



LUCAS HENRIQUE BASTOS OLIVEIRA

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE ATIVO DE
VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

LAVRAS – MG

2021

LUCAS HENRIQUE BASTOS OLIVEIRA

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira

Orientador

Prof. Dr. Belisario Nina Huallpa

Coorientador

LAVRAS – MG

2021

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Oliveira, Lucas Henrique Bastos

Modelagem Dinâmica e Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando o Método dos Elementos Finitos / Lucas Henrique Bastos Oliveira. – Lavras : UFLA, 2021.

117 p. : il.

TCC–Universidade Federal de Lavras, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira.

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-808.066

LUCAS HENRIQUE BASTOS OLIVEIRA

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM
ESTRUTURAS FLEXÍVEIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

APROVADA em 02 de Junho de 2021.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira DEG-UFLA
Prof. Dr. Belisario Nina Huallpa DAT-UFLA
Prof. Dr. Wander Gustavo Rocha Vieira DEG-UFLA

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira
Orientador

Prof. Dr. Belisario Nina Huallpa
Co-Orientador

**LAVRAS – MG
2021**

Aos meus pais, Messias e Elza Mara, e ao meu irmão, Thiago.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Messias e Elza Mara, e ao meu irmão, Thiago, pelo apoio, incentivo, paciência, inspiração e amor incondicional.

À Bel, pelo companheirismo, paciência, apoio, incentivo e pelos bons momentos.

Aos meus avós Lázaro, Maria de Lourdes, Levi (in memoriam), Maria Helena e à minha bisavó Elza (in memoriam), pelo incentivo aos estudos, apoio e amor incondicional.

Aos meus tios, tias, primos e primas, pelo incentivo, apoio e pelos bons momentos.

Aos meus sogros Adriano e Darlene, e ao Matheus, à Nathália e ao Alan pelo apoio e pelos bons momentos.

Ao professor Henrique, meu orientador, pela paciência e por todo conhecimento e sabedoria compartilhados. Pelo apoio, incentivo, inspiração e motivação. Pelas várias oportunidades concedidas, inclusive a de monitoria e a de ser seu orientado. Pelas boas conversas e risadas. Pelo símbolo de profissionalismo e dedicação. Pelos conselhos e pela amizade.

Ao professor Belisario, meu coorientador, pela paciência e por todo conhecimento e sabedoria compartilhados. Pela oportunidade de ser seu coorientado. Pelas boas conversas e risadas e pelos incontáveis cafezinhos. Pelo apoio, incentivo, inspiração e motivação. Pelo símbolo de profissionalismo e dedicação. Pelos conselhos e pela amizade.

Ao professor Wander, pelo conhecimento compartilhado, pelas boas conversas, conselhos e pelos incontáveis cafezinhos.

Aos professores Francisco e Maurício, pelo conhecimento compartilhado, pelas conversas, conselhos e pelos cafés.

Ao professor Dimas, pelo conhecimento compartilhado, pelas conversas e pelos conselhos.

Aos professores, Adriano, Bruna, Carlos, Fábio Jesus, Fábio Lúcio, Filipe, Joelma, Helvécio, Márcio, Sandro e Vinícius por todo conhecimento compartilhado.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica Aplicada (LMA), Matheus, Vinícius, Cozol, Yuri, Godonhoto e Daniel, pelas horas de convivência, pelos bons momentos, companhia, risadas, cafezinhos e pela amizade.

Aos amigos do apartamento, Matheus, Eric, Ricota, Barrak, Playboy, Gordinis, Rubão e Othon, pela amizade, companhia, parceria, boas conversas, risadas, bons momentos e também pelos momentos de estresse.

Aos amigos do Hybrid, Rodrigo, Daniel, Macedo, Jonas, Daud, Marani, Otávio, Dudu, Matricks, Mancim, Eugênio, Bruno, Octávio, Matheus, Caio e Rafael, pela amizade, boas conversas, risadas, momentos de estresse e pelas horas de oficina.

Aos amigos da banda Gastos Operários, Pedrada, Paulo, Murillo, Vivita, Rafael, Lucas e Tiago, pelos vários ensaios, shows, boas conversas, risadas e pela amizade.

Aos amigos Gabriel Ribeiro, Danielle e Paulinho pelos momentos vividos, conversas, risadas e trabalhos em grupo. Às demais amizades da graduação.

*A imaginação é mais importante que o conhecimento.
(Albert Einstein)*

RESUMO

Este trabalho trata da modelagem dinâmica e controle ativo de vibração de uma viga flexível na condição engastada-livre, submetida a diferentes tipos de excitação mecânica. O modelo de elementos finitos da viga foi desenvolvido e implementado em ambiente computacional MATLAB. O método de redução estática de Guyan foi utilizado para reduzir convenientemente a ordem do modelo, e assim, reduzir o custo computacional. O modelo dos atuadores eletromagnéticos foi construído e, posteriormente, foi realizado o acoplamento multifísico destes dois modelos no espaço de estados, constituindo o modelo eletromecânico do sistema. No projeto do controlador PID, a calibração foi realizada utilizando o método de realimentação por relê. O ganho crítico e o período crítico foram obtidos a partir deste método e os ganhos do controlador PID foram calculados utilizando cinco diferentes regras de calibração. O sistema de controle foi simulado considerando sete cenários distintos, envolvendo diferentes tipos de excitação. Cada cenário foi simulado utilizando as diferentes regras de calibração. Os deslocamentos do grau de liberdade no qual os atuadores foram acoplados e da extremidade livre da viga foram obtidos e reportados. As respostas controladas da viga, utilizando as diferentes regras de calibração, foram então comparadas entre si e com as respostas não controladas, mostrando a efetividade do controlador na atenuação da resposta do sistema. A regra *Some Overshoot* (SO-OV) foi a mais eficiente em todos os cenários, pois apresentou melhor desempenho em regime transiente em todos eles.

Palavras-chave: método dos elementos finitos, método de redução estática de Guyan, atuadores eletromagnéticos, controle PID, método de realimentação por relê.

ABSTRACT

This research deals with dynamic modeling and active control of vibration in a flexible cantilever beam, subjected to different types of mechanical excitation. The finite element model of the beam was developed and implemented in computational environment MATLAB. The Guyan static reduction method was used to reduce properly the model order, and so, reduce the computational cost. The model of electromagnetic actuators was built and after the multiphysical coupling of these models was realized in the state space, constituting the electromechanical model of the system. In the design of PID controller, the tuning was done using the relay feedback method. The critical gain and the critical period were obtained from this method and the gains of the PID controller were calculated using five different tuning rules. The control system was simulated considering seven distinct scenarios, involving different types of excitation. Each scenario was simulated using the different tuning rules. The displacements of the degree of freedom in which the actuators were coupled and of the free tip of the beam were obtained and reported. The controlled responses of the beam, using the different tuning rules, were then compared to each other and with the non-controlled responses, showing the controller effectiveness in response attenuation of the system. The rule *Some Overshoot* (SO-OV) was the most efficient in all scenarios, because it presented the best performance in transient regime in all of them.

Keywords: finite element method, Guyan static reduction method, electromagnetic actuators, PID control, relay feedback method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Esquema de funcionamento de mancais magnéticos ativos.	21
Figura 3.2 – Sistema de suspensão eletromagnética de trens <i>Maglev</i>	22
Figura 3.3 – Sistema de suspensão automotiva eletromagnética.	24
Figura 4.1 – Viga utilizada neste trabalho.	26
Figura 4.2 – Montagem das matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez.	33
Figura 4.3 – Análise de convergência de malha na viga.	34
Figura 4.4 – Viga engastada com munhão.	35
Figura 4.5 – Atuador eletromagnético.	39
Figura 4.6 – Vista superior da interação entre atuadores eletromagnéticos e munhão/viga.	40
Figura 4.7 – Sistema com viga engastada e atuadores eletromagnéticos.	49
Figura 5.1 – Esquema de um sistema retroalimentado.	54
Figura 5.2 – Esquema do sistema multifísico retroalimentado.	56
Figura 5.3 – Diagrama de blocos do método de calibração por relê.	59
Figura 6.1 – Deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) no limiar de instabilidade - Método de Realimentação por Relê.	64
Figura 6.2 – Saídas do relê e do sensor de deslocamento do grau de liberdade controlado no limiar de instabilidade da planta - Método de Realimentação por Relê.	65
Figura 7.1 – Excitação senoidal na primeira frequência natural da viga (10,34Hz).	68
Figura 7.2 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	69
Figura 7.3 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	70
Figura 7.4 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	70
Figura 7.5 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	71

Figura 7.6 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	71
Figura 7.7 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz. . .	72
Figura 7.8 – Força de controle aplicada ao grau de liberdade 10 da viga em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	73
Figura 7.9 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.	74
Figura 7.10 – Excitação senoidal na segunda frequência natural da viga (83,21Hz).	75
Figura 7.11 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	76
Figura 7.12 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	77
Figura 7.13 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	77
Figura 7.14 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	78
Figura 7.15 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	78
Figura 7.16 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz. . .	79
Figura 7.17 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade (nó 10) da viga em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	80
Figura 7.18 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.	81
Figura 7.19 – Excitação senoidal com frequência arbitrária (40Hz) não coincidente com frequência natural da viga.	82

Figura 7.20 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	83
Figura 7.21 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) e Ziegler-Nichols (ZN) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	84
Figura 7.22 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) e <i>No Overshoot</i> (NO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	84
Figura 7.23 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) e Tyreus-Luyben (TL) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	85
Figura 7.24 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) e Pessen (PE) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	85
Figura 7.25 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	86
Figura 7.26 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	87
Figura 7.27 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.	88
Figura 7.28 – Excitação impulso unitário com amplitude de 50N.	89
Figura 7.29 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.	90
Figura 7.30 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.	91
Figura 7.31 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.	91
Figura 7.32 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.	92

Figura 7.33 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.	92
Figura 7.34 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.	93
Figura 7.35 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.	94
Figura 7.36 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.	94
Figura 7.37 – Excitação função degrau com amplitude de 5N.	95
Figura 7.38 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.	96
Figura 7.39 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.	97
Figura 7.40 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.	97
Figura 7.41 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.	98
Figura 7.42 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.	98
Figura 7.43 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.	99
Figura 7.44 – Força de controle aplicada ao grau de liberdade 10 da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.	100
Figura 7.45 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.	101
Figura 7.46 – Excitação função chirp (0Hz à 100Hz em 60 segundos) com amplitude de 0,5N - grau de liberdade 5 (G.L. 5, nó 5).	102

Figura 7.47 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas não controlada e controlada (regra de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	103
Figura 7.48 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	104
Figura 7.49 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	104
Figura 7.50 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	105
Figura 7.51 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	105
Figura 7.52 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas não controlada e controlada (regra de calibração <i>Some Overshoot</i> (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.	106
Figura 7.53 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - viga submetida à excitação função chirp.	107
Figura 7.54 – Correntes nos atuadores em função do tempo e da frequência - viga submetida à excitação função chirp.	108
Figura 7.55 – Excitação randômica (ruído branco) com amplitude máxima de 1N.	109
Figura 7.56 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.	110

Figura 7.57 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.	111
Figura 7.58 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração <i>No Overshoot</i> (NO-OV) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.	111
Figura 7.59 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.	112
Figura 7.60 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e <i>Some Overshoot</i> (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.	112
Figura 7.61 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.	113
Figura 7.62 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.	114
Figura 7.63 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Regras de calibração de controladores utilizadas.	60
Tabela 6.1 – Parâmetros da viga de Alumínio (Liga 6063).	61
Tabela 6.2 – Parâmetros do munhão de Aço Carbono (SAE 1020).	62
Tabela 6.3 – Parâmetros dos atuadores.	62
Tabela 6.4 – Comparação das 10 primeiras frequências naturais dos modelos completo e reduzido (redução estática de Guyan) - viga na condição livre-livre. . . .	63
Tabela 6.5 – Frequências naturais do modelo viga-munhão reduzido com os dois primeiros graus de liberdade (nós 1 e 2) engastados (redução estática de Guyan). .	63
Tabela 6.6 – Ganho crítico (K_u) e período crítico (T_u) obtidos no processo de calibração do controlador.	65
Tabela 6.7 – Ganhos K_P , K_I e K_D das diferentes regras de calibração abordadas neste trabalho.	66

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVOS	18
2.1	Objetivo geral	18
2.2	Objetivos específicos	18
3	REVISÃO DE LITERATURA	19
4	MODELAGEM MATEMÁTICA	25
4.1	Introdução	25
4.2	Modelagem utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF)	25
4.2.1	Modelagem da viga – modelo de Euler-Bernoulli	26
4.2.2	Análise de convergência de malha	33
4.2.3	Modelagem do munhão	34
4.2.4	Redução do modelo de elementos finitos na condição livre-livre	35
4.2.5	Condições de contorno	38
4.3	Modelagem dos atuadores eletromagnéticos	38
4.4	Acoplamento do modelo multifísico	46
4.5	Representação do modelo multifísico no espaço de estados	49
5	PROJETO DO CONTROLADOR	52
5.1	Introdução	52
5.2	Controlabilidade	52
5.3	Observabilidade	53
5.4	Controle por retroalimentação de estados	53
5.5	Controle PID	55
5.6	Calibração do controlador	58
6	PARÂMETROS DA PLANTA E CALIBRAÇÃO DO CONTROLADOR	61
6.1	Definição dos parâmetros do sistema	61
6.2	Resultados da redução do modelo em elementos finitos	62
6.3	Resultados da calibração do controlador	63
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	67
7.1	Cenário 1 - Resposta à excitação senoidal de 10,34Hz	67
7.2	Cenário 2 - Resposta à excitação senoidal de 83,21Hz	74
7.3	Cenário 3 - Resposta à excitação senoidal de 40Hz	82

7.4	Cenário 4 - Resposta ao impulso unitário	88
7.5	Cenário 5 - Resposta à função degrau	95
7.6	Cenário 6 - Resposta à função chirp	101
7.7	Cenário 7 - Resposta à excitação randômica	108
8	CONCLUSÕES	115
	REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho será realizada a modelagem de uma viga metálica flexível em balanço utilizando o Método do Elementos Finitos. Serão também modelados atuadores eletromagnéticos, os quais terão a função de atenuar as vibrações da viga. Os modelos mecânico (da viga) e eletromagnético (dos atuadores), serão acoplados, descritos no espaço de estados e um controlador será projetado para este sistema multifísico.

