientadora

LAVRAS-MG
2021

GUILHERME GARCIA FERNANDES

**NÚMERO DE OURO: SIGNIFICAÇÕES PRODUZIDAS POR ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO**

GOLD NUMBER: MEANINGS PRODUCED BY HIGH SCHOOL STUDENTS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Lavras, como parte
das exigências do Curso de Licenciatura em
Matemática, para obtenção do título de
Licenciado.

APROVADO em 12 de abril de 2021.
Profa. Dra. Iris Aparecida Custódio USF
Prof. Dr. José Antonio Araújo Andrade UFLA

Profa. Dra. Silvia Maria M. Caporale
Orientadora

LAVRAS-MG
2021

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados no processo desta pesquisa e de me tornar professor, por me fortalecer na fé e ser minha luz nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Renata e Vanderlei, aos meus irmãos Pollyana, Analine, Júnior, Bruno, Nathália e Lucas pelo amor, pelo apoio e pelo carinho, que me incentivaram a todo o momento. Aos meus sobrinhos Francisco e Manuela, obrigado por me fazerem sorrir nos momentos em que eu achava que estava perdido, vocês são luz no meu caminho. As famílias Fernandes e Garcia que me incentivaram a alcançar os meus objetivos, de modo especial a minha tia Claudete e meu tio Antônio que foram meus segundos pais, sem eles este sonho não seria possível. Aos meus avós, Rita, Noêmia e Eurico, obrigado por contribuírem nesse processo, obrigado por me ensinar sempre.

A Universidade Federal de Lavras, por todo acolhimento e oportunidade de me formar professor em uma instituição pública de qualidade. Também as políticas públicas de cotas raciais e socioeconômicas, que foram essenciais para minha permanência na universidade, sem elas hoje eu não ocuparia este espaço. De modo especial à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro e por acreditar nos cursos de licenciatura.

Ao Grupo de Estudos e Pesquisa Histórico-Cultural (GEPHC), as pesquisas no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), ao Centro Acadêmico de Licenciatura em Matemática (CAMAT), ao Núcleo de Estudos em Educação matemática (NEEMAT), ao Programa de Residência Pedagógica (RP), ao Grupo de Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC) e ao Programa de Apoio a Discentes com Necessidades Educacionais Especiais (PADNEE), meu muito obrigado por contribuírem com a minha formação profissional e pessoal.

À todas professoras e professores do Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática – Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (DFM/ICET), em especial da Educação Matemática – Amanda Oliveira, José Antônio Andrade, Mário Henrique Cláudio, Rosana Mendes, Silvia Caporale – pelos momentos de aprendizagem e partilha.

À minha orientadora, Profa. Dra. Silvia Maria M. Caporale, por acreditar a todo momento nos meus sonhos e por ter contribuído com esse processo. Professora você é muito importante para mim.

A professora Margarida, participante desta pesquisa, com a qual tive contato desde o Ensino Básico até hoje, por disponibilizar sua turma para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço também de forma especial aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio, por tornar possível a realização desta pesquisa.

Aos meus amigos e amigas Emanuelle Paixão, Larissa Vilela, Layara Alves, Leonice Silvério, Lunessa Melo, Luiz Gustavo Honório, Marcela Ribeiro, Mariana Lourenço, Ronan Resende e Vitória Vieira, pelo apoio, pelo companheirismo e por acreditarem em mim. De modo especial, a minha melhor amiga e namorada Ana Camila, por toda ajuda e amor.

Obrigado a todas e todos!

“[...] o melhor da escola pública está em encontrar destinos. Podemos ser amanhã uma coisa diferente de que somos hoje. Uma escola que confirma destinos, que transforma em operário o filho do operário é a pior escola do mundo.” (NÓVOA, 2017 citado por KRAWCZYK; FERRETTI, 2017, p. 40).

RESUMO

O presente trabalho é uma pesquisa de cunho qualitativo cujo foco está em compreender o movimento de significação nos processos de ensino e de aprendizagem do Número de Ouro com quinze estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Esta pesquisa foi realizada em uma escola pública, nas aulas de Matemática juntamente com uma professora de matemática. Como perspectiva teórica, adotamos a histórico-cultural buscando discutir este movimento. Elencamos como objetivo específicos: compreender o movimento de significação no ensino e na aprendizagem do Número de Ouro e refletir sobre as aprendizagens do pesquisador sobre sua própria prática nas aulas de matemática. A análise foi realizada com base no método microgenético, em que foram selecionadas duas unidades de análise, compostas por episódios, decorrentes do desenvolvimento de uma unidade didática. Sendo assim, apresentamos duas unidades de análise, são elas: a produção de significações a partir de uma proposta de trabalho sobre o Número de Ouro e o uso de ferramentas para mediação no movimento de significações. Por meio da análise foi possível perceber indícios do movimento de significações dos estudantes quando inseridos numa prática problematizada do Número de Ouro.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Significação. Teoria Histórico-Cultural. Análise Microgenética. Ensino Médio. Número de Ouro.

ABSTRACT

The present work is a qualitative research whose focus is on understanding the movement of meaning in the teaching and learning processes of the Golden Number with fifteen students in the second year of high school. This research was carried out in a public school, in the mathematics classes together with a mathematics teacher. As a theoretical perspective, we adopted the historical-cultural one seeking to discuss this movement. We list as specific objectives: to understand the movement of meaning in the teaching and learning of the Golden Number and to reflect on the researcher's learning about his own practice in mathematics classes. The analysis was performed based on the microgenetic method, in which two units of analysis were selected, composed of episodes, resulting from the development of a didactic unit. Therefore, we present two units of analysis, they are: the production of meanings from a work proposal on the Golden Number and the use of tools for mediation in the movement of meanings. Through the analysis it was possible to perceive signs of the students' movement of meanings when inserted in a problematic practice of the Golden Number.

Keywords: Geometry teaching. Meaning. Historical-Cultural Theory. Microgenetic analysis. High school. Gold Number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Momentos para elaboração dos planos de aula.....	41
Figura 2 – Seleção dos conteúdos.....	43
Figura 3 – Disposição dos recursos de áudio e gravação.	47
Figura 4 - Folhas com representações dos celulares.....	60
Figura 5 - Fita métrica e medição das atividades.	61
Figura 6 - Registro da estudante 'Al' em seu diário de campo.....	64
Figura 7 - Exposição dos objetos.....	67
Figura 8 - Utilizando a calculadora para encontrar a razão.	68
Figura 9 - Registro do estudante Als (T10).	80
Figura 10 - Registro da estudante He (T11).	80
Figura 11 - Registro do estudante Re (T18).	81
Figura 12 - Registro da estudante Je.....	81
Figura 13 – Desenho do estudante Wa.	87
Figura 14 - Registro da estudante Am.	91
Figura 15 - Registro da estudante He.	91
Figura 16 - Registro do estudante Wa.	92
Figura 17 - Registro do estudante Gu.....	92
Figura 18 - Re e Wa Mona Lisa 1.	93
Figura 19 - Re e Wa Mona Lisa 2.	93
Figura 20 - Re e Wa Mona Lisa 3.	93
Figura 21 - Re e Wa Mona Lisa 4.	93
Figura 22 - Re e Wa Mona Lisa 5.	94
Figura 23 - Re e Wa Mona Lisa 6.	94
Figura 24 - Re e Wa Mona Lisa 7.	94
Figura 25 - Re e Wa Mona Lisa 8.	94
Figura 26 - Releitura de obra 1.....	95
Figura 27 - Releitura de obra 2.....	95
Figura 28 - Releitura de obra 3.....	95
Figura 29 - Releitura de obra 4.....	95
Figura 30 - Releitura de obra 5.....	95
Figura 31 - Releitura de obra 6.....	95
Figura 32 - Releitura de obra 7.....	96

Figura 33 - Releitura de obra 8.....	96
--------------------------------------	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos relacionados ao Número de Ouro no Ensino Médio.....	22
Quadro 2 - Primeiro registro reflexivo.	36
Quadro 3 – Cronograma do desenvolvimento da pesquisa.	38
Quadro 4 – Tarefas elaboradas no processo de construção da Unidade Didática.	44
Quadro 5 – Organização das transcrições de áudios.	49
Quadro 6 – Símbolos usados para escrita dos dados.	50
Quadro 7 – Síntese do plano de aula II.....	59
Quadro 8 – Síntese do plano de aula III.	71
Quadro 9 – Síntese do plano de aula IV.	76
Quadro 10 – Primeiros registros da utilização de um compasso.	80
Quadro 11 - Síntese do plano de aula V.	82
Quadro 12 – Construção da espiral áurea.	91
Quadro 13 - Releitura da obra Mona Lisa de Leonardo da Vinci pelos estudantes Re e Wa. .	93
Quadro 14 – Fotografias do processo de criação das duplas sobre uma releitura de obras artísticas.	95

SUMÁRIO

1 CONTEXTUALIZANDO AS IDEIAS INICIAIS DA PESQUISA: UM OLHAR SOBRE O MOVIMENTO DE SIGNIFICAÇÕES	13
2 UMA PERSPECTIVA DO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA .	15
2.1 Algumas questões relativas ao Ensino de Geometria	19
3 O QUE DIZEM AS PRODUÇÕES ACADÊMICAS SOBRE O NÚMERO DE OURO	22
4 PERCURSOS METODOLÓGICOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	28
4.1 A abordagem qualitativa como recurso metodológico na pesquisa em Educação Matemática.....	28
4.2 Como cheguei ao tema da minha pesquisa: A matemática está em tudo!.....	30
4.3 Cirando relações: uma ponte entre estudantes, professora e pesquisador	33
4.4 Elaboração de uma unidade didática sobre o Número de Ouro	39
4.5 Ferramentas metodológicas para a produção de dados: sons e imagens como recursos potencializadores das ações em sala de aula	45
4.6 Método para análise dos dados: as potencialidades da abordagem microgenética na pesquisa em Educação Matemática	48
5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL....	51
5.1 Teoria Histórico-Cultural proposta por Lev Vigotski	51
6 ANÁLISE DO MOVIMENTO DE SIGNIFICAÇÕES COM A PROPOSTA DE TRABALHO SOBRE O NÚMERO DE OURO	59
6.1 A produção de significações a partir de uma proposta de trabalho sobre o Número de Ouro com estudantes do Ensino Médio	59
6.2 O uso de ferramentas para mediação no movimento de significações.....	76
7 SER PROFESSOR É.....	98
8 NOVOS CAMINHOS E OLAHRES	103
REFERÊNCIAS	104
APÊNCICE	108

1 CONTEXTUALIZANDO AS IDEIAS INICIAIS DA PESQUISA: UM OLHAR SOBRE O MOVIMENTO DE SIGNIFICAÇÕES

A¹ Geometria é uma área do conhecimento que está presente em nossas relações pessoais e sociais. Seja ao levantar quando nos deparamos com as formas dos objetos a nossa volta ou quando vamos para o serviço ou faculdade, encontramos formas geométricas. Em contrapartida à relação do contato em vivências sociais, a escola é um ambiente que potencializa o processo de ensino e aprendizagem do conhecimento do mais simples aos mais amplos sobre a Geometria. Esta pesquisa surge neste contexto, de que a Geometria é uma área fundamental de ser relacionada as nossas vivências, que será descrita com mais detalhes em um dos tópicos desse trabalho.

O presente trabalho é resultado do meu processo formativo ao participar de dois programas institucionais de bolsas e vivências acadêmicas, que se iniciaram em 2015 quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). A motivação para esta pesquisa surge em um contexto em que a Geometria, para mim, era uma área distante das outras e sem conexões com o mundo. Com o passar do tempo, neste processo de tornar-me professor de matemática estas considerações foram sendo resignificadas, possibilitando outros olhares sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Geometria. É devido a estes fatos que a Geometria se tornou a área escolhida para esta pesquisa.

Inicialmente discuto sobre o ensino da Geometria na Educação Básica (EB), por meio dos documentos PCN, PCN+ e BNCC e em seguida sobre algumas questões relativas ao Ensino de Geometria. No terceiro capítulo, discorro sobre uma revisão bibliográfica de teses e dissertações no periódico da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), utilizando como palavra-chave “número de ouro”, onde foi realizada uma análise de trabalhos de 2005 a 2019. O objetivo foi analisar o que dizem as produções acadêmicas sobre o Número de Ouro no EM. Deste modo, a proposta foi desenvolver um trabalho de investigação diferenciado dos analisados, visto que o foco está na produção de significações dos estudantes.

O quarto capítulo, metodologia da pesquisa, foi dividido em seis seções. Na primeira seção, descrevo sobre os motivos desta pesquisa ser de abordagem qualitativa e a perspectiva adotada para o desenvolvimento e análise, que é a Teoria Histórico-Cultural (THC) proposta

¹ Ao ler esta pesquisa você encontra tempos verbais diferentes, logo ao me referir a primeira pessoa singular será relatado experiências e reflexões a partir das minhas vivências com a pesquisa. Ao me referir a primeira pessoa do plural serão minhas vivências com a professora orientadora, professora participante da pesquisa, estudantes e os autores do referencial teórico.

por Lev. S. Vigotski. Na segunda seção, descrevo como cheguei ao tema desta pesquisa, em que as reflexões partem do contexto do meu EB até os dias atuais. Já na terceira seção, conto sobre o processo da minha relação entre os participantes da pesquisa, os estudantes e a professora. Além disso, relato sobre o processo de ambientação com os estudantes que participaram da mesma, que ocorreu antes do seu desenvolvimento. Na quarta seção, narro sobre o processo de criação de uma unidade didática, onde exponho sobre a metodologia que foi utilizada para sua elaboração. Na quinta seção, apresento os recursos metodológicos para a produção dos dados. E por fim, na sexta seção, detalho sobre o método e a forma que foram utilizadas para análise dos dados, que foi a microgenética, motivo pelo qual assumiu-se os trabalhos de Lev Vigotski e outros pesquisadores que seguem a perspectiva histórico-cultural.

No quinto capítulo, relato sobre a construção teórica da pesquisa, onde inicialmente apresento uma breve discussão sobre a contribuição do Materialismo Histórico Dialético (MHD) proposto por Karl Marx, importante para entender a THC. Nele abordo de forma sucinta alguns conceitos que são fundamentais para esta pesquisa, na tentativa de relacionar a perspectiva histórico-cultural com o desenvolvimento do pensamento geométrico.

E por fim no último capítulo, relato o movimento de significações produzidas pelos estudantes do EM no processo ensino-aprendizagem do Número de Ouro. Ainda, para finalizar, uma reflexão sobre o meu processo de pesquisar e tornar-me professor de Matemática.

2 UMA PERSPECTIVA DO ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

As formas geométricas estão presentes em nosso cotidiano, seja ao levantar-se pela manhã, quando reparamos nas formas do nosso despertador, espelho, até mesmo dos alimentos que comemos. Quando saímos para o trabalho ou faculdade, deparamos com as formas dos prédios, casas e das características físicas dos animais e das pessoas. Em contrapartida à relação do contato em vivências sociais, a escola é um ambiente que potencializa o processo de ensino e de aprendizagem do conhecimento mais simples aos mais amplos sobre a Geometria. Esta pesquisa surge neste contexto, de que a Geometria é uma área fundamental de ser relacionada as nossas vivências; devido a isto o trabalho busca dialogar sobre uma perspectiva da Geometria na EB, especificamente no EM.

Segundo Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), são evidenciadas causas e consequências do abandono do Ensino da Geometria na EB. Embora sendo referências da década de 90 são pesquisas importantes que embasam sobre esta temática até a atualidade. Uma vez que este capítulo busca apresentar uma perspectiva da EB, serão abordados neste momento os documentos oficiais PCN, PCN+ e BNCC, sobre o que dizem a respeito do Ensino de Geometria.

A pesquisa de Pavanello (1993), aborda alguns motivos do abandono da Geometria na educação. Segundo a autora, este acontecimento é mais perceptível nas escolas públicas devido a publicação da Lei nº 5.692/71, que discorre sobre as Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Segundo a autora,

A liberdade que esta lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuam a ensiná-la, muitos reservam o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado como o tópico em questão. (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Esta possibilidade mencionada pela autora se deu através de uma análise realizada pelo desenvolvimento do Ensino da Matemática e Geometria no Brasil no século XX, uma época marcada pela produção agrícola e uma grande taxa de analfabetismo. Além disso, uma outra possível justificativa destacada por Pavanello (1993, p. 13) é que “a maioria dos professores de matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que os muitos deles deixem de ensinar Geometria sob qualquer enfoque”.

Pensando em uma perspectiva mais atual, a pesquisa de Cerqueira *et al.* (2009) apresenta a trajetória da LDB, que atualmente é regulada pela Lei nº 9.394/96, destacando que as várias de suas reformulações trouxeram inovações significativas, porém essas inovações não conseguiram atingir boa parte da população. Além disso, destacam que,

Ao longo do tempo as necessidades da educação nacional foram se modificando, porém o processo de ajustes sofrido pela LDB não acompanhou essa transformação, imputando assim, algumas deficiências e ambiguidades na redação legislativa de cada reforma. Deste modo, a prática da Lei deve ser considerada uma das prioridades da educação, tendo em vista que o progresso do sistema educacional acontece a partir dos aperfeiçoamentos que são introduzidos ao longo do processo de transformação, acompanhando a realidade da educação. (CERQUEIRA *et al.*, 2009, p. 5).

Além deste fator mencionado anteriormente, Pavanello (1993) destaca também sobre os cursos de licenciaturas em matemática pela falta de conteúdos e disciplinas pedagógicas, sobre as condições de trabalho que são cada vez mais escassas, pressões para cumprir metas impostas pelo Estado, ensino voltado para a profissionalização, remunerações cada vez mais escassas, entre outras causas colocadas pela autora que influenciaram nesse abandono. Estas questões mencionadas pela autora estão relacionadas a decisões sobre as quais medidas governamentais são tomadas, onde é importante que ofereçam condições e oportunidades a todos os níveis da educação.

Lorenzato (1995), destaca a ausência do ensino da Geometria, no qual aponta duas causas relacionadas com a sala de aula. A primeira “é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas” (LORENZATO, 1995, p. 3); tal conclusão foi obtida por meio de uma pesquisa com os professores do EB. A segunda causa mencionada pelo autor é que “omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos” (LORENZATO, 1995, p. 4). E como consequência desta segunda causa, os conteúdos da Geometria acabam sendo deixados para o final do ano letivo, até mesmo reduzidos sem relações com outras áreas e com o cotidiano dos estudantes.

Como também mencionado por Pavanello (1993), Lorenzato (1995) destaca que o conteúdo de Geometria no currículo da formação de professores possui frágil posição no que diz sobre o ensino da matemática, em especial a Geometria. Dessa forma, os guias curriculares são grandes influenciadores no modelo de ensino que temos hoje. O autor destaca também que o Movimento da Matemática Moderna contribuiu para o atual modelo de Ensino da Geometria. Sobre esse movimento o autor destaca que:

[...] antes da sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcante lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. (LORENZATO, 1995, p.4).

Um movimento caracterizado principalmente pelo modelo euclidiano, no que tange o ensino da Geometria, em que optavam pelo raciocínio lógico dedutivo tendo a matemática como uma verdade absoluta. Para Santos e Nacarato (2014), uma possível causa do abandono e esquecimento da Geometria pode estar relacionado ao modelo euclidiano vigente na década de 1950 no Brasil.

Assim, as autoras destacam que esse modelo faz referência ao matemático Euclides de Alexandria nascido por volta de 300 a. C, conhecido também como pai da Geometria, pela publicação do livro “*Os Elementos*”. Este livro apresenta postulados e axiomas, marcado por um método dedutivo que tornou referência para o ensino. A consideração feita pelas autoras é sobre a forma como o modelo é inquestionável e que persistiu por muitos anos nos currículos escolares. Ainda de acordo com Nacarato e Santos (2014),

O ensino da Geometria no Brasil passou por várias fases. Sabemos que, até 1960, ele se baseava nos estudos de Euclides. Entre 1970 e 1980, recebeu a influência do Movimento da Matemática Moderna, em que o ensino tinha ênfase principalmente na linguagem, dificultando a compreensão dos conceitos. Os docentes também encontravam dificuldades para ensinar os conteúdos e, associados a toda essa complexidade, os livros didáticos existentes naquela época traziam os conteúdos geométricos nos capítulos finais. (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 14).

Essas várias transformações temporais como mencionada na citação acima, podem ter contribuído para que a Geometria continuasse sendo deixada para o final do ano letivo ou até mesmo não sendo contemplada.

Desta forma, foi investigado o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a respeito do ensino da Geometria no EM. Ao fazer esta análise para este trabalho, percebeu-se que houve um avanço na elaboração e propostas para desenvolvimento na sala de aula e passou a ser um campo próprio, mas o que não se pode garantir é o que acontece nas escolas.

O PCNEM, documento oficial instituído no ano 2000, destaca uma reforma do EM buscando superar as desigualdades educacionais no Brasil. Assim, o documento enfatiza que “a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de

atuação” (BRASIL, 2000, p. 5). Estes princípios foram orientados a partir da Lei nº 9.394/96 que discorre sobre as diretrizes educacionais.

Já o PCN+ é um documento instituído no ano de 2002, que busca apresentar propostas educativas, ou melhor, ser um guia para professores da EB e procura abordar questões coerentes com a realidade, contexto e condições de trabalho das escolas do Brasil. De acordo com o documento, ele busca

contribuir para a implementação das reformas educacionais, definidas pela nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e regulamentadas por Diretrizes do Conselho Nacional de Educação, a presente publicação tem, entre seus objetivos centrais, o de facilitar a organização do trabalho da escola, em termos dessa área de conhecimento. (BRASIL, 2002, p. 4).

O documento então destaca que ensinar Geometria no EM é dar possibilidades de discussão e análise, permitir relações entre ideias e conceitos para gerar espaços de aprendizagem. Desta forma, o documento aborda três eixos temáticos em que o segundo eixo é sobre Geometria e Medidas. Ainda de acordo com o documento, a Geometria deve ser tratada desde formas planas e tridimensionais, desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Este eixo é dividido em quatro unidades temáticas: a geometria plana, geometria espacial, geometria métrica e geometria analítica, visto que o documento discorre sobre a importância da usabilidade da geometria para representar e visualizar o mundo real. Contudo, o documento destaca que Geometria e Medida estão interligadas, pois nos estudos de formas geométricas, os números quantificam essas grandezas.

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do EM, publicada em 2017, é a proposta atualmente em vigor. É um documento oficial que se dedica exclusivamente ao âmbito educacional e tem como princípio definir as aprendizagens essenciais que todo estudante deve desenvolver durante o percurso no EM. Este documento foi estruturado também pela LDB regulamentada pela Lei nº 9.394/96, orientado por princípios éticos e políticos tendo em vista a formação humana. A intenção ao apresentar este documento não é aprofundar sobre as propostas e habilidades, mas ao fazer uma breve leitura é possível perceber que a Geometria relacionada com a álgebra, números, probabilidade, entre outras unidades temáticas, é bastante evidenciada no documento. Sendo assim, acredito que a Geometria poderia ser uma área mais contemplada pelas suas especificidades.

Portanto, o objetivo desse capítulo era levantar alguns pontos sobre a importância de se haver documentos oficiais para reger a educação brasileira, porém faz-se necessário observarmos com um olhar crítico e atencioso as propostas apresentadas nesses documentos.

Desta forma, é importante que seja contínua a pesquisa sobre o Ensino da Geometria nas suas diversas dimensões, com o uso de material manipulativo e usos de recursos tecnológicos, levando em consideração as pessoas sociais envolvidas nessa produção. Realizada esta contextualização da Geometria na EB, na seção abaixo apresento algumas questões relativas ao Ensino da Geometria.

2.1 Algumas questões relativas ao Ensino de Geometria

Para iniciar as discussões dessa seção, é necessário contextualizar a importância e necessidade da aprendizagem de conceitos geométricos. Para Lorenzato (1995),

[...] bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5).

O autor ainda ressalta que a Geometria está por toda parte, lidamos com ela diariamente, ela pode ser esclarecedora e facilitadora na comunicação e na interpretação do mundo.

Já para Van de Walle (2009),

nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas da mesma maneira. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos. (VAN DE WALLE, 2009, p. 439).

Desta forma, a Geometria possibilita supor, imaginar, descobrir e experimentar. A escola atua como potencializadora desses saberes, o papel docente por exemplo é de propulsor/mediador desses conhecimentos que proporcionam a aprendizagem de Geometria. É sabido que o processo de ensino-aprendizagem vai além de questões metodológicas diversificadas na sala de aula, mas deve ser levado em consideração o percurso histórico, social e político das pessoas que compõem a escola. Além disso, Lorenzato (1995), destaca que a Geometria é fundamental para a aprendizagem de outros conteúdos, em que a imaginação possibilita pensar sobre outros horizontes.

Apresentados alguns motivos da importância do ensino-aprendizagem da Geometria, e identificando com a pesquisa de Pais (1996), cabe agora discutir sobre o processo de significação conceitual de Geometria. Pais (1996) traz três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico desenvolvido por Gonseth (1945): o intuitivo, o experimental e o

teórico. Mas, de acordo com Nacarato e Passos (2003, p. 41), “a prática pedagógica de Geometria tem sido marcada pelo uso de desenho, sendo negligenciado outros elementos igualmente importantes para formulação dos conceitos geométricos”. Além disso, as autoras destacam que “propostas curriculares atuais – tanto no âmbito nacional quanto internacional – vêm defendendo, principalmente nas séries iniciais da Educação Básica, um ensino da Geometria de caráter experimental” (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 41).

Pais (1996) destaca que são quatro elementos fundamentais para este processo: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. O autor destaca também que esta perspectiva contrapõe ao modelo euclidiano, além do fato de que esses elementos não estão desvinculados uns dos outros.

A palavra objeto para o autor faz referência ao que é manipulável e palpável, o material didático, que podemos chamar de ferramenta de acordo com a perspectiva histórico-cultural. O conceito pode emergir no ato de manipular um objeto, por exemplo. Segundo Góes e Cruz (2006), o conceito

tem uma origem social e sua formação envolve antes a relação com os outros, passando posteriormente a ser domínio da própria criança. Primeiro, a criança é guiada pela palavra do outro e, depois, ela própria utiliza as palavras para orientar o seu pensamento. (GÓES; CRUZ, 2006, p. 33).

O uso desses recursos didáticos propicia aos estudantes uma aprendizagem significativa, na qual é importante associar a manipulação de representações de figuras geométricas com os conceitos presentes no objeto. A partir desse movimento há a construção do significado, que são construídos pela comunicação entre várias pessoas sociais na sala de aula. Estas relações dialéticas, objeto-conceito e professor-estudantes, segundo o autor auxilia os estudantes no desenvolvimento da construção do conceito que acontece de forma lenta, gradual e complexa, por se tratar em uma sala de aula com diferentes estudantes.

Pais (1996) ressalta também que o material didático, o objeto, contribui para o processo da formação das ideias, porém o objeto não pode substituir os conceitos formados com ajuda do mesmo. O objeto é uma forma de consolidar um conceito primário, no sentido de ser mais acessível aos estudantes. O objeto e o desenho são de naturezas concretas e particulares, oposta ao conceito, que tem suas generalidades e abstrações. Assim, o desenho torna um recurso didático obrigatório segundo o autor para conceitualização da Geometria, qual recebem o nome de configurações geométricas.

A imagem mental, segundo Pais (1996), foi fundamentada nos trabalhos de Denis (1979, 1989) para analisar um contexto epistemológico da Geometria. Elas estão associadas aos

conceitos geométricos, pois segundo Pais (1996) “o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos” (PAIS, 1996, p. 70). Deste modo, a imagem mental é diferente do objeto e do desenho, pois está relacionada com a subjetividade e abstração de cada estudante, porém, o desenho e o objeto são estimulantes para formação da imagem mental. Assim, para a construção do desenvolvimento do pensamento geométrico faz-se essencial trabalhar com os elementos anteriores a imagem mental.

Ao analisar os elementos propostos por Pais (1996) percebe-se que eles não são desvinculados um do outro. Portanto, materiais manipulativos podem ser considerados meios para a construção de conceitos. Além disso, Santos e Nacarato (2014) evidenciam que o professor deve acompanhar o movimento da elaboração de conceitos dos estudantes. Ainda de acordo com as autoras,

Acreditamos ser indissociável a relação que precisa ser estabelecida entre professor e o aluno no processo de elaboração conceitual. Reiteramos que essa relação deve ser pautada num ambiente de aprendizagem baseada no diálogo, nas interações e nas ações mediadas. (SANTOS; NACARATO, 2014, p. 26).

No próximo capítulo, apresento uma revisão bibliográfica sobre o que dizem as produções acadêmicas sobre o trabalho com o Número de Ouro no EM.

3 O QUE DIZEM AS PRODUÇÕES ACADÊMICAS SOBRE O NÚMERO DE OURO

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão bibliográfica sobre o que os trabalhos acadêmicos em Educação Matemática dizem a respeito da temática Número de Ouro no EM. Para sua composição, foi organizado em três momentos: o primeiro, em que é apresentado o quantitativo desses trabalhos, de acordo com os filtros pré-selecionados; o segundo momento, em que há o detalhamento do processo para catalogação e exploração desses trabalhos; e, por fim, uma análise desses trabalhos através da leitura diagonal².

No primeiro momento foi realizada a busca desses trabalhos na plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Foram estabelecidos os seguintes filtros: o descritor “número de ouro”, nos anos de 2005 a 2019³ e na área de avaliação “Ensino de Ciências e Matemática” e “Matemática/Probabilidade e Estatística”, como caracterizado pelo site. Dessa forma, foram encontradas trinta e quatro dissertações de mestrado profissionais.

As duas últimas etapas, catalogação/exploração e análise, aconteceram simultaneamente. Foi realizada a leitura diagonal do título, resumo, palavras-chave e partes das dissertações que estariam de acordo com o objetivo proposto. Do total de trabalhos, dezoito relacionados ao desenvolvimento de tarefas para o EM. Da análise dessas dissertações emergiram possibilidades da abordagem do Número de Ouro por meio da história, utilização de *software*, instrumentos de medida, interdisciplinaridade, entre outras relações que foram estabelecidas. O quadro abaixo apresenta os trabalhos que estão relacionados de acordo com o objeto de estudo.

Quadro 1 – Trabalhos relacionados ao Número de Ouro no Ensino Médio.

Autor/Autora	Ano	Título	IES	Nível
CANO, Marco Aurélio Munhoz	2007	Ciência, magia e filosofia no processo de ensino-aprendizagem da matemática: uma introdução histórica sobre o Teorema de Pitágoras	PUC-SP	MP ⁴
CARVALHO, Lucas Santos de.	2013	Número Áureo e o ensino básico	UESC	MP

² Leitura diagonal: é uma leitura que consiste em analisar o título, resumo, palavras-chave, entre outras características que consiste em captar as ideias principais de um texto, por exemplo.

³ Não foi delimitado o ano na busca, pois o site retornou trabalhos de 2005 a 2019, logo, optou-se pela análise de todos.

⁴ Mestrado Profissional.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira	2013	A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro	UESC	MP
OLIVEIRA, José Jackson de.	2013	Sequências de Fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino básico	UFBA	MP
KFOURI, Viviane de Oliveira	2013	Fi: o Número de Ouro	UFG	MP
SENA, Carlos Atila Rodrigues de.	2013	Sequência de Fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades.	UFC	MP
LADIM, Nilo Pinheiro	2014	Razão Áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio	UFERSA	MP
AZEVEDO, Natalia de Carvalho de.	2013	O Número de Ouro e construções geométricas	UFG	MP
SILVA, Luiz Henrique Moraes da.	2013	O Número de Ouro no ensino da matemática na educação básica	UNESP	MP
GARCIA, Thiago Ruiz	2014	Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na sequência de Fibonacci: uma proposta de atividade para turmas de primeira série	UFT	MP
OLIVEIRA, Hilquias Santos de.	2017	Algumas constantes reluzentes da matemática: o Número de Ouro, a constante de Euler-Mascheronni e a dimensão de cobertura de Apolônio	UFPI	MP
SODRÉ, Leandro de Oliveira	2013	O número 142857 e o Número de Ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas	UFJF	MP
CASTRO, Ana Paula Gomes	2017	Uma proposta pedagógica para o ensino do Número de Ouro através do software geogebra na educação básica	UNIFAP	MP
SILVA, Reginaldo Leoncio	2015	A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio	UESB	MP
MOLLMANN, Zeila Priscila	2019	Um breve estudo sobre o número áureo e sequência de Fibonacci	UFMT	MP

BELINI, Marcelo Manechine	2015	A razão áurea e a sequência de Fibonacci	USP de São Carlos	MP
FREIRE, Wesley Liberato	2019	Fi, Φ , o Número de Ouro na geometria euclidiana plana: uma proposta de aula	UECE	MP
POSSEBON, Jose Euripedes	2016	Fibonacci e a Razão Áurea: uma abordagem para o ensino básico	UFT	MP

Fonte: Do autor (2020).

Dos trabalhos encontrados, quatro trabalhos que abordavam a utilização de *softwares*. A pesquisa de Carvalho (2013), “*Número Áureo e o ensino básico*”, teve como foco a utilização do *software* Geogebra para realização de algumas construções geométricas acerca do Número de Ouro. O autor pontua que o estudo desse número é pouco trabalhado no EM, sendo que é possível estimular à aprendizagem interdisciplinar como na natureza, na arte e na arquitetura. Além da relação com a álgebra. O uso do *software* possibilitou que o ensino-aprendizagem do tema acontecesse de forma lúdica, tornando-o mais significativo para os estudantes.

Já Ladim (2014), “*Razão Áurea: expressando a beleza desse número para o Ensino Médio*”, explicita a importância da razão áurea no estudo da Geometria e das sequências numéricas para estudantes do EM. Além de apresentar possibilidades de tarefas com o uso do *software* Geogebra, o autor destaca que os estudantes apresentaram dificuldade no uso do *software*, levando a necessidade de haver um minicurso ou tutoria para que possam aprender as ferramentas básicas.

O trabalho da autora Castro (2017), “*Uma proposta pedagógica para o ensino do Número de Ouro através do software Geogebra na Educação Básica*”, discutiu sobre aspectos históricos da temática, apresentando também a importância da utilização do *software* Geogebra para aprendizagem da matemática. A autora destaca que a utilização de recursos tecnológicos educacionais como prática pedagógica e metodológica desperta o interesse dos estudantes em aprender.

O trabalho “*A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio*” do autor Silva (2015), teve como objetivo trabalhar com os temas destacados no título, além de apresentar propostas de tarefas utilizando os *softwares* Maxima e Geogebra. O autor buscou diferentes recursos para apresentação do tema que geraram discussões, integração e participação dos estudantes.

Do total de trabalhos quatro discutem a importância da utilização de materiais concretos nas aulas de Geometria.

A pesquisa de Kfoury (2013), "*Fi: o Número de Ouro*", teve como objetivo apresentar uma proposta do trabalho com o Número de Ouro em uma abordagem algébrica. Desta forma, a metodologia adotada pela autora foi de caráter teórico e prático, onde buscou através de materiais concretos auxiliar no desenvolvimento desse conteúdo para estudantes do EM. O trabalho mostrou a relação da matemática com o mundo, e a importância de o professor ir além apenas de aulas expositivas. A autora Azevedo (2013) em sua pesquisa intitulada "*O Número de Ouro e Construções Geométricas*" teve como objetivo apresentar uma possibilidade de estudo do Número de Ouro pela construção geométrica utilizando régua e compasso. Já Garcia (2014), "*Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na sequência de Fibonacci: uma proposta de atividade para turmas de Primeira Série*" tem como foco do trabalho as construções geométricas utilizando régua e compasso. O autor destaca que devido a publicação da LDB 5692/71 o desenho geométrico tornou-se extinto do currículo do EM. Utilizar esses instrumentos de medidas na prática da sala de aula possibilita o desenvolvimento da coordenação motora e interpretação visual.

A pesquisa de Mollmann (2019), "*Um breve estudo sobre o número áureo e sequência de Fibonacci*", apresentou discussões acerca do tema além de propor uma oficina de matemática com o uso do computador, régua e compasso para estudantes do EM sobre as propriedades do Número de Ouro.

Outros trabalhos evidenciam mais o contexto da história da matemática, relações com outras áreas do conhecimento, práticas em sala de aula, a resolução de problemas e a etnomatemática na Geometria.

A pesquisa de Ramos (2013), "*A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*", teve como foco investigar a história e as propriedades matemáticas desses dois conceitos, Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, e suas ligações com a natureza, arquitetura e na arte. Além disso, mostra a relevância dessa temática como uma oportunidade de trabalho em sala de aula, por apresentar potencial e grande interesse por parte dos estudantes. O autor destaca a relação que há entre esses dois conceitos e como este número desde a antiguidade intrigou os matemáticos e filósofos da época. Trouxe também sugestões de tarefas para sala de aula que podem ser trabalhadas no EB, destacando também a importância e relevância desse conteúdo ser desenvolvido pelo professor.

O trabalho de Sena (2013), "*Sequência De Fibonacci: Propriedades, Aplicações e Curiosidades*", teve como foco apresentar a importância da Sequência de Fibonacci em

diversas áreas, além de apresentar possibilidades de desenvolvimento para estudantes do EB. O trabalho “*O Número de Ouro no ensino a matemática na educação básica*” do autor Silva (2013), teve como finalidade propor tarefas teóricas e práticas sobre o Número de Ouro, explorando a partir do currículo de matemática.

O trabalho “*Algumas constantes reluzentes da Matemática: o número de ouro, a constante de Euler-Mascheronni, e a dimensão de cobertura de Apolônio*” do autor Oliveira (2017), apresenta algumas constantes e aplicações como mencionado no título do trabalho em contexto do EM e que vão além. Sodré (2013), propõem um estudo dos números mencionados no título e possibilidades de desenvolvimento nas aulas de matemáticas.

Agora Belini (2015), “*A razão áurea e a sequência de Fibonacci*”, inicia com uma discussão sobre alguns conjuntos numéricos, em seguida aborda dois problemas matemáticos antigos. O primeiro problema foi proposto por Euclides sobre a divisão de um segmento em média e extrema razão e o segundo sobre a reprodução de coelhos apontado por Fibonacci. Apresenta também um conjunto de tarefas interdisciplinares para orientar professores do EM com o trabalho dessa temática.

O trabalho de Freire (2019), “*Fi, Φ , o Número de Ouro na Geometria Euclidiana Plana: uma proposta de aula*”, discute sobre o tema Número de Ouro ser uma possibilidade para o professor trabalhar com um conteúdo do cotidiano dos estudantes. Para Possebon (2016), “*Fibonacci e a Razão Áurea: Uma abordagem para o Ensino Básico*”, o objetivo é apresentar tarefas que despertam o interesse dos estudantes em aprender matemática relacionada a Sequência de Fibonacci e o cotidiano dos estudantes.

Já Oliveira (2013), “*Sequências de Fibonacci: Possibilidades de Aplicações no Ensino Básico*”, tem como foco destacar a importância da Sequência de Fibonacci pela resolução de problemas. Desta forma, o trabalho buscou trazer conteúdos relacionados ao cotidiano dos estudantes como na natureza, arte, no corpo humano entre outros fenômenos. Além disso o autor ressalta a importância de o professor buscar metodologias mais eficazes para o desenvolvimento de tarefas planejando-a e preparando de forma que os estudantes possam tornar a aprendizagem significativa.

No trabalho de Cano (2007), “*Ciência, magia e filosofia no processo de ensino-aprendizagem da matemática: uma introdução histórica sobre o Teorema de Pitágoras*”, evidencia a relação do teorema de Pitágoras e a possibilidade de trabalho deste tema para professores da EB. Para esse processo o autor realizou um levantamento histórico da vida e obra de Pitágoras, demonstrações do teorema, análise de livros didáticos e o desenvolvimento de tarefas.

O autor destaca que é fundamental realizar uma introdução histórica da matemática para que a aprendizagem se torna mais significativa, levando os estudantes a resolverem situações problemas para compreender o processo da evolução do conhecimento e das tecnologias que temos hoje. O professor deve ser orientador e provocador deste processo, para que os estudantes possam despertar a curiosidade sobre um conteúdo matemático.

Observamos que todos esses trabalhos são de nível Mestrado Profissional, em que a maioria deles foi publicado em 2013, oito trabalhos no total, mostrando grande interesse pelo tema. Os outros anos variam entre um e dois trabalhos. Além disso, observou-se que grande parte desses trabalhos trazem a questão histórica do Número de Ouro e as relações com outras áreas do conhecimento como na natureza, arte, arquitetura e corpo humano.

A partir desses trabalhos é que escolheu-se trabalhar com o Número de Ouro classificando-o como um número irracional e relacionado com a Geometria, desenvolvendo a pesquisa com uma turma do EM em tarefas que envolvessem proporção áurea, segmento áureo, espiral áurea, entre outros temas relacionados.

No próximo capítulo apresento o percurso metodológico para o desenvolvimento da pesquisa.

4 PERCURSOS METODOLÓGICOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Apresento neste capítulo, organizado em seis seções, as escolhas metodológicas que nortearam esta pesquisa. Na primeira, descrevo sobre a perspectiva de uma pesquisa que se enquadra como qualitativa. Na segunda, relato como cheguei ao tema dessa pesquisa e quais foram as influências para o estudo de Geometria. Descrevo também as relações com os sujeitos dessa pesquisa, a professora e os estudantes, articuladas com a proposta temática da pesquisa, na terceira seção. Por fim, nas três últimas seções exponho os caminhos metodológicos para produção e análise dos dados e o processo de elaboração de uma unidade didática sobre o Número de Ouro.

4.1 A abordagem qualitativa como recurso metodológico na pesquisa em Educação Matemática

Ao tomar conhecimento da pesquisa de Custódio (2016), concluiu-se que o tema e as possibilidades que a autora traz em seu referencial metodológico e teórico, cria um movimento de saberes a partir da contextualização em seu trabalho. Tomando-a assim para melhores observações do movimento de significações que foi construído no decorrer dessa pesquisa de cunho qualitativo, foi assumida a pesquisa qualitativa pelo fato apontado por Flick (2009):

a subjetividade do pesquisador, bem como daqueles que estão sendo estudados, tornam-se parte do processo de pesquisa. As reflexões dos pesquisadores sobre suas próprias atitudes e observações em campo, suas impressões, irritações, sentimentos, etc., tornam-se dados em si mesmos, constituindo parte da interpretação e são, portanto, documentadas em diários de pesquisa ou em protocolos de contexto. (FLICK, 2009, p. 25).

Ao refletir sobre a citação acima e o momento em campo, na sala de aula, é perceptível o quanto os sentidos sensoriais do pesquisador se tornam aguçados, tornando-o mais atento aos detalhes no processo de pesquisar, especificamente na constituição dos dados. Quando estive na sala de aula percebi causas, consequências e porquês as dúvidas foram geradas, anseio para buscar respostas, entre outros sentimentos que me levaram a refletir sobre o porquê de tal ação por parte dos estudantes, professor e pesquisador.

Ainda segundo Flick (2009), na pesquisa qualitativa não há uma linearidade em seu processo, não é tomado um único caminho metodológico devido as diferenças históricas e sociais das pessoas participantes da pesquisa, podendo haver situações de mudanças durante o seu desenvolvimento, levando os pesquisadores a refletir e considerar os motivos das novas

situações que surgiram e que podem ser (re)significadas. Durante a elaboração e o desenvolvimento da unidade didática, por exemplo, houve a necessidade de outras leituras e replanejamentos que serão mencionados nesta pesquisa.

É possível listar vários fatores do porquê esta pesquisa é qualitativa, como por exemplo, para constituição dos dados, foi feito contato direto com os participantes, os estudantes, professora. Além disso foi realizado o processo de ambientação da escola para uma possível compreensão das pessoas e espaços externos a sala de aula. Foram utilizados também recursos metodológicos para captação de áudio e vídeo, para que posteriormente sons e imagens pudessem descrever os sentimentos e momentos das significações produzidas pelos estudantes e o pesquisador, entre outras situações que o leitor irá se deparar nesse trabalho.

Ao desenvolver a pesquisa, uma das preocupações estava voltada para o processo de observar e procurar por indícios no movimento de significações produzidos pelos estudantes e o pesquisador durante o desenvolvimento de uma unidade didática. Sendo assim, para este momento apoiei-me na perspectiva histórico-cultural de Lev. S. Vigotski e outros pesquisadores que seguem sua linha, na tentativa de entender esse movimento que será descrito com mais detalhes no capítulo de análise dos dados.

Bogdan e Biklen (1994), argumentam sobre uma das suas preocupações sobre os investigadores que assumem a pesquisa qualitativa:

Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber "aquilo que eles experimentem, o modo como eles o interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem" (Psathas, 1973). Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomarem consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Neste sentido, buscou-se investigar, quais significações são produzidas, por estudantes do ensino médio, quando inseridos em uma prática problematizadora de ensino e aprendizagem, com foco no Número de Ouro. Como objetivos específicos, são listados:

- 1) Compreender o movimento de significação nos processos de ensino e de aprendizagem do Número de Ouro;
- 2) Refletir sobre as aprendizagens do pesquisador sobre sua própria prática nas aulas de matemática desenvolvidas com os estudantes.

Desta forma, nos próximos capítulos estarão evidentes as tentativas para respostas destes objetivos.

4.2 Como cheguei ao tema da minha pesquisa: A matemática está em tudo!

Darei início a esta seção apresentando a minha relação com a Geometria e quais foram os motivos para o desenvolvimento de uma pesquisa sobre essa temática. E para isto farei uma viagem no tempo, recordando as minhas experiências no EB, especificamente do EM, até o Ensino Superior (IES), que de certa forma, há relação com a professora participante desta pesquisa.

Tenho vagas lembranças do Ensino da Geometria no EB, os conteúdos, quando trabalhados, eram abordados no final do ano letivo. Não havia o momento de abstrair, construir, imaginar, manipular materiais e desenhar figuras geométricas, ficávamos limitados as imagens e definições do livro didático. Conceitos como diferença entre figuras bidimensionais e tridimensionais, elementos básicos da Geometria plana, principalmente a Geometria entrelaçada com a Álgebra e outros conceitos aprendidos no EM ficavam apenas nos livros didáticos. Ainda nesses casos a Álgebra era o foco e a Geometria ficava em segundo plano.

No entanto, em 2013 no EM uma música cantada pelo meu professor de matemática sobre os ângulos notáveis tornou-se propulsora para tentativa de mudar o meu pensamento sobre Geometria. Cantávamos a seguinte música, “*Um, dois, três pulinhos; Três, dois, um; Têm raiz em todo mundo; Só não têm raiz no um; Pois na tangente, é nós; Eno, eno divide seno por cosseno.*” Achava o máximo! Este momento foi essencial para que eu pudesse enxergar a Geometria com outro olhar. Contudo, com as discussões realizadas na graduação percebo que esta prática foi a de memorização, mas não compreensão de fato do que são os principais ângulos notáveis.

Passados alguns anos, ao ingressar em uma IES, em 2015, no primeiro período letivo tive a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ao tomar conhecimento de que cursaria essa disciplina pensei: “*Estou perdido!*”. Não sei se você, caro leitor, se já se identificou com alguma situação parecida com esta. Quando é obrigatório a aprendizagem de uma temática que não nos identificamos, criamos mecanismos de autodefesa que podem bloquear a aprendizagem. Durante o desenvolvimento das aulas aceitava os pressupostos e construções geométricas realizadas pelos meus colegas nos estudos coletivos, sem que pudesse criar as minhas próprias construções. Afinal, a Geometria se constituía em uma dificuldade que apresentei nos primeiros semestres da graduação. Por exemplo, lembro de uma aula em que o professor pediu para que imaginássemos um hiperboloide de uma folha⁵, e em seguida fez o

⁵ Hiperboloide de uma folha é uma superfície quádrlica, isto é, um conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujo as coordenadas formam um polinômio de segundo grau.

movimento com uma das mãos, com os dedos fechados, na diagonal, explicando que seria uma secção transversal. Após estes movimentos, pediu para que pensássemos no resultado que obteríamos com este corte. Não sabia como reagir a este momento, fiquei a aula toda sentado e olhando para o quadro imaginando como seria o resultado desse corte. A partir desses acontecimentos procurei desenvolver um método de estudos individual e em grupo, procurando investir na minha formação pessoal e profissional. Passados alguns anos, em 2017 que aconteceram mudanças e diferentes possibilidades de aprendizagem da Geometria, onde a disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática II, ofertada pelo antigo Departamento de Ciências Exatas (DEX), atual Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática (DFM) da universidade. Meu pensamento inicial sobre a disciplina era que iríamos aprender tópicos secretos, para saber ensinar matemática, diferente das aulas somente conteudistas. Pois é, um pensamento muito engraçado. Ansioso para o primeiro dia, a professora apresentou a proposta da disciplina: “Tendências no ensino de Geometria”. Confesso que em um primeiro momento pensei em cancelar a disciplina, visto que a professora ao apresentar a ementa da mesma informou que o foco estaria em trabalhar com a Geometria, mais especificamente com o desenvolvimento do pensamento geométrico. No entanto, conversei com a professora que hoje é minha orientadora e acabei não tomando esta decisão.

Como uma das fundamentações teóricas da disciplina, estudamos o livro O ensino de geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores, das autoras Adair Mendes Nacarato e Cármen Lúcia Brancaglioni Passos. Durante as leituras, realizamos tarefas em que usávamos materiais manipulativos simples como embalagens de cosméticos e medicamentos, papel, tesoura, representações de sólidos geométricos, entre outros, com o objetivo de trabalhar a ementa proposta pela professora. Sentia como se estivesse no EB, porém percebia uma Geometria além do livro didático. O interesse em ler, aprender, estudar e entender a Geometria foi crescendo durante o meu percurso acadêmico.

Passados alguns períodos, em 2018, estava determinado que queria estudar e entender mais sobre as possibilidades que a Geometria pode proporcionar aos estudantes do EB. Esta decisão ocorreu devido as minhas experiências no EB, que foram sendo ressignificadas. Sendo assim, matriculei-me na disciplina Matemática Escolar II, também ministrada por minha orientadora, e em uma das aulas desenvolvemos uma tarefa que consistia em retomar os conjuntos numéricos, em especial os números racionais e irracionais. A proposta da tarefa era construir uma possibilidade de trabalho com estes conjuntos numéricos relacionados com outras

áreas do conhecimento. O único pedido da professora nesta aula, era para que nos sentíssemos como estudantes do EB.

Durante o desenvolvimento da aula a professora pediu exemplos de números irracionais, e de imediato todos responderam primeiro o número “Pi (π)”. A partir dessa resposta, fiquei me perguntando o ‘porquê é natural darmos essa resposta?’ Parecia que ele era o único número irracional. Não sei o real motivo, mas pode ser pelo fato de ser um dos números mais mencionados durante o EB especialmente no livro didático. Estas indagações me levaram a pesquisar outros números irracionais, seus percursos históricos, relações com os objetos e o porquê de quase não serem mencionados em livros didáticos.

Dando continuidade àquela aula sobre os conjuntos numéricos, uma das propostas da tarefa seguinte era “O Número de Ouro no corpo humano”. O objetivo era realizar medições do corpo, como a altura do pé a cabeça, pé ao umbigo, queixo ao alto da testa, entre outras medições e com a utilização da calculadora, encontrarmos a razão entre essas medidas. Ao socializar a tarefa fomos percebendo que as medidas encontradas, se aproximavam do número 1,6 centímetros. Foi quando a professora explicou a teoria e a concepção histórica que tem por trás dessa aproximação, que podemos chamar de Φ (Φ), um número irracional, que vale aproximadamente 1,61803398... . Além disso, a professora mencionou possibilidades sobre este número com a natureza, arquitetura e na arte.

A empolgação dos meus colegas e a minha, me deixou animado como se estivéssemos descobrindo uma nova teoria matemática. Ouvei comentários como, “*A matemática está em tudo!*”, “*Não sabia que por trás do quadro da Mona Lisa estava esse número*”, ou “*Quero desenvolver esta atividade em minha classe, quando me tornar professor*”, me levaram a imaginar os meus futuros estudantes desenvolvendo esta tarefa, com a expectativa de que eles poderiam ficar empolgados também. Foi uma atividade simples, porém marcante. Além disso, a professora apresentou possibilidades de trabalhar com esta temática relacionada a espiral áurea, retângulo áureo, utilização de instrumentos de medidas, espaço bidimensional, entre outras questões levantadas.

Como já estava em um momento da graduação em que precisava definir sobre a minha linha de pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), por toda minha trajetória e relação com a Geometria, decidi que iria pesquisar nesta área, com o objetivo de aprender mais e poder contribuir com a formação de outras pessoas, para que pudessem enxergar as maravilhas que a Geometria pode proporcionar.

Conversei então com a professora da disciplina de Matemática Escolar II, para orientação nesse processo de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), até que certo dia, em

uma reunião, ela me entregou um pedaço de papel, que continha duas propostas para o desenvolvimento de uma pesquisa. A primeira opção, seria desenvolver uma pesquisa relacionada a transformações geométricas e a segunda opção uma pesquisa sobre o Número de Ouro na Geometria. Devido a experiência vivenciada na aula de Matemática Escolar II mencionada acima, optei pelo segundo tema. Mas é importante ressaltar que para a escolha do tema, discutimos, professora orientadora e eu, sobre a sua relevância para estudantes do EM, pois não poderíamos considerar somente a pesquisa, mas principalmente o quanto desenvolvê-la contribuiria com a aprendizagem matemática dos estudantes. Desta forma, realizamos buscas em livros didáticos do EM que estavam disponíveis na biblioteca da escola em que desenvolvi esta pesquisa, para saber se ele era ou não mencionado. Dos livros analisados verifiquei que o Número de Ouro era abordado apenas como algo curioso, não como um conceito a ser desenvolvido em toda sua amplitude.

Os acontecimentos descritos acima foram essenciais para definir o tema desta pesquisa e dar início aos estudos. Dessa forma realizamos o planejamento da investigação de acordo as ideias pensadas, como a escolha das pessoas da pesquisa, os instrumentos para constituição dos dados, temáticas a serem abordadas, entre outras ações que foram tomadas e que serão descritas adiante.

Na próxima seção, apresento o processo de ambientação na escola, a relação com a professora e os estudantes, momento que foi essencial para elaboração da unidade didática.

4.3 Cirando relações: uma ponte entre estudantes, professora e pesquisador

Nesse tópico relato o movimento da relação afetiva com a professora participante da pesquisa, que iniciou em 2014 no EM e que se estendeu por bastante tempo em outros programas de iniciação à docência na universidade. Além disso, descrevo também as primeiras interações com os estudantes, fundamentais para desenvolvimento da pesquisa.

Em 2014 estava prestes a concluir o EM e ingressar em uma IES. Foi um ano que guardei com muito carinho por vários fatores, mas o principal deles foi por ter a oportunidade de ser estudante da professora Margarida⁶, parceira desta pesquisa. A professora Margarida era atenciosa, disposta a ajudar a classe e sua organização nas aulas era impecável. Lembro-me também das nossas conversas sobre a profissão docente, cheia de oportunidades e

⁶ Nome fictício para preservar a identidade da professora pesquisadora.

aprendizagens, mas um caminho árduo. E não poderia esquecer de ressaltar, sua ajuda na organização da nossa formatura com as questões de administração financeira.

Com a ajuda de vários professores e principalmente da professora Margarida consegui ingressar no IES em 2015. No ano de 2016, no quarto período da faculdade iniciei minha participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência⁷ (PIBID), em que a professora Margarida também fazia parte. Não éramos do mesmo subgrupo, mas nas reuniões coletivas de estudos teóricos e no horário do café nos encontrávamos para conversar sobre textos, escola, profissão, entre outros assuntos. Sou grato pelos três anos de participação no programa e pelos momentos de aprendizagem com a professora Margarida, professores orientadores e colegas participantes.

Em agosto de 2018 ingressei no Programa de Residência Pedagógica (RP)⁸ junto de outros estudantes, que teve duração de dezoito meses. Iniciamos o programa em uma escola pública de Lavras - MG com uma professora de matemática da EB, porém houve mudança de professora em nosso subgrupo, passei a acompanhar a prática pedagógica da professora Margarida em uma das duas escolas em que trabalhava. Com esta mudança de professoras e escola, as relações pessoais com a Margaria começaram a se estreitar ainda mais. Devido a estes motivos convidei a professora Margarida para fazer parte desse processo de conclusão de curso, ela aceitou sem hesitar. E o convite aconteceu pelos motivos de ter sido seu aluno em 2014, participar de programas de iniciação à docência, além de partilhar momentos de estudos e experiência docente. Ressalto que a pesquisa só aconteceria se o convite aos estudantes da professora fosse aceito.