Este assunto, que é chamado de controle estrutural, tem-se mostrado mais importante à medida que mecanismos e estruturas tem-se tornado mais precisas e menos tolerantes às vibrações mecânicas (INMAN, 2006). Muitas estruturas como altos edifícios, braços manipuladores robóticos, eixos rotativos, superfícies de controle de voo e superfícies de satélites são projetadas utilizando-se técnicas de controle ativo de vibrações.

Neste contexto, o estudo e a aplicação de técnicas de controle ativo em uma viga flexível em balanço é de fundamental importância, pois as bases teóricas envolvidas nesse estudo podem posteriormente ser utilizadas em aplicações mais específicas de engenharia, como as já citadas no parágrafo anterior, por exemplo.

Existem várias técnicas de controle que podem ser utilizadas em controle estrutural, como, por exemplo, controle ótimo, robusto, proporcional-integral-derivativo (PID), dentre outras. O controle PID é uma das técnicas que se destaca bastante, sendo que, de acordo com Ogata (2011), mais da metade dos controladores industriais em uso atualmente emprega esquemas de controle PID ou PID modificado.

Sendo assim, a implementação e a simulação de cinco regras de calibração de controladores PID no sistema a ser controlado se torna muito útil, pois permite comparar e avaliar qual regra é a mais adequada e vantajosa (no que diz respeito a parâmetros como tempo de acomodação, *Overshoot* (sobressinal), consumo energético, dentre outros) para a aplicação em questão neste trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho consiste em projetar um controlador PID para atenuar vibrações em uma viga metálica flexível em balanço utilizando atuadores eletromagnéticos. A viga será modelada utilizando o Método dos Elementos Finitos. Serão realizadas a comparação das respostas da viga com e sem a aplicação de controle e a comparação do controlador atuando com diferentes regras de calibração. Todo o trabalho será realizado em ambiente computacional MATLAB/Simulink.

2.2 Objetivos específicos

- Obtenção dos modelos matemáticos da viga metálica flexível em balanço e dos atuadores eletromagnéticos (modelo multifísico) e implementação dos mesmos no MATLAB.
- Projeto e calibração do controlador utilizando MATLAB/Simulink.
- Simulação e animação gráfica da viga sujeita a diferentes tipos de perturbações externas e comparação entre as respostas da viga sem aplicação de controle e com aplicação de controle.
- Comparação do desempenho do controlador submetido a diferentes regras de calibração.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo será apresentado um breve histórico dos principais trabalhos desenvolvidos nos últimos anos relacionados ao tema desta monografia. Através deste breve histórico será possível perceber que o estudo proposto neste trabalho tem uma ampla gama de aplicações, desde mancais magnéticos ativos à suspensões automotivas ativas.

Os atuadores magnéticos vêm sendo estudados e desenvolvidos para as mais diversas aplicações de engenharia possíveis. De acordo com Schweitzer (2002), desde o início da década de 1970 estudos sobre mancais magnéticos ativos vêm sendo desenvolvidos afim de superar as limitações impostas por mancais de esferas e hidrodinâmicos. Isso ilustra uma das diversas aplicações possíveis para os atuadores eletromagnéticos.

Skowronsky e Bisese (1993) discorreram sobre o projeto de uma bancada de ensaios envolvendo mancais magnéticos. Os autores estudaram os parâmetros que poderiam ser alterados no projeto de forma a melhorar a atuação dos mancais com o menor custo possível. O objetivo do trabalho era construir uma base sólida de conhecimentos sobre esse assunto para posteriormente poder extrapolar esses estudos realizados na bancada de ensaios para a implementação de atuadores eletromagnéticos no controle dos painéis solares da Estação Espacial Internacional.

Boehm *et al.* (1993) examinou a aplicabilidade de diversos tipos de sensores de deslocamento em mancais magnéticos. Os sensores de deslocamento são responsáveis por fornecer ao controlador a distância entre o eixo e o mancal. Foram analisadas as influências da temperatura, de interferências externas, entre outras, na resposta dos sensores. As resoluções de diferentes tipos de sensores, como o de Efeito Hall, o ultrassônico e o *laser*, por exemplo, foram comparadas. O autor também comparou as respostas de sensores lineares e não-lineares e terminou concluindo que, apesar de sensores não-lineares poderem ser utilizados para essa aplicação, os sensores lineares fornecem respostas suficientemente boas para tal aplicação.

Howe (2000) apresentou quais as pesquisas relacionadas a atuadores magnéticos que estavam sendo desenvolvidas na Universidade de Sheffield no ano 2000. As principais áreas dessas pesquisas eram: aeroespacial, automotiva, industrial, saúde e computação. O autor discutiu sobre algumas particularidades de cada uma dessas pesquisas e ao final destacou o fato de existirem diversas possibilidades de utilização de atuadores magnéticos nos mais variados campos da ciência e da engenharia.

Schweitzer (2002) mencionou alguns problemas-chave no projeto de mancais eletromagnéticos, como, por exemplo, a influência do tamanho do mancal, da temperatura de opera-

ção, da precisão requerida e das perdas no comportamento do mancal e do eixo. Além disso, explicou como é feita a modelagem do mancal eletromagnético utilizando a Lei de Ampère, discutiu sobre a rigidez estática e dinâmica do sistema eixo-mancal e sobre as velocidades que podem ser atingidas pelo eixo e como o mancal lida com velocidades que coincidem com frequências de ressonância. O autor terminou fazendo uma análise sobre o controle inteligente implementado nesse tipo de mancal e mostrou como essas estratégias de controle podem ser melhoradas afim de tornar a operação desses mancais mais precisas e confiáveis.

Castro *et al.* (2007) propôs a utilização de atuadores eletromagnéticos na excitação de eixos rotativos. O principal objetivo da pesquisa foi utilizar esses atuadores para realizar análise modal em eixos rotativos. Foram analisadas as influências da geometria dos polos dos atuadores, do *air gap*, da corrente das bobinas e do material dos atuadores na força magnética gerada. Os modelos do atuador e do eixo rotativo foram simulados computacionalmente e validados experimentalmente. O autor concluiu que a força magnética é maior quando são utilizados polos que acompanham a curvatura do eixo e *air gaps* mínimos.

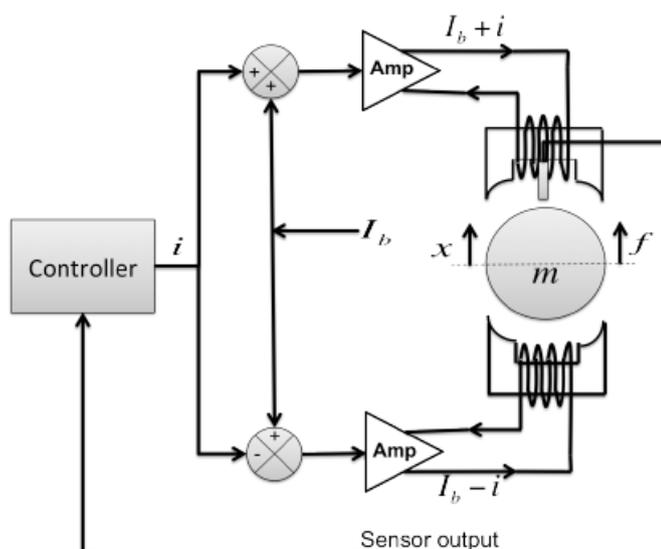
Crivellaro (2008) realizou o projeto de um sistema de suspensão automotiva semi-ativa utilizando atuadores eletromagnéticos e fluido magneto-reológico. Foram feitos a modelagem dos atuadores magneto-reológicos e o projeto do controlador do sistema de suspensão, cujo objetivo era melhorar o desempenho do automóvel no que diz respeito ao conforto, à dirigibilidade e à segurança. Foram realizadas simulações computacionais do sistema de suspensão acoplado a um modelo de automóvel. O autor, após validar os modelos experimentalmente, constatou que o sistema de suspensão desenvolvido foi capaz de melhorar o desempenho do automóvel nos quesitos desejados, acalçando-se assim os objetivos almejados.

Han *et al.* (2012) realizou a modelagem eletromagnética de um mancal magnético de pressão híbrido, com ímãs permanentes e bobinas, utilizando o método dos elementos finitos. Foi feita uma simulação transiente do fluxo magnético presente no mancal afim de analisar a contribuição do fluxo gerado pelos ímãs permanentes e pelas bobinas na dinâmica do sistema, utilizando diferentes correntes nas bobinas. O motivo principal da utilização de ímãs permanentes em conjunto com bobinas em mancais magnéticos é a economia de energia elétrica, pois parte da sustentação do eixo é realizada pelos ímãs permanentes, fazendo com que as bobinas consumam menos energia na geração das forças de controle. O trabalho desenvolvido por esse autor permitiu um maior conhecimento sobre a interação dos fluxos magnéticos gerados por

ímãs permanentes e por bobinas em mancais magnéticos, possibilitando o desenvolvimento de mancais magnéticos mais otimizados.

Anantachaisilp e Lin (2013) realizaram a análise experimental de controlador PID em mancais magnéticos ativos. O objetivo do estudo foi analisar o desempenho do controlador PID operando sob diferentes regras de calibração, afim de descobrir qual regra propiciava a maior robustez e os melhores resultados no que diz respeito à atenuação de vibrações indesejadas. Após a análise os autores concluíram que, dentre as cinco regras de sintonia experimentadas, a regra de *Pessen* (PE) foi a que apresentou a maior robustez e a regra de *Some overshoot* (SO-OV) foi a que apresentou a melhor performance na atenuação de vibrações. A Figura (3.1) apresenta o esquema de funcionamento dos mancais magnéticos utilizados nessa análise.

Figura 3.1 – Esquema de funcionamento de mancais magnéticos ativos.



Fonte: Anantachaisilp e Lin (2013).

Pilloto (2015) fez a modelagem de uma viga metálica flexível bi-engastada utilizando o método dos elementos finitos e realizou a modelagem de um atuador eletromagnético. Por meio de simulação computacional a viga foi perturbada e o atuador magnético foi utilizado para reduzir as vibrações na viga. Um controlador PID foi utilizado para controlar a força do atuador de acordo com a resposta vibratória da viga. Ao final do trabalho, o modelo computacional do sistema proposto por ele foi então validado experimentalmente.

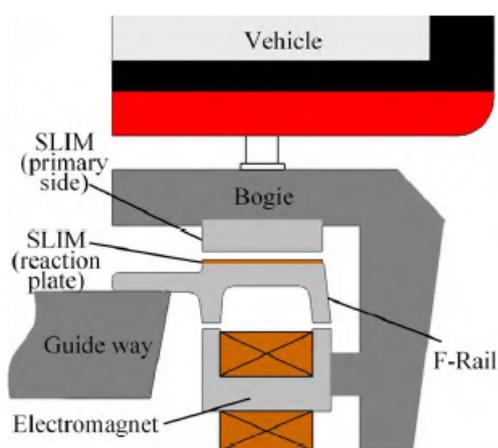
Martin (2016) também utilizou um atuador eletromagnético para atenuar vibrações em uma viga metálica, porém essa viga estava em balanço. Assim como o autor do parágrafo anterior, Martin (2016) realizou a modelagem da viga utilizando o método dos elementos finitos,

fez a modelagem do atuador eletromagnético, acoplou esses dois modelos em ambiente computacional, perturbou a viga e controlou ela utilizando um controlador PID. Além disso foram testadas diferentes regras de calibração dos controladores PID afim de avaliar qual delas era a mais eficiente na atenuação das vibrações da viga, concluindo que a regra de Ziegler-Nichols (ZN) era a mais eficiente na atenuação das vibrações quando a viga estava sujeita à perturbações do tipo ruído branco. O modelo também foi validado experimentalmente.