Como mencionado anteriormente, o programa RP estreitou as minhas relações afetivas com a professora Margarida, além disso o programa possibilitou o processo de ambientação escolar na escola em que foi desenvolvida esta pesquisa. Este processo tinha por objetivo analisar os espaços formativos externos à sala de aula, indo desde os laboratórios aos funcionários, para desenvolvimento do programa. Foi um momento importante para que nós residentes pudéssemos planejar ações condizentes com a realidade da escola. No próximo

⁷ O PIBID é uma ação da Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação (MEC) que visa proporcionar aos discentes na primeira metade do curso de licenciatura uma aproximação prática com o cotidiano das escolas públicas de educação básica e com o contexto em que elas estão inseridas. Disponível em: <<https://capes.gov.br/educacao-basica/capespibid/pibid>>. Acesso em: 12 de maio de 2020.

⁸ O Programa de Residência Pedagógica é vinculado à formação das disciplinas da Base Nacional Comum Curricular. Ele é uma das ações que integram a Política Nacional de Formação de Professores. Com o objetivo de aperfeiçoar a formação prática nos cursos de licenciatura, promove a imersão do licenciando na escola de educação básica a partir da segunda metade de seu curso. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 12 de maio de 2020.

parágrafo, descrevo brevemente sobre o produto desse processo de ambientação escolar realizado por residentes que participaram do programa de RP no ano de 2018.

A escola era composta por aproximadamente 450 estudantes e 56 funcionários, atendendo desde o Ensino Fundamental I (EFI) ao EM. Localizada em um bairro periférico, a arquitetura física era comum a muitas outras escolas que conheci e estudei: muros altos, portões trancados com correntes e cadeados, janelas com grades, mesas grandes no refeitório, laboratório, biblioteca, quadra poliesportiva, entre outros ambientes. A primeira conversa aconteceu com a vice-diretora, e fomos orientados por ela sobre a realidade que a escola se encontrava. Ela destacou que estas realidades eram as dificuldades financeiras e principalmente indisciplina de estudantes. Ressalto que nosso objetivo não era tentar buscar respostas sobre os motivos da realidade que a escola encontrava ou até mesmo criar pré-julgamentos, mas refletirmos sobre o porquê ser comum estas dificuldades aparecerem nas escolas.

Após o diálogo com a vice-diretora, fomos conhecer a escola, conversamos com alguns funcionários e percebemos que ela estava limpa e organizada, havia frases motivacionais pintadas nas paredes, um jardim feito com recursos recicláveis, computadores na biblioteca e quadra poliesportiva coberta. O espaço físico da biblioteca, por exemplo, era um local apropriado para o desenvolvimento de projetos, devido sua capacidade física de comportar uma turma composta entre 20 a 35 estudantes, além de apresentar possibilidades de pesquisas nos livros e quatro computadores disponíveis com acesso à internet. Este momento foi essencial para entendermos a realidade daquela escola, com poucos recursos didáticos e tecnológicos. Apesar disso, ficou nítido o engajamento e dedicação dos professores e supervisores para amenizar esta defasagem.

Retomando ao planejamento e a relação estabelecida com os participantes da pesquisa; a professora Margarida e eu chegávamos mais cedo nas reuniões da RP e aproveitávamos o horário do café para conversarmos sobre o tema da pesquisa. Segundo a professora, ela tinha conhecimento superficial sobre a temática Número de Ouro. Conversávamos também sobre os objetivos dos planos, as metodologias e os materiais que poderiam ser utilizados nas aulas. Utilizávamos esse tempo para (re)elaborar os planos de aulas juntos. Como tínhamos pouco tempo nestes momentos, sentimos a necessidade de criar uma pasta compartilhada no Google Drive⁹ para que pudéssemos ler, estudar, planejar cautelosamente os planos de aula que iriam compor a unidade didática da pesquisa.

⁹ É um serviço de armazenamento e sincronização de arquivos online.

Em nossas conversas a professora descrevia seus estudantes como comprometidos com as aulas, gostavam de trabalhar em grupo, porém apresentavam dificuldade com conceitos da matemática básica. Além disso, ela relatou que era uma turma de segundo ano do EM composta por 15 estudantes que faziam parte do projeto Educação Integral e Integrado¹⁰, motivo pelo qual a turma possuía poucos estudantes. Inclusive pedi a professora para que pudesse acompanhá-la em suas aulas, antes mesmo de iniciar a pesquisa. Momento que possibilitou conhecer melhor os estudantes e os fatos apontados pela professora, a fim de fazer um planejamento coerente com a realidade vivenciada pelos estudantes e pela escola.

No Quadro 2 abaixo, descrevo o primeiro dia de acompanhamento da turma.

Quadro 2 - Primeiro registro reflexivo.

Data: 27/09/2019	Horário: 9h 45min às 11h 25min	Disciplina: Matemática
Conteúdo: Exercícios sobre expressões trigonométricas		Professora: Margarida
Quantidade de estudantes: 12		
Registro reflexivo:		
O primeiro dia: Você que é o Guilherme?		
<p>Este é meu primeiro dia de acompanhamento na turma do segundo ano do Ensino Médio (EM). Estou próximo de desenvolver as tarefas que levamos meses para serem planejadas e observar o que deu certo e errado. A ansiedade está falando mais alto, sinto como se fosse a primeira vez que entro em uma escola. Será que esta ansiedade é como lecionar pela primeira vez?</p> <p>A aula iniciará às 9h45min, mas cheguei mais cedo para rever alguns funcionários da escola, pois gostava de conversar sobre as práticas em sala de aula e ver como estão, visto que não frequento a escola desde a troca de professoras. Após o término do intervalo, subi com a professora para sala de aula. Aos poucos os estudantes foram chegando e me observando. Conhecia boa parte da turma, pois como havia participado do programa RP nesta escola no período da tarde e me deparava com alguns estudantes no refeitório e corredores da escola.</p> <p>A professora me apresentou para turma e uma estudante no fundo da sala disse: “Você que é o Guilherme? A Margarida falou que você viria acompanhar a gente, seja bem-vindo!”. Fui bem recebido pelos estudantes, disseram para me sentir em casa.</p> <p>Neste dia estavam presentes 12 alunos e o conteúdo trabalhado foi expressões trigonométricas, especificamente com exercícios do livro didático, propostos pela professora. Neste momento percebi que havia dois grupos já montados, um grupo composto por apenas meninas e o outro grupo composto por meninas e meninos. Perguntei a professora se eles desenvolviam as</p>		

¹⁰ As ações de Educação Integral buscam implementar formação em diversas áreas, como esporte, artes plásticas, dança, música, teatro, informática, que complementem o conhecimento tradicional acessado pelos estudantes, por meio da ampliação da jornada escolar. Disponível em: <<http://www2.educacao.mg.gov.br/component/gmg/page/16999-educacao-integral-integrada>>. Acesso em: 8 de maio de 2020.

atividades em grupos, ela disse que sim, pois, segundo ela um ajudava o outro e por ser uma turma pequena eles tinham uma maior familiaridade.

Segundo a professora, era uma turma composta por 15 alunos que faziam parte do projeto Educação Integral e Integrado que tem por objetivo implementar a formação em diversas áreas. Eles tinham aula de língua estrangeira, culinária, computacional, educação ambiental, dentre outras. Dos alunos ingressantes no segundo ano do EM, apenas 15 quiseram fazer parte desse projeto, por este motivo uma quantidade menor de alunos, o que difere das outras turmas compostas por no mínimo 25 alunos.

Durante o desenvolvimento dos exercícios, a professora deu permissão para que eu pudesse andar na sala e ajudar os estudantes em suas carteiras. Neste momento várias perguntas sobre mim foram feitas, como: Você realmente gosta de matemática? Você tem certeza de que quer ser professor? Onde você mora? Por que você quis estudar matemática? Não vi problema em responder, afinal estava lá para me aproximar deles. Além disso pude perceber como mencionado no diálogo com a professora, os estudantes estavam sentados em dois grupos. O que me levou a pensar se é melhor desenvolver a pesquisa com estes dois grupos grandes ou separar a turma em duplas. Aula terminou e me despedi dos estudantes, foi um primeiro contato muito importante por perceber alguns elementos que devem ser considerados na reformulação nos planos de aula.

Fonte: Do autor (2020).

Posteriormente ao acompanhamento da turma, que foi de quatro aulas, na semana seguinte dei início ao desenvolvimento da pesquisa. Inicialmente expliquei de forma breve o motivo de eu estar à frente na aula, que foi convidar os estudantes a participarem desta pesquisa¹¹ mesmo sabendo que a professora já havia conversado com eles. Após o aceite, expliquei sobre a importância da audiogravação e videogravação das aulas e pedi o consentimento de todos para que pudesse começar a gravar. Os estudantes que estavam presentes neste dia, aceitaram realizar este procedimento. Comecei dialogando com os estudantes sobre o tema proposto, que era trabalhar com o Número de Ouro, e todos desconheciam sobre o assunto. Contudo, criei situações como questionamentos para que pudessem tentar dizer o que significava ao ouvir algumas palavras relacionadas ao tema. Muitos disseram que era um número especial, por ter a palavra “Ouro”, comparando-o com o mineral. Como uma introdução sobre o que iríamos estudar durante algumas aulas, passei o vídeo¹²

¹¹ Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos no dia 11 de outubro de 2019. Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE): 20141119.7.0000.5148.

¹² Canal Youtube: Mundo Místico: **Donald na Terra da Matemática - Pentagrama e o Retângulo de Ouro**. 2000. (6min33s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=bfvenjvpI98/>>. Acesso em: 9 de maio de 2020.

“Donald na terra da matemática: Pentagrama e o Retângulo de Ouro” de aproximadamente 6 minutos. A partir desse vídeo foram surgindo várias possibilidades do significado do Número de Ouro: na natureza, no corpo, um número diferente dos outros, a sequência de Fibonacci, entre outros sentidos atribuídos ao que poderia ser o Número de Ouro. Mesmo assistindo ao vídeo mencionando o valor do Número de Ouro e sua relação com outras áreas do conhecimento, os estudantes ainda não conseguiram dizer o que tinham entendido. Realizado esse momento disse aos estudantes que participaríamos de uma sequência de aulas sobre este número, porém para que isso pudesse acontecer era preciso que os pais ou responsável assinassem uma documentação¹³, para que pudéssemos desenvolver a pesquisa.

O quadro abaixo apresenta o cronograma que foi criado juntamente com a professora orientadora da pesquisa, para que pudéssemos nos organizar com relação ao seu desenvolvimento.

Quadro 3 – Cronograma do desenvolvimento da pesquisa.

Cronograma		NOVEMBRO 2019						
DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB		
27	28	29	30	31	01	02		
03	04	05	06	07	08	09		
10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	21	22	23		
24	25	26	27	28	29	30		
01	02	03	04	05	06	07		

● Semana da Educação para vida	
● Aulas desenvolvidas para o projeto	
● Feriado Proclamação da República	

01 – Apresentação da pesquisa.	06 – O que é harmônico aos nossos olhos?
07 – Como obter um segmento áureo com a utilização de instrumentos de medidas.	13 – A proporção áurea no Corpo Humano, na Arquitetura e na Natureza.
14 – A proporção áurea na Arte.	15 – Feriado Proclamação da República.
18, 19, 20, 21 e 22 – Semana da Educação para a vida.	

Fonte: Do autor (2020).

No entanto, algumas datas sofreram alteração pelo motivo de que os estudantes estavam nas provas finais e se organizando para Semana da Educação para a vinda de outra disciplina que ocorreria na escola. Desta forma a pesquisa desenvolveu-se em oito dias, totalizando doze

¹³ Termo de Consentimento Livre e Esclarecido-TCLE e o Termo de Assentimento.

aulas de cinquenta minutos cada e no último dia aconteceu a exposição dos trabalhos realizados pelos estudantes no intervalo, conforme detalharemos em outro momento.

Sendo assim, a professora Margarida compartilhou sua sala comigo para o desenvolvimento da pesquisa, onde esteve presente na elaboração da unidade didática em que juntos íamos vendo e revendo os conteúdos e o desenvolvimento de cada plano de aula que compunha a unidade. Já no desenvolvimento dos planos, ela me deixava livre para circular na sala, deixando-me ser responsável pela aula. No entanto, em alguns momentos ela procurava circular nas mesas para ver o progresso dos estudantes. Esse primeiro momento de estar presente na rotina da escola, da professora e dos estudantes foi essencial para planejar os próximos passos da pesquisa. Estes próximos passos, descrevo na seção a seguir sobre os métodos utilizados para elaboração de uma unidade didática.

4.4 Elaboração de uma unidade didática sobre o Número de Ouro

Antes de iniciar este tópico articulando sobre a elaboração de uma unidade didática, os recursos didáticos e a metodologias utilizadas para sua elaboração, faz-se essencial narrar os processos anteriores a este acontecimento, como por exemplo, explicar o motivo pelo qual optou-se por elaborar uma unidade, além disso, os caminhos percorridos, as incertezas que ocorreram, os questionamentos e os sentimentos da pesquisadora orientadora, professora e pesquisador.

Ao mencionar a palavra unidade entendemos como único ou número um; não está errado, porém vai um pouco além desse significado. A princípio, consideremos as seguintes definições de acordo com o dicionário online¹⁴: a palavra unidade pode significar o número um, qualidade do que é um ou único, harmonia do conjunto de uma obra artística ou literária, combinação de esforços e de pensamentos, união ou seção independente que, dentro de uma estrutura maior, compõe o todo.

Em nossa pesquisa trabalharemos com o conceito de unidade como uma combinação de esforços e de pensamentos, união de pessoas sociais para organização da didática em sala de aula. Estas pessoas sociais entenderemos como estudantes, professores, pesquisadores, entre outras concepções que abarcam o significado da palavra social. Pensar na elaboração de uma unidade é ter conhecimento sobre para quem estou elaborando, qual o objetivo a ser alcançado,

¹⁴ Disponível em: <https://www.dicio.com.br/unidade/>. Acesso em: 9 de maio de 2020.

quem está elaborando, quais recursos didáticos serão utilizados, quais conhecimentos prévios serão necessários, entre outras indagações que abarcam esse processo de elaboração.

Segundo Damis (2006) citado por Carvalho (1969), a unidade didática presume uma organização e observação por parte do professor como:

- os estudos serão desenvolvidos por meio da apresentação de um tema ou situação-problema;
- as atividades selecionadas devem ser ricas e variadas;
- as experiências e atividades desenvolvidas devem estar interrelacionadas, isto é, unificadas pelas ideias dominantes, consubstanciada no próprio título da unidade;
- o conteúdo será organizado e disposto em todos os significativos, ou unidades;
- o aluno iniciará o estudo tomando contato com o conteúdo global, antes de desenvolver o estudo minucioso de cada parte ou das subunidades;
- posteriormente, devem-se analisar as partes/subunidades que compõem o todo;
- serão desenvolvidas atividades de coleta de dados, e de elaboração e organização desses dados;
- os conhecimentos estudados serão reelaborados e integrados numa síntese final;
- os conteúdos de estudos serão correlacionados em torno de um problema/questão central;
- haverá disposição de rico e variado material didático e de uma nova concepção de ambiente disciplinar na sala de aula. (CARVALHO, 1969, citado por DAMIS, 2006, p.122-123).

Sendo assim, para a elaboração desta unidade foram categorizados quatro momentos, uma vez que o tema estava determinado, como mostra o esquema abaixo, na Figura 1. Optou-se por um movimento circular, pois durante esta elaboração fizeram-se necessárias retomadas e modificações que serão descritas nesta seção.

Figura 1 - Momentos para elaboração dos planos de aula.



Fonte: Do autor (2020).

Inicialmente será descrito o percurso didático-metodológico norteador do desenvolvimento das aulas, buscando uma articulação entre o objetivo da pesquisa e as considerações realizadas pela professora sobre a turma. Neste caso, elaboramos uma unidade didática para ser desenvolvida com os estudantes com o objetivo de perceber indícios do processo de significação do Número de Ouro nas aulas de Geometria. No segundo momento, será apresentado o embasamento teórico que deu início ao pensar sobre os conteúdos/tarefas a serem abordados em cada aula. O terceiro momento, discorridos a realização de uma pesquisa virtual de trabalhos acadêmicos, no portal Capes e Google Acadêmico, sobre o Número de Ouro no E.M. E por fim, o quarto momento, refere-se a escrita de cada plano para compor a unidade, baseada nos três momentos anteriores.

Com o tema já estabelecido, era o momento da escolha de uma metodologia norteadora para o desenvolvimento dos planos de aula. Ressalto que para a elaboração da unidade não há um limite quantitativo de planos, mas é fundamental levar em consideração o tempo, as condições, os recursos didáticos, estabelecer um começo, meio e fim e, sobretudo, não menos importante, levar em consideração as pessoas que serão envolvidas nesse processo.

Com isto, optou-se pela metodologia de resolução de problemas como meio de explorar os conteúdos, por tê-la estudado anteriormente em programas e disciplinas como a RP, PIBID, Estágios Supervisionados, entre outros contatos. É válido ressaltar que não foi a única metodologia adotada, mas esta foi um guia para que surgissem outras estratégias como: a investigação, momentos de aula expositiva, entre outras. Segundo Van de Walle (2009, p. 57),

“um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução”. O objetivo na escolha dessa metodologia era de que os estudantes resolvessem problemas não para aplicar matemática, mas para aprender matemática e suas relações com o mundo a sua volta.

Quando Van de Walle (2009) faz referência sobre aprender matemática, ele pontua algumas características, como a seleção de tarefas que deve levar em consideração o que os estudantes já sabem de matemática, de modo que eles não se sintam desmotivados. Também pontua que o aspecto problemático deve envolver a matemática que os estudantes vão aprender, dessa forma esse deve ser o motivo pelo qual os estudantes irão se sentir interessados pelo problema e não os aspectos não matemáticos, além de que os estudantes devem ter consciência de que a justificativa de seu método faz parte da solução do problema, de modo a validar os processos matemáticos utilizados por eles.

Além do fato citado acima, a escolha dessa metodologia também aconteceu em virtude da

[...]necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimento e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-o como protagonistas de seu processo de construção do conhecimento. O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamentos crítico e de trabalho em grupo deve ser promovido. (ONUCHIC *et al.*, 2014, p. 40).

Nós pesquisadores e professores, que desenvolvemos pesquisas na área de Educação Matemática, temos um papel fundamental com a nossa própria formação e a dos estudantes. Como descrito por Onuchic et al. (2014), as possibilidades e o avanço das pesquisas em metodologias no Ensino da Matemática, podem contribuir para ampliação desses saberes, de modo que o professor deixe de ser apenas transmissor de conteúdo, mas passe a assumir uma postura de mediação. Dessa forma, as significações que podem ser produzidas pelos estudantes em sala de aula tornam-se dados e conhecimento para si próprio.

A resolução de problemas busca ensinar matemática de uma forma diferente da tradicional, onde inicialmente é apresentado ao estudante o problema que deverá ser resolvido a partir dos conhecimentos que ele já possui e por meio da descoberta de outros conceitos matemáticos. Quando o professor se coloca nesse papel, de mediador em uma perspectiva crítica, faz-se necessário a busca por recursos didáticos diferentes dos habituais.

Escolhida a metodologia norteadora para elaboração da unidade didática foi o momento de realizar a seleção dos conteúdos, aprofundando em estudos teóricos sobre o Número de Ouro

nos livros “*A Matemática na arte e na vida*”, do autor Paulo Roberto Martins Contador e “*A Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*” do autor Mario Lívio. A partir desses estudos preliminares foram selecionados os conteúdos e distribuídos de acordo com a quantidade de aulas disponíveis.

Em pequenas tiras de papel foram escritos os conteúdos abordados nos livros que se relacionavam com o objetivo da pesquisa, e assim seguiu-se, acrescentando e tirando conteúdos de acordo com a relação entre eles e a quantidade de aulas disponibilizadas pela professora, como mostra a Figura 2. Os conceitos selecionados foram: harmonia, representação algébrica, segmento áureo, história, retângulo áureo, espiral áurea e as relações entre o Número de Ouro e a sequência de Fibonacci, no corpo humano, na arquitetura e na natureza.

Figura 2 – Seleção dos conteúdos.



Fonte: Do autor (2019).

Selecionados os conteúdos, foram realizadas buscas em teses, dissertações e artigos, disponibilizados nos Banco de Teses e Dissertações da Capes¹⁵ e no Google Acadêmico¹⁶, com o objetivo de mapear alguns trabalhos para construção dos planos que iriam compor a unidade. Uma vez já selecionados os conteúdos a serem desenvolvidos, este momento se tornou simples de ser realizado, visto que o objetivo não era analisar quantas obras haviam sobre esta temática, mas a partir dos trabalhos analisados verificar o que já havia sido pesquisado e tirar ideias para

¹⁵ <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

¹⁶ <https://scholar.google.com.br/scholar?q=>

criação de cada plano de aula. O quadro 4¹⁷ apresenta uma síntese dos temas e objetivos específicos que foram desenvolvidos e elaborados a partir de todo esse processo.

Quadro 4 – Tarefas elaboradas no processo de construção da Unidade Didática.

Plano	Tema	Objetivo Específico
I	Apresentação do projeto e leitura das documentações.	Estabelecer o contrato didático com os estudantes, das aulas que serão desenvolvidas durante a pesquisa e observar seu interesse em participar.
II	O que é harmonia?	Estabelecer o que é mais harmônico aos seus olhos, caracterizar dimensão dos objetos propostos, realizar medições da dimensão dos objetos utilizando fita métrica e aprender a calcular razão entre duas grandezas.
III	Representação algébrica do Número de Ouro.	Aprender a representar algebricamente o Número de Ouro através de uma construção geométrica utilizando régua.
IV	Desenhando um segmento áureo com régua e compasso.	Construir um segmento áureo utilizando régua e compasso.
V	História do Número de Ouro (vídeo).	Aprender sobre a história do Número de Ouro.
VI	Desenhando um retângulo áureo e uma espiral áurea com régua e compasso.	Aprender a desenhar um retângulo áureo e uma espiral áurea utilizando régua e compasso.
VII	Fibonacci: a relação com o Número de Ouro.	Aprender brevemente sobre a história de Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, e a relação de sequência infinita, proposta por ele, com o Número de Ouro.
VIII	O Número de Ouro no corpo humano.	Aprender a relação do Número de Ouro no corpo humano, por meio de uma tarefa prática.
IX	A relação do Número de Ouro com a natureza, arquitetura e arte.	Aprender a relação dos elementos e objetos na natureza, arquitetura e arte com o Número de Ouro, por meio da exibição de figuras.

¹⁷ No apêndice A desta pesquisa é apresentada a tabela das tarefas propostas com mais detalhes.

X	Produzir uma obra de arte através da pintura, relacionando com os conceitos do Número de Ouro e escrever uma carta sobre como foi o processo das tarefas.	Criar e recriar (re)leituras de quadros que se encontram relações com o Número de Ouro.
XI	Exposição do trabalho.	Exposição dos trabalhos realizado pelos estudantes, produzidos durante esta pesquisa.

Fonte: Do autor (2020).

Na próxima seção, serão apresentados os recursos metodológicos utilizados para a produção de dados.

4.5 Ferramentas metodológicas para a produção de dados: sons e imagens como recursos potencializadores das ações em sala de aula

Em conformidade com a pesquisa de Custódio (2016), para a produção dos dados foram utilizados áudio e vídeo gravações das aulas, produções escritas dos estudantes e do pesquisador. Os áudios auxiliaram na captura das conversas individuais ou dos grupos durante o desenvolvimento das tarefas. Para captação desse momento foram utilizados celulares. Também foram julgadas importantes as videograções, uma vez que elas têm a possibilidade de captar os gestos e expressões corporais que são meios de comunicação em que os áudios não conseguem captar, e para esse momento foi utilizado uma filmadora e um celular.

Bauer e Gaskell (2002, p. 137) ressaltam que “a imagem, com ou sem acompanhamento do som, oferece um registro mais poderoso das ações temporais e dos acontecimentos reais – concretos, materiais”. Ainda de acordo com os autores, destaca-se que o uso de imagens em uma pesquisa é fundamental pelo fato de vivermos em uma sociedade da comunicação e da tecnologia, em que utilizamos recursos e elementos visuais para expressar algo. Já o vídeo segundo os autores, “têm uma função óbvia de registro de dados sempre que algum conjunto de ações humanas é complexo e difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador, enquanto ele se desenrola” (BAUER; GASKELL, 2002, p. 149).

Assim como descreve Bogdan e Biklen (1994), sobre a importância da utilização de outros meios para constituição de dados,

Embora os investigadores saibam que as notas de campo são fundamentais para a observação participante, alguns esquecem que podem ser um suplemento importante a outros métodos de recolha de dados. Na condução de entrevistas gravadas, por exemplo, o significado e contexto da entrevista podem ser capturados mais completamente se, como suplemento a cada entrevista, o investigador escrever notas de campo. O gravador não capta a visão, os cheiros, as impressões e os comentários extra, ditos antes e depois da entrevista. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.150).

As notas de campo como citam os autores referem-se a tudo aquilo em que o pesquisador observa, descreve e reflete, tornando-se dados da pesquisa. Para este momento utilizei o diário de campo, como ressaltado por Oliveira (2014), que desempenha um papel significativo em uma pesquisa como um método de registrar as vivências na pesquisa, potencializando o entendimento do processo construído na pesquisa.

Como mencionado anteriormente, as escritas dos estudantes e do pesquisador foram fundamentais para o processo de constituição dos dados. Cada estudante recebeu um bloco de anotações, que chamamos de diário, para que pudessem tornar mais pessoais suas produções, um instrumento que eles teriam para escrever sobre seus sentimentos e realizar as tarefas propostas. Segundo Oliveira (2014), o diário de campo é um instrumento de registro e diálogo da/na pesquisa, em que possibilita compreender os movimentos de significações das pessoas sociais em uma pesquisa, além de que é um espaço “[...] para ser o lugar de registro dos movimentos, das leituras, dos tempos, espaços e das observações que ocorrem/ocorreram, enfim, do que na escola e comunidade vimos, ouvimos e vivemos” (OLIVEIRA, 2014, p. 71).

Além desse fato mencionado pela autora, Van de Walle (2009), destaca sobre o valor da escrita:

Quando os estudantes escrevem expressam suas ideias e usam suas próprias palavras e linguagem. É pessoal. Ao contrário, a comunicação oral em sala de aula é muito pública. As ideias “saltam para fora” sem edição ou revisão. O significado é negociado ou elaborado como um todo pela turma. A qualidade reflexiva individual de escrita quando comparada ao discurso em sala de aula é um fator importante ao considerar o valor de escrita em matemática. (VAN DE WALLE, 2009, p. 108).

Antes de dar início ao desenvolvimento da primeira tarefa, conversei com os estudantes para que pudessem autorizar audiogravar e videogravar as aulas. Expliquei que para sanar os riscos que se referiam a sua identificação na pesquisa e garantir sigilo, seriam utilizadas técnicas de anonimato como nomes fictícios e utilização de softwares para sigilo de sua identificação em imagens, além de que as transcrições das gravações de vídeos e áudios, logo após serem realizadas, seriam apresentadas para que pudessem concordar com a sua utilização

como dados da pesquisa. Somente depois desse aceite, iniciaria os procedimentos de análise de dados.

Como a produção dos dados foi realizada no final do ano letivo, o tempo não foi suficiente para realizar as transcrições e apresentá-las aos estudantes logo após a finalização do desenvolvimento da unidade didática. Desta forma, combinei com a professora Margarida para que pudesse me autorizar em um dia específico e horário, para mostrar as transcrições aos estudantes no início do próximo ano. Entretanto, devido a situação que encontramos ao iniciar o ano de 2020, a pandemia da COVID-19 e a greve dos professores das escolas Estaduais mineiras, não foi possível apresentar as transcrições aos estudantes. Sendo assim, conversei com a professora e pedi para que fizesse a leitura e em nome dos seus estudantes pudesse autorizar a utilização das transcrições como dados da pesquisa.

A Figura 3 abaixo, mostra a disposição dos celulares para captação de áudio e vídeo e a organização dos grupos durante o desenvolvimento da unidade didática. Como já mencionei, os estudantes já realizavam tarefas em grupos com a professora, desta forma sugeri que se distribuíssem em duplas para o desenvolvimento do plano. No entanto, eles preferiram continuar divididos em dois grupos, um composto por sete estudantes e um outro grupo composto por seis estudantes. Conversei com a professora Margarida, ela me sugeriu que eu deixasse a turma desta forma, visto que eles já se organizavam assim desde o início do ano. As setas vermelhas representam a disposição dos celulares, para captação de áudio: em cada grupo foram colocados dois celulares, mais um na mesa da professora e outro no fundo da sala. A seta azul representa a localização da filmadora, apoiada na estante de livros que pertencia a sala. Além disso, esta imagem foi capturada do outro celular que tinha como função videogravar.