Chen e Liu (2017) propuseram um sistema de controle sem sensores para mancais ativos magnéticos com três polos. Esse sistema consiste em colocar uma bobina adicional em cada polo do mancal, a qual terá como função monitorar as variações de campo magnético geradas pela movimentação do eixo. Através do sinal de tensão entregue por essas bobinas adicionais, a posição do eixo será estimada e o controlador será alimentado com essa posição, sendo possível assim realizar o controle do sistema sem a utilização de sensores. O modelo proposto por esses autores foi simulado numericamente e obteve resultados consistentes.

Ding *et al.* (2018) propôs um modelo tridimensional em elementos finitos de um sistema de suspensão eletromagnética de um trem *Maglev* de velocidade intermediária (200 km/h), afim de analisar os efeitos de correntes parasitas na suspensão eletromagnética. Foram realizadas simulações considerando o trem em diferentes velocidades, com o intuito de entender o efeito de correntes parasitas na força magnética. Após isso, foram realizadas simulações do sistema de controle de altura do *airgap* entre o trem e o trilho, afim de quantificar a corrente adicional necessária nas bobinas para compensar o efeito das correntes parasitas. O sistema de suspensão eletromagnética é apresentado na Figura (3.2).

Figura 3.2 – Sistema de suspensão eletromagnética de trens *Maglev*.



Fonte: Ding *et al.* (2018).

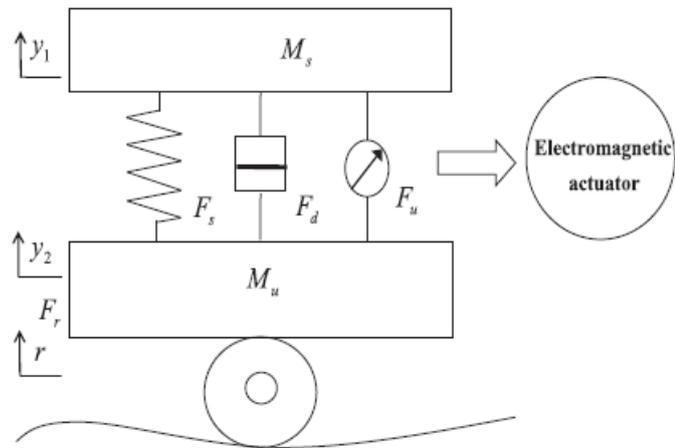
Giri (2019) demonstrou que a utilização de atuadores magnéticos híbridos no controle de posição angular de satélites é mais eficaz que a utilização de um único atuador, pois ao se utilizar apenas um atuador magnético haverá momentos em que o satélite ficará não controlável. Os atuadores híbridos são uma combinação de dois atuadores, um magnético e um *magneto-Coloumbic*, que atuam em diferentes eixos. O autor utilizou a estratégia de controle PD para controlar a posição angular do satélite.

Boddula e Asiri (2020) fizeram uma revisão sobre diversos tipos de atuadores utilizados em sistemas mecatrônicos e de como eles são aplicados em sistemas de controle. Nessa revisão, os autores citaram os atuadores pneumáticos, hidráulicos e eletromecânicos, mostrando como cada um deles funciona e em quais sistemas eles são geralmente utilizados. Foram apresentados também alguns esquemas de retroalimentação, na forma de diagrama de blocos, afim de explicar o funcionamento dos sistemas de controle e foi demonstrada a ampla área de aplicação desses atuadores na indústria.

Naderi e Sedigh (2020) apresentaram uma nova metodologia para seleção de atuadores em sistemas com atuadores redundantes baseada no índice de eficácia do atuador. Em sistemas com atuadores redundantes é necessário escolher qual atuador utilizar para atingir determinada resposta controlada. Sendo assim, a metodologia apresentada por esses autores consiste em um algoritmo que calcula qual ou quais atuadores farão o sistema alcançar a resposta controlada no menor tempo possível e com o menor consumo de energia possível. Além disso, esse algoritmo também é útil no momento do projeto, pois pode fornecer o melhor local para se colocar os atuadores, de forma que eles possam atuar da forma mais eficiente possível.

Min *et al.* (2020) focou no desenvolvimento de uma nova técnica de controle de suspensões automotivas ativas que utilizam atuadores eletromagnéticos. O autor desenvolveu uma técnica de controle adaptativo não-linear por retroalimentação com controle ótimo inverso (uma variação do controle ótimo na qual as funções custo são determinadas a partir de movimentos considerados ótimos), na qual utilizou lógica *fuzzy* para projetar o observador de estados. Essa estratégia de controle desenvolvida foi validada através da simulação de um quarto de veículo. O sistema simulado está representado na Figura (3.3).

Figura 3.3 – Sistema de suspensão automotiva eletromagnética.



Fonte: Min *et al.* (2020).

Através da análise dos trabalhos reportados na literatura é possível observar a utilização de modelagens mecânicas de corpos rígidos e flexíveis, assim como de modelagens de atuadores eletromagnéticos, no desenvolvimento dos mais variados tipos de dispositivos tecnológicos, como mancais eletromagnéticos ativos, trens com levitação eletromagnética e suspensões automotivas ativas. Além disso, a maioria dos trabalhos apresentados mostrou a aplicação de técnicas de controle no projeto desses dispositivos tecnológicos.

Sendo assim, o desenvolvimento do atual trabalho é de fundamental importância, pois ele contém conceitos chave que poderão posteriormente ser aplicados no desenvolvimento de aparatos tecnológicos que contenham corpos flexíveis, atuadores eletromagnéticos e que necessitem da implementação de técnicas de controle.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA

4.1 Introdução

Neste capítulo é exposta a teoria que fundamenta as análises computacionais realizadas neste trabalho. Primeiramente será apresentado o Método dos Elementos Finitos (MEF) e a modelagem da viga aqui utilizada. Além disso, o modo como foram realizados a redução de modelo e o acréscimo dos efeitos do engaste e do munhão ao modelo da viga será apresentado.

Apresenta-se uma descrição minuciosa do efeito eletromagnético, ressaltando a interação multifísica entre o domínio magnético e mecânico da viga metálica. Após a obtenção do modelo multifísico reduzido contendo a viga, o engaste, o munhão, os atuadores e o excitador, o modo como foi realizada a representação desse modelo no espaço de estados será explicitado. O motivo dessa representação é que o projeto do controlador foi realizado no espaço de estados.

4.2 Modelagem utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF)

Segundo Logan (2016) o método dos elementos finitos é um método numérico para resolver problemas de engenharia. Alguns problemas típicos de engenharia que podem ser resolvidos utilizando esse método são: análises estruturais, transferência de calor e massa, escoamento de fluidos e análise de campos eletromagnéticos.

Ainda segundo esse autor, geralmente não é possível a obtenção de soluções matemáticas analíticas para simular a resposta de sistemas físicos envolvendo geometrias, cargas e propriedades de materiais complexas. Daí a necessidade de se utilizar métodos numéricos como o utilizado neste trabalho, afim de obter soluções numéricas aproximadas para a resposta de sistemas físicos complexos.

A formulação dos elementos finitos aplicada à uma análise estrutural estática resulta em um conjunto de equações algébricas, obtidas através da equação diferencial parcial (EDP) que rege o comportamento do componente analisado, devendo ser resolvidas de forma simultânea. Essas equações algébricas são obtidas através da discretização do domínio do problema em pequenas unidades acopladas (elementos finitos). Cada unidade é representada por uma dessas equações algébricas.

O método dos elementos finitos aplicado à uma análise estrutural dinâmica, que é o caso deste trabalho, transforma a EDP que rege todo o domínio estrutural em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs), as quais devem ser resolvidas simultaneamente. Es-

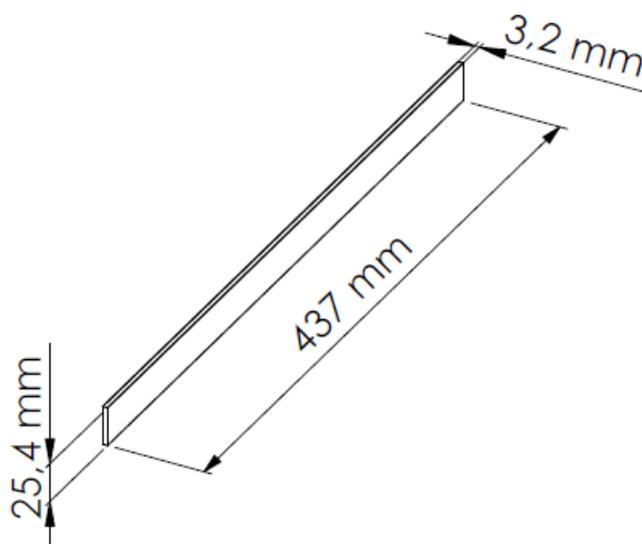
As EDOs são obtidas através da discretização do domínio do problema em pequenas unidades acopladas (elementos finitos), sendo que cada unidade é representada por uma dessas equações. Após isso, esse sistema de EDOs é resolvido utilizando-se algum método de integração numérica, obtendo-se assim a solução para a estrutura como um todo.

4.2.1 Modelagem da viga – modelo de Euler-Bernoulli

Segundo Logan (2016) uma viga é uma longa e fina estrutura que sofre efeitos de flexão quando é submetida à carregamentos transversais. Sendo assim, os graus de liberdade considerados por nó são o deslocamento transversal e a rotação.

A viga utilizada no presente trabalho (Figura 4.1) é constituída de Alumínio (Liga 6063) e as dimensões dela são: $2,54 \cdot 10^{-2}$ m de largura, $3,20 \cdot 10^{-3}$ m de espessura e 0,417 m de comprimento.

Figura 4.1 – Viga utilizada neste trabalho.



Fonte: Do autor (2021).

Existem vários modelos matemáticos para a representação de vigas, tendo cada um deles particularidades que os tornam adequados para diferentes tipos de viga. O modelo matemático que foi utilizado para representar a viga deste trabalho é o de Euler-Bernoulli, pois essa viga atende às considerações físicas que permitem o emprego de tal modelo. Essas considerações são, de acordo com Han (1999):

- O comprimento da viga é muito maior que as demais dimensões;
- O material é homogêneo e linearmente elástico;

- A linha elástica está contida nas secções transversais e é sempre perpendicular às mesmas (essa é a característica que diferencia o modelo de viga de Euler-Bernoulli do modelo de Timoshenko);
- Os efeitos de momento de inércia de rotação são desprezíveis.

De acordo com Kwon e Bang (2000), a equação diferencial parcial que prediz o comportamento dinâmico da viga de Euler-Bernoulli é:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (4.1)$$

onde $v(x, t)$ é o deslocamento transversal, E é o Módulo de Elasticidade do material, I é o momento de inércia de área da viga em relação ao eixo em que ocorre a deflexão (EI é o módulo de rigidez transversal da viga), $q(x, t)$ é a carga externa aplicada, $\bar{\rho}$ é a densidade de massa por comprimento, x é a posição ao longo do eixo da viga e t é o tempo.

Um dos métodos de média residual ponderada, o método de Galerkin, é utilizado por Kwon e Bang (2000) para a obtenção das matrizes de massa e de rigidez da viga na formulação em elementos finitos.

O resíduo R é definido como sendo:

$$R = \bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q(x, t) \quad (4.2)$$

e a média residual ponderada é:

$$I = \int_0^L R w dx = 0 \quad (4.3)$$

onde L é o comprimento da viga e w é a função teste.

Utilizando a formulação fraca da Equação 4.3, que consiste na integração por partes do segundo termo dessa equação duas vezes, e discretizando a viga em n elementos finitos, tem-se:

$$I = \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} \bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx + \int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_{\Omega^e} q w dx \right] + \left[-V w - M \frac{\partial w}{\partial x} \right] \Big|_0^L = 0 \quad (4.4)$$

onde $V = -EI \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)$ é a força cortante, $M = EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ é o momento fletor e Ω^e é o domínio do elemento.

Funções de forma são então consideradas para interpolação espacial da deflexão transversal da viga em termos dos graus de liberdade de cada elemento. Essas funções também são obtidas através das soluções tentativa da Equação 4.3. Sendo assim, é considerado um elemento com dois nós, um em cada extremidade, tendo cada nó dois graus de liberdade (um de translação vertical e um de rotação).