Figura 3 – Disposição dos recursos de áudio e videogravação.



Na próxima seção, descrevo sobre a abordagem metodológica adotada para análise dos dados e, posteriormente, os *softwares* utilizados para transcrição das gravações.

4.6 Método para análise dos dados: as potencialidades da abordagem microgenética na pesquisa em Educação Matemática

Como abordagem metodológica para análise das significações produzidas por estudantes do EM quando inseridos em uma prática problematizadora de ensino e aprendizagem de Geometria, com foco no Número de Ouro, optou-se pela análise microgenética. O motivo da escolha se deu pelo fato de assumir os trabalhos de Lev Vigotski e outros pesquisadores que discutem a perspectiva histórico-cultural, como teoria-metodológica para análise dos dados.

Como destacado por Góes (2000, p. 11), a análise microgenética “busca compreender os passos do desenrolar das ações dos sujeitos e explicar suas construções e transformações cognitivas”. Sendo assim, a perspectiva histórico-cultural orienta-se nesta dinâmica da gênese nas relações entre pessoas sociais com a cultura. Estas relações podem ser entendidas nesse momento como ações que posteriormente produzirão sentido e significado para determinado resultado. Ainda de acordo com a autora, esta metodologia necessita de um acompanhamento criterioso para formação do processo das relações entre as pessoas sociais.

Tomio, Schroeder e Adriano (2017) destacam que a microgênese é um quarto movimento histórico do desenvolvimento, que analisa em um curto intervalo de tempo os dados de uma pesquisa. Estes intervalos de tempo, denominados como episódios. Siegler e Crowley (1991 citado por TOMIO, SCHROEDER e ADRIANO, 2017), descrevem três passos para fazer uma análise microgenética, são elas:

1. As observações abrangem todo o período do processo, desde o início da mudança até o momento em que atinge um estado relativamente estável;
2. A densidade das observações se acentua em relação à alteração do fenômeno;
3. O comportamento observado é submetido à análise e experimentação intensiva, buscando inferir os processos que deram origem a ambos os aspectos quantitativos e qualitativos da mudança. (SIEGLER; CROWLEY, 1991 citado por TOMIO; SCHROEDER; ADRIANO, 2017, p. 38).

A partir desses três passos, iniciou-se o procedimento para análise dos dados, respeitando os termos éticos da pesquisa. Em um primeiro momento, foi realizada a visualização dos vídeos mapeando e observando, momentos que poderiam gerar unidades de análise para serem apresentados nesta pesquisa, atentando também às ações gestuais que expressavam uma ideia ou um conceito. Posteriormente a este acontecimento, em um segundo

momento foi realizada a transcrição das audiograuações, dando enfoque principalmente aos acontecimentos pré-selecionados na análise das videograuações.

Já para as transcrições dos áudios, foi utilizado o *software VLC Media Player*¹⁸, por auxiliar na velocidade da reprodução como avanço, recuo e volume do áudio. Na prática, ouviam-se os áudios das aulas ministradas, depois digitados em um quadro feito pelos pesquisadores, que estará descrito no próximo parágrafo.

Para organização das transcrições dos áudios, como citado anteriormente, foi elaborado o quadro 5. A primeira coluna refere-se à identificação da pessoa que fala, a segunda coluna, a fala e a terceira coluna, ao intervalo de tempo do começo e fim da fala. Durante o processo de transcrever os dados, a atenção não estava somente nesta ação, além disso, foi considerado importante conseguir captar movimentos dos estudantes durante o desenvolvimento das tarefas, atentando às suas inquietações, suspiros, risos e questionamentos.

Quadro 5 – Organização das transcrições de áudios.

Identificação	Diálogo	Tempo Início/Fim h:min:s
Guilherme (pesquisador)	Então eu vou deixar um celular em cada canto da sala gravando.	0:00:44/0:00:50
Guilherme (pesquisador)	Então vamos lá! Vocês já perguntaram para a professora, o porquê de eu estar acompanhando a turma de vocês durante algumas aulas?	0:00:50/0:00:55

Fonte: Do autor (2020).

Como mencionado anteriormente, os episódios são momentos selecionados criteriosamente na tentativa de compreender as ações das pessoas sociais envolvidas na pesquisa que vão além do objetivo. É importante ressaltar que em uma pesquisa em educação podem emergir discussões que vão além do objetivo esperado, como também não contemplar o objetivo, mas isso foi considerado como um processo comum visto que o trabalho sendo realizado com pessoas sociais, as mudanças são constantes.

O importante na seleção desses episódios se atrela ao fato de que deve haver começo, meio e fim. Para escrita dos episódios, a orientação se deu pela pesquisa de Custódio (2016), em que a autora usa os seguintes critérios: se inicia com um código, seguido da fala em itálico e, por fim, entre colchetes, comentários do pesquisador que as videograuações captam como os

¹⁸ O VLC media player é um software media player portátil gratuito e de código aberto.

gestos e expressões faciais, como uma forma também de preservar a identidade das pessoas envolvidas na pesquisa. O quadro abaixo apresenta a simbologia usada para escrita desse momento.

Quadro 6 – Símbolos usados para escrita dos dados.

Símbolo	Significado
T (seguido de numeração)	Usaremos a letra T para representar os turnos, isto é, momentos da fala seguido de uma numeração progressiva (T01, T02, T03, ...)
Iniciais do nome	Para preservar a identidade dos estudantes, utilizaremos as duas primeiras letras de seu nome social. Por exemplo, Camila – Ca.
P	Este código faz referência ao pesquisador.
PMa	Este código faz referência a professora Margarida.
Es	Quando dois ou mais estudantes falam ao mesmo tempo e não é possível distinguir quem fala.
[]	Expressará os gestos e as ações dos estudantes quando não utilizam da fala ou uma explicação do pesquisador, inserida para complementar uma fala.

Fonte: Do autor (2020).

No próximo parágrafo será apresentado um exemplo de um episódio a partir do contexto da primeira aula, sobre o que os estudantes achavam que era o Número de Ouro, onde podemos perceber como são utilizados os símbolos para escrita no trabalho.

Episódio 1: “Número de que...?”

[Diálogo do pesquisador com os estudantes, sobre o que eles compreendiam a respeito do significado do Número de Ouro].

T01 P: *Vocês já ouviram falar sobre este número ou conhecem? Já viram em algum livro?*

T02 Ju: *Número de que...? A professora já falou um trem do diabo!* [A reticências referem a uma pausa feita pela estudante, no sentido de completar a sua pergunta, que no caso seria Ouro]

T03 Classe: *Nossa senhora! Corta a gravação.* [Classe toda rindo]

T04 PMa: *O diabo dos números* [Referindo-se a um livro, que a professora aconselhou seus estudantes a fazerem a leitura].

T05 P: *O que vocês imaginam que seja este número?*

T06 Gi: *É um número diferente dos outros.*

T07 Pa: *x?*

T08 Gu: *Um número maior.*

T09 Re: *Sempre tem um número maior que o outro, como este número vai ser maior.*

T10 Gi: *O nome dele é número de ouro, então é um número diferente.* [Associando ao elemento químico metálico ouro]

T11 Gu: *Número pi.*

No próximo capítulo será apresentada a perspectiva da THC proposta por Lev. Vigotski, importante para o momento de análise dos dados constituídos para a pesquisa.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Apresento neste capítulo as principais ideias da THC proposta por Vigotski¹⁹ (1896-1934), a qual foi fundamental para toda pesquisa, principalmente no capítulo de análise dos dados foram utilizados conceitos da teoria para tentar responder a ação dos estudantes ao trabalhar com o Número de Ouro. Contudo, inicialmente será abordada a importância do Materialismo Histórico Dialético (MHD) teoria proposta por Karl Marx (1818-1883), por ser uma das grandes influências na perspectiva histórico-cultural. Ao final, uma relação do desenvolvimento do pensamento geométrico com as teorias que serão apresentadas inicialmente.

5.1 Teoria Histórico-Cultural proposta por Lev Vigotski

Para iniciar as discussões, serão discutidas algumas das contribuições de Karl Marx para perspectiva histórico-cultural. É válido ressaltar que duas correntes filosóficas importantes buscavam respostas para o mundo através de teorias, são elas o idealismo e o materialismo.

Alves (2010, p. 1) compreende que os elementos primordiais do idealismo são “[...] a ideia, o pensamento ou espírito”, enquanto no materialismo,

[...] toda concepção filosófica que aponta a matéria com substância primeira e última de qualquer ser, coisa ou fenômeno do universo. Para os materialistas, a única realidade é a matéria em movimento, que, por sua riqueza e complexidade, pode compor tanto a pedra quanto os efeitos extremamente variados reinos animal e vegetal, e produzir efeitos surpreendentes como a luz, o som, a emoção e a consciência. (ALVES, 2010, p.1).

Como cita o autor, o conceito de matéria é substância primeira e última de qualquer ser; ele faz referência ao que é palpável como nós, pessoas sociais capazes de modificar a sua essência, o outro e conseqüentemente o mundo a sua volta. Os pensadores da época partiam de premissas idealistas para tentar responder a atividade humana, como Hegel (1770-1831), por exemplo. Marx, por sua vez, se opunha ao pensamento idealista, pois acreditava que para compreender as transformações dos acontecimentos em determinada época do mundo, principalmente nas relações econômicas, políticas e sociais estava no homem, o que chamou de materialismo dialético.

De acordo com Pereira e Francioli (2011),

[...] o materialismo considera que na sociedade tudo está ligado a natureza, visto que o homem age sobre ela para produzir seus materiais de consumo, no

¹⁹ Adotou-se nesta pesquisa a escrita Vigotski. No entanto, aparecerá também Vygotsky, de acordo com os autores.

entanto, não somos produtos da natureza, mas sim da história humana. (PEREIRA; FRANCIOLI, 2011, p. 94-95).

Esta ligação das pessoas sociais com o mundo, Marx denominou como práxis e

[...] refere-se à atividade livre, universal, criativa e auto-criativa, por meio da qual o homem cria (faz, produz), e transforma (conforma) seu mundo humano e histórico e a si mesmo, atividade específica do homem que toma basicamente diferente de todos os outros seres. (ALVES, 2010, p.7).

O materialismo é uma concepção filosófica que pensa a ciência e a história nas mais diversas pluralidades sociais, econômicas e políticas do homem. Desta forma, Marx e Engels criam um modelo para explicar as relações históricas do homem, denominado Materialismo Histórico Dialético (MHD) que se opunha à corrente filosófica idealista proposta por Hegel. Para Fernandes (1984, citado por ALVES, 2010, p. 3) entende-se MHD como “[...] um conjunto de doutrinas filosóficas que, ao rejeitar a existência de um princípio espiritual, liga toda a realidade à matéria e às suas modificações”. Para Marx o conceito de dualidade não parte apenas na ideia homem-objeto como essência da pessoa, mas sim deve ser analisado todo processo histórico que esta pessoa se situa.

O materialismo apresenta possibilidades teóricas para interpretação do sistema educacional. A profissão docente é colocada em uma posição de necessidade em conhecer as diversas possibilidades que envolve a prática educativa. Pires (1997, p. 91) destaca que o “trabalho, como princípio educativo, traz para educação a tarefa de educar pelo trabalho e não para o trabalho, isto é, para o trabalho amplo, filosófico, trabalho que se expressa na práxis (articulação da dimensão prática com a dimensão teórica, pensada)”.

Sendo assim, o MHD não é apenas um método, mas também teoria. Segundo Sirgado (2000),

É teoria e método, como elementos interligados e aspectos diferentes de uma mesma realidade. Não só teoria, pois não escaparia do dogmatismo das teorias clássicas da filosofia do conhecimento. Não só método, pois perderia o estatuto de ciência que precisa de um objeto. (SIRGADO, 2000, p.50).

Como mencionado anteriormente, o MHD proposto por Marx foi uma grande influência no desenvolvimento da THC, proposta por L. S. Vigotski.

Como esta pesquisa tem como foco procurar por indícios do processo de significação produzidos por estudantes de uma turma do 2º ano do EM, faz-se necessário o apoio na TCH e outros pesquisadores que seguem esta perspectiva. O objetivo não é tratar a teoria com toda sua complexidade, mas abordar os principais conceitos que ajudarão a evidenciar esse processo de significação.

O materialismo apresentado por Marx, foi uma das grandes influências para os trabalhos de Vigotski. Como descrito por Rego (1995, p. 32), “podemos identificar os pressupostos filosóficos, epistemológico e metodológico de sua obra na teoria dialético-materialista.” Além dos pressupostos mencionados, a autora também destaca a importância do desenvolvimento da pessoa com a sociedade, natureza e o trabalho, concepções mencionadas por Marx e Engels que foram propulsoras para os estudos de Vigotski.

Para compreensão da THC proposta por Vigotski é fundamental entendermos duas categorias destacadas por Sirgado (2000), o social e o cultural. Analisar o significado dessas duas categorias é entender o conceito de história, pois é a ideia chave das obras de Vigotski que advém do MHD proposto por Marx.

A história nos estudos de Vigotski, é o que diferencia de outras concepções psicológicas. Quando Sirgado (2000) faz uma análise do Manuscrito de 1929, destaca que,

[...] “a única ciência é a história” – para esclarecer aquilo que está afirmando. Esta referência nos autoriza a pensar que, se a história é a única ciência, deve ser porque toda ciência é necessariamente histórica. Mas dizer que a ciência é histórica, no contexto do materialismo histórico, equivale a dizer que ela é produto da atividade humana, não um dado puro da razão nem a simples expressão da realidade natural das coisas. Como qualquer produção humana, a ciência está ligada às condições da sua produção. Em termos gerais, pode-se dizer que a ciência é a natureza pensada pelo homem que, dessa maneira, passa a integrar a história humana na forma de ciência da natureza. A natureza em si mesma não tem história. (SIRGADO, 2000, p. 49).

A história do homem e do mundo, possibilita analisar as relações e transformações da natureza e cultura, em que o homem age sobre ela fazendo parte dela.

Sirgado (2000), contextualiza o termo social e cultural mediado pelo conceito de história. O social é um conceito que classifica e explica as ações humanas existentes no mundo natural. A cultura segundo Vigotski (1997) citado por Sirgado (2000), é definida como “um produto, ao mesmo tempo, da vida social e da atividade social do homem” (VYGOTSKY, 1997, p. 106 citado por SIRGADO, 2000, p. 54). Sendo assim, é importante diferenciar as classificações das ações do homem com as explicações das ações do homem. A primeira está atrelada a vida social que resulta da dinâmica das relações sociais e a segunda está ligada a atividade social do homem que é um produto do seu trabalho.

Nesse sentido, define-se THC como à “corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana com base nos princípios do materialismo dialético cujo fundador é L. S. Vygotsky” (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 1). Ainda de acordo com os autores, estudos sobre a teoria se iniciaram nos anos 20 em parceria com outros pesquisadores como A. R. Leontiev e A. R. Luria. Em que o princípio teórico da psicologia histórico-cultural

se relaciona com assuntos que tem como “origem e desenvolvimento do psiquismo, processos intelectuais, emoções, consciência, atividade, linguagem, desenvolvimento humano, aprendizagem” (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 1).

O desenvolvimento do psiquismo humano está ligado a funções psicológicas superiores, como mencionado anteriormente por Libâneo e Freitas (2006). De acordo com Rego (1995), estas funções agem como “mecanismos intencionais, ações conscientemente controladas, processos voluntários que dão ao indivíduo a possibilidade de independência em relação às características do momento e espaço presente” (REGO, 1995, p. 39). As funções psicológicas superiores do ser humano partem do pressuposto da interação com o mundo. Uma vez que o homem modifica o espaço que está inserido, o mundo, seja diretamente ou não, essas modificações influenciam nos seus comportamentos futuros.

Desta forma, um conceito fundamental para compreensão dessas funções é a mediação. Compreender a mediação é entender a relação do homem com um mundo e com o outro. Para Sforzi (2008, p. 499) “o homem não se relaciona diretamente com o mundo, sua relação é mediada pelo conhecimento objetivado pelas gerações precedentes, pelos instrumentos físicos ou simbólicos que se interpõem entre o homem e os objetos e fenômenos”.

Nesse processo de mediação existem dois elementos básicos responsáveis, os instrumentos e os signos. Conforme Rego (1995, p. 50), “o instrumento, que tem como função de regular as ações sobre os objetos e o signo, que regula sobre o psiquismo humano”. Dessa forma, o instrumento é um recurso concreto entre o homem (trabalhador) e o objeto de seu trabalho. Em outras palavras, à medida que o homem adquire novas experiências, sob a ação criadora do próprio homem com a natureza, amplia-se as possibilidades dos instrumentos para evolução da sociedade. Ao contrário dos instrumentos, os signos são orientados para próprio homem, que tem como premissa solucionar um problema psicológico, atuando internamente. Embora sejam dois conceitos com significados diferentes, eles estão ligados contribuindo para evolução do homem.

A cultura, por exemplo, constitui-se nos signos, por termos a capacidade de construir representações mentais que substituam os objetos do mundo real. A linguagem por exemplo, é composta por um sistema simbólico fundamental para construção do homem, pois pela linguagem caracterizamos objetos externos a nós. Quando penso na palavra cadeira, imagino uma estrutura composta por quatro pés, assento, encosto e na cor marrom. Possivelmente você imagina uma cadeira com características parecidas ou não. Mas o que faz construirmos imagens mentais diferentes? A cultura em que estamos inseridos.

Ao refletir sobre esse exemplo da cadeira, há outros dois conceitos que estão envolvidos, o significado e o sentido. De acordo com Costa e Ferreira (2011), o significado

[...] constrói-se em acordo com as situações vivenciadas. Pode-se manter o mesmo significado, mas eles sofrerão variações conforme a intenção. Daí a ocorrência de níveis: o que se entende, significa-se (a sua própria vivência), a intenção (o que se quer) e o inconsciente (não sabe o que se quer). Diante dos acontecimentos, estes níveis são ressignificados. Está-se sempre ressignificando os significados, pois ao surgir uma ideia e pretender-se expô-la a um interlocutor que questiona, complementa, refuto, está-se, juntos, atribuindo novos significados a esta ideia. (COSTAS; FERREIRA, 2011, p. 215).

Neste sentido, a palavra é fundamental na compreensão dialética entre o pensamento e linguagem. O sentido de acordo com Costas e Ferreira (2011),

[...] tem caráter simbólico. É, aliás, simbólico o elemento mediador da relação homem/mundo. Portanto, serve o sentido como um possibilitador desta relação. Recapitulando-se aqui a importância do social. O sujeito produz como indivíduo na ação social e na intenção, internalizando significados a partir do social. (COSTAS; FERREIRA, 2011, p. 215).

Se fossemos contextualizar o exemplo da cadeira mencionado anteriormente, discutindo especificamente para uma cozinha, isso dependeria de qual cadeira é mais ideal para o tipo de cozinha, se é para uma bancada ou uma mesa por exemplo. Freitas (2002), destaca que a associação pensamento e linguagem é essencial para compreender a natureza da consciência humana. Ainda de acordo com a autora, “as palavras têm um papel central no desenvolvimento do pensamento, na evolução histórica da consciência como um todo” (FREITAS, 2002, p. 99).

Vigotski trouxe importantes contribuições para a área da Educação, para ele a escola era um ambiente propulsor nas construções e na gênese das funções psicológicas superiores. As funções psíquicas da pessoa social são constituídas nas relações mediante a comunicação com outras pessoas da sociedade a que se pertence. Segundo Libâneo (2004, p. 5), “as crianças e jovens vão à escola para aprender cultura e internalizar os meios cognitivos de compreender e transformar o mundo”. Dessa forma, faz-se essencial buscar mecanismos para estimular as capacidades cognitivas dos estudantes.

À vista disso, a didática é um elemento primordial que tem como atribuição buscar as melhores estratégias metodológicas e teóricas para o desenvolvimento cognitivo das aprendizagens do estudante segundo Libâneo (2004). O autor ainda ressalta que, “cabe-lhe investigar como ajudar os alunos a se constituírem como sujeitos pensantes e críticos, capazes de pensar e lidar com conceitos, argumentar, resolver problemas, diante de temas e problemas da vida prática” (LIBÂNEO, 2004, p. 5).

Nesse sentido, o professor atua como mediador entre ele, os conceitos, os estudantes e os instrumentos para/da aprendizagem; conforme Libâneo (2004) são as ditas mediações cognitivas. A aprendizagem está vinculada ao psiquismo humano articulando os processos externos e internos da pessoa social, resultando nas suas ações e comportamentos. Desta forma, a educação e o ensino estão relacionados diretamente aos fatores socioculturais e as condições internas das pessoas sociais.

Contudo, a aprendizagem é fundamental para o desenvolvimento psicológico da pessoa social. Apresentado alguns pontos da THC, faz sentido neste momento a contextualização sobre o entendimento do conceito de significação, que ajudará no processo de compreensão das ações das pessoas sociais envolvidas na pesquisa e que também é o objetivo da pesquisa. Concordou-se com Rossetti-Ferreira, Amorin e Silva (2004) quando as autoras expõem sobre a Rede de Significações:

[...] a perspectiva da *Rede de Significações* propõe que o desenvolvimento humano se dá dentro de processos complexos, imerso que está em uma malha de elementos de natureza semiótica. Estes elementos são concebidos como se inter-relacionando dialeticamente, através de cuja articulação, aspectos das pessoas em interação e dos contextos específicos constituem-se enquanto partes inseparáveis de um processo em mútua constituição. Desta forma, as pessoas encontram-se *imersas em, constituídas por e submetidas a* essa malha e, a um só tempo, ativamente a constituem, contribuindo para a circunscrição dos percursos possíveis a seu próprio desenvolvimento, ao desenvolvimento das outras pessoas em seu entorno e da situação em que se encontram participando. (ROSSETTI-FERREIRIA; AMORIN; SILVA, 2004, p.24-25).

Como mencionado pelas autoras, elas usam a metáfora da *rede* com o propósito de evidenciar as articulações das relações estabelecidas para o desenvolvimento humano seja ele social, interpessoal, político, histórico e cultural. As autoras destacam que este processo de desenvolvimento está diretamente ligado aos significados que emergem da interação entre as pessoas sociais.

Smolka (2004) destaca que é impossível desassociar o homem do processo de significação, em que podemos destacar como uma atividade essencial para o desenvolvimento humano. Sendo assim, para entender o conceito de significação faz-se essencial retomar o conceito de signo mencionado anteriormente, que por sua vez está ligado ao conceito de mediação e sentido. Adiante, será abordado o papel da mediação nesse processo de significar as relações sociais com as pessoas envolvidas na pesquisa. A grosso modo o signo está ligado a ideia de representação, porém para que haja esse processo é necessário reflexão. Smolka (2004) destaca que “o signo, como aquilo que se produziu e estabilizou nas relações interpessoais, age, repercute, reverbera nos sujeitos. Tem como características a impregnação e

a reversibilidade, isto é, afeta os sujeitos nas (e na história das) relações” (SMOLKA, 2004, p.56).

Desta forma, o signo emerge na/pela atividade humana, que por sua vez é mediada por fatores externos e internos, portanto, ele produzido nas relações sociais. Sforni (2008) destaca que a medição é um conceito fundamental no desenvolvimento humano visto que acontece na relação entre sujeito-conhecimento-sujeito. A autora ainda destaca que a relação homem/mundo perpassa pela ideia de mediar o conhecimento derivado da atividade humana através de instrumentos físicos ou simbólicos. Sendo assim, a troca desses saberes para internalização do conhecimento transformam-se em mediação.

Com relação à Educação, Sforni (2008) destaca que o papel da mediação é algo para além da ajuda do professor no processo de ser propulsor do conhecimento do estudante, ressaltando que

[...] no contexto escolar há uma dupla mediação, uma que se refere à relação entre professor e estudantes, outra vinculada à relação entre os estudantes e o conteúdo escolar. Do ponto de vista do desenvolvimento psíquico, a primeira somente se realiza quando a ação docente envolve a disponibilização dos conteúdos escolares como elementos mediadores da ação dos estudantes, isto é, de modo que eles sejam capazes de realizar conscientemente as ações mentais objetivadas nos conhecimentos historicamente produzidos. (SFORNI, 2008, p. 503).

Em síntese, o conceito de mediação na perspectiva histórico-cultural não é limitado apenas nas socializações entre pessoas, mas na forma como é trabalhada e tornado para si. Sforni (2008), ressalta que

[..] reconhecer a mediação docente começa muito antes da aula propriamente dita. Seu início ocorre já na organização da atividade de ensino, quando se planejam situações de comunicação prática e verbal entre professor e estudantes, entre estudantes e estudantes em torno das ações com o objeto da aprendizagem. (SFORNI, 2008, p. 504).

Já o conceito de sentido, Costas e Ferreira (2011), destacam que “o sentido, por sua vez, tem caráter simbólico. É, aliás, o simbólico o elemento mediador da relação homem/mundo. Portanto, serve ao sentido como um possibilitador desta relação” (COSTAS; FERREIRA, 2011, p. 215). Os autores ainda destacam que o sentido da fala, por exemplo, varia de acordo com os interlocutores, os espaços e o tempo de onde se está falando e com quem se fala. As palavras são significadas a todo momento por pessoas sociais que interpretam de um contexto externo, passando a internalizar de acordo com o contexto político, social, econômico e cultural que está situada.

Retomado alguns dos principais conceitos, faz sentido falar neste momento sobre o que será abordado como significação, um conceito fundamental que se relaciona com os conceitos de signo, sentido e significado que por sua vez estão entrelaçados com o conceito de mediação. Sendo assim,

a significação implica, mas não se restringe à representação. A representação, enquanto possibilidade de formação de imagens, ideias, pensamentos, tem um caráter, ou funciona, em um nível individual. Só que essas imagens, ideias, pensamentos não se formam, não se compõem independentemente das relações entre pessoas, fora da trama de significações, isto é, sem a mediação, a operação com signos. (SMOLKA, 2004, p.56).

Custódio (2016), destaca que olhar para o movimento de significações envolve olhar para representações individuais, mas que são constituídas pelas relações sociais, posteriormente mediada pelas interações entre pessoas sociais. Desta forma, tenho como propósito identificar indícios das significações produzidas no processo de elaboração do conceito de número de ouro, produzidas por estudantes do EM nas aulas de Geometria.

A seguir serão apresentadas duas unidades de análise decorrentes das ações na sala de aula com uma turma do segundo ano do EM.

6 ANÁLISE DO MOVIMENTO DE SIGNIFICAÇÕES COM A PROPOSTA DE TRABALHO SOBRE O NÚMERO DE OURO

Apresento neste capítulo, alguns episódios decorrentes de ações e interações a partir de tarefas propostas para uma turma do segundo ano do EM, trabalhando com as potencialidades do Número de Ouro na Geometria. Neste sentido foram organizadas duas unidades de análise: a produção de significações a partir de uma proposta de trabalho sobre o Número de Ouro e o uso de ferramentas para mediação no movimento de significações. Como mencionado no capítulo metodológico optei pela análise microgenética, em que foram selecionados alguns episódios sem necessariamente organizá-los em ordem temporal dos acontecimentos na sala de aula, para compor estas duas unidades de análise. Entretanto cada uma delas há um começo, meio e fim, para descrever os indícios das significações que foram produzidas pelos estudantes.

Como essência também da pesquisa, a perspectiva histórico-cultural será fundamental para articular os conceitos envolvidos com a prática. Além disso, apresento no final as aprendizagens e os meus sentimentos no decorrer da pesquisa como processo de (re)significação de me tornar professor de matemática.

6.1 A produção de significações a partir de uma proposta de trabalho sobre o Número de Ouro com estudantes do Ensino Médio

Esta seção tem por objetivo identificar indícios do movimento de significação em Geometria relacionado ao Número de Ouro, a partir do desenvolvimento de algumas tarefas em sala de aula.

A primeira tarefa, tomada como objeto de análise, foi desenvolvida nos dias 06 e 08 de novembro de 2019. O objetivo era estabelecer o que é mais harmônico aos olhos, além de realizar medições das dimensões de alguns objetos utilizando fita métrica e calcular a razão entre essas medidas. O quadro abaixo apresenta uma síntese do plano de aula.