Ainda de acordo com Kwon e Bang (2000), como cada elemento tem quatro graus de liberdade, é ideal que se escolha um polinômio cúbico como polinômio interpolador (solução tentativa):

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.5)$$

Afim de manter a continuidade, a deflexão transversal e a rotação do nó compartilhado entre dois elementos são as mesmas. Além disso, de acordo com a consideração (assumida no modelo de Euler-Bernoulli) de que a linha elástica está contida nas secções transversais e é sempre perpendicular à elas, é correto afirmar que a rotação é igual à derivada em x da deflexão ($\phi = \partial v / \partial x$). Sendo assim:

$$\phi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad (4.6)$$

Aplicando as condições de contorno para a deflexão e para a rotação (Equação 4.7) nas Equações 4.5 e 4.6, resolvendo para as constantes, substituindo esses resultados na Equação 4.5 e reorganizando os termos, são obtidas as funções de forma Hermitianas presentes na Equação 4.8 (KWON; BANG, 2000).

$$v(0) = v_1 \quad \phi(0) = \phi_1 \quad v(l) = v_2 \quad \phi(l) = \phi_2 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \\
H_2 &= \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \\
H_3 &= -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \\
H_4 &= \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sendo assim, a equação para a deflexão transversal (solução tentativa) fica da seguinte forma:

$$v(x) = H_1 v_1 + H_2 \phi_1 + H_3 v_2 + H_4 \phi_2 \tag{4.9}$$

De acordo com o método de Galerkin, a função teste (w) é obtida a partir da função tentativa da seguinte forma:

$$w = \frac{\partial v(x)}{\partial a_i} \tag{4.10}$$

onde a_i são as constantes presentes na solução tentativa (Equação 4.5). Como a Equação 4.5 foi reorganizada após a aplicação das condições de contorno no elemento, as constantes (em relação à x) passaram a ser os graus de liberdade dos nós do elemento. Sendo assim, ao derivar a função v em relação aos graus de liberdade do elemento, tem-se:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{\partial v(x)}{\partial v_1} = H_1 \\
w_2 &= \frac{\partial v(x)}{\partial \phi_1} = H_2 \\
w_3 &= \frac{\partial v(x)}{\partial v_2} = H_3 \\
w_4 &= \frac{\partial v(x)}{\partial \phi_2} = H_4
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde v_1, ϕ_1, v_2 e ϕ_2 são, respectivamente, a deflexão transversal e a rotação do nó 1 e a deflexão transversal e a rotação do nó 2.

Considerando-se o vetor $\mathbf{w} = \{H_1 H_2 H_3 H_4\}^T$ como sendo o vetor contendo todas as funções teste obtidas na Equação 4.11 e reescrevendo a Equação 4.9 na forma matricial, tem-se:

$$v(x) = [H_1 H_2 H_3 H_4] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

onde $\{\mathbf{d}^e\} = \{v_1 \phi_1 v_2 \phi_2\}^T$ é o vetor deslocamento dos graus de liberdade do elemento.

Segundo Kwon e Bang (2000), a matriz de massa do elemento é obtida através do primeiro termo da Equação 4.4 e a matriz de rigidez é obtida através do segundo termo dessa mesma equação. Sendo assim, a matriz de massa elementar $[\mathbf{M}^e]$ é obtida da seguinte forma:

$$[\mathbf{M}^e] \cdot \{\mathbf{d}^e\} = \int_0^l \bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx \quad (4.13)$$

$$[\mathbf{M}^e] \cdot \{\mathbf{d}^e\} = \int_0^l \rho A \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} \cdot [H_1 H_2 H_3 H_4] \cdot \{\mathbf{d}^e\} dx \quad (4.14)$$

$$[\mathbf{M}^e] = \int_0^l \rho A \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} \cdot [H_1 H_2 H_3 H_4] dx \quad (4.15)$$

onde ρ é a densidade de massa da viga, A é a área da seção transversal da viga e $\{\mathbf{d}^e\}$ é o vetor aceleração das coordenadas generalizadas do elemento.

Logo, avaliando-se a integral da Equação 4.15, tem-se a matriz de massa elementar da viga de Euler-Bernoulli:

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A matriz de rigidez elementar é obtida da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}^e] \cdot \{\mathbf{d}^e\} = \int_0^l EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} dx \quad (4.17)$$

Considerando que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = [H_1'' \ H_2'' \ H_3'' \ H_4''] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} = \begin{Bmatrix} H_1'' \\ H_2'' \\ H_3'' \\ H_4'' \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Então:

$$[\mathbf{K}^e] \cdot \{\mathbf{d}^e\} = \int_0^l EI \begin{Bmatrix} H_1'' \\ H_2'' \\ H_3'' \\ H_4'' \end{Bmatrix} \cdot [H_1'' \ H_2'' \ H_3'' \ H_4''] \cdot \{\mathbf{d}^e\} dx \quad (4.20)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_0^l EI \begin{Bmatrix} H_1'' \\ H_2'' \\ H_3'' \\ H_4'' \end{Bmatrix} \cdot [H_1'' \ H_2'' \ H_3'' \ H_4''] dx \quad (4.21)$$

Logo, a matriz de rigidez elementar da viga de Euler-Bernoulli é:

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Após a definição das matrizes elementares de massa e rigidez é necessário definir a matriz de amortecimento elementar. Segundo Kwon e Bang (2000), a estimativa da matriz de amortecimento de um sistema físico é uma tarefa complexa e existem vários métodos para obter tal matriz.

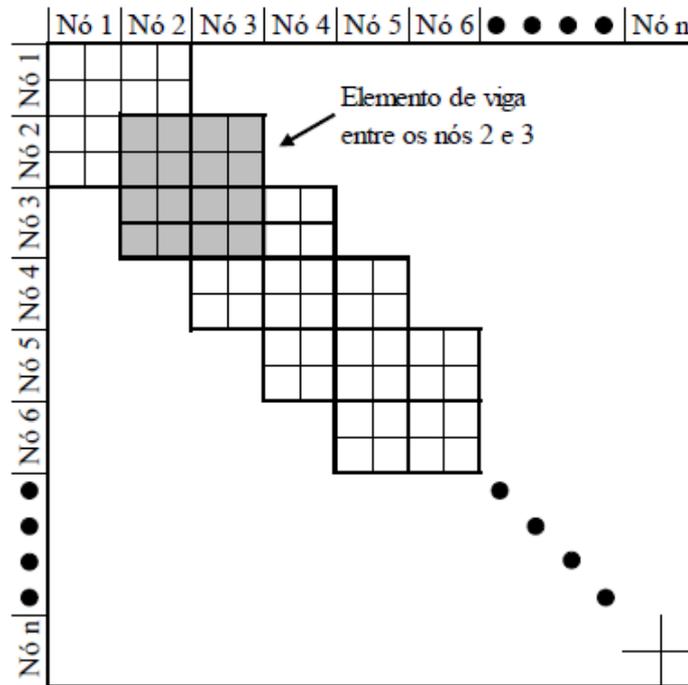
Em algumas situações particulares, o amortecimento de uma estrutura pode ser considerado como sendo proporcional. Amortecimento proporcional, ou *Rayleigh damping*, é o amortecimento que é proporcional às matrizes de massa e de rigidez do sistema (KWON; BANG, 2000; MAIA; SILVA, 1997), como mostrado na Equação 4.23:

$$[\mathbf{C}^e] = \alpha [\mathbf{M}^e] + \beta [\mathbf{K}^e] \quad (4.23)$$

sendo α e β coeficientes de proporcionalidade, os quais são determinados experimentalmente.

Através das matrizes elementares de massa, de amortecimento e de rigidez foi possível obter as matrizes globais de massa, de amortecimento e de rigidez da viga. A quantidade de elementos utilizados foi definida através do estudo de convergência de malha, o qual será explicado na Subseção 4.2.2. A obtenção das matrizes globais ocorreu por meio da superposição das matrizes elementares de cada elemento, como é mostrado na Figura 4.2. A equação da viga, em forma canônica, está apresentada na Equação 4.24.

Figura 4.2 – Montagem das matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez.



Fonte: Martin (2016).

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.24)$$

onde $\{\mathbf{F}\}$ é o vetor de forças externas aplicadas à viga.

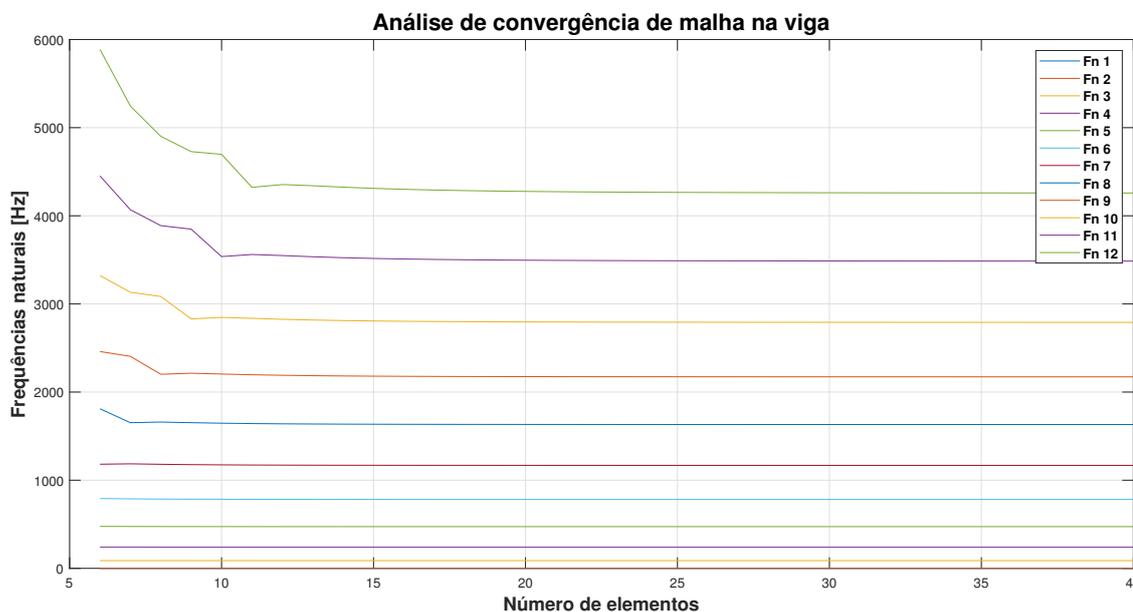
4.2.2 Análise de convergência de malha

Segundo Rao (2005), o número de elementos a ser escolhido depende da acurácia numérica desejada, do número de graus de liberdade e do tamanho dos elementos. Porém, a partir de determinado número de elementos a acurácia não pode ser melhorada significativamente, o que indica que se for utilizada uma quantidade de elementos superior a este número o esforço computacional para simular o modelo aumentará desnecessariamente.

Um estudo para saber qual a quantidade mínima de elementos necessária para representar adequadamente o comportamento da viga foi necessário. Esse estudo é conhecido como análise de convergência de malha.

A análise de convergência de malha realizada neste trabalho comparou as primeiras 12 (doze) frequências naturais da viga na condição livre-livre para modelagens com diferentes quantidades de elementos. A Figura 4.3 apresenta os resultados desta análise.

Figura 4.3 – Análise de convergência de malha na viga.



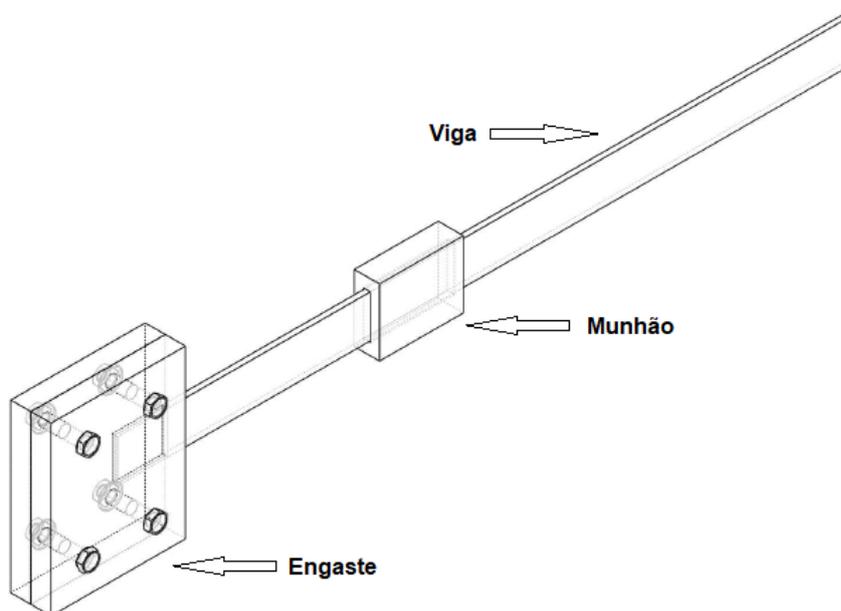
Fonte: Do autor (2021).

Através da análise da Figura 4.3 é possível observar que as frequências naturais para modelagens acima de 20 (vinte) elementos não apresentaram alterações significativas. Sendo assim, a viga do presente trabalho foi modelada com 20 (vinte) elementos de tamanhos iguais.

4.2.3 Modelagem do munhão

O munhão é aqui definido como sendo uma estrutura retangular vazada, de Aço Carbono 1020, que foi acoplada à viga (Figura 4.4). O motivo de sua utilização consiste no fato de que a Liga de Alumínio 6063, material do qual a viga é feita, tem reação praticamente nula à um campo magnético próximo à ela. Como os atuadores utilizados neste trabalho são eletromagnéticos, é necessário que o local da viga onde a força de controle foi aplicada reaja de forma satisfatória à aplicação de um campo magnético. Além disso, segundo Martin (2016), o munhão auxilia na redução da perda de campo magnético por dispersão no ar na região do entreferro, devido à sua maior área de secção transversal.

Figura 4.4 – Viga engastada com munhão.



Fonte: Do autor (2021).