Quadro 7 – Síntese do plano de aula II.

Tema: O que é harmonia?
Objetivo específico: Os estudantes devem estabelecer o que é mais harmônico aos seus olhos, caracterizar dimensão dos objetos propostos, realizar medições da dimensão dos objetos utilizando fita métrica e aprender a calcular razão entre duas grandezas.
Avaliação: Haverá dois momentos de avaliação: a primeira ocorrerá pelo pesquisador, durante o desenvolvimento da tarefa percebendo as ações dos estudantes e a segunda uma autoavaliação realizada pelos estudantes, descrevendo sobre o que aprenderam e seus sentimentos ao realizar a tarefa.
Tarefa:

1. Qual foi o celular que mais te agradou visualmente?
2. O que chamou mais a sua atenção pela escolha desse celular? Por que você não escolheria os outros?
3. O que diferencia um celular do outro?
4. Após ter realizado as medições das dimensões da representação dos modelos de celular, complete a tabela abaixo com os valores encontrados

Celular	Comprimento em centímetros	Largura em centímetros
1		
2		
3		
4		

5. Utilizando a calculadora, encontre a razão (R) entre o comprimento (C) e a largura (L) das representações dos modelos de celular. Registre na tabela abaixo os valores encontrados.

Celular	$R = \frac{C}{L}$
1	
2	
3	
4	

6. Qual foi a razão encontrada do celular escolhido por você?
7. Você consegue perceber alguma relação entre a razão e a medida das dimensões dos celulares?

Com a utilização da fita métrica meça os objetos disponíveis na carteira e organize os dados em uma tabela. Após preenchimento da tabela, responda as perguntas abaixo.

8. Existe alguma relação entre os valores das razões dos objetos exposto? Se sim, qual é esta relação?

Anexo

Figura 4 - Folhas com representações dos celulares.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 5 - Fita métrica e medição das atividades.



Fonte: Do autor (2019).

Fonte: Do autor (2021).

A realização dessa aula aconteceu por etapas, inicialmente foi entregue um recorte da tarefa, o item 1 a 4, em seguida o item 5 a 7 e, por fim, o item 8. Optei por ser desta forma por dois motivos, o primeiro para poder evidenciar os conceitos envolvidos em cada parte da tarefa, sendo assim ao final de cada etapa ocorria a socialização das resoluções e o segundo motivo por já ir ocorrendo o processo de avaliação do desenvolvimento dos estudantes com relação a tarefa.

A seguir apresento o primeiro episódio que evidencia as discussões que surgiram durante o desenvolvimento dessa tarefa.

Episódio 1: “Por isto que eu não escolhi, ele é pititinho!”

- T01 P: *Vocês viram que entreguei cinco representações de celulares? Vou entregar a primeira tarefa, vou ler junto com vocês, iremos desenvolver por partes, e vocês vão colando no diário.*
- T02 He: *Por que eu gostei mais desse? Porque ele é mais fininho.* [Referindo-se à representação do celular de número 4]
- T03 Gi: *Eu gostei mais do da Heloise.* [Referindo-se à representação do celular de número 4]
- T04 Ta: *Mas como chama o celular que está com a Heloise?*
- T05 P: *Vocês escolherão de acordo com a numeração que está atrás.*
- T06 P: *Escolham qual representação chamou mais a sua atenção? Dessas representações qual te agradou mais visualmente?*
- T07 Gi: *Como assim? Qual desse celulares mais me agradou?*
- T08 P: *Se fosse para você comprar um desses celulares, qual você compraria?*
- T09 Gi: *Quatro.*
- T10 He: *Você também gostou mais do 4?* [Conversando com a colega ao lado]
- T11 Al: *Todo mundo quer o número 4.*

- T12 P: *O que chamou mais a sua atenção na escolha dessa representação de celular? Por que vocês escolheram este?*
- T13 Al: *Este aqui é maior, tem muito mais coisas.* [Referindo-se à representação do celular de número 4]
- T14 Ta: *É mais moderno.* [Referindo-se à representação do celular de número 4]
- T15 Gi: *Ele é maior, mais moderno e tem mais coisas.*
- T16 He: *Ele é mais fácil de carregar.* [Escolheu o celular de número quatro e comparou com os outros celulares]
- T17 Al: *Todos os celulares têm coisas iguais, só que um tem mais giga que o outro.*
- T18 Pa: *Mas só por um papel você já saber que um tem mais giga que o outro?*
- T19 Al: *É lógico.*
- T20 Gi: *Qual é a diferença de um para o outro?* [Leu a pergunta da tarefa]
- T21 Gi: *Esse aqui é dos anos 80.* [Neste momento as videograções não foram possíveis de captar qual celular a estudante estava referindo]
- T22 Gi: *Eu tive um desse aqui.* [Mostrando o celular com as proporções reais] *É da marca LG.*
- T23 He: *Esse parece mais fácil de carregar.* [Referindo-se à representação do celular de número 4]. *Esse já é maior, mais largo.* [Referindo-se à representação do celular de número 5]. *Ele é maior, mais moderno, mais fino, mais fácil de levar. Os outros parecem mais largos e menores. E eu não escolheria os outros pelo mesmo motivo que os diferencia.* [Referindo-se à representação do celular de sua escolha, número 4]
- T24 He: *Diferencia o tamanho, largura, altura ...*
- T25 Ka: *A grossura!*
- T26 He: *A grossura não! É largura.*
- T27 Al: *O tamanho, largura e grossura.*
- T28 He: *Mas a grossura deles são iguais, é tudo papel.*
- T29 He: *O que mais diferencia da largura e da altura?* [Ela fez uma pergunta para ela mesma, pois o áudio nesse momento estava baixo]
- T30 P: *Todos acabaram? Então vamos lá...Vamos socializar a primeira tarefa. Qual representação de celular que mais te agradou visualmente?*
- T31 Es: *4*
- T32 P: *O que te chamou mais a atenção pela escolha dessa representação?*
- T33 Gi: *Ele é maior.*
- T34 Al: *Ele é maior, tem muito mais coisas.*
- T35 He: *Ele é maior, mais fino, mais fácil de carregar.*
- T36 Gi: *Ele é melhor para jogar é mais “cumpridinho” para segurar na mão e jogar.* [Referindo-se à representação do celular de sua escolha, número 4]
- T37 P: *E se eu disser para vocês, que estas representações de celulares são da mesma marca e a única coisa que eu fiz foi esticar um lado, outro lado, mudando as dimensões dessas representações.*
- T38 Gi: *Eu sabia!*
- T39 Ta: *Eu vi pela foto do perfil.* [“Foto do perfil” refere-se a tela inicial, percebendo que as imagens estavam esticadas]
- T40 P: *E se eu falar assim para vocês, o celular número dois é o único que está com as medidas reais.*
- T41 Al: *Eu falei.*

- T42 P: *Os outros celulares eu modifiquei.*
 T43 Gi: *Por isto que eu não escolhi, ele é pititinho!*
 T44 P: *É porque hoje em dia os celulares são todos grandes.*
 T45 P: *Qual era o objetivo desta primeira tarefa, é que vocês percebam o que é mais harmônico para vocês. Vocês sabem me dizer o que significa a palavra harmônico... harmonia? Já ouviram esta palavra?*
 T46 Gi: *Já.*
 T47 He: *Bonito.*
 T48 Gi: *Calmo.*
 T49 He: *Bom.*
 T50 P: *Eu trouxe um dicionário e vou ler a definição desta palavra para vocês. [Li a definição de acordo com o dicionário Aurélio].*

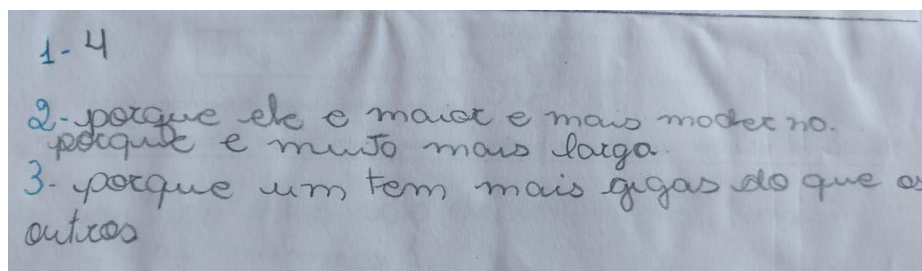
Na primeira parte da tarefa os estudantes tinham que escolher uma representação de celular impressa e plastificada com papel *contact*, o objetivo era que os estudantes escolhessem a representação que mais os agradava visualmente. Quando lanço a pergunta no T06 sobre qual representação chamou mais atenção a estudante no T07 parece não compreender a pergunta, sendo assim foi necessário reformular a pergunta como mostra no T08. Nos próximos turnos as estudantes começam a dialogar sobre suas escolhas. No T13 a estudante “Al” faz a escolha da representação de celular número 4 referindo como se tivesse mais coisas, isto é, mais recursos por ser um celular com um comprimento maior que os outros. Estes recursos citados pela estudante são evidenciados no T17, em que ela diz que a representação de celular escolhido por ela há mais memória que os outros.

No T14 a estudante que estava sentada ao seu lado complementa sua fala dizendo que é mais moderno. Este momento é interessante, pois a representação de celular que tinha medidas reais é o número dois, mas acredito que a escolha dos estudantes aconteceu por atualmente existirem celulares com comprimentos maiores, dificilmente encontramos celulares com funções simples e com um comprimento pequeno. Pensando agora, poderia ter escolhido uma outra representação de celular mais atual, para que pudessem emergir ainda mais problemáticas nesse momento do desenvolvimento. Como exemplo, uma representação de celular maior, com mais descrições sobre sua capacidade de memória, entre outras características que culturalmente são construídos e estabelecidas por pessoas.

Dando continuidade, nos T15 e T16 o grupo vai complementando as argumentações apresentadas a partir do questionamento feito por mim. Mas no T17, foi percebido que o motivo da escolha da estudante “Al” pelo celular 4 é pelo fato de um ter mais memória, como já mencionado. E em seguida, o estudante “Pa” do Grupo A já a questiona (T18), Pa: *Mas só por um papel você já sabe que um tem mais giga que o outro?* Recordo-me que fui até a carteira de Al para tentar entender o porquê de ter mais coisas, ela disse que era o que ela achava. No

entanto, durante a socialização da tarefa deveria ter aproveitado para criar discussões com os estudantes sobre a fala dessa estudante. A figura abaixo é o registro da estudante “A1” em seu diário.

Figura 6 - Registro da estudante 'A1' em seu diário de campo.



Fonte: Do autor (2021).

No T22 a estudante menciona a representação do celular 2, com as medidas reais, pois já havia tido esse celular. Mas reflito ao analisar os dados do porquê a escolha de uma outra representação? A princípio poderíamos pensar que ela escolheria a representação com medidas reais, visto que ela já teve este celular, mas ao analisar o desenvolvimento do episódio 1 me perguntei se a escolha de outra representação aconteceu por influência dos colegas no seu grupo. Além disso, ela poderia ter escolhido outra representação pelo fato de já ter possuído aquele celular. Visto que todas as estudantes do Grupo B escolheram a representação de celular de número 4. Sendo assim, ao interpretar este acontecimento na perspectiva histórico-cultural as tarefas que são realizadas em grupo têm suas vantagens, o processo de ensino-aprendizagem ocorre na relação com o outro. Além disso, a interação é fundamental como potencializadora e mobilizadora de conhecimentos no processo de significação que acontece a partir das relações sociais entre pessoas e o mundo. E indo um pouco além desse acontecimento, me questiono também se o modelo de celular que escolhi como modelo foi eficaz para que as escolhas gerassem diferentes respostas.

No decorrer das discussões, ao realizar a pergunta sobre a escolha da representação do celular, o Grupo B começou a criar um debate sobre a grossura dessas representações (T25). Onde no T27 a estudante “A1” diz que não é grossura e sim largura. É interessante observar que nestes momentos alguns estudantes não sabiam diferenciar largura, comprimento e espessura. As estudantes começaram a conversar entre si, sobre estas diferenças. Vemos que no T29 a estudante “He” pergunta qual é a diferença entre as dimensões, porém, naquele momento na sala de aula não me foi possível escutar e ajudar na diferenciação desses conceitos. Este acontecimento poderia ser mais aproveitado para discutir com as estudantes sobre o que ela

quis expressar ao dizer grossura e se as representações de celulares possuíam esta dimensão. Eu poderia ter comparado as dimensões das representações do celular com o celular real.

Após os estudantes socializarem suas considerações iniciais sobre a tarefa, no T37 argumento que as representações são do mesmo celular, isto é, mesma marca, porém modifiquei o comprimento e a largura da imagem. Em seguida, a estudante “Ta” no T39 afirma que sabia que esta ação tinha sido realizada, pois a imagem da tela inicial estava esticada. E quando revelo qual é a representação de celular original (T40), a estudante “Al” disse que sabia. Finalizando estas discussões introduzi o conceito de harmonia, que segundo as estudantes é algo bonito, calmo e bom.

Nesse episódio podemos perceber que os estudantes buscaram expressar seu entendimento sobre os conteúdos geométricos que foram surgindo na realização da tarefa utilizando uma linguagem não formal como “cumpridinho” e “pititinho” para representar uma grandeza. É importante que o professor utilize a linguagem formal nas aulas de matemática, pois segundo Vigotski (1993a) a palavra mobiliza o pensamento para sua própria apropriação.

O próximo episódio relata a utilização da fita métrica para encontrar as dimensões da representação dos celulares e no final calcular a razão dessas dimensões.

Episódio 2: “Lembro de ter estudado, mas não lembro o que é não”

- T51 P: *A próxima parte da nossa tarefa está relacionada com as representações dos celulares. Vocês sabem me dizer, quais são as dimensões dessas representações?*
- T52 He: *Altura e largura.*
- T53 Al: *Largura.*
- T54 P: *Vocês me falaram que a dimensão do celular seria a altura e largura. A altura que você refere é o comprimento. [Neste momento desenhei representação de um celular na lousa e pedi para que os estudantes me dissessem qual era o comprimento e a largura]*
- T55 P: *Vou entregar a próxima parte da tarefa e disponibilizar uma fita métrica. Vamos medir as dimensões desses celulares.*
- T56 Al: *Como é que mede a dimensão? Como mede esse trem de 1 a 4? De 1 a 3? É assim? [Trem refere-se à utilização da fita métrica]*
- T57 P: *Você tem que usar o outro lado da fita.*
- T58 Al: *Ah sim...*
- T59 Al: *6 cm de largura e 11 cm de comprimento.*
- T60 Ta: *Ka olha aqui, como que mede?*
- T61 Al: *Aqui é desse lado que mede tá gente! Esse lado dos números pequenos. [Mostrando o lado da fita métrica]*
- T62 He: *É 6 cm de largura e 11 cm de comprimento.*
- T63 P: *Como você está medindo?*
- T64 P: *Você precisa estar com a fita esticada. [Neste momento a estudante Gi pediu minha ajuda para realizar a medição de um dos celulares]*

- T65 Gi: *Tem 9 cm.*
- T66 P: *Então 9 cm, 9,2 cm, 9,3 cm, 9,4 cm e 9,5 cm.*
- T67 P: *Você quer ajuda?*
- T68 Al: *Quero!*
- T69 P: *Sabe este “ferrinho”, você precisa colocar rente ao celular, pois ele já vale um centímetro. Vamos olhar aqui agora, o celular está na casa do 6 cm, não está? Falta mais um pedacinho, então vamos contar os espaços 6,5 cm, 6,6 cm, 6,7 cm, 6,8 cm, e 6,9 cm. Então tem 6,9 cm de largura.* [“Ferrinho” ponta inicial da fita métrica]
- T70 P: *Vamos medir agora o comprimento. Coloca a fita, isto!* [A expressão isto refere-se que ela entendeu o que era comprimento] *tem 11 cm, certo? Agora vamos olhar os milímetros.*
- T71 Al: *Deu 11,9 cm e 6,9 cm. Só errei os nove.*
[Depois socializamos os resultados.]

Iniciei a tarefa perguntando aos estudantes se sabiam me dizer quais eram as dimensões da representação dos celulares (T51), de imediato a estudante “He” responde que é altura e largura e neste momento desenhei na lousa uma representação de celular para que pudéssemos caracterizar essas dimensões. Ao refletir agora sobre a resposta da estudante e ao desenhar na lousa, disse a ela que a dimensão altura estava referenciando ao comprimento (T54), em seguida ela balançou a cabeça dizendo que sim. Embora seja um momento muito importante, acredito que deveria haver uma discussão sobre quando caracterizamos as dimensões de uma figura bidimensional ou tridimensional. Em especial neste momento, deveria ter enfatizado que como estávamos trabalhando com figuras retangulares, designamos como comprimento e largura, mas quando se trabalha com figuras triangulares, por exemplo dependendo da tarefa, faz sentido mencionar a dimensão altura.

Ao começar a entregar as fitas métricas de imediato a estudante “Al”, me questionou sobre como utilizar, mostrei qual lado ela deveria utilizar e em seguida ela começou a realizar as medições. No T63 fui até a mesa da estudante “Gi”, para ver como ela estava realizando as medições, foi quando percebi um problema ao medir a representação do celular de número 5. A estudante em questão, não estava com a fita esticada e realizava a medição até os centímetros, e não contabilizava os milímetros. No T64 expliquei como utilizar a fita métrica, pois ela estava marcando como se na medida apenas os centímetros que deveriam ser considerados (T65). Após a minha explicação, ela conseguiu perceber que ainda tinha uma parte da representação do celular que não havia sido medida (T66). No T67 a estudante “Al” também pediu ajuda para realizar a medição, a explicação foi análoga a da estudante “Gi”. Podemos perceber que no T71 a estudante “Al” diz que só errou os milímetros; este acontecimento foi comum aos estudantes, pois eles apenas contavam os centímetros e paravam. Além disso, destaco neste episódio o fato

de estudantes do EM ainda terem dúvidas quanto ao manuseio de um instrumento de medida de comprimento, como relatado anteriormente.

O próximo episódio é referente a continuidade ao desenvolvimento do plano de aula 2, trabalhando com a tarefa 8, como apresentado na síntese do quadro 8. Nesta tarefa distribuí uma fita métrica para cada estudante e na frente da lousa coloquei sobre a mesa alguns objetos como livro, espelho de tomada, fotografia, representações de cartões de ônibus, entre outros. Eles iriam escolher um ou mais objetos e realizar a medição do comprimento e largura e posteriormente calcular a razão entre as medidas.

Episódio 3: “É difícil medir!”

- T72 P: *Olá pessoal, tudo bem? Hoje iremos dar continuidade na nossa aula que começamos antes de ontem. O que estávamos vendo?*
- T73 Gi: *A gente estava vendo medidas do celular, depois calculamos a razão.*
- T74 He: *A razão!*
- T75 P: *Porém antes disso conversamos sobre o conceito de harmonia, certo? Até que cada um escolheu um celular e definimos como sendo algo individual, em cada um tem a sua percepção do que é mais harmônico para você. Com relação a aula anterior vocês tem alguma dúvida?*
- T76 Es: *Não.*
- T77 P: *Coloquei sobre a mesa alguns objetos como livro, fotografia, cartão de crédito, cartão de ônibus, carteira de identidade, entre outros objetos. Vocês irão escolher alguns desses objetos e medir a dimensão.*

Figura 7 - Exposição dos objetos.



Fonte: Do autor (2021).

- T78 Gi: *Este aqui é um cartão de crédito, né?*

- T99 Gi: *A razão é um dividido pelo o outro. Tenho que colocar todas as casas decimais?*
- T100 P: *Pode ser três casas decimais.*
[Os estudantes colocaram na lousa os resultados das razões].

Ao observar esse episódio há indícios das significações produzidas pela estudante “Gi” ao utilizar a ferramenta de medida. Nos T64, T65 e T66 é possível perceber o meu diálogo com ela para ajudar na utilização da fita métrica por ela ter apresentado dificuldade em manipulá-lo. Mas no T80 é possível perceber que ela está entendendo este movimento do medir os objetos. Inclusive nos T81 ao T83 a estudante “Gi” auxilia a colega ao realizar a medição. E no T94 ela diz que a tarefa de medir os objetos é muito fácil.

Além disso, há indícios do confronto de hipóteses nos T89 e T90, em que as dimensões das estudantes deram diferentes. Seria um momento ideal para o professor incentivá-las a estabelecerem um diálogo para que pudessem perceber o porquê de terem obtido medidas diferentes. É neste movimento de dialogar com o outro, de interação, que ocorre a produção de significação fazendo com que os estudantes construam o significado e sentido de um conceito por exemplo.

No próximo episódio apresento as discussões finais a partir do plano de aula 2.

Episódio 4: “É o número de ouro!”

- T101 P: *Construí uma reta real na lousa, então há o conjunto dos naturais, inteiros, entre outros. Vamos colocar o valor das razões encontradas ao medir os objetos e as representações de celulares nesta reta.*
- T102 Gi: *1,3cm.*
- T103 P: *Em seguida qual foi o próximo valor da razão que vocês encontram?*
- T104 Gi: *1,34cm o livro.*
- T105 Gi: *1,48cm a fotografia.*
- T106 P: *Vocês percebem que a razão encontrada dos objetos ela não passa 1,6cm?*
- T107 Gu: *Verdade.*
- T108 P: *Na verdade apenas uma representação dos celulares passou, mas os outros objetos não. Os objetos vão se aproximando do 1,6 cm.*
- T109 P: *Vamos organizar as ideias, vocês acham que tem alguma relação dos objetos medidos com a razão encontrada?*
- T110 Re: *Os objetos são retangulares.*
- T111 P: *Este é o nosso objetivo, entender o porquê que estes objetos se aproximam do 1,6 cm. O que vocês acham que significa?*
- T112 Wa: *É o número de ouro!*
- T113 P: *Estes objetos estão próximos do número de ouro. E o que significa estar próximo ao número de ouro? Quando calculamos razão dos objetos vimos que eles se aproximam do 1,6 cm, estes objetos têm uma certa harmonia, uma proporção. Quando calculamos a razão dos celulares na*

primeira tarefa, cada um escolheu o celular que mais se identifica e lembram que eu falei que o objeto dois, era o de medida real. Ele tem uma proporção, a meu ver, que é mais confortável de pegar na mão do que a representação de celular número cinco. A definição da harmonia é pessoal, ao mesmo tempo que uns escolheram este celular outros escolheram um modelo diferente. Vamos entender o porquê da razão entre as medidas destes objetos se aproximarem desse número.

O objetivo da tarefa discutida no episódio 4 era fazer um fechamento do plano de aula 2. No T101 fiz a construção de uma reta real na lousa, apenas marcando o ponto 0, e pedi para que os estudantes localizassem as razões encontradas a partir das medidas dos objetos e das representações dos celulares determinadas na primeira parte desta tarefa. Percebemos que no T110 o estudante “Re” diz que os objetos são retangulares, o objetivo também era de que pudessem perceber isto, pois iríamos trabalhar posteriormente com o retângulo áureo.

Além disso, começo a criar um diálogo com os estudantes para que eles possam perceber que a razão de cada objeto se aproximava de 1,6 cm, isto é, próximo ao Número de Ouro (T106 e T107). Ao perguntar no T111 o estudante “Wa” no T112 diz que é o Número de Ouro. É curioso este momento, pois não havia definido o valor do Número de Ouro, mas eles conseguiram relacionar a discussão com o vídeo assistido na primeira aula “Mundo Místico: Donald na Terra da Matemática - Pentagrama e o Retângulo de Ouro”, que mencionava o valor numérico do Número de Ouro.

Gostaria de destacar alguns fatores que precisam ser ditos neste momento, que sofreram mudanças durante o desenvolvimento da pesquisa, o que considero como um processo comum. O trabalho com grupos maiores dificultou o momento de análise dos dados, por não conseguir identificar com clareza, ao ouvir as videograções, se era um diálogo com o colega próximo ou não. Foi necessário também um replanejamento das aulas pois, alguns conteúdos os estudantes ainda não tinham estudado ou não se lembravam, mas ficou evidente a dificuldade deles em trabalhar com medida de comprimento, a partir do ato de medir um objeto com instrumentos de medida. O processo da minha avaliação como regente da turma sobre o desenvolvimento da tarefa dos estudantes tornou-se um momento difícil, pois algumas medidas diferenciavam uma dos outros. Os motivos podem ter sido devido à dificuldade dos estudantes em realizar as medições e por algumas representações conterem um recorte e papel *contact*, que influenciou e levou a estas discussões.

A próxima tarefa foi também realizada no dia 08 de novembro de 2019, a fim de obter algebricamente o Número de Ouro através de uma construção utilizando régua. No quadro abaixo apresento uma síntese desse plano. A realização dessa aula aconteceu por etapas,

inicialmente foi entregue um recorte da tarefa primeiro o item 1, em seguida o item 2 e, por fim, os itens 3 a 6.

Quadro 8 – Síntese do plano de aula III.

Tema: Representação algébrica do Número de Ouro
Objetivo específico: Os estudantes devem compreender e representar algebricamente o Número de Ouro através de uma construção geométrica utilizando régua
Avaliação: Haverá dois momentos de avaliação: a primeira ocorrerá pelo pesquisador, durante o desenvolvimento da tarefa percebendo as ações dos estudantes e a segunda uma autoavaliação realizada pelos estudantes, descrevendo sobre o que aprenderam e seus sentimentos ao realizar a tarefa.
<p>Tarefa:</p> <p>1. Leia o trecho abaixo e faça um desenho que mostre a sua compreensão sobre a definição de razão extrema e média.</p> <p>Por volta de 300 a.C. Euclides de Alexandria definiu uma proporção derivada da divisão de uma linha no que chamou de sua “razão extrema e média”. Reinterpretando as palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor”. Em outras palavras, podemos escrever $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.</p> <p>2. Na figura abaixo tomemos o comprimento AB como $a + x$ unidades, o comprimento AC como x unidades e o comprimento CB como a unidades. Partindo da definição e sua explicação geométrica na tarefa anterior, escreva uma expressão algébrica que represente a razão extrema e média da figura abaixo. Resolva a equação representada, faça $a = 1$.</p> <div style="text-align: center;"> <p>O diagrama mostra uma linha horizontal com pontos A, C e B marcados. Acima da linha, uma braceleta curva abrange o segmento AC e é rotulado 'x'. Outra braceleta curva abrange o segmento CB e é rotulada 'a'. Abaixo da linha, uma braceleta curva abrange o segmento total AB e é rotulada 'a + x'.</p> </div> <p>3. O número encontrado tem relação com a razão dos objetos proposto na aula anterior? Se sim, qual é esta relação?</p> <p>4. Explique com suas palavras o que você entendeu sobre o Número de Ouro.</p> <p>5. O que você achou dessa tarefa? Já tinha desenvolvido atividades relacionadas ao Número de Ouro?</p> <p>6. O que você aprendeu com esta tarefa?</p>

Fonte: Do autor (2021).

O episódio a seguir é derivado da realização do desenvolvimento desta tarefa.

Episódio 5: “Outra coisa que eu não sei na minha vida é isto!”

- T114 P: *Leia o trecho abaixo e faça um desenho que mostre a sua compreensão sobre razão extrema e média. Vamos entender o porquê deste nome, quem definiu este nome.* [Neste momento conversei com os estudantes brevemente que foi Euclides de Alexandria]
- T115 P: *Vocês perceberam que nesta tarefa apareceu a palavra proporção. Sabem me dizer o que é proporção?*
- T116 Gi: *Eu já, mas eu não lembro o que é. É propor alguma coisa?*
- T117 Al: *Eu já ouvi falar, mas não sei o que é.*
- T118 P: *Vou ler a definição de acordo com o livro. Proporção: Se duas razões... [Fiz uma pausa para perguntar para os estudantes o que era razão]*
- T119 P: [Ficaram alguns segundos em silêncio] *Voltem nas suas anotações.*
- T120 Gi: *É uma divisão.*
- T121 Al: *Dados dois números reais a e b , com b diferente de zero, chamamos de quociente ou razão entre a e b a comparação entre mesmas grandezas. Esse tipo de relação é expressa da seguinte forma $\frac{a}{b}$ ou a/b ou ainda $a:b$. [A estudante leu a definição do diário e foi fazendo o movimento com os dedos para expressar o quociente]*
- T122 P: [Retomei a leitura da definição de proporção] *...são iguais elas formam uma proporção. Assim, se a razão entre os números a e b é igual a razão entre os números c e d , dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, isto é, a está para b assim como c está para d .*
- T123 Gi: *Então no exercício nós temos duas razões?*
- T124 P: *Sim.*
- T125 Gi: *Então está comparando a e b com c e d !*
- T126 P: *Isto.*
- T127 P: *Desenhem uma reta.*
- T128 Gi: *O que? Uma linha reta normal? Para frente?*
- T129 Al: *É uma reta!*
- T130 Je: *Linha grande ou pequena?*
- T131 P: *Vamos construir juntos. Desenhem uma linha qualquer.*
- T132 P: *Desta linha vamos marcar nas suas extremidades os pontos A e B .*
- T133 P: *Neste segmento vamos marcar um ponto C , para obtermos o maior segmento e o menor segmento da linha toda.*
- T134 P: *A linha toda esta para o maior segmento?*
- T135 Gi: *AB sobre AC .*
- T136 P: *Agora o maior segmento está para o menor segmento.*
- T137 Gi: *AC sobre BC .*
- T138 P: *Este é um segmento que está dividido em razão extrema e média! Vou entregar a segunda parte da tarefa e vamos entender o que significa isto.*
- T139 P: *Na figura abaixo tomemos o comprimento AB como $a + x$ unidades, o comprimento AC como x unidades e o comprimento CB como a unidades. Partindo da definição e sua explicação geométrica na tarefa anterior, escreva uma expressão algébrica que represente a razão extrema e média da figura abaixo. Resolva a equação representada, faça $a = 1$. [Li a tarefa]*
- T140 P: *Quanto valerá o segmento AB ?*
- T141 Wa: $a+x$
- T142 Gi: *O segmento AC vale x ,*
- T143 P: *Quanto vale o segmento CB ?*

- T144 Gu: *I.*
- T145 P: *Vamos substituir essas medidas na proporção encontrada. [Escrevi na lousa]*
- T146 P: *Como podemos resolver esta proporção?*
- T147 Wa: *Multiplique cruzado.*
- T148 P: *Quanto é x vezes x ?*
- T149 Re: *x ao quadrado.*
- T150 P: *Quanto é um multiplicado por este valor do parêntese?*
- T151 Al: *É a mesma coisa. [Referindo ao valor do parêntese]*
- T152 P: *Vamos organizar esta equação. O que podem me dizer sobre esta equação? É uma equação de qual grau?*
- T153 Gu: *Segundo grau.*
- T154 Gi: *É calcular o delta?*
- T155 P: *Sim.*
- T156 P: *Primeiro vamos encontrar o valor de a , b e c deste polinômio.*
- T157 Gi: *a é igual 1 , b é igual -1 e c é igual -1 .*
- T158 P: *Para resolver este polinômio primeiro vamos encontrar o valor de delta, lembram da fórmula?*
- T159 Gi: *Delta é igual $a^2 - 4bc$ ao quadrado menos quatro vezes a vezes c . E o delta vai dar positivo. O valor de delta é 5 .*
- T160 Al: *É fácil.*
- T161 P: *Resolvemos o delta, e agora?*
- T162 Gi: *x linha e x duas linhas.*
- T163 Gi: *x é igual a b mais ou menos raiz quadrada de delta sobre dois a .*
- T164 P: *então vamos ir substituído os valores na equação de Bhaskara e resolver.*
- T165 P: *Utilizem a calculadora para encontrar este valor.*
- T166 He: *Eu achei $1,61$ na primeira raiz e $-0,61$ na segunda raiz.*
- T167 P: *Inicialmente consideramos a como sendo 1 , a princípio vamos analisar x' , este número positivo.*
- T168 P: *E vocês se lembram dos objetos que medimos e calculamos a razão, eles se aproximavam de qual valor?*
- T169 Gi: *$1,6$.*
- T170 P: *Este é o Número de Ouro. Ele é um número irracional que vale $1,618\dots$*
- T171 P: *O que são racionais?*
- T172 Wa: *São os números que não são racionais.*
- T173 P: *Então quem são números racionais?*
- T174 Gi: *Eu não sei não.*
- T175 He: *Outra coisa que eu não sei na minha vida é isto!*
- T176 P: *[Retomei sobre os conjuntos numéricos de forma breve pois, já havíamos trabalhado anteriormente]*
- T177 P: *Olha que interessante, os objetos que estávamos medindo são retangulares e ao calcular a razão dos objetos eles se aproximavam do Número de Ouro. Veremos mais para frente onde encontramos este número, na natureza, no corpo humano, arquitetura e em vários objetos.*

Como mencionado anteriormente o objetivo desta tarefa era obter algebricamente o Número de Ouro, como ocorreram imprevistos na primeira aula, o nosso tempo estava curto.

Logo, optei por realizar a tarefa junto com os estudantes para que pudéssemos concluí-la. Ao ler o enunciado da tarefa no T114, surge a palavra proporção. Quando questiono os estudantes sobre o que seria, no T116 e T117 as estudantes “Gi” e “Al” respondem que já ouviram falar, mas não sabem seu significado. Observar este movimento em que a estudante “Gi” vai começando a produzir significações ao conceito de proporção como mostra no T116. Sendo assim, foi necessário fazer uma retomada deste conceito (T118 e T122), acreditamos que a retomada conceitual é essencial no desenvolvimento de uma tarefa. Mas me questiono por que estes conteúdos não estavam consolidados nos estudantes. Ao fazer leituras, como a apresentada no capítulo teórico deste trabalho, o processo de significação vai ocorrendo ao longo do tempo, por isso a importância das retomadas e aprofundamentos de determinados conteúdos nos anos escolares.

Ao ler a definição de razão extrema e média, a proposta inicial era de que os estudantes pudessem desenvolver sozinhos a tarefa, mas como as dificuldades iniciais foram aparecendo e outros conteúdos foram surgindo que precisaram ser discutidos desde os primeiros dias de aula, em diálogo nas reuniões com a professora orientadora, achamos mais adequado conduzir coletivamente essa tarefa.

No T127 peço para que os estudantes desenhem uma reta, como apresentado no enunciado, mas no T128 a estudante “Gi” questiona se é uma linha normal e para frente. É interessante este fato por gerar dúvida nesta estudante sobre o significado da “reta” em que ela associou a palavra “normal” isto é uma reta na posição horizontal. Mas quando fui até a lousa para construir juntos com os estudantes (T131), é possível perceber que as dúvidas não aparecem, pois eles apenas imitaram o desenho da lousa. Segundo Chaiklin (2011),

A habilidade de uma pessoa para imitar, tal como concebida por Vigotski, é a base para uma zona subjetiva de desenvolvimento próximo (a zona objetiva existe por meio da situação social de desenvolvimento). Imitação, na forma como é utilizada aqui, não é um copiar irrefletido de ações (Vygotsky, 1997a, p. 95; 1998b, p.202). Ao contrário Vygotsky deseja romper com a visão de que se trata de cópia, dando um novo significado para imitação, o que reflete um novo posicionamento teórico. Nesse novo significado a imitação pressupõe algum entendimento das relações estruturais do problema que está sendo resolvido (1987, p. 210) (CHAIKLIN, 2011, p. 668).

Ainda de acordo com o autor, o papel da imitação para o desenvolvimento do estudante pode ocorrer na interação com o professor por exemplo, quando ele não é capaz de realizar sozinho uma tarefa. Pensando na pesquisa, o sentido da palavra imitar, pode ser interpretado como uma construção coletiva, embora eles pudessem ter tentado realizar primeiro, antes das minhas intervenções.

Um momento que destaco é ao analisar os T139 ao T170, sobre a facilidade dos estudantes com o conteúdo de álgebra. Durante o processo de desenvolvimento das aulas, pude perceber como estudantes estavam familiarizados com a álgebra, no sentido de que davam respostas imediatas, sabiam das fórmulas na ponta da língua, sabiam os algoritmos e macetes, entre outras situações, mas ao trabalhar com o conteúdo de Geometria e Grandezas e medidas as dificuldades estavam desde os conceitos básicos até os mais complexos. Este movimento destacado pode ser pelo fato de que essas áreas são contempladas de forma superficial no EM, em que a álgebra acaba se sobressaindo nas propostas didáticas, propostas que também são enfatizadas no documento oficiais PCN E BNCC.

Esta unidade de análise estava voltada para o processo de significação conceitual relacionado ao Número de Ouro, mesmo tendo ocorrido alguns imprevistos, acredito que o objetivo foi alcançado. Os estudantes puderam entender quanto vale o Número de Ouro, que é um número irracional, a sua relação com a Geometria, aprenderam utilizar uma fita métrica, a distinguir as dimensões de um objeto, a relação com a Geometria e em vários momentos foram retomados alguns conceitos que seriam utilizados nas tarefas que eram novas ou que eles não lembravam. A fita métrica como ferramenta havendo sentido e significado tornou-se potencializadora para que os estudantes entendessem sua utilização e a importância de saber medir um objeto. Infelizmente, não pude trabalhar com o desenvolvimento do conceito de medida como gostaria, mas aproveitei as dúvidas individuais para explicar aos estudantes o que significavam as unidades de medida metro, centímetro e milímetro.

Além disso, a produção de alguns materiais não foi eficaz para serem trabalhados como a representação de celulares que foi plastificada com *contact*, pois no momento de socialização muitas respostas deram diferentes, mesmo explicando para os estudantes que isso poderia acontecer eles não entendiam, achavam que estavam errados ao comparar as medidas das representações do mesmo celular, por exemplo.

Com relação a gestão em sala de aula, o trabalho com dois grupos grandes facilitou a minha movimentação na sala para tirar dúvidas comuns aos estudantes, mas dificultou nas transcrições dos áudios.

Na próxima seção exponho sobre o processo de utilização de recursos didáticos, como movimento de significação a partir de alguns conceitos geométricos.

6.2 O uso de ferramentas para mediação no movimento de significações

Esta unidade tem como objetivo apresentar as potencialidades do uso das ferramentas, o compasso e a régua, a fim de mediar o processo de significação durante o desenvolvimento das aulas.

Antes de iniciar as discussões sobre a unidade de análise, faz-se essencial neste momento categorizar qual é o sentido de ferramenta neste contexto. Segundo Friedrich (2012),

Vigotski argumenta sobre a diferença entre um instrumento psicológico e um instrumento ou ferramenta de trabalho que essa diretividade bem específica do instrumento psicológico é mais uma vez ressaltada. Os dois tipos de instrumentos funcionam como elementos intermediários, intervalados entre a atividade do homem e seu objeto. A diferença está no ato de que, com a ferramenta de trabalho, as transformações no mundo dos objetos são produzidas e conseqüentemente, ela deve ser concebida em função das intervenções preconizadas. [...] Ao contrário, o objeto do instrumento psicológico não está no mundo exterior, mas na atividade psíquica do sujeito, sendo esse instrumento um meio de influência do sujeito sobre si e de autocontrole. (FRIEDRICH, 2012, p.56-57).

Analisar este momento é observar o movimento sócio-histórico dos acontecimentos em sala de aula decorrentes da mediação entre todas as pessoas sociais envolvidas na pesquisa, como uma rede de compartilhamento e produção de significações. É também observar o processo de internalização desses conceitos tornando para si conhecimento científico e pessoal. Assim, a ferramenta neste trabalho será um objeto, como o compasso e a régua, mecanismos que possibilitaram a realização de uma atividade, que futuramente causará transformações intrapessoais nos estudantes.

A primeira tarefa foi desenvolvida no dia 13 de novembro de 2019 em que o objetivo era realizar a construção de um segmento áureo utilizando régua e compasso. Para realização dessa aula, entreguei para cada estudante uma folha de malha quadriculada, régua e compasso. O quadro abaixo apresenta um resumo do plano de aula.

Quadro 9 – Síntese do plano de aula IV.

Tema: Desenhando um segmento áureo com régua e compasso
Objetivo específico: Os estudantes irão construir e compreender o que é um segmento áureo utilizando régua e compasso.
Avaliação: Haverá dois momentos de avaliação: a primeira ocorrerá pelo pesquisador, durante o desenvolvimento da tarefa percebendo as ações dos estudantes e a segunda uma autoavaliação realizada pelos estudantes, descrevendo sobre o que aprenderam e seus sentimentos ao realizar a tarefa.
Tarefa: Construção do segmento áureo com régua e compasso

Os passos descritos abaixo são uma maneira de obter geometricamente um segmento áureo. Utilizando a malha quadriculada, 1 cm x 1cm, siga os passos e faça a construção.

Passo 1	Desenhe um segmento de reta AB de medida 10 cm
Passo 2	Com a ponta seca do compasso no ponto A e raio maior que a metade da medida AB , trace o arco de circunferência. Com a mesma abertura, trace o arco de circunferência com a ponta seca do compasso no ponto B.
Passo 3	Marque os pontos E e F da interseção dos arcos de circunferência realizada nos dois passos anteriores;
Passo 4	Trace uma reta s que passe pelos pontos E e F;
Passo 5	Marque o ponto M, da interseção do segmento de reta AB com a reta s ;
Passo 6	Trace uma reta r que passe pelo ponto B;
Passo 7	Com a ponta seca do compasso no ponto B e raio BM, marque sobre a reta r o ponto D;
Passo 8	Trace um segmento de reta DA, formando um triângulo retângulo ABD;
Passo 9	Com a ponta seca do compasso em D e raio DB, trace o arco de circunferência para obter o ponto G sobre a hipotenusa AD .
Passo 10	Com a ponta seca do compasso em A e raio AG, trace o arco de circunferência para obter o ponto C sobre AB .

Após realizar a construção do segmento áureo com a régua e o compasso, responda as perguntas abaixo.

- O que podemos dizer sobre o ponto M?
- O que podemos dizer sobre o tamanho do segmento EM e o segmento MF?
- O que podemos dizer sobre a reta s e a reta r ?
- O que podemos dizer sobre o segmento BD e o segmento DG?
- O que podemos dizer sobre o segmento AC e o segmento AG?
- O que podemos dizer sobre o segmento DB e o segmento BM?
- Qual é a medida do segmento AC?

Fonte: Do autor (2021).

Destaco que o desenho foi essencial para este momento, pois segundo Pais (1996) é um recurso experimental que possibilita a construção de conceitos. Ainda de acordo com o autor “a representação e um conceito somente faz sentido pleno se o mesmo já estiver num certo nível de formalização” (PAIS, 1996, p. 71). Nacarato e Passos (2003) destacam duas questões importantes para formação do pensamento geométrico, a visualização e a representação que associaremos com o desenho. As autoras enfatizam que elas estão interligadas e que a visualização

pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termo de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo

que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78).

Já o conceito de representação, segundo as autoras, está associado ao desenho, a linguagem corporal, entre outras formas de expressar um conhecimento conceitual de Geometria. Ainda de acordo com as autoras “o uso de desenho possui um duplo papel no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, podendo constituir-se em facilitador ou em dificultador desse processo” (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 81).

Para o desenvolvimento da tarefa conversei com a professora Margarida nas reuniões de planejamento da UD, para saber os conhecimentos prévios que os estudantes tinham sobre os conceitos que seriam abordados na aula. Segundo a professora, eles haviam estudado alguns conceitos básicos da Geometria nos anos anteriores, porém ao conversarmos, resolvemos que seria melhor fazer uma retomada de alguns deles. Sendo assim, alguns conceitos foram retomados no decorrer da realização das tarefas, pois acredito que para se trabalhar com desenhos geométricos, pensando em uma perspectiva do EM e especificamente com a temática abordada nesta pesquisa, esta ação foi fundamental para a significação dos conceitos.

Na aula do dia 08 de novembro de 2019, fiz uma pesquisa na sala para verificar se os estudantes já haviam utilizado o compasso, para que posteriormente na aula do dia seguinte pudessem utilizá-lo. Desta forma, alguns responderam que não e outros ficaram em silêncio. Levei esta questão para professora orientadora para verificar o que poderíamos fazer em relação a este acontecimento. Sendo assim, optamos por antes de realizar a tarefa explicar a função e utilização do compasso para que os estudantes pudessem se familiarizar, além disso, ficou estabelecido que eu realizaria as construções junto com os estudantes.

O primeiro episódio refere-se as discussões mobilizadas na sala de aula a partir do uso do compasso pelos estudantes.

Episódio 1: “Aquele negócio que você pega e roda.”

- T01 P: *Na próxima tarefa vamos fazer algumas investigações e a partir dessas investigações vamos utilizar régua e compasso. Alguém já utilizou compasso?*
- T02 Gi: *Eu já!*
- T03 He: *Eu não sei fazer isso...*
- T04 Ka: *O que é isto?*
- T05 Ta: *Aquele negócio que você pega e roda. [Respondendo a estudante Ka]*
- T06 P: *O que faremos hoje, lembram que comentei sobre a definição de Euclides, o segmento dividido em razão extrema e média. Então, hoje iremos entender, o que significa este segmento, para isto utilizaremos*

- régua e compasso. Então primeiro, vamos aprender como utilizar o compasso para dar continuidade na nossa tarefa. Tomem cuidado com este compasso, pois é da escola.*
- T07 P: *Para esta construção que iremos realizar, surgirão algumas definições, para otimização do tempo trouxe estas definições impressas. [Definições como circunferência, raio, diâmetro, arco, comprimento e corda]*
- T08 P: *Este é um compasso... [Mostrando um compasso] Quando eu disser “com a ponta seca” é a ponta com o ferrinho, e seu eu disser “ponta com grafite” e está é a ponta, como de um lápis.*
- T09 P: *No diário quero que vocês façam uma circunferência qualquer, pois, o compasso para nós servirá para isto. Façam uma abertura no compasso, as que vocês quiserem. A dica que dou para vocês é segurar nesta pontinha dele... [Mostrei a ponta que utilizamos para girar um compasso]*
- T10 Als²⁰: *Não vai dar, vai ficar enorme... [Neste momento a estudante abriu o compasso maior que o espaço disponibilizado do diário]*
- T11 He: *Moço do céu eu nem tentei ainda, porque eu não sei fazer isto... [Neste momento fui até a carteira da estudante para explicar a utilização do compasso]*
- T12 Am: *O meu deu...!*
- T13 Wa: *Nossa não vai dar não! Eu abri muito o “bagulho”. [“bagulho” referia-se ao compasso]*
- T14 Gu: *O meu saiu mais ou menos, não ficou tão bonito assim!*
- T15 Wa: *Saiu melhor que o meu. [Neste momento olhou para o desenho do colega Gu comparando-o com seus desenhos]*
- T16 P: *Agora eu vou estabelecer, uma medida do tamanho do raio dessa circunferência. Pegue a régua e o compasso, e coloquem assim [Fui falando e mostrando ao mesmo tempo]. Façam uma circunferência com raio de 4cm.*
- T17 Wa: *Pequenininho assim?*
- T18 Re: *Saiu certinho!*
- T19 P: *Já fizeram?*
- T20 Gu: *Eu já fiz, mas vou fazer de novo porque sou muito bom.*
- T21 Am: *Eu sou muito inteligente! [Disse isto após realizar o desenho de uma circunferência com raio de 4cm]*
- T22 P: *Vocês podem perceber que a ponta seca está no centro da circunferência, faz até um burquinho na folha. Ele vai ser um ponto e vamos chamar ele de C. Este ponto C, vai ser o centro da nossa circunferência. Se vocês medirem desse ponto C, até a interseção com a circunferência, vai ter 4cm. Isto significa que este segmento CA, é o raio da circunferência. [Neste momento realizei o desenho da circunferência na lousa e fui explicando os conceitos envolvidos].*

Neste dia estavam presentes 10 estudantes, que ao serem questionados se já haviam utilizado o compasso, dois estudantes levantaram a mão dizendo que nunca haviam usado e o

²⁰ Designou-se neste momento a sigla Als para um estudante, pois há uma estudante que começa com a mesma sigla.

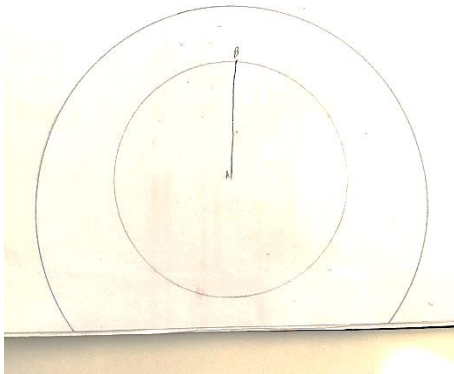
restante da turma ficou em silêncio. Podemos perceber nos turnos T01 a T05 que alguns estudantes sabiam utilizar ou tinham uma noção do que era um compasso. Mediante este acontecimento e como relato anteriormente, foi necessária uma reformulação no plano de aula, não poderíamos desenvolver a tarefa de imediato, mas sim ensinar os estudantes a utilizarem o compasso.

Ao analisar o diário dos estudantes foi possível perceber que alguns tiveram facilidade em utilizar o compasso e outros tiveram dificuldade no manuseio da ferramenta. O quadro abaixo apresenta quatro desenhos dos estudantes ao fazer o seu primeiro registro de uma circunferência utilizando o compasso.

Quadro 10 – Primeiros registros da utilização de um compasso.

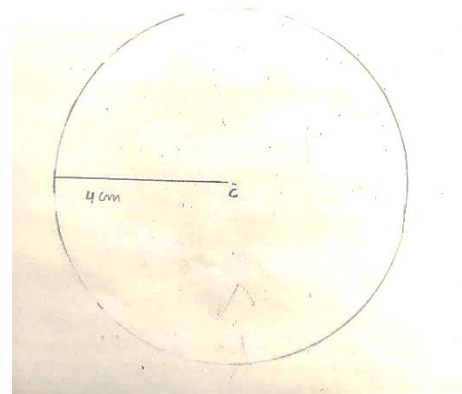
Figura 9 - Registro do estudante Als (T10).

	circunferência para obter o ponto C sobre a hipotenusa AB .
Passo 10	Com a ponta seca do compasso em A e raio AG , trace o arco de circunferência para obter o ponto C sobre AB .

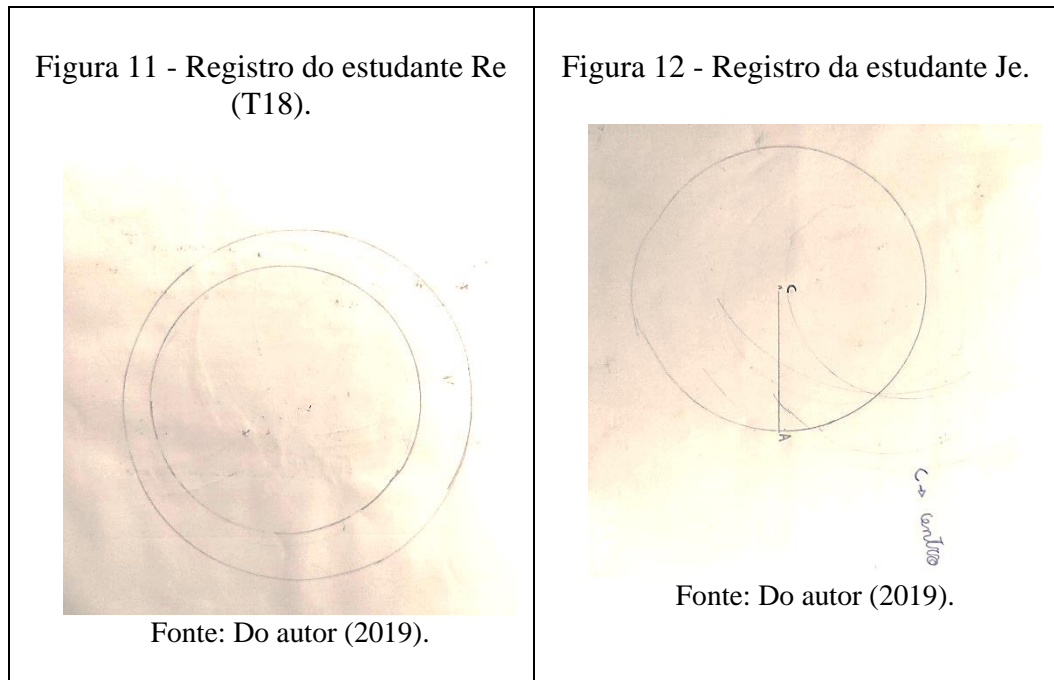


Fonte: Do autor (2019).

Figura 10 - Registro da estudante He (T11).



Fonte: Do autor (2019).



Fonte: Do autor (2021).

Pode-se perceber no primeiro registro, que o estudante “Als” (T10) abriu o compasso com uma medida maior do que o espaço disponível para o desenho, o que me fez refletir sobre a questão da noção de espaço, mas como era sua primeira vez utilizando o compasso, talvez essa noção do tamanho da circunferência não havia sido desenvolvida. No segundo registro da estudante “He” (T11), ela relata no T03 que não sabia utilizar o compasso, na aula seguinte ela apresentou dificuldades para a sua utilização como relatado no T11. Desta forma, foi preciso que eu fosse até a sua carteira e a ajudasse com a utilização do compasso, mas ainda pude perceber uma dificuldade no manuseio por seu registro apresentar alguns vestígios de falha ou de rabisco leve. Já o terceiro registro, do estudante “Re”, no (T18) ele demonstrou que ficou contente com seu desenho e ao analisar as videogravações desse dia de aula constatei que ele foi um dos estudantes que levantou a mão e disse que nunca havia utilizado um compasso.

No último registro a estudante “Je” parece ter tido dificuldade ao utilizar o compasso, a imagem mostra alguns rabiscos que são as tentativas da utilização do compasso, pois foi sua primeira vez utilizando esta ferramenta.

Segundo Zuin (2011), não há Geometria sem régua e compasso, pois

O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de “concretização”. Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem “experimentar”. Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas. (ZUIN, 2011, p. 177).

Neste momento cabe trazer as seguintes reflexões - Como foram as aulas de Geometria desses estudantes, anteriormente? Eles tiveram a oportunidade de utilizar estes instrumentos de medidas nos anos anteriores? Será que de fato tiveram os conteúdos que deveriam ter sido desenvolvidos segundo as propostas curriculares vigentes nos documentos oficiais da educação?

Dando continuidade à análise dos episódios, o próximo refere-se as aulas dos dias 14 e 20 de novembro de 2019, em que o objetivo era desenhar um retângulo áureo e uma espiral áurea com régua e compasso. O quadro a seguir apresenta um resumo do plano de aula. A realização dessas aulas aconteceu por etapas, inicialmente foi entregue um recorte da tarefa construção do retângulo áureo com a utilização de régua e compasso; e, em seguida, a segunda parte da tarefa construção da espiral áurea com a utilização de régua e compasso.

Quadro 11 - Síntese do plano de aula V.

Tema: Desenhando um retângulo áureo e uma espiral áurea com régua e compasso	
Objetivo específico: Os estudantes aprenderão a desenhar um retângulo áureo e uma espiral áurea utilizando régua e compasso.	
Avaliação: Haverá dois momentos de avaliação: a primeira ocorrerá pelo pesquisador, durante o desenvolvimento da tarefa percebendo as ações dos estudantes e a segunda uma autoavaliação realizada pelos estudantes, descrevendo sobre o que aprenderam e seus sentimentos ao realizar a tarefa.	
Tarefa:	
Construção do Retângulo Áureo com a utilização de régua e compasso	
Passo 1	Construa um quadrado ABCD de lado 6cm.
Passo 2	Utilizando a régua encontre o ponto médio do segmento de reta AB e CD. Classifique os pontos médio como M e N respectivamente.
Passo 3	Trace um segmento de reta NM.
Passo 4	Com a ponta seca do compasso no ponto N e raio \overline{NB} , trace o arco de circunferência.
Passo 5	Com a ponta seca do compasso no ponto M e raio \overline{MC} , trace o arco de circunferência.
Passo 6	Prolongue o lado AB até interceptar o arco de circunferência do passo 5. Marque esta interseção como ponto E.
Passo 7	Prolongue o segmento de reta CD até interceptar o arco de circunferência do passo 4. Marque esta interseção como ponto F.
Passo 8	Trace um segmento de reta EF.

Construção da espiral áurea com a utilização de régua e compasso

A partir do Retângulo Áureo construído anteriormente, siga os passos abaixo para obter uma Espiral Áurea.