Porém, ao adicionar o munhão à viga, foi necessário também considerar o efeito dinâmico deste no modelo dela, pois o munhão acrescentou massa, rigidez e amortecimento à viga. Como o movimento do munhão é solidário aos movimentos da viga, é razoável assumir que o regime de deformação do munhão seja igual ao da viga, sendo possível também representar o munhão com o modelo de viga de Euler-Bernoulli (MARTIN, 2016).

Sendo assim, para que fosse possível acoplar os modelos da viga e do munhão, o munhão foi discretizado em elementos finitos de mesmo tamanho dos elementos utilizados no modelo da viga. Após isso, as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento do munhão foram obtidas. O modelo do munhão foi acoplado à viga nos elementos 10, 11, 12 e 13 (nós 10, 11, 12, 13 e 14).

4.2.4 Redução do modelo de elementos finitos na condição livre-livre

O modelo de viga utilizado tem 20 elementos e 21 nós. Sendo assim, a viga possui 42 graus de liberdade na condição livre-livre. Considerando que foi necessária a realização de várias simulações afim de projetar o controlador, a utilização de uma malha tão densa resultaria em elevado tempo de simulação. Sendo assim, um método de redução de modelos em elementos finitos foi empregado.

O método de redução utilizado foi a redução estática de Guyan, apresentada por Friswell *et al.* (2000) e Subbiah *et al.* (1989). Apesar deste método ser adequado para sistemas com amortecimento desprezível, segundo Martin (2016), que fez um estudo semelhante ao realizado neste trabalho, tal método produz resultados precisos o suficiente, pois a viga é bastante flexível, está em balanço e tem amortecimento consideravelmente pequeno.

O equacionamento deste método se dá da seguinte forma: primeiramente considera-se a equação de movimento (Equação 4.24), repetida na Equação 4.25 por conveniência.

$$[\mathbf{M}]_{(42 \times 42)} \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{(42 \times 1)} + [\mathbf{C}]_{(42 \times 42)} \{\dot{\mathbf{d}}\}_{(42 \times 1)} + [\mathbf{K}]_{(42 \times 42)} \{\mathbf{d}\}_{(42 \times 1)} = \{\mathbf{F}\}_{(42 \times 1)} \quad (4.25)$$

Considerando que na redução estática o amortecimento é desprezível, o amortecimento deve ser ignorado na Equação 4.25.

$$[\mathbf{M}]_{(42 \times 42)} \{\ddot{\mathbf{d}}\}_{(42 \times 1)} + [\mathbf{K}]_{(42 \times 42)} \{\mathbf{d}\}_{(42 \times 1)} = \{\mathbf{F}\}_{(42 \times 1)} \quad (4.26)$$

Além disso, de acordo com Friswell *et al.* (2000), na redução estática os termos de inércia da Equação 4.26 devem ser negligenciados, resultando na Equação 4.27.

$$[\mathbf{K}]_{(42 \times 42)} \{\mathbf{d}\}_{(42 \times 1)} = \{\mathbf{F}\}_{(42 \times 1)} \quad (4.27)$$

Neste momento é necessário escolher quais os graus de liberdade devem permanecer (*masters*) no modelo e quais devem ser retirados (*slaves*). Para realizar essa escolha, Friswell *et al.* (2000) recomenda analisar as relações (k/m) da diagonal principal das matrizes de massa e de rigidez. Devido ao fato dos termos de inércia terem sido negligenciados na Equação 4.27, os graus de liberdade que tiverem a relação (k/m) associada muito alta devem ser retirados, pois os efeitos de inércia são desprezíveis comparados aos efeitos de rigidez. Os graus de liberdade que tiverem a relação (k/m) associada muita baixa devem ser mantidos, pois os efeitos de inércia são relevantes, se comparados aos efeitos de rigidez. Seguindo essa lógica, os graus de liberdade de rotação foram retirados do modelo da viga do presente trabalho.

Além disso, no que diz respeito à quantidade de graus de liberdade que devem ser mantidos, Friswell *et al.* (2000) recomenda que o número de graus de liberdade mantidos no modelo deve ser o dobro da quantidade de autovalores desejada na faixa de frequência de interesse.

Essa recomendação foi obedecida. A matriz de rigidez, o vetor de deslocamentos e o vetor de forças foram reorganizados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{mm}]_{(21 \times 21)} & [\mathbf{K}_{ms}]_{(21 \times 21)} \\ [\mathbf{K}_{sm}]_{(21 \times 21)} & [\mathbf{K}_{ss}]_{(21 \times 21)} \end{bmatrix}_{(42 \times 42)} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} \\ \{\mathbf{d}_s\}_{(21 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(42 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_m\}_{(21 \times 1)} \\ \{\mathbf{0}\}_{(21 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(42 \times 1)} \quad (4.28)$$

onde o subscrito m indica os graus de liberdade que permanecerão (*masters*) e o subscrito s indica os graus de liberdade que serão retirados (*slaves*).

Tomando-se a segunda linha do sistema da Equação 4.28 e isolando-a para os graus de liberdade a serem retirados:

$$[\mathbf{K}_{sm}]_{(21 \times 21)} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} + [\mathbf{K}_{ss}]_{(21 \times 21)} \{\mathbf{d}_s\}_{(21 \times 1)} = \{\mathbf{0}\}_{(21 \times 1)} \quad (4.29a)$$

$$\{\mathbf{d}_s\}_{(21 \times 1)} = \left(-[\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sm}] \right)_{(21 \times 21)} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} \quad (4.29b)$$

Escrevendo-se o vetor de deslocamentos global da forma como escrito na Equação 4.28 e fazendo-se algumas manipulações tem-se:

$$\{\mathbf{d}\}_{(42 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} \\ \{\mathbf{d}_s\}_{(21 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(42 \times 1)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{mm}]_{(21 \times 21)} \\ \left(-[\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sm}] \right)_{(21 \times 21)} \end{bmatrix}_{(42 \times 21)} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} \quad (4.30)$$

onde $[\mathbf{I}_{mm}]$ é uma matriz identidade de ordem igual ao tamanho do vetor $\{\mathbf{d}_m\}$.

Dessa forma é definida a matriz de transformação (Equação 4.31a) que foi utilizada para realizar a redução das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da equação de movimento do sistema completo (*full*).

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{mm}] \\ -[\mathbf{K}_{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_{sm}] \end{bmatrix}_{(42 \times 21)} \quad (4.31a)$$

$$\{\mathbf{d}\}_{(42 \times 1)} = [\mathbf{T}]_{(42 \times 21)} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} \quad (4.31b)$$

As matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez reduzidas foram obtidas da seguinte forma:

$$[\mathbf{M}_R]_{(21 \times 21)} = [\mathbf{T}]_{(21 \times 42)}^{-1} [\mathbf{M}]_{(42 \times 42)} [\mathbf{T}]_{(42 \times 21)} \quad (4.32a)$$

$$[\mathbf{C}_R]_{(21 \times 21)} = [\mathbf{T}]_{(21 \times 42)}^{-1} [\mathbf{C}]_{(42 \times 42)} [\mathbf{T}]_{(42 \times 21)} \quad (4.32b)$$

$$[\mathbf{K}_R]_{(21 \times 21)} = [\mathbf{T}]_{(21 \times 42)}^{-1} [\mathbf{K}]_{(42 \times 42)} [\mathbf{T}]_{(42 \times 21)} \quad (4.32c)$$

$$\{\mathbf{F}_m\}_{(21 \times 1)} = [\mathbf{T}]_{(21 \times 42)}^{-1} \{\mathbf{F}\}_{(42 \times 1)} \quad (4.32d)$$

Sendo assim, a equação de movimento do sistema após a redução de modelo é apresentada na Equação 4.33.

$$[\mathbf{M}_R]_{(21 \times 21)} \{\ddot{\mathbf{d}}_m\}_{(21 \times 1)} + [\mathbf{C}_R]_{(21 \times 21)} \{\dot{\mathbf{d}}_m\}_{(21 \times 1)} + [\mathbf{K}_R]_{(21 \times 21)} \{\mathbf{d}_m\}_{(21 \times 1)} = \{\mathbf{F}_m\}_{(21 \times 1)} \quad (4.33)$$

4.2.5 Condições de contorno

Considerando que a viga estudada neste trabalho está engastada, foi necessário representar essa condição no modelo dela (Equação 4.33). De acordo com Kwon e Bang (2000), essa representação é feita retirando-se as linhas e as colunas referentes aos graus de liberdade engastados nas matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez globais. Além disso, os graus de liberdade engastados devem ser removidos dos vetores de posição, de velocidade e de aceleração globais.

Os dois primeiros graus de liberdade da viga foram engastados e a Equação 4.33 ficou da seguinte forma:

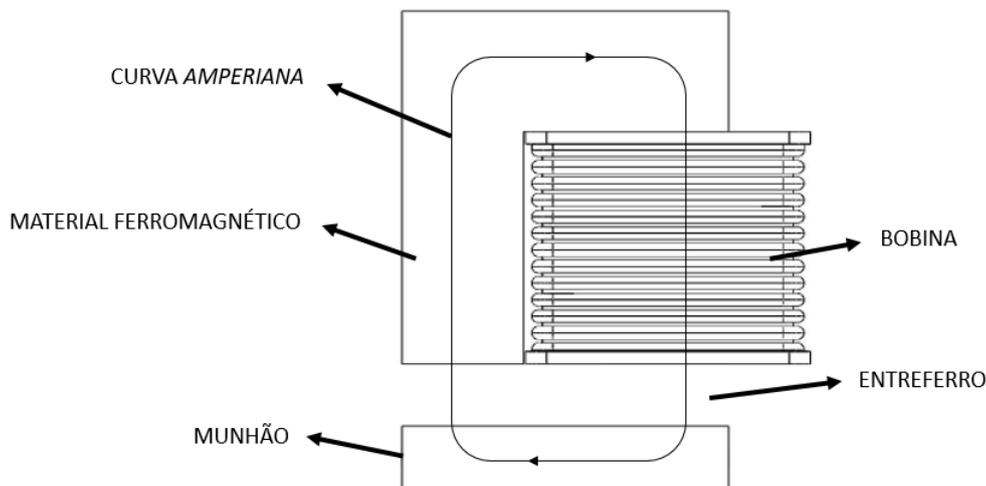
$$[\mathbf{M}_R]_{(19 \times 19)} \{\ddot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{C}_R]_{(19 \times 19)} \{\dot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{K}_R]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{d}_m\}_{(19 \times 1)} = \{\mathbf{F}_m\}_{(19 \times 1)} \quad (4.34)$$

4.3 Modelagem dos atuadores eletromagnéticos

A modelagem dos atuadores eletromagnéticos será apresentada nesta seção, afim de que fique clara a relação entre a corrente que energiza as bobinas e a força magnética gerada e aplicada ao munhão.

A Figura 4.5 apresenta de forma detalhada os componentes de um atuador eletromagnético. É possível observar nessa figura uma curva fechada que passa pelo centro do solenoide do atuador, a qual, segundo Halliday *et al.* (2008), é chamada de curva *amperiana*. Essa curva é arbitrária e, no presente trabalho, foi estabelecida coincidente com o caminho do fluxo magnético (ϕ) gerado pelo solenoide, para facilitar a visualização do fenômeno físico aqui representado.

Figura 4.5 – Atuador eletromagnético.



Fonte: Do autor (2021).

A lei que estabelece a relação entre a quantidade de corrente que passa por um fio e a densidade de fluxo magnético gerado no entorno desse fio é a Lei de Ampère, a qual é apresentada na Equação 4.35:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = \mu_0 \cdot I \quad (4.35)$$

onde \vec{B} é a densidade de fluxo magnético gerado no entorno da bobina, $d\vec{s}$ é o caminho descrito pela curva *amperiana*, μ_0 é a permeabilidade magnética do meio por onde passa a curva *amperiana* e I é a corrente total envolvida por essa mesma curva.

A relação entre intensidade de campo magnético (H) e densidade de fluxo magnético é apresentada pela Equação 4.36:

$$B = \mu_0 H \quad (4.36)$$

e a relação entre a densidade de fluxo magnético e o fluxo magnético é a seguinte:

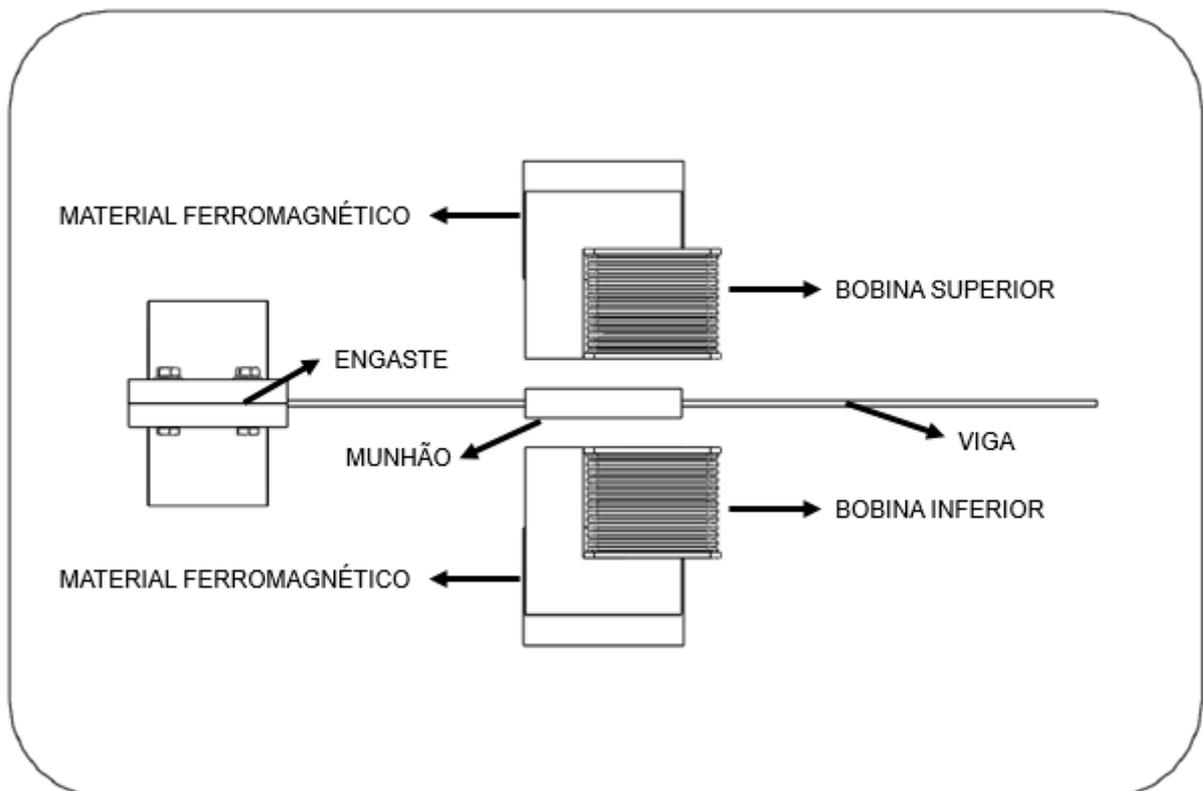
$$B = \frac{\phi}{A_m} \quad (4.37)$$

onde A_m é a área da secção transversal do caminho percorrido pelo fluxo magnético.

Afim de simplificar a análise, é considerado que a densidade de fluxo magnético é uniforme ao longo de todo o caminho percorrido pelo fluxo magnético. Ou seja, a área da secção transversal deste caminho é considerada constante e igual à área de secção transversal do material ferromagnético. Segundo Tipler e Mosca (2011), essa simplificação pode ser feita apenas quando a largura do entreferro é muito pequena.

Considerando-se que o material ferromagnético no interior da bobina é aço e que o munhão mantém certa distância dos atuadores (*air gap*), não encostando nunca neles, como é mostrado nas Figuras 4.5 e 4.6, é possível notar que o caminho percorrido pelo fluxo magnético é composto por dois materiais diferentes, aço e ar. Sendo assim, é necessário levar em consideração as diferentes permeabilidades magnéticas destes materiais.

Figura 4.6 – Vista superior da interação entre atuadores eletromagnéticos e munhão/viga.



Fonte: Do autor (2021).

Isso pode ser feito manipulando a Equação 4.35 da forma como é mostrado na Equação 4.38 e, posteriormente, desenvolvendo o lado esquerdo desta equação, como é mostrado na Equação 4.39:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot i \quad (4.38)$$

onde N é o número de espiras da bobina e i é a corrente com a qual a bobina é alimentada.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_n s_n + H_g s_g \quad (4.39)$$

onde s_n e s_g representam, respectivamente, as somas dos comprimentos dos trechos da curva *amperiana* no interior do material ferromagnético e no entreferro, (*gap* entre o atuador e o munhão). O H_n e o H_g representam, respectivamente, a intensidade do campo magnético no material ferromagnético e no entreferro.

Substituindo a Equação 4.36 na Equação 4.39, tem-se:

$$H_n s_n + H_g s_g = \left(\frac{B_n}{\mu_n} \right) s_n + \left(\frac{B_g}{\mu_g} \right) s_g \quad (4.40)$$

Combinando as Equações 4.38, 4.39 e 4.40 e lembrando que a densidade de campo magnético foi considerada constante em toda a curva *amperiana*, chega-se à Equação 4.41.

$$B \left(\frac{s_n}{\mu_n} + \frac{s_g}{\mu_g} \right) = N i \quad (4.41)$$

A permeabilidade magnética presente no entreferro é a do ar, a qual, de acordo com Tipler e Mosca (2011), pode ser considerada igual à do vácuo (μ_0), devido à proximidade de ambos os valores. Além disso, a permeabilidade magnética de um material ferromagnético é muito maior que a do ar, podendo ser feita a seguinte simplificação:

$$\frac{B s_g}{\mu_g} \approx N i \quad (4.42)$$

A curva *amperiana* passa pelo entreferro em dois locais diferentes. Devido à pequena distância entre esses dois espaços, foi assumido que não há diferença de comprimentos entre esses entreferros. O comprimento de cada entreferro foi denotado por z . Tais considerações podem ser vistas na Equação 4.43.

$$\frac{B \ 2 \ z}{\mu_g} = N \ i \quad (4.43)$$

Isolando-se a densidade de campo magnético na Equação 4.43, a qual será necessária para o cálculo da energia magnética armazenada na região do entreferro, tem-se:

$$B = \frac{N \ i \ \mu_g}{2 \ z} \quad (4.44)$$

A energia magnética contida no campo magnético de um solenoide é representada da seguinte forma, de acordo com Halliday *et al.* (2008):

$$U_m = \frac{1}{2} L_m i^2 \quad (4.45)$$

onde L_m é a indutância do solenoide e i é a corrente que passa pelo mesmo.

Afim de adequar a Equação 4.45 para o uso no presente trabalho, foram feitas algumas manipulações. A intenção era encontrar a quantidade de energia magnética armazenada na região do entreferro. Sendo assim, primeiramente foi encontrada a energia magnética por unidade de volume.

$$u_m = \frac{U_m}{2 \ L \ A_m} L_m i^2 = \frac{i^2 \ L_m}{2 \ L \ A_m} \quad (4.46)$$

onde L é um comprimento arbitrário.

De acordo com Halliday *et al.* (2008), a indutância por unidade de comprimento do solenoide é dada pela relação mostrada na Equação 4.47.

$$\frac{L_m}{L} = \mu A_m \frac{N^2}{L^2} \quad (4.47)$$

Substituindo a Equação 4.47 na 4.46 e reorganizando, tem-se:

$$u_m = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{N i}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (4.48)$$

Como a intenção é encontrar a quantidade de energia magnética armazenada na região do entreferro, a densidade de fluxo magnético utilizada na Equação 4.48 é a apresentada na Equação 4.44. Então:

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (4.49)$$

Afim de encontrar a energia armazenada em uma região do entreferro, u_m foi multiplicado pelo volume dessa região, como é mostrado na Equação 4.50. Para encontrar a energia total armazenada no entreferro é necessário multiplicar o valor encontrado nessa equação por dois, pois o entreferro é composto por duas regiões consideradas idênticas.

$$U_m = u_m (A_m z) = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (A_m z) \quad (4.50)$$

Após a definição da energia magnética contida nas regiões do entreferro, foi possível definir a força magnética exercida pela bobina no munhão. O trabalho realizado ao longo de um deslocamento por uma força conservativa é igual à variação de alguma energia potencial que foi fornecida para a realização desse trabalho. Essa declaração pode ser vista com mais clareza nas Equações 4.51 e 4.52.

$$\Delta W = F \Delta d \quad (4.51)$$

$$\Delta W = -\Delta U_{\text{potencial}} \quad (4.52)$$

Substituindo a Equação 4.52 na 4.51, admitindo-se que a energia potencial é a energia magnética armazenada em uma região do entreferro, isolando-se a força e considerando as variações de trabalho, de energia potencial e de deslocamento como sendo variações infinitesimais, tem-se:

$$F = -\frac{\partial U_m}{\partial z} \quad (4.53)$$

onde ∂z é a variação da largura do entreferro e F é a força magnética gerada, que está na mesma direção de z .

Substituindo a Equação 4.50 na 4.53 e tomando-se o módulo dessa força, chegou-se à Equação 4.54, que é a força magnética gerada considerando-se apenas uma região do entreferro. Afim de considerar as duas regiões do entreferro, a Equação 4.54 deve ser multiplicada por dois (Equação 4.55).

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2 A_m}{\mu_0} \quad (4.54)$$

$$F_{TOTAL} = \frac{B^2 A_m}{\mu_0} \quad (4.55)$$

A densidade de campo magnético na Equação 4.55 pode ser substituída pela Equação 4.44, resultando na Equação 4.56.

$$F_{TOTAL} = \left(\frac{Ni\mu_g}{2z} \right)^2 \frac{A_m}{\mu_0} \quad (4.56)$$

Segundo Martin (2016), os equipamentos e as situações reais são diferentes das ideais. Em um protótipo real do presente projeto podem ocorrer fugas de corrente e difusão de linhas de campo magnético. Sendo assim, a força magnética real será menor que a calculada pela Equação 4.56. Afim de contabilizar essas perdas, um fator de correção (ϵ) foi estabelecido. Esse fator de correção deverá ser obrigatoriamente menor do que um, pois sua função é reduzir a força calculada. A Equação 4.57 apresenta a força magnética corrigida.

$$F_{TOTAL} = \epsilon \left(\frac{Ni\mu_g}{2z} \right)^2 \frac{A_m}{\mu_0} \quad (4.57)$$

A força magnética gerada por um dos atuadores foi calculada utilizando a Equação 4.57. Considerando que os atuadores magnéticos podem exercer apenas forças de atração sobre o munhão, foi necessário a utilização de dois deles, um de cada lado da viga, porém na mesma direção, como mostrado na Figura 4.6. A força magnética total aplicada ao munhão (F_{MAG}) é apresentada na Equação 4.58, onde F_1 é a força total aplicada por um atuador e F_2 a força total aplicada pelo outro.

$$F_{MAG} = F_1 - F_2 \quad (4.58)$$

Porém, é necessário observar que a largura do entreferro dos dois atuadores varia devido ao movimento da viga. Afim de contemplar essa variação, ao substituir a Equação 4.57 na 4.58 foi considerado um pequeno deslocamento positivo (x) da viga em direção ao atuador superior. Os resultados de tal manipulação são apresentados nas Equações 4.59a, 4.59b e 4.59c, nas quais

F_1 é a força realizada pelo atuador superior da Figura 4.6 e F_2 é força realizada pelo atuador inferior dessa figura.

$$F_1 = \epsilon \frac{N^2 i_1^2 \mu_0 A_m}{4(z-x)^2} \quad (4.59a)$$

$$F_2 = \epsilon \frac{N^2 i_2^2 \mu_0 A_m}{4(z+x)^2} \quad (4.59b)$$

$$F_{MAG} = \epsilon \frac{N^2 i_1^2 \mu_0 A_m}{4(z-x)^2} - \epsilon \frac{N^2 i_2^2 \mu_0 A_m}{4(z+x)^2} \quad (4.59c)$$

Segundo Martin (2016), as correntes i_1 e i_2 devem ser compostas por uma parcela fixa, também chamada de corrente *bias* (i_{bias}) e uma parcela variável (i_x), responsável por alterar a força magnética na intenção de controlar a viga, sendo que a parcela variável deverá sempre ser menor ou igual à parcela fixa $i_x \leq i_{bias}$. Os motivos da utilização dessa parcela fixa e dessas relações são:

- As parcelas fixas são utilizadas para levar os atuadores para as suas regiões de linearidade.
- Evitar a inversão de sentido da corrente e consequente atraso na resposta do atuador por efeitos de histerese, através da relação $i_x \leq i_{bias}$.
- A parcela fixa também pode ser utilizada para aplicar uma força de pré-carga aos atuadores, caso isso seja de interesse.