Passo 1	Com a ponta seca do compasso no ponto B e raio \overline{BE} marque o ponto G em \overline{CB} .
Passo 2	Com a mesma abertura do compasso no “Passo 1” e ponta seca do compasso em E marque o ponto H em \overline{EF} .
Passo 3	Utilizando a régua trace o segmento GH.
Passo 4	Com a ponta seca do compasso no ponto H e raio \overline{HF} marque o ponto I em \overline{GH} .
Passo 5	Com a mesma abertura do compasso do “Passo 4” e ponta seca do compasso em F marque o ponto J em \overline{CF} .
Passo 6	Utilizando a régua trace o segmento IJ.
Passo 7	Com a ponta seca do compasso no ponto J e raio \overline{JC} marque o ponto K em \overline{IJ} .
Passo 8	Com a mesma abertura do compasso do “Passo 7” e ponta seca do compasso em C marque o ponto L em \overline{GC} .
Passo 9	Com a ponta seca do compasso no ponto G e raio \overline{GL} marque o ponto O em \overline{GI} .
Passo 10	Com a mesma abertura do compasso do “Passo 9” e ponta seca do compasso em L marque o ponto P em \overline{LK} .
Passo 11	Utilizando a régua trace o segmento OP.
Passo 12	Com a ponta seca do compasso em C e raio \overline{CD} trace o arco de circunferência do ponto D até o ponto B.
Passo 13	Com a ponta seca do compasso em G e raio \overline{GB} trace o arco de circunferência do ponto B até o ponto H.
Passo 14	Com a ponta seca do compasso em I e raio \overline{IH} trace o arco de circunferência do ponto H até o ponto J.
Passo 15	Com a ponta seca do compasso em K e raio \overline{KJ} trace o arco de circunferência do ponto J até o ponto L.
Passo 16	Com a ponta seca do compasso em P e raio \overline{PL} trace o arco de circunferência do ponto L até o ponto O.

Fonte: Do autor (2021).

O episódio a seguir refere-se as discussões com um dos grupos no processo de construir um retângulo áureo.

Episódio 2: “Mas vai ficar grandão o quadrado.”

T23 P: Vou entregar a próxima tarefa, pois vamos utilizar régua e compasso para construir um retângulo áureo.

- T24 Am: *Aí gente adorei! A “coisa” que mais gostei foi isso* [O termo “coisa” aqui faz referência ao compasso]
- T25 P: *Então vamos lá pessoal, agora vamos aprender como obter um retângulo áureo. E para isto vamos fazer passo a passo, como na aula de ontem.* [“como na aula de ontem” refere-se a fazer a construção juntos]
- T26 P: *Para começar vamos construir um quadrado de tamanho seis por seis centímetros, então significa que este quadrado tem todas as medidas de lado seis centímetros. Por exemplo, se aqui tem 6, aqui tem também terá 6 e aqui também ...*
- T27 Am: *Como assim seis centímetros?*
- T28 PMa: *Você vai contar assim: seis assim, seis assim, seis assim, até fechar um quadrado.* [Usando os dedos para auxiliar no desenho do quadrado]
- T29 Am: *Mas vai ficar grandão o quadrado.*
- T30 Gi: *O zero conta?* [Esta pergunta faz referência a utilização da régua]
- T31 He: *Conta.*
- T32 Gi: *Então aqui eu ponho que... seis centímetros vão dar aqui?* [Mostrando na malha quadriculada como é para fazer]
- T33 P: *Gi Cada quadradinho desse tem um centímetro então você coloca a régua e conta até o seis ou vai contando os espaços entre cada número que equivale a um centímetro...* [Neste momento fui até a carteira da Gi para explicar como ela poderia fazer um quadrado]
- T34 Am: *Gente o meu ficou muito show!*
- T35 Ji: *Agora em cada cantinho eu coloco ABCD?*
- T36 P: *Sim. Todos conseguiram construir o quadrado?*
- T37 Es: *Sim...* [Boa parte da turma respondeu]
- T38 P: *Utilizando a régua encontre o ponto médio do segmento de reta AB e CD.*
- T39 Am: *Divide ao meio.*
- T40 P: *Se aqui tem 6 cm centímetros qual será a metade?*
- T41 Am: *Três*
- T42 P: *Então vamos pegar a régua e marcar onde está esses três centímetros e vamos denominar como M e N*
- T43 Ji: *Tem que fazer isso em todos?* [Referindo-se a todos os lados do quadrado]
- T44 Ca: *O meu ficou igual da He.*
- T45 PMa: *1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm e 7 cm* [A professora estava mostrando a estudante Gi que ela não fez um quadrado seis por seis, mas dois lados com sete centímetros e dois lados com seis centímetros]
- T46 Gi: *Eu sabia que estava errada!*
- T47 P: *Vamos traçar um segmento de reta MN. Agora com a ponta seca do compasso no ponto M e raio e MB, vamos traçar um arco de circunferência.*
- T48 Am: *Como assim?*
- T49 Ji: *Eu não estou entendendo!*
- T50 P: *Com a ponta seca em M e raio MB faça um arco de circunferência.* [Mostrei na lousa]
- T51 He: *O meu não passou no A igual o seu “moço”.* [“Moço” refere-se ao pesquisador]
- T52 Ji: *Professora ajuda aqui.*

No decorrer da aula pude perceber que a estudante “Am” já tinha a imagem mental de um quadrado. Contudo quando peço no T26 para construir um quadrado com uma respectiva medida, a estudante no T27 demonstra não compreender como usá-la para desenhar o quadrado. Sendo assim, foi necessário que a Professora Margarida (T28) fizesse uma intervenção para explicar como seria a construção desse quadrado com as medidas estabelecidas. É possível perceber pela resposta no T29 indícios de que a estudante não conseguiu perceber que na folha quadriculada caberia vários quadrados de 6 cm de lado, o que pode estar relacionado ao não desenvolvimento do senso espacial. Segundo Van de Walle (2009), o senso espacial ou raciocínio espacial, “está relacionado ao modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre formas e espaços” (VAN DE WALLE, 2009, p. 439). Ainda de acordo com o autor, o senso espacial também pode ser definido com uma intuição sobre as formas e as relações entre as formas. Desta forma, a estudante imaginou que o quadrado poderia ocupar boa parte da folha, sendo que caberiam vários quadrados de 6 cm de lado.

Além disso, no T30 a estudante Gi apresenta uma dúvida com a utilização da régua, perguntando se o zero conta. Em seguida, no T31 a colega responde que sim, mas ainda no T32 Gi questiona: “*Então aqui eu ponho que... seis centímetros vão dar aqui?*”

Dessa forma, foi necessário que eu fosse até sua carteira para explicar a utilização da régua (T33). Expliquei que ela poderia construir um quadrado de duas formas, a primeira seria contando os quadradinhos que já possuíam um centímetro cada e em seguida usar a régua apenas para traçar o lado e a outra forma seria utilizando a régua e esboçando. No entanto, como “Gi” continuou apresentando dificuldades com a utilização da régua, reforcei sua usabilidade e deixei que tentasse novamente. A professora Margarida que estava circulando na sala para ver o desenvolvimento da tarefa percebeu que a estudante “Gi” estava desenhando dois lados do “quadrado” com medida de 7 centímetros, foi necessário explicar novamente que um quadrado tem lados de mesma medida (T45). Este acontecimento pode ter ocorrido pelo motivo destacado por Van de Walle (2009),

as pesquisas em Educação Matemática indicam que quando os alunos veem régua padrão com os números sob as marcas, eles geralmente acreditam que os números estejam contando as marcas em vez de indicar as unidades ou espaços entre as marcas. Essa é uma compreensão incorreta de régua que pode conduzir a respostas errôneas quando eles as utilizarem. (VAN DE WALLE, 2009, p. 412).

A dificuldade em utilizar a régua e a fita métrica, como relatado na unidade de análise anterior, foi um fato que apareceu bastante durante o desenvolvimento das aulas e que levou

tempo para ensiná-los, ocasionando na reformulação dos planos de aulas e das estratégias para desenvolvimento das tarefas.

Considero importante trazer uma reflexão sobre este momento e as minhas ações ao ensinar os estudantes a utilizarem régua. Quando a estudante apresenta sua dúvida no T30 e vou ensiná-la (T33) sobre que cada comprimento entre os números equivalerem a 1 cm, poderia ter complementado que não necessariamente ela precisaria começar a medir do 0. Segundo Van de Walle (2009),

Outra boa forma de avaliar a compreensão de régua é fazer os alunos medirem com uma “régua quebrada”, uma com as primeiras duas unidades quebradas. Alguns estudantes dirão que é impossível medir com tal régua porque não há ponto de partida. Aqueles que já compreendem as régua serão capazes de emparelhar e contar as unidades de forma significativa em suas medidas. (VAN DE WALLE, 2009, p. 412).

Entendo que o desenvolvimento da primeira parte da tarefa propiciou aos estudantes a aprender a usar a régua e a mim, como futuro professor mediar essa aprendizagem e entender as especificidades dos estudantes.

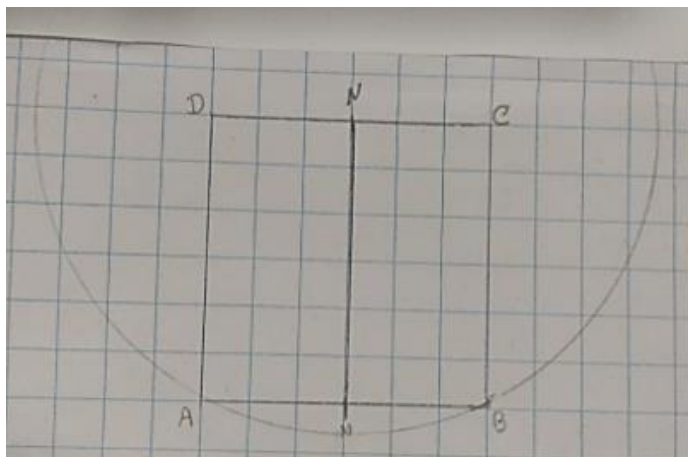
Apresento no episódio abaixo as discussões com o Grupo A no processo de construção do retângulo áureo, em que emergem novos conceitos e o uso do compasso.

Episódio 3: “Que da hora!”

- T53 P: *Utilizando a régua encontre o ponto médio do segmento de reta AB e CD.*
- T54 Gu: *Como assim?* [Não conseguiu entender o que era ponto médio]
- T55 Ia: *Três centímetros.*
- T56 P: *Vocês vão encontrar o ponto médio! Lembram que o ponto médio divide o segmento ao meio? Por exemplo se aqui tem seis centímetros, qual é a metade de seis?* [Neste momento estava explicando para o grupo todo]
- T57 Al: *Três.*
- T58 P: *Então vamos lá!* [Peguei a régua e fui mostrando para os estudantes como poderíamos achar o ponto médio do quadrado]
- T59 Wa: *Nos dois lados.*
- T60 Gu: *M e N*
- T61 P: *Vamos chamar esse ponto de M e N.*
- T62 P: *Agora vamos traçar um segmento de reta de M até N.*
- T63 Re: *Tem que fazer o que?*
- T64 P: *Traçar um segmento de reta de M até N.*
- T65 Wa: *Que da hora!*
- T66 P: *Com a ponta seca do compasso no ponto M e raio MB, então vamos fazer uma abertura MB vamos fazer um arco de circunferência .*
[Mostrei na lousa]
- T67 Re: *Tem que fazer um arco inteiro?*

T68 Wa: *O meu não dá não!* [Desenhou próxima a beirada da folha, mas expliquei que apenas uma marcação (arco) era suficiente]

Figura 13 – Desenho do estudante Wa.



Fonte: Do autor (2021).

No Grupo A, pode-se perceber que os estudantes demonstraram não conhecer ou mesmo terem se esquecido de alguns conceitos e a linguagem matemática sobre os elementos geométricos. Por exemplo, no T53 quando peço para que os estudantes encontrem o ponto médio de dois lados do quadrado, no T54 Gu apresenta dúvida em relação ao que é para ser feito, especificamente no conceito de ponto médio de um segmento. Em seguida, expliquei no T56 como obter o ponto médio e como obtê-lo utilizando a régua (T58). Já no T62 peço para que façam um segmento de reta e os estudantes demonstraram não saber sobre o que se tratava nesse momento (T63). Lembro-me que expliquei gestualmente, utilizando o dedo, aos estudantes como era para fazer este segmento pois, os membros desse grupo trabalhavam juntos, iam construindo os desenhos em conjunto. Foi um momento em que além da linguagem matemática, tive que usar outro tipo de linguagem a gestual para que os estudantes compreendessem o que era um segmento de reta, sem desenhá-lo na lousa.

A princípio as dificuldades ou falta de conhecimentos conceituais apresentadas pelos estudantes, foram referentes aos elementos básicos da Geometria plana e a utilização de instrumentos, que a princípio deveriam ter sido abordados desde os anos iniciais. O que me faz refletir novamente sobre esta dificuldade por parte deles em lembrar sobre estes conceitos, talvez seja por terem esquecido, ou foram ensinados de forma não permitindo a produção de significações.

Nos turnos T54 e T68 tocou o sinal do intervalo, logo continuamos a construção do retângulo na aula do dia 20 de novembro de 2019. Adiante, no próximo episódio relato a finalização dessa construção.

Episódio 4: “Pera aí... Meu Deus... Estou perdidinha.”

- T69 P: *Agora com a ponta seca do compasso em M e raio MC, traça um arco de circunferência. Quando eu falo raio, isto é, a abertura do compasso.*
- T70 Gi: *Vai ficar assim?*
- T71 P: *Isso.*
- T72 Am: *Eu fiz outra bola*
- T73 Gi: *E agora?*
- T74 P: *Todos conseguiram pegar esses passos?*
- T75 Es: *Sim!*
- T76 P: *Então vamos lá.*
- T77 P: *Com a régua vamos prolongar o segmento AB até intersectar na circunferência*
- T78 Am: *Como assim?*
- T79 P: *Você coloca a régua e faz segmento até encontrar no arco de circunferência. E esta interseção vamos chamar de ponto E.*
- T80 P: *Todos conseguiram?*
- T81 Es: *Sim!*
- T82 P: *De modo análogo vamos fazer com este segmento e chamar de ponto F.*
- T83 Am: *Como?*
- T84 P: *Com a régua prolonga até encontrar com o arco de circunferência e chama de ponto F.*
- T85 He: *Pera aí... Meu Deus... Estou perdidinha.*
- T86 P: *Vocês têm que perguntar, eu posso voltar?*
- T87 P: *Agora vamos traçar um segmento de reta do ponto F até o ponto E. Pronto, construímos um retângulo áureo.*
- T88 Als: *Retângulo de que?*
- T89 P: *Áureo vem daquele número que encontramos, lembram?*
- T90 Als: *Ah....*
- T91 P: *E aí vocês podem me dizer, como assim por que isto é um retângulo áureo? [Ficaram em silêncio]*
- T92 P: *Porque ele tem uma harmonia, ele tem uma proporção... Lembra quando aprendemos a construir um segmento áureo. Esse lado é um segmento áureo [Mostrei um dos lados para exemplificar na lousa]. A linha toda AE está sobre AB assim como AB está para BE. E vocês lembram que denominamos algumas medidas para este segmento naquela parte que falava do Euclides? Chamamos aqui de x e isto aqui de a [Fui mostrando na lousa], e chagávamos em uma equação do segundo grau, e obtínhamos o Número de Ouro.*
- T93 Gi: *Simm...*
- T94 P: *E veremos mais para frente por exemplo que alguns prédios, tela de celular, até aquele símbolo da Apple, são construídos em cima desse retângulo. E isto vai envolver o conceito de harmonia, dúvidas?*

Inicialmente a estudante “Gi” tinha apresentado dificuldade em utilizar os instrumentos de medidas (T30), porém com o passar das aulas essas dúvidas foram diminuindo e suas construções começaram a ser mais rápidas como demonstra no T70. Acredito que o momento de ir até a estudante, sentar-me no mesmo nível que sua carteira, olhar nos seus olhos e demonstrar na prática como utilizar a régua e o compasso fez diferença para que pudessem aprender a manuseá-lo.

Como mencionado anteriormente, a dificuldade ou falta de conhecimento em entender a linguagem matemática associada aos conceitos geométricos relacionados a Geometria foi presente também no outro grupo. No T72 a estudante “Am” associou a forma da circunferência como uma bola, é interessante verificar este acontecimento pois, ela relacionou uma forma geométrica com algo do cotidiano dela, pois ela era jogadora futsal no time da escola. Neste momento, poderia ter criado um espaço com os estudantes para investigarmos esta associação que a estudante fez, da bola a uma circunferência. Pois, neste momento o ideal era dizer que a circunferência se parecia com um anel, o contorno de um objeto cilíndrico e a bola se parece com a forma espacial chamada esfera.

No episódio a seguir, a tarefa também foi realizada no dia 20 de novembro de 2019, com o objetivo de construir uma espiral áurea a partir do retângulo áureo já construído. A construção desta espiral aconteceu passo a passo com os estudantes. Vamos perceber neste episódio que o compasso está no processo de se tornar uma ferramenta mais familiar para os estudantes.

Episódio 5: “Sou muito rápida com estas coisas de matemática!”

- T95 P: *Agora vamos aproveitar esse retângulo que vocês construíram para fazer uma espiral áurea e ver o que significa.*
- T96 He: *Aquele negócio que faz assim* [Fez o movimento da espiral com as mãos]
- T97 P: *Isso, igual naquele vídeo que assistimos.*
- T98 P: *Vocês lembram da espiral áurea no vídeo?*
- T99 Gi: *É o caracolzinho que vai rodando.*
- T100 P: *A partir do Retângulo Áureo construído anteriormente, siga os passos abaixo para obter uma Espiral Áurea. Com a ponta seca do compasso em B e raio BE, vamos marcar no segmento CB um arco de circunferências. Cuidado, mantém o compasso com esta abertura. Não precisa fazer uma circunferência. Todos fizeram?*
- T101 Gi: *E agora?*
- T102 P: *Com a mesma abertura do compasso, não fecha ele, com a ponta seca do compasso em E vamos marcar no segmento EF.*
- T103 Am: *Está indo.*

- T104 P: *Vamos chamar esse ponto de G e este de H. Em seguida com a régua vocês vão fazer o segmento GH.*
- T105 Am: *Uma linha?*
- T106 P: *Isso.*
- T107 P: *Olha que interessante, BEGH é um quadrado, logo estamos construindo um retângulo áureo dentro de outro retângulo áureo. Este também é um retângulo áureo só que ele está em pé. [Fui mostrando na lousa para os estudantes]*
- T108 P: *Com a ponta seca do compasso no ponto H e raio HF marque o ponto I no segmento GH.*
- T109 Am: *Pronto.*
- T110 P: *Com a mesma abertura do compasso, coloquem a ponta seca do compasso em F e no segmento CF vocês marcam e vamos chamar de ponto J. Olha que interessem inicialmente construímos um retângulo áureo, depois construímos mais um e agora construímos outro. Dúvidas?*
- T111 Am: *Não, tudo certo!*
- T112 P: *Esse procedimento será repetido mais uma vez. Com a ponta seca do compasso no ponto J e raio JC marque o ponto K em IJ.*
- T113 Am: *Nossa muito pequenininho.*
- T114 P: *Agora vocês vão marcar o ponto K.*
- T115 Am: *Aaaa... agora estou pegando a “manha”, vamos fechar aqui... [“manha” refere-se ao jeito]*
- T116 P: *Agora com a ponta seca do compasso em C e com a mesma abertura vamos marcar no segmento GC e vamos chamar de L.*
- T117 He: *Meu deus moço vai chegar em um momento que não vai dar mais*
- T118 P: *Agora o que vamos fazer, com a ponta seca do compasso em G e raio GL no segmento GI marquem.*
- T119 Am: *Vamos chamar de O.*
- T120 P: *Isso. Com a mesma abertura gente, vamos colocar a ponta seca L e marcar no segmento LK.*
- T121 Am: *Vamos fechar tudo. [Fechar segmentos de reta para construção de retângulos áureos]*
- T122 P: *Vamos parar aqui, porque fica difícil continuar a construção, a ideia é que pode construir infinitamente, mas a mão será difícil.*
- T123 P: *Agora todos com compasso em mãos. Com a ponta seca em C e raio CD vocês vão fazer um arco de circunferência de D até B. Certo?*
- T124 P: *Com a ponta seca em G e raio GB vocês vão fazer um arco de circunferência de B até H.*
- T125 Am: *Pronto, vai formar um caracol.*
- T126 P: *Com a ponta seca em I e raio IH vocês vão fazer um arco de circunferência de H até J.*
- T127 Am: *Sou muito rápida com estas coisas de matemática!*
- T128 P: *Com a ponta seca em K e raio KJ vocês vão fazer um arco de circunferência de J até L.*
- T129 Am: *Aí que lindo*
- T130 P: *Com a ponta seca em P e raio PL vocês vão fazer um arco de circunferência de L até O. Quanto mais retângulos vocês fizerem, mais vai fechando esta espiral áurea, na próxima aula veremos esta espiral na natureza, arquitetura, entre outros lugares.*

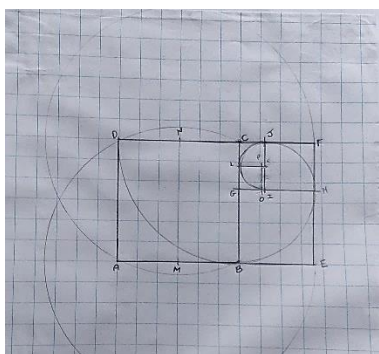
Podemos perceber que os conceitos geométricos e o compasso envolvidos na construção da espiral áurea já não são tão desconhecidos para as estudantes, visto que as experiências que tiveram com o uso do compasso e os vídeos que assistiram sobre o Número de Ouro foram essenciais para as (re)significações que foram sendo elaboradas. Nos T96 e T99 as estudantes “He” e “Gi” ressignificam a forma do espiral com suas palavras. Além disso, a usabilidade da ferramenta foi se tornando mais rápidas e precisas, como parece acontecer no T101 e T103 em que as estudantes já constroem parte do espirale pedem para construirmos o próximo passo da tarefa. Nos T113 e T117 as estudantes vão percebendo que há um limite para os desenhos, à medida que vão sendo desenhados mais retângulos áureos, mais difícil vai sendo o manuseio do compasso.

E novamente a ressignificação de um conceito acontece no grupo, quando no T105 a estudante “Am” chama de linha um segmento. Por fim, percebemos o envolvimento das estudantes com a tarefa em que já vão citando noções futuras do produto que será gerado de determinadas ações, T125 Am: *Pronto, vai formar um caracol*. No turno T127: Am: *Sou muito rápida com estas coisas de matemática!* A estudante vai estreitando as relações pessoais com a Matemática e se sentindo motivada.

O quadro abaixo apresenta algumas imagens do resultado do retângulo áureo e espiral áurea.

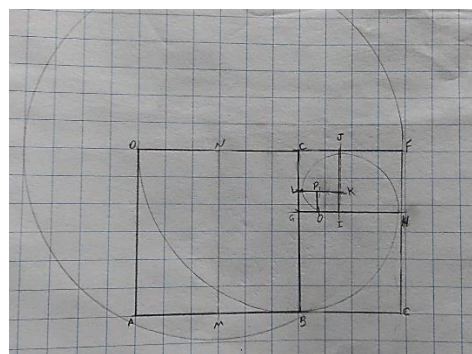
Quadro 12 – Construção da espiral áurea.

Figura 14 - Registro da estudante Am.



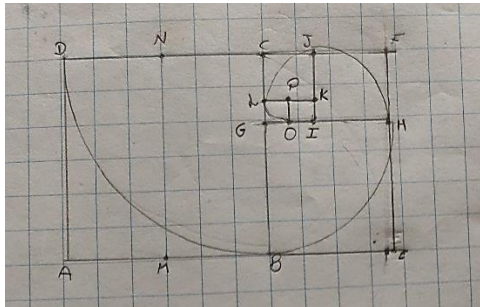
Fonte: Do autor (2019).

Figura 15 - Registro da estudante He.



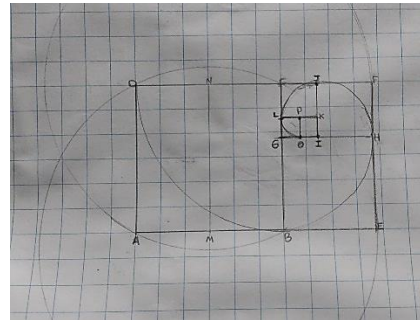
Fonte: Do autor (2019).

Figura 16 - Registro do estudante Wa.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 17 - Registro do estudante Gu.



Fonte: Do autor (2019).

Fonte: Do autor (2021).

Na finalização da unidade didática sobre o Número de Ouro, processo de avaliação sobre os conceitos e a utilização de ferramentas aprendidos durante o desenvolvimento da pesquisa com os estudantes, propus para eles a criação de uma obra de arte a partir de uma releitura de uma obra original. Para esta aula foi disponibilizado tinta guache, pincéis, régua, compasso, obra de arte impressa e papel para pintura.

Por ser uma tarefa que demandava locomoção e interação entre os estudantes, ao analisar os áudios, as falas ficaram com bastante ruídos e confusas sendo difícil de transcrevê-las. Contudo, os próximos parágrafos serão descritos pelas minhas percepções durante o desenvolvimento da aula e as anotações do meu diário de campo, fotografias e das gravações durante a realização da tarefa.

A sala de aula foi organizada em duplas, em seguida coloquei na mesa da professora os materiais que seriam utilizados para a tarefa de forma que pudessem compartilhá-los. Após este momento, expliquei aos estudantes que na mesa havia algumas imagens de obras artísticas, em que cada dupla escolheria uma delas para fazer uma releitura. A seguir, apresento o relato de uma das duplas que me chamou a atenção pela estratégia usada para fazer sua obra de arte, a qual pude acompanhar.

Os estudantes “Wa” e “Pa” formaram uma dupla para realização da tarefa, ambos escolheram a obra Mona Lisa de Leonardo da Vinci. Durante a elaboração da pintura fui orientando-os sobre como poderiam começar a fazer suas obras. O primeiro passo foi construir um retângulo áureo, quando chegou o momento de utilizar o compasso o estudante tentou, mas não conseguiu. A abertura do compasso não era suficiente para alcançar a parte superior do quadrado para formar o retângulo. Assim, o estudante disse que não conseguiria fazer por conta do compasso. No entanto seu colega, que estava ao lado, disse que poderiam utilizar o compasso

de quadro, pois tem uma abertura maior. Busquei para eles o compasso e logo conseguiram dar continuidade à tarefa. Neste momento, pode-se perceber que os estudantes sentiram a necessidade de uma ferramenta com um tamanho maior para continuar a fazer sua atividade. O quadro abaixo apresenta este processo que foi registrado por fotografias.

Quadro 13 - Releitura da obra Mona Lisa de Leonardo da Vinci pelos estudantes Re e Wa.





<p>Figura 18 - Re e Wa Mona Lisa 1.</p>  <p>Fonte: Do autor (2019).</p>	<p>Figura 19 - Re e Wa Mona Lisa 2.</p>  <p>Fonte: Do autor (2019).</p>
<p>Figura 20 - Re e Wa Mona Lisa 3.</p>  <p>Fonte: Do autor (2019).</p>	<p>Figura 21 - Re e Wa Mona Lisa 4.</p>  <p>Fonte: Do autor (2019).</p>

Figura 22 - Re e Wa Mona Lisa 5.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 23 - Re e Wa Mona Lisa 6.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 24 - Re e Wa Mona Lisa 7.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 25 - Re e Wa Mona Lisa 8.



Fonte: Do autor (2019).

Fonte: Do autor (2021).

O quadro abaixo aparenta as outras construções realizadas pelas outras duplas, em que boa parte utilizou o retângulo áureo sua obra de arte e aproveitou a circunferências feita com a utilização do compasso.

Quadro 14 – Fotografias do processo de criação das duplas sobre uma releitura de obras artísticas.

Figura 26 - Releitura de obra 1.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 27 - Releitura de obra 2.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 28 - Releitura de obra 3.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 29 - Releitura de obra 4.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 30 - Releitura de obra 5.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 31 - Releitura de obra 6.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 32 - Releitura de obra 7.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 33 - Releitura de obra 8.



Fonte: Do autor (2019).

Fonte: Do autor (2021).

Ao final de todo este processo, solicitei aos estudantes que escrevessem um e-mail para minha orientadora sobre o que aprenderam e como se sentiram ao realizar esta pesquisa. Segue abaixo alguns relatos.