Além disso é necessário observar que para se ter um deslocamento positivo em direção ao atuador superior, o campo magnético desse atuador deve ser maior que o do atuador inferior, o que implica que a corrente da bobina superior deve ser maior que a corrente da bobina inferior. Ou seja, para manter a coerência com o estabelecido, é necessário que:

$$i_1 = i_{bias} + i_x \quad (4.60a)$$

$$i_2 = i_{bias} - i_x \quad (4.60b)$$

Aplicando as considerações feitas sobre as correntes nos atuadores à Equação 4.59c, tem-se:

$$F_{MAG} = \frac{\epsilon N^2 \mu_0 A_m}{4} \left[\left(\frac{(i_{bias} + i_x)^2}{(z-x)^2} \right) - \left(\frac{(i_{bias} - i_x)^2}{(z+x)^2} \right) \right] \quad (4.61)$$

A distância máxima que pode ser atingida entre os atuadores e o munhão é pequena (da ordem de 9,99mm). Sendo assim, de acordo com Martin (2016), a Equação 4.61 pode ser linearizada em torno de algum ponto de operação, que aqui foi escolhido como sendo a posição da viga na qual $x = 0$ e $i_x = 0$. A linearização foi realizada utilizando uma expansão em Série de Taylor da Equação 4.61, da qual foram utilizados apenas os termos de primeira ordem.

$$F_{LIN}(0,0) = F_{MAG}\Big|_{\substack{x=0 \\ i_x=0}} + \frac{\partial}{\partial i_x} F_{MAG}\Big|_{\substack{x=0 \\ i_x=0}} (i_x - 0) + \frac{\partial}{\partial x} F_{MAG}\Big|_{\substack{x=0 \\ i_x=0}} (x - 0) + \dots \quad (4.62a)$$

$$F_{MAG} = F_{LIN}(0,0) \quad (4.62b)$$

Resolvendo as Equações 4.62a e 4.62b, tem-se:

$$F_{MAG} = \left(\epsilon N^2 \mu_0 A_m \frac{i_{bias}}{z^2} \right) i_x + \left(\epsilon N^2 \mu_0 A_m \frac{i_{bias}^2}{z^3} \right) x \quad (4.63)$$

Afim de facilitar manipulações matemáticas, a Equação 4.63 foi reescrita da seguinte forma:

$$F_{MAG} = K_i i_x + K_x x \quad (4.64)$$

onde:

$$K_i = \epsilon N^2 \mu_0 A_m \frac{i_{bias}}{z^2} \quad (4.65a)$$

$$K_x = \epsilon N^2 \mu_0 A_m \frac{i_{bias}^2}{z^3} \quad (4.65b)$$

A equação para a força magnética atuante no munhão foi deduzida e está apresentada na Equação 4.63. Tendo sido obtidos os modelos matemáticos do conjunto viga engastada e munhão e dos atuadores eletromagnéticos, o próximo passo foi realizar o acoplamento desses dois modelos.

4.4 Acoplamento do modelo multifísico

O acoplamento do modelo dos atuadores eletromagnéticos ao modelo de elementos finitos reduzido da viga engastada com o munhão consistiu em colocar a força exercida pelos

atuadores no lado direito da Equação 4.33, pois o vetor de forças externas $\{\mathbf{F}_p\}$ presente nessa equação é justamente a soma de todas as forças externas aplicadas ao modelo de elementos finitos. Sendo assim, o vetor $\{\mathbf{F}_p\}$ foi reescrito como sendo a força de controle exercida pelos atuadores $\{\mathbf{F}_{MAG}\}$ (Equação 4.66). Vale ressaltar que os atuadores só exercem força no grau de liberdade onde foram posicionados, logo o único componente não nulo do vetor $\{\mathbf{F}_{MAG}\}$ é aquele referente ao grau de liberdade 10 (nó 10) do modelo reduzido e engastado.

$$[\mathbf{M}_R]_{(19 \times 19)} \{\ddot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{C}_R]_{(19 \times 19)} \{\dot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{K}_R]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{d}_m\}_{(19 \times 1)} = \{\mathbf{F}_{MAG}\}_{(19 \times 1)} \quad (4.66)$$

onde:

$$\{\mathbf{F}_{MAG}\} = \begin{Bmatrix} [0]_{(9 \times 1)} \\ F_{MAG} \\ [0]_{(9 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(19 \times 1)} \quad (4.67)$$

Reescrevendo a Equação 4.66 utilizando a Equação 4.64, tem-se:

$$[\mathbf{M}_R]_{(19 \times 19)} \{\ddot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{C}_R]_{(19 \times 19)} \{\dot{\mathbf{d}}_m\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{K}_R]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{d}_m\}_{(19 \times 1)} = [\mathbf{K}_i]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{i}_x\}_{(19 \times 1)} + [\mathbf{K}_x]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{d}_m\}_{(19 \times 1)} \quad (4.68)$$

onde:

$$[\mathbf{K}_i] = \begin{bmatrix} [0]_{(9 \times 19)} \\ [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_i [0]_{(1 \times 9)} \\ [0]_{(9 \times 19)} \end{bmatrix}_{(19 \times 19)} \quad (4.69a)$$

$$[\mathbf{K}_x] = \begin{bmatrix} [0]_{(9 \times 19)} \\ [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_x [0]_{(1 \times 9)} \\ [0]_{(9 \times 19)} \end{bmatrix}_{(19 \times 19)} \quad (4.69b)$$

$$\{\mathbf{i}_x\} = \begin{Bmatrix} [0]_{(9 \times 1)} \\ \mathbf{i}_x \\ [0]_{(9 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(19 \times 1)} \quad (4.69c)$$

A Equação 4.68 pode ser manipulada e reescrita da forma como é apresentado na Equação 4.70. Quando isso é realizado, é possível observar que a rigidez da viga é reduzida no local de aplicação da força de controle.

$$[\mathbf{M}_R] \{\ddot{\mathbf{d}}_m\} + [\mathbf{C}_R] \{\dot{\mathbf{d}}_m\} + ([\mathbf{K}_R] - [\mathbf{K}_x]) \{\mathbf{d}_m\} = [\mathbf{K}_i] \{\mathbf{i}_x\} \quad (4.70)$$

Além da força de controle exercida pelos atuadores, foi considerada também uma força excitadora aplicada ao grau de liberdade 5 (nó 5) do modelo reduzido e engastado, a qual seria realizada por um *Shaker* em um aparato experimental. Essa força foi acrescentada ao lado direito da Equação 4.70, resultando na seguinte equação:

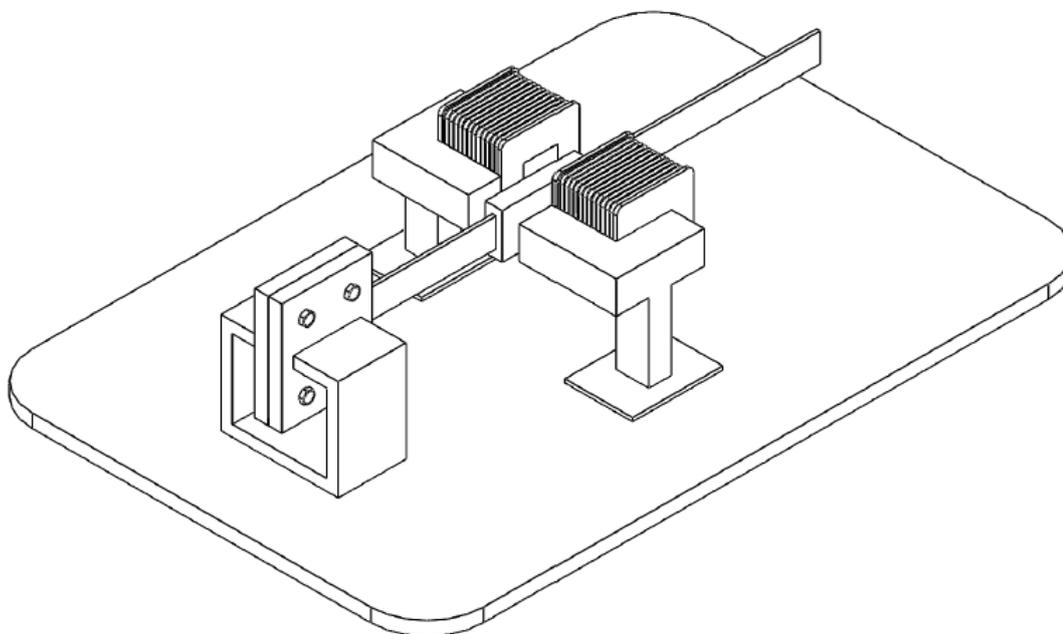
$$[\mathbf{M}_R] \{\ddot{\mathbf{d}}_m\} + [\mathbf{C}_R] \{\dot{\mathbf{d}}_m\} + ([\mathbf{K}_R] - [\mathbf{K}_x]) \{\mathbf{d}_m\} = [\mathbf{K}_i] \{\mathbf{i}_x\} + \{\mathbf{F}_{Shaker}\} \quad (4.71)$$

onde:

$$\{\mathbf{F}_{Shaker}\} = \begin{Bmatrix} [0]_{(4 \times 1)} \\ F_{Shaker} \\ [0]_{(14 \times 1)} \end{Bmatrix}_{(19 \times 1)} \quad (4.72)$$

Na Figura 4.7 é possível observar a montagem do sistema multifísico aqui modelado, porém sem o *Shaker*.

Figura 4.7 – Sistema com viga engastada e atuadores eletromagnéticos.



Fonte: Do autor (2021).

Após a completa modelagem desse sistema multifísico no domínio do tempo, o próximo passo consiste em representar esse modelo no espaço de estados, ação também conhecida pelo termo "*system realization*", de acordo com Inman (2006).

4.5 Representação do modelo multifísico no espaço de estados

O motivo pelo qual a modelagem desenvolvida foi representada no espaço de estados é que, devido ao fato do sistema aqui representado ser multigráus de liberdade (*MIMO system*), optou-se por realizar o projeto do controlador utilizando técnicas de projeto no espaço de estados.

Tal representação foi feita isolando-se o vetor de acelerações da Equação 4.71 e definindo-se uma equação identidade, formando o sistema de equações apresentado na Equação 4.73.

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{d}}_m\} &= \{\dot{\mathbf{d}}_m\} \\ \{\ddot{\mathbf{d}}_m\} &= -[\mathbf{M}_R]^{-1}([\mathbf{K}_R] - [\mathbf{K}_x])\{\mathbf{d}_m\} - [\mathbf{M}_R]^{-1}[\mathbf{C}_R]\{\dot{\mathbf{d}}_m\} + [\mathbf{M}_R]^{-1}([\mathbf{K}_i]\{\mathbf{i}_x\} + \{\mathbf{F}_{Shaker}\}) \end{aligned} \quad (4.73)$$

A Equação 4.73 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{d}}_m\} \\ \{\ddot{\mathbf{d}}_m\} \end{Bmatrix}_{(38 \times 1)} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{(19 \times 19)} & [\mathbf{I}]_{(19 \times 19)} \\ -[\mathbf{M}_R]^{-1}([\mathbf{K}_R] - [\mathbf{K}_x]) & -[\mathbf{M}_R]^{-1}[\mathbf{C}_R] \end{bmatrix}_{(38 \times 38)} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}_m\} \\ \{\dot{\mathbf{d}}_m\} \end{Bmatrix}_{(38 \times 1)} + \\ &+ \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{(19 \times 19)} \\ -[\mathbf{M}_R]^{-1} \end{bmatrix}_{(38 \times 19)} \left([\mathbf{K}_i]_{(19 \times 19)} \{\mathbf{i}_x\}_{(19 \times 1)} + \{\mathbf{F}_{Shaker}\}_{(19 \times 1)} \right)_{(19 \times 1)} \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde $[\mathbf{0}]$ é uma matriz nula e $[\mathbf{I}]$ é uma matriz identidade.

A Equação 4.74 é a representação do modelo multifísico no espaço de estados. Reescrevendo-a com notação diferente, tem-se:

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = [\mathbf{A}]\vec{\mathbf{X}} + [\mathbf{B}]\vec{\mathbf{u}} \quad (4.75)$$

onde $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ são as matrizes de estado, $\vec{\mathbf{X}}$ e $\dot{\vec{\mathbf{X}}}$ são os vetores de estado e $\vec{\mathbf{u}}$ é o vetor de entradas do sistema.

Afim de tornar mais clara a notação proposta da Equação 4.75, tem-se que:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \\ -[\mathbf{M}_R]^{-1}([\mathbf{K}_R] - [\mathbf{K}_x]) & -[\mathbf{M}_R]^{-1}[\mathbf{C}_R] \end{bmatrix}_{(38 \times 38)} \quad (4.76a)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ -[\mathbf{M}_R]^{-1} \end{bmatrix}_{(38 \times 19)} \quad (4.76b)$$

$$\dot{\vec{\mathbf{X}}} = \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{d}}_m\} \\ \{\ddot{\mathbf{d}}_m\} \end{Bmatrix}_{(38 \times 1)} \quad (4.76c)$$

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{d}_m\} \\ \{\dot{\mathbf{d}}_m\} \end{Bmatrix}_{(38 \times 1)} \quad (4.76d)$$

$$\vec{\mathbf{u}} = ([\mathbf{K}_i] \{\mathbf{i}_x\} + \{\mathbf{F}_{Shaker}\})_{(19 \times 1)} \quad (4.76e)$$

onde os subscritos indicam a ordem das matrizes e dos vetores.

Neste capítulo, o modelo multifísico foi construído e descrito no espaço de estados. No Capítulo 5, este modelo será descrito na forma de retroalimentação de estados e um controlador PID será projetado para ele. Será também apresentada a metodologia utilizada na calibração desse controlador.

5 PROJETO DO CONTROLADOR

5.1 Introdução

Neste capítulo, primeiramente serão definidos os conceitos de controlabilidade e de observabilidade e será demonstrado que o sistema estudado neste trabalho é controlável e observável.

Será definido o que é controle por retroalimentação de estados, também conhecido como *feedback control*. Será mostrado como o modelo do sistema multifísico no espaço de estados foi escrito na forma de retroalimentação de estados.

Por fim, o controlador PID será introduzido e o modo como foram realizados o projeto e a calibração do controlador do sistema multifísico estudado será detalhado. As diferentes regras de calibração utilizadas serão apresentadas.