“Bom dia! Queria te falar que eu aprendi a usar o compasso é aprendi achar a matemática em todo lugar. E está sendo muito bom tudo o que aprendi. Obrigado e tudo de bom. (21/11/2019 – Estudante Al)”

“Bom dia! As aulas de matemática que seu aluno preparou para gente foram muito legais, interessantes, nós aprendemos a mexer com compasso, régua, fita e várias outras coisas. Aprendemos também que todos os objetos têm um Número de Ouro. (21/11/2019 – Estudante Gi)”

“Bom dia, as aulas que foram orientadas pelo Guilherme foram muito interessantes, bem dinâmicas e tratou do tema de um jeito bem extrovertido, aprendi a usar o compasso e tive um contato mais direto como Número de Ouro e vimos que ele está presente em quase tudo, Obrigada. (21/11/2019 – Estudante He)”

“Olá! Tudo bem? Espero que sim. Bom, nesse período de aula aprendi bastante coisa, aprendi a medir, a usar o compasso, o Número de Ouro e percebi que em tudo da natureza tem matemática, e enfim aprendi diversas coisas interessantes. Adorei todas as aulas. Obrigada! (21/11/2019 – Estudante Ta)”

“Achei bem legal e interessante, pois aprendemos a achar razão, usar o compasso, medir com a fita métrica, aprendemos sobre o Número de Ouro que ele está presente em quase todos os objetos. E sobre o Guilherme ele é bem atencioso e explica bem. Obrigada. (21/11/2019 – Estudante Wa)”

É gratificante olhar para estas mensagens e saber que consegui fazer a diferença na vida desses adolescentes. Principalmente a respeito da utilização compasso, por serem estudantes do EM e maior parte da turma não teve contato. Possibilitar este momento foi enriquecedor. Além disso, a relação que eles conseguiram estabelecer do Número de Ouro com parece ter

possibilitado a mobilização do processo de significação de diversos conceitos geométricos. Portanto, foi alcançado o objetivo desta unidade de análise que foi de apresentar as potencialidades do uso das ferramentas, o compasso e a régua, a fim de mediar o processo de significação dos conceitos durante o desenvolvimento das aulas.

7 SER PROFESSOR É....

Abordo neste capítulo reflexões sobre minhas ações em sala de aula; meus sentimentos no ao longo do desenvolvimento da pesquisa; o papel dos programas institucionais; e convivências que foram importantes para meu desenvolvimento. Apresento excertos das narrativas escritas por mim, em cada aula, que me fizeram pensar e posicionar-me em diversos momentos. Alguns momentos foram citados durante este trabalho, mas neste capítulo pretendo trazer especialmente momentos que remeteram ao que me tornar professor de matemática.

A construção da minha formação profissional iniciou em 2015 quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UFLA através de políticas públicas, especificamente por cotas raciais e socioeconômicas. Faço essa ressalva pois sem a criação destas políticas talvez eu nem chegaria a conquistar os meus sonhos. A primeira oportunidade de pesquisa foi no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), onde realizei minha primeira pesquisa e ações colaborativas para melhor desenvolvimento e desempenho do laboratório, uma pesquisa orientada por uma professora do curso de Matemática.

No mesmo ano tive a oportunidade de participar no Grupo de Estudos e Pesquisa Histórico-Cultural (GEPHC), coordenado pelo Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade, em que recebia uma bolsa remunerada pela instituição. Era um grupo em que discutíamos sobre temáticas relacionada a THC, e teorias que antecederam esta perspectiva como o MHD proposto por Marx. Grupo constituído de professores da EB, professores da IES e estudantes da graduação.

Foi no ano de 2016 quando ingressei no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), que iniciei os trabalhos em sala de aula. O programa coordenado pelas Profa. Dra. Sílvia Maria M. Caporale, Profa. Dra. Rosana Maria Mendes e pelo Prof. Dr. Mário Henrique Andrade Cláudio e o grupo composto por 24 pessoas, consistia em estudos teóricos; planejamento de aulas; participação e organização de eventos institucionais. Um programa que possibilitou um contato direto com a sala de aula. A bolsa foi importante também para que eu pudesse continuar com os meus estudos, é um valor simbólico de quatrocentos reais, mas que foi fundamental para compra do meu notebook, uma mesa de estudos, xerox dos textos da disciplina, alimentação no Restaurante Universitário (RU), entre outras tantas coisas que pude conquistar com este valor. A experiência com o programa contribuiu para concretização do sonho de me tornar professor, além disso para criação e desenvolvimento desta pesquisa.

Nos anos de 2017 e 2018, fui coordenador no Centro Acadêmico de Licenciatura em Matemática (CAMAT), uma experiência nova e desafiante, pois há muita responsabilidade em

representar os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. E ao mesmo tempo nova, por estar em uma posição que demandava bastante estudos burocráticos e espaço de fala e escuta. Momentos fundamentais que levo para minha pesquisa, vida pessoal e profissional.

Ainda no ano de 2018, juntamente com um grupo de estudantes fundamos o Núcleo de Estudos em Educação matemática (NEEMAT), coordenado pela Profa. Dra. Rosana Maria Mendes, onde fui coordenador de Extensão e Pesquisa e atualmente faço parte como Vice-presidente. A criação do Núcleo foi fundamental para estreitar as relações entre as pessoas do curso. Foi e é um momento de muito aprendizagem, onde os estudos teóricos vão desde a Inclusão de Pessoas com Deficiência ao Estudo da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Além disso, no mesmo ano participei do Programa de Residência Pedagógica (RP) coordenado pelas Profa. Dra. Rosana Maria Mendes, Dra. Silvia Maria M. Caporale e pelo Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade. Foi neste programa que as relações com a escola, com a professora e com a pesquisa foram sendo concretizadas. O programa proporcionou um amadurecimento sobre sentir-me tornar-me professor. Nele pude ter uma participação mais ativa e individual sobre as ações fora e dentro de sala de aula, por estarmos em um período mais avançado do curso e ser um dos objetivos do programa.

Desde 2020 até hoje faço parte do Grupo de Práticas Pedagógicas orientadas pela teoria Histórico-Cultural (PPTHC), orientado pelo mesmo professor do (GEPHC). Um grupo que discuti sobre o MHC, THC, Teoria do ensino Desenvolvimental, entre outros aportes teóricos. Este grupo também foi essencial para escrita do capítulo teórico, nos momentos dos encontros virtuais as discussões propiciadas possibilitaram perceber a teoria com a prática no âmbito educacional e social do ser humano.

E não poderia deixar de mencionar a importância de uma bolsa de monitoria, que iniciou no ano de 2020, da qual ainda faço parte, o atendimento de uma estudante Surda da pós-graduação. Durante o período da faculdade tive a oportunidade de fazer um curso de Básico de Libras da Secretaria de Educação de Minas Gerais, que possibilitou oportunidades de estudos e pesquisas na área da Educação Inclusiva. A monitoria está sendo um percurso desafiador, porém amplo de oportunidades e de aprendizagens. Entender mais sobre a cultura Surda e a Educação Inclusiva é poder entender as pluralidades que podemos enfrentar na sala de aula.

Além disso, participo desde 2020, do Grupo de Estudos sobre as teorias de Lev Vygotski, orientado e conduzido pela Profa. Dra. Iris Aparecida Custódio, composto por professora, mestrandos e estudantes da graduação da UFLA, com objetivo de buscar compreender e relacionar a THC com as nossas vivências educacionais e pesquisas.

Minha trajetória como futuro professor além de acontecer nesses espaços, aconteceram também em espaços informais, de estudos, leituras, escritas e eventos. Tornar-me professor tem exigido dedicação e estudo diário. Ser professor é assumir um papel de escuta, de fala, é ter respeito e atenção. Professor é pensar no outro, mas também em si. Professor é transformador. Ser professor é saber respeitar e ensinar as diferenças. E hoje sinto-me professor!

Este momento de retomar estes acontecimentos foi importante, cada grupo de estudo, pesquisas, leituras e discussões contribuíram para essa escrita. A pesquisa permitiu planejar aula, estudar uma teoria nova, entender os estudantes com seus sentimentos conceituais e pessoais, entender a escola como limitador e possibilitador da aprendizagem, florescer sentimentos de amor, alegria, incerteza e desespero. Esta pesquisa me fez querer desistir em momentos difíceis, mas me fez enfrentar os desafios. além de entender que existem prazos a serem cumpridos, que existem quinze estudantes que aprendem de formas diferentes e que é necessário reformular estratégias para alcançar o maior número de estudantes.

Além disso apresento a seguir a contribuição da professora Margarida, pois sempre quando podia durante o desenvolvimento da pesquisa ela escrevia uma carta para mim. A carta abaixo foi entregue no dia 08 novembro de 2019.

“Hoje é o terceiro dia de atividades e como professora da turma tem como destacar a série de critérios e procedimentos que estão envolvidos em sua pesquisa. A tensão de que suas atividades não tratam apenas de uma aula diferenciada, mas é visto em todos os momentos a preocupação em coletar dados (imagens, áudios), essa necessidade constante em coletar dados divide muito sua atenção. Mesmo tendo estudado e se preparado parece não conduzir de forma tranquila, é muita preocupação para que tudo dê certo. Que os alunos aprendam, que os áudios gravem que os vídeos estejam nítidos, imagens dos desenvolvimentos dos alunos. Calma vai dar certo.

Ao mesmo tempo podemos comparar com a realidade, esta sala tem suas particularidades como por exemplo a quantidade de alunos e quantidade de aulas de matemática por semana.

Destaco também o trabalho como professor, durante todo o processo os gastos de materiais foram diversificados, muitos deles oferecidos pelo próprio pesquisador, essa proposta em uma sala de aula teriam um gasto que muitas vezes a escola não oferece, esses aspectos precisam ser levados em consideração para que a atividade seja viável de ser ministrada em uma sala mais comum.

Quanto a postura do pesquisador na interação com os alunos considero exemplar, pois não se mantém distante e sempre disposto a sanar dúvidas individuais e muita paciência com as dificuldades encontradas pelos estudantes no decorrer das atividades. (08/11/2019 – Professora Margarida)”

Quando recebi esta carta da professora foi muito reconfortante por dizer os cuidados e outras vertentes que precisamos pensar dentro de uma sala de aula. No início de sua fala podemos perceber o quanto eu estava tenso para constituir os dados, de fato. Ter recursos

insuficientes e que não são próprios para captar os momentos em sala de aula, contribuiu para que o nervosismo pudesse aflorar. As aulas foram audiogravadas a partir de celulares que conseguiram captar razoavelmente o som e as imagens foram captadas por um celular e uma filmadora emprestada pela orientadora. A todo momento do desenvolvimento da pesquisa, perguntas e mais perguntas surgiram: ‘Será que os estudantes estão entendendo?’, ‘Será que é preciso voltar neste conceito?’, ‘Será que estou indo rápido?’ São questionamentos que surgiram e que na hora foi difícil de lidar ou tentar solucionar todos.

Concordo com a professora Margarida, pesquisas com menos estudantes são facilitadores no processo de lidar quando se compara com uma classe com mais de trinta estudantes. Pois é preciso que tenhamos mais atenção aos recursos didáticos utilizados para que se tornem acessíveis a todos os níveis de ensino. Além dos recursos é preciso pensar nos estudantes, na escola, no impacto do trabalho, entre outras situações.

E por fim, da fala da professora Margarida, agradeço aos comentários realizados sobre a minha postura, são percepções como esta que me fazem refletir e ter um olhar mais cuidadoso para com o outro. Ser professor é rever a sua própria prática para melhoria e para alcançar um bem em comum.

E para finalizar este momento de pensar e repensar sobre a minha trajetória e própria prática, trago mais algumas considerações dos estudantes sobre a nossa relação na sala de aula.

“Bom dia!! É com imenso prazer que venho falar sobre esse conteúdo maravilhoso e super interessante, queria primeiramente agradecer ao Guilherme que teve muita paciência, e com ele aprendi muito junto claro com a Margarida, várias atividades super mega criativa, é só pegar no tranco que dá tudo certo. Aprendi que o Número de Ouro e formado por diversas vezes, infinitamente e que está em quase tudo que nos vemos o Número de Ouro ele é irracional e que vale 1,6108. (21/11/2019 - Estudante Ju)”

“Olá, Silvia! Tudo bem? Espero que sim. Bom, venho aqui para dizer que as aulas do Guilherme estão sendo excelentes, ele nos ensinou a medir, ensinou também sobre o Número de Ouro que tudo se aproxima, até mesmo ao nosso rosto, aprendi a razão, proporção e muitas outras coisas. Creio que ele será um ótimo professor. Obrigada pela oportunidade. Tchau! (21/11/2019 – Estudante Ca)”

“Olá! Nas aulas de matemática, aprendemos a medir com a fita, usar o compasso, vimos a matemática com outros olhos, e a vimos em todo lugar. O professor manteve sua postura, ensinou muito bem, soube explicar tudo certo, trouxe coisas diferentes relacionadas com a matéria. Foi uma ótima experiência! Obrigada pela atenção! (21/11/2019 – Estudante Ka)”

“Olá, professora Silvia! Como você está? Espero que você esteja bem! Estou mandando essa mensagem para dizer que as aulas com o Guilherme estão sendo ótimas, estou aprendendo muito com essa matéria, achei muito interessante. (21/11/2019 – Estudante Re)”

A escrita desses estudantes fez-me refletir sobre o processo de significação conceitual da própria Geometria que ocorreu para mim, no movimento de elaboração de uma unidade didática, o que possibilitou estudos e leituras sobre a Geometria, a gestão em sala de aula, a ressignificação de alguns conceitos geométricos, entre outras aprendizagens.

Portanto, compartilho da ideia da autora Custódio (2016), que em seu trabalho deixa evidente que as considerações de uma pesquisa são parciais, à medida que lemos e relemos surgirão e surgem novas ideias, conceitos e interpretações. A pesquisa na perspectiva histórico-cultural é este movimento de significar e ressignificar, elaborar e reelaborar e de pensar e repensar no processo histórico para o desenvolvimento da pessoa social.

8 NOVOS CAMINHOS E OLHARES

Esta foi uma pesquisa possibilitou inúmeras aprendizagens seja dentro ou fora da sala de aula. Participar e ser mediador desse processo de significação, não só contribui para minha formação enquanto futuro professor, como também para minha vida pessoal. A pesquisa em campo exige tempo, dedicação, atenção, cuidado e estudo. Mas é importante reconhecer os erros e os acertos. E uma das mais importantes possibilidades é a de e tornar professor de Matemática.

Olhar para este movimento de significações de conceitos da Geometria, possibilitou um espaço de desmitificação que havia internalizado e construído no meu EB. Perceber que esse campo da matemática pode ser um espaço de gerar oportunidade de conhecimento é enriquecedor. Entender a Geometria como um campo que está presente nas nossas relações pessoais e sociais, é algo inexplicável. Sendo assim, pretendo levar esta pesquisa seja através de artigo ou não, verbalmente ou não, a espaços formais e informais por onde eu passar.

Pretendo dar sequência ao estudo dessa temática eventualmente em uma pós-graduação, como possibilidade de amenizar as barreiras e desigualdades de conhecimento científico existente em grupos desfavorecidos de saberes. Sempre me atentado a olhar o movimento históricos e culturais dessas pessoas sociais.

Foi uma pesquisa que teve com objetivo olhar o movimento de significações construídas por estudantes do EM quando inserido em uma prática problematizadora de ensino e aprendizagem da Geometria. A consequência desse movimento analisada foi dividida e duas unidades de análise, a primeira relacionada a aprendizagem do Número de Ouro e a segunda sobre importância da utilização recursos didáticos na sala de aula. Além desses fatos, destaco a importância de trabalhar com o Número de Ouro no EB. É um estudo que possibilita não só a aprendizagem de um novo número, mas as diversas potencialidades que o estudo deste número apresenta. Desde a sua história até a relação com outras áreas do conhecimento. Por fim, destaco as inúmeras vezes que usei durante a análise, a palavra dificuldade, compreendendo-a como indícios do movimento de significações e aprendizagens dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- ALVES, A. M. **O método histórico dialético**: alguns apontamentos sobre a subjetividade. Revista de Psicologia da UNESP. UNESP-Assis, e. 9, n. 1, p. 1-13, mar./2010.
- AZEVEDO, N. de C. **O Número de Ouro e construções geométricas**. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística). Universidade Federal de Goiás, 2013.
- BAUER, M.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático. 2. Ed. Rio de Janeiro: Vozes Editora, 2002.
- BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de dezembro de 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília, 2000.
- CANO, M. A. M. **Ciência, magia e filosofia no processo de ensino-aprendizagem da matemática**: uma introdução histórica sobre o Teorema de Pitágoras. Dissertação (Mestre Profissional no Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.
- CARVALHO, L. S. de. **Número áureo e ensino básico**. Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.
- CASTRO, A. P. G. **Uma proposta pedagógica para o ensino do número de ouro através do software Geogebra na educação básica**. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.
- COSTAS, F. A. T.; FERREIRA, L. S. **Sentido, significado e mediação em Vygotsky**: implicações para a construção do processo de leitura. Revista Iberoamericana de Educación. n. 55, p. 205-223, set./2011.
- CUSTÓDIO, I.A. **O movimento de significações no ensino e aprendizagem de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2016.

- CERQUIRA, A. G. C. *et al.* **A trajetória da LDB: um olhar crítico frente à realidade brasileira.** In: XX Ciclo de Estudos Históricos, 2009, Ilhéus. XX Ciclo de Estudos Históricos, 2009.
- DAMIS, O. T. In: VEIGA, Ilma Passos Alencastro. **Unidade Didática: uma técnica para a organização do ensino e da aprendizagem.** Campinas: Papirus, p. 105-135, 2006.
- FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa.** 3 ed. Porto Alegre: Artmet, 2009.
- FREIRE, W. L. **Fi, Φ , o número de ouro na geometria euclidiana plana: uma proposta de aula.** Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2019.
- FREITAS, M. T. de A. **Vygotsky & Bakhtin Psicologia e Educação: um intertexto.** 4. ed. São Paulo: Ática, 2002.
- FRIEDRICH, J. **Lev Vigotski: mediação, aprendizagem e desenvolvimento: uma leitura filosófica.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2021.
- GARCIA, T. R. **Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na sequência de Fibonacci: uma proposta de atividade para turmas de primeira série.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2014
- GÓES, M. C. R. de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade.** Cadernos Cedes. v. 20, n. 50, p. 9-25, abr./2000)
- GÓES, M. C. R. de; CRUZ, M. N. **Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev. Vigotski.** Proposições, v. 17, n. 2(50), maio-ago., p. 31-45, 2006.
- KFOURI, V. de O. **Φ : o número de ouro.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.
- LADIM, N. P. **Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática), Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2014.
- LIBÂNEO, J. C. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov.** Revista Brasileira de Educação. n. 27, p. 5-25, dez./2004.
- LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática.** In: IV Congresso Brasileiro de História da Educação. 2006. Eixo temático: 3. Cultura e práticas escolares.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista. N. 4, 1995.
- MOLLMANN, Z. P. **Um breve estudo sobre o número áureo e sequência de Fibonacci.** Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: EdUFSCAR, 2003.

OLIVEIRA, H. S. de. **Algumas constantes reluzentes da matemática: o número de ouro, a constante de Euler-Mascheroni, e a dimensão de cobertura de Apolônio.** Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2017.

OLIVEIRA, J. J. de. **Sequências de Fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino médio.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

OLIVEIRA, R. de C. M. **(Entre)linhas de uma pesquisa: o diário de campo como dispositivo de (in)formação na/da abordagem (Auto)biográfica.** Revista Brasileira de Educação de Jovens e Adultos. Salvador, v. 2, n. 4, p. 69-87, 2014.

ONUCHIC, L. de la R. *et al.* **Resolução de problemas: teoria e prática.** São Paulo: Paco, 2014.

PAIS, L. C. **Intuição, experiência e teoria geométrica.** Zetetiké, Campinas, v. 4, n. 6, p.65-74, jul.-dez./1996.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências.** Zetetiké, Campinas, a. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREIRA, J. J. B. J.; FRANCIOLI, F. A. de S. **Materialismo Histórico-Dialético: Contribuições para a Teoria Histórico-Cultural e a Pedagogia Histórico-Crítica.** Germinal, Londrina, v. 3, n. 2, p. 93-101, dez./2011.

PIRES, M. F. de C. **O materialismo histórico-dialético e a Educação.** Interface – Comunicação, Saúde, Educação. v.1, n. 1, p. 83-94, ago./1997.

POSSEBON, J. E. **Finonacci e a razão áurea: uma abordagem para o ensino básico.** Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016.

RAMOS, M. G. O. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação.** 1 ed. Petrópolis: Vozes, 1995.

ROSSETTI-FERREIRA, M. C. *et al.* **A rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano.** 2004.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na Educação Básica: a fotografia e a escrita na sala de aula.** São Paulo: Autêntica, 2014.

SENA, C. Á. R. de. **Sequência de Fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2013.

SFORNI, M. S. de F. *In:* CAPELLINI, Vera Lúcia Messias Fialho; MANZONI, Rosa Maria. **Políticas públicas, práticas pedagógicas e ensino-aprendizagem: diferentes olhares sobre o processo educacional.** Bauru: Cultura Acadêmica p. 497-505, 2008. Disponível em: https://www.academia.edu/35081905/Aprendizagem_e_desenvolvimento_o_papel_da_media%C3%A7%C3%A3o_pdf.

SILVA, L. H. M. da. **O número de ouro no ensino da matemática na educação básica.** Dissertação (Mestrado – Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2013.

SILVA, R. L. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas, para alunos do primeiro ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

SIRGADO, A. P. **O social e o cultural na obra de Vigotski.** Educação & Sociedade. a. 21, n. 71, p. 45-78, jul./2000.

SMOLKA, A. L. B. **Uma contribuição à proposta de rede de significações.** *In:* ROSSETTI-FERREIRA, M. C. *et al.* A rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano. 2004. p. 42-69.

SODRÉ, L. de O. **O número 142857 e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas.** Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

TOMIO, D.; SCHROEDER, E.; ADRIANO, G. A. C. **A análise microgenética como método nas pesquisas em educação na abordagem histórico-cultural.** Revista Reflexão e Ação. Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48, 2017.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUIN, E. de S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

APÊNCICE

Tarefas propostas para o trabalho com o Número de Ouro para estudantes do 2º do Ensino
Médio

Plano	Data	Tema	Tipologia dos Conteúdos	Objetivo Específico
I	01/11/19	Apresentação do projeto e leitura das documentações.	<p>Conteúdos Procedimentais: Ler as documentações para aceite e participação da pesquisa. Conteúdos Atitudinais: -Criar situações de diálogo, decisão e socialização com os estudantes; -Leitura conjunta das documentações.</p>	Estabelecer o contrato didático com os estudantes, das aulas que serão desenvolvidas durante a pesquisa e observar seu interesse em participar.
II	06/11/19 e 08/11/19	O que é harmonia?	<p>Conteúdos Conceituais: -Razão entre duas grandezas; -Dimensão bidimensional; -Estabelecer o que é mais harmônico aos seus olhos; -Realizar cálculos coma utilização da calculadora. Conteúdos Procedimentais: -Realizar medições da dimensão de objetos. Conteúdos Atitudinais: -Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Estabelecer um nome para o diário de campo; -Compartilhar os resultados encontrados das tarefas.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes devem estabelecer o que é mais harmônico aos seus olhos, caracterizar dimensão dos objetos propostos, realizar medições da dimensão dos objetos utilizando fita métrica e aprender a calcular razão entre duas grandezas.
III	08/11/19	Representação algébrica do Número de Ouro.	<p>Conteúdos Conceituais: -Razão extrema e média; -Proporção; -Número de Ouro; -Números irracionais; -História de Euclides; -Compreender geometricamente o significado de razão extrema e média; -Representar algebricamente o Número de Ouro. Conteúdos Procedimentais:</p>	Ao final dessa aula, os estudantes aprenderam a representar algebricamente o Número de Ouro através de uma construção geométrica utilizando régua.

			<p>-Desenhar definição da proporção derivada da divisão de uma linha que Euclides 300 a.C definiu como, razão extrema e média.</p> <p>Conteúdos Atitudinais:</p> <p>-Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Socializar os resultados encontrados da tarefa.</p>	
IV	14/11/19	Desenhando um segmento áureo com régua e compasso.	<p>Conteúdos Conceituais:</p> <p>-Reta; -Ponto; -Segmento; -Arco de Circunferência; -Triângulo retângulo; -Raio; -Compreender a construção do segmento áureo.</p> <p>Conteúdos Procedimentais:</p> <p>-Desenhar um segmento áureo com régua e compasso.</p> <p>Conteúdos Atitudinais:</p> <p>-Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Socializar os resultados encontrados da tarefa.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes irão construir um segmento áureo utilizando régua e compasso.
V	14/11/19 e 20/11/19	Desenhando um retângulo áureo e uma espiral áurea com régua e compasso.	<p>Conteúdos Conceituais:</p> <p>-Reta; -Ponto; -Segmento; -Arco de Circunferência; -Raio; -Compreender a construção do retângulo áureo e da espiral áurea.</p> <p>Conteúdos Procedimentais:</p> <p>-Desenhar um retângulo áureo e uma espiral áurea utilizando régua e compasso.</p> <p>Conteúdos Atitudinais:</p> <p>-Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Socializar os resultados encontrados da tarefa.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes aprenderam a desenhar um retângulo áureo e uma espiral áurea utilizando régua e compasso.
VI	21/11/19	História do Número de Ouro (vídeo).	<p>Conteúdos Procedimentais:</p> <p>-Assistir o vídeo sobre a história do Número de Ouro.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes aprenderam sobre a história do Número de Ouro.

			<p>Conteúdos Atitudinais: -Dialogar sobre os principais pontos da concepção histórica do Número de Ouro.</p>	
VII	21/11/19	Fibonacci: a relação com o Número de Ouro.	<p>Conteúdos Conceituais: -História de Fibonacci; -Sequências infinitas e finitas; -Compreender a sucessão de Fibonacci e sua relação com o Número de Ouro. Conteúdos Procedimentais: -Calcular, interpretar e realizar a tarefa sobre a sucessão infinita de Fibonacci e entender a sua relação com o Número de Ouro. Conteúdos Atitudinais: -Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Socializar os resultados encontrados da tarefa.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes irão aprender brevemente sobre a história de Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, e a relação de sequência infinita, proposta por ele, com o Número de Ouro.
VIII	21/11/19	O Número de Ouro no corpo humano.	<p>Conteúdos Conceituais: -Razão; -Número de Ouro; -Realizar cálculos coma utilização da calculadora; -Compreender a relação do Número de Ouro com o corpo humano. Conteúdos Procedimentais: -Realizar medições do corpo; -Calcular, interpretar e realizar a tarefa a relação do Número de Ouro com o corpo humano. Conteúdos Atitudinais: -Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; -Socializar os resultados encontrados da tarefa.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes aprenderam a relação do Número de Ouro no corpo humano, por meio de uma tarefa prática.
IX	21/11/19	A relação do Número de Ouro com a natureza, arquitetura e arte.	<p>Conteúdos Conceituais: -Compreender a relação do Número de Ouro com a natureza, arte e arquitetura. Conteúdos Procedimentais: -Observar as figuras que estão relacionadas com o Número de Ouro.</p>	Ao final dessa aula, os estudantes aprenderam a relação dos elementos e objetos na natureza, arquitetura e arte com o Número de Ouro, por meio da exibição de figuras.

			<p>Conteúdos Atitudinais: -Socializar sobre exposição das figuras que estão relacionadas com o Número de Ouro.</p>	
X	21/11/19	Produzir uma obra de arte através da pintura, relacionando com os conceitos do Número de Ouro e escrever uma carta sobre como foi o processo das tarefas.	<p>Conteúdos Conceituais: - Razão extrema e média; - Proporção; - Número de Ouro; - Retângulo áureo; - Espiral áurea; - Realizar a pintura de uma obra de arte utilizando as aprendizagens sobre o Número de Ouro.</p> <p>Conteúdos Procedimentais: -Observar e escolher uma figura para realizar a tarefa.</p> <p>Conteúdos Atitudinais: -Socializar sobre exposição das obras de arte que estão relacionadas com o Número de Ouro; - Desenvolver trabalho colaborativo em grupo.</p>	O objetivo dessa aula é de que os estudantes criem/recriem (re)leituras de quadros que se encontram relações com o Número de Ouro.
XI	25/22/19	Exposição do trabalho.	<p>Conteúdos Procedimentais: - Ajudar a fazer a exibição dos trabalhos.</p> <p>Conteúdos Atitudinais: - Desenvolver trabalho colaborativo em grupo; - Compartilhar sobre seus sentimentos ao realizar essa pesquisa, durante a exposição.</p>	O objetivo e expor os trabalhos realizado pelos estudantes, produzidos durante esta pesquisa.