5.2 Controlabilidade

Segundo Inman (2006), um sistema é dito controlável se todas as variáveis de estado podem ser levadas à um determinado valor dentro de um intervalo de tempo finito, por alguma força de controle. Só é possível projetar um controlador para uma planta que seja controlável.

Afim de checar a controlabilidade de um sistema, de acordo com Nise (2013), é necessário calcular o posto da matriz de controlabilidade, a qual é definida na Equação 5.1. Um sistema é dito controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade desse sistema for igual à ordem desse sistema.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes e n é a ordem do sistema em análise.

O posto de uma matriz é igual ao número de linhas ou colunas linearmente independentes e pode ser obtido através da determinação da submatriz quadrada de maior ordem que não é singular (NISE, 2013).

A maior submatriz quadrada não singular contida na matriz de controlabilidade do sistema estudado neste trabalho é de ordem 38. Logo, o posto dessa submatriz é 38, o qual é igual à ordem do sistema estudado, comprovando que este sistema é controlável.

5.3 Observabilidade

Segundo Nise (2013), é observável o sistema cujo vetor de estados inicial pode ser obtido a partir do sinal de saída aferido e do vetor de controle, medidos durante um intervalo de tempo determinado, a partir do tempo inicial. O sistema que não atende esse requisito é dito não-observável.

A observabilidade de um sistema é verificada através do cálculo do posto da matriz de observabilidade (Equação 5.2). Um sistema é dito completamente observável se, e somente se, o posto da matriz de observabilidade desse sistema for igual à ordem desse sistema (OGATA, 2011).

$$\mathbf{O} = \left[\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1} \right]^T \quad (5.2)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{C} são matrizes e \mathbf{n} é a ordem do sistema em análise.

Assim como para a matriz de controlabilidade, o posto da matriz de observabilidade é obtido determinando-se a submatriz quadrada de maior ordem que não é singular. A maior matriz quadrada não-singular contida na matriz de observabilidade do sistema deste trabalho é de ordem 38. Sendo assim, o posto dessa matriz é 38 e o sistema é completamente observável, pois o sistema aqui estudado é de ordem 38.

A observabilidade de um sistema é uma questão fundamental no projeto de controladores cujo sinal de controle dependa de variáveis de estado não disponíveis para medição direta. Apesar do controlador utilizado neste trabalho não depender de variáveis não disponíveis para aferição direta, é interessante verificar a observabilidade, pois através desse conhecimento é possível saber quais tipos de controladores são adequados à este sistema.

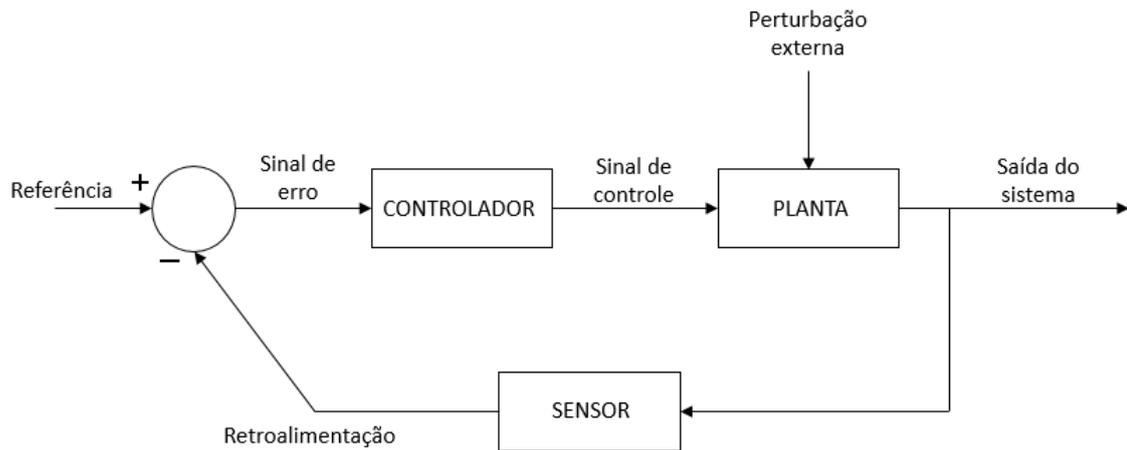
É importante ressaltar também que, para utilizar controladores que dependam de variáveis de estado não disponíveis para medição direta, é necessário projetar um observador de estados para estimar essas variáveis através da variável aferida. No entanto, o projeto de observadores de estado está além do escopo deste trabalho.

5.4 Controle por retroalimentação de estados

Um sistema que está sujeito a um controle por retroalimentação de estados é, segundo Kluever (2015), aquele que possui entrada ou entradas que são influenciadas pelas saídas do

sistema. Ou seja, um sistema retroalimentado é aquele que possui entrada ou entradas que variam de acordo com os valores de suas saídas. A Figura 5.1 ilustra esquematicamente um sistema retroalimentado.

Figura 5.1 – Esquema de um sistema retroalimentado.



Fonte: Do autor (2021).

Afim de fazer com que a viga do presente trabalho se mantivesse na posição de equilíbrio, mesmo sofrendo perturbações externas, foi necessário escrever o sistema multifísico na forma de retroalimentação de estados. Isso tornou possível a força dos atuadores variar de acordo com os valores da saída controlada do sistema (deslocamento transversal do décimo grau de liberdade do nó 10 da viga). Sendo assim, a entrada controlada é a força exercida pelos atuadores e a saída controlada é o deslocamento do grau de liberdade 10 do nó 10 da viga.

No entanto, para controlar a viga foi necessário acrescentar, além do sensor de deslocamento, mais dois componentes ao modelo multifísico desenvolvido: o controlador e um amplificador. O primeiro teve a função de calcular a tensão que era entregue aos atuadores, com base nos valores de posição fornecidos pelo sensor, e será apresentado na Subseção 5.5. O segundo teve a função de amplificar o sinal de tensão na saída do controlador para uma tensão mais alta, de forma à fornecer a tensão e a corrente adequadas aos atuadores.

O amplificador utilizado foi modelado da seguinte forma:

$$i_x(t) = G_a V_c(t) \quad (5.3)$$

sendo $i_x(t)$ a corrente de saída do amplificador e G_a o ganho do amplificador.

Além disso, faz-se necessário observar que a saída do sensor utilizado para aferir a posição da viga é um sinal de tensão. Sendo assim, a função de transferência desse sensor teve que ser levada em consideração no modelo multifísico. A função de transferência do sensor é a seguinte:

$$V_s(t) = G_s d_{10}(t) \quad (5.4)$$

onde $V_s(t)$ é tensão de saída do sensor, G_s é o ganho do sensor e $d_{10}(t)$ é o deslocamento do décimo grau de liberdade do nó 10 da viga.

5.5 Controle PID

Segundo Ogata (2011) e Kluever (2015), os controladores PID e seus variantes são os mais utilizados na indústria atualmente. Um dos fatores que os tornaram tão populares é a facilidade de calibração, sendo possível fazer ajustes finos em campo. Além disso, existem controladores deste tipo que são capazes de se ajustarem automaticamente e online, demonstrando assim a ampla faixa de possibilidades de aplicação deste tipo de controlador.

O controlador PID é composto por três partes: uma proporcional ao sinal de erro (P), uma proporcional à integral do sinal de erro (I) e uma proporcional à derivada do sinal de erro (D). Traduzindo isso em termos físicos, a parte P ajusta o sinal de controle de forma proporcional ao sinal de saída, a parte I ajusta o sinal de controle com base no histórico de saídas do sistema e a parte D ajusta do sinal de controle com base em uma previsão das saídas futuras do sistema.

A equação que rege o controlador PID é a seguinte:

$$V_c(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (5.5)$$

onde $V_c(t)$ é a tensão de saída do controlador, $e(t)$ é o sinal de erro e o K_P , o K_I e o K_D são, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador.

O que diferencia os diversos tipos de controladores PID existentes são as regras de calibração, que definem quais serão os ganhos proporcional (K_P), integral (K_I) e derivativo (K_D) do controlador. Ou seja, essas regras definem qual o peso que cada componente do controlador PID terá na resposta controlada.

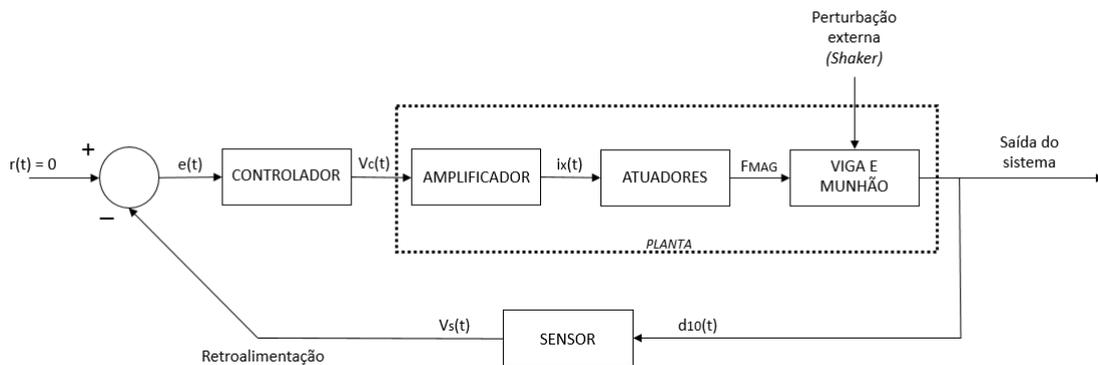
O sinal de erro $e(t)$ é a diferença entre o valor de referência $r(t)$ (saída desejada) e a saída real no instante da medição. A saída desejada no caso deste trabalho é zero, pois é esperado que a viga permaneça sempre equidistante dos atuadores. Portanto, a relação entre o sinal de erro, o sinal de referência e o sinal de saída do sensor pode ser vista nas Equações 5.6a e 5.6b.

$$e(t) = r(t) - V_s(t) \quad (5.6a)$$

$$e(t) = -V_s(t) \quad (5.6b)$$

A Figura 5.2 mostra esquematicamente o sistema multifísico deste trabalho representado na forma de retroalimentação de estados.

Figura 5.2 – Esquema do sistema multifísico retroalimentado.



Fonte: Do autor (2021).

Substituindo a Equação 5.4 na 5.6b, tem-se que:

$$e(t) = -G_s d_{10}(t) \quad (5.7)$$

E substituindo a Equação 5.7 na 5.5, tem-se:

$$V_c(t) = -K_P G_s d_{10}(t) - K_I \int_0^t G_s d_{10}(t) - K_D \frac{d[G_s d_{10}(t)]}{dt} \quad (5.8)$$

O deslocamento e a velocidade do grau de liberdade aferido da viga estão presentes no vetor de estados, porém a integral desse deslocamento não está. Sendo assim, de acordo com Nise (2013), é necessária a criação de mais uma variável de estado para representar a integral desse deslocamento. O sistema com essa variável de estado adicional (X_N) está representado na Equação 5.9.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vec{\mathbf{X}}} \\ \dot{\mathbf{X}}_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{(38 \times 38)} & [\mathbf{0}]_{(38 \times 1)} \\ [\mathbf{0}]_{(1 \times 9)} & 1 \quad [\mathbf{0}]_{(1 \times 29)} \end{bmatrix}_{(39 \times 39)} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X}_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} + \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_{(38 \times 19)} \\ [\mathbf{0}]_{(1 \times 19)} \end{bmatrix}_{(39 \times 19)} \tilde{\mathbf{u}}_{(19 \times 1)} \quad (5.9)$$

onde $\dot{\mathbf{X}}_N$ é igual ao $d_{10}(t)$, \mathbf{X}_N é a integral de $d_{10}(t)$ e:

$$[\mathbf{A}_N] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{(38 \times 38)} & [\mathbf{0}]_{(38 \times 1)} \\ [\mathbf{0}]_{(1 \times 9)} & 1 \quad [\mathbf{0}]_{(1 \times 29)} \end{bmatrix}_{(39 \times 39)} \quad (5.10a)$$

$$[\mathbf{B}_N] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_{(38 \times 19)} \\ [\mathbf{0}]_{(1 \times 19)} \end{bmatrix}_{(39 \times 19)} \quad (5.10b)$$

Aplicando-se as Equações 5.3 e 5.8 na Equação 4.69c e considerando as alterações feitas no modelo pela Equação 5.9, tem-se:

$$\{\mathbf{i}_x\} = -\mathbf{G}_a \mathbf{G}_s \begin{bmatrix} [0]_{(9 \times 39)} \\ [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_P [0]_{(1 \times 18)} \mathbf{K}_D [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_I \\ [0]_{(9 \times 39)} \end{bmatrix}_{(19 \times 39)} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X}_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} \quad (5.11)$$

onde:

$$[\mathbf{K}_{control}] = \mathbf{G}_a \mathbf{G}_s \begin{bmatrix} [0]_{(9 \times 39)} \\ [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_P [0]_{(1 \times 18)} \mathbf{K}_D [0]_{(1 \times 9)} \mathbf{K}_I \\ [0]_{(9 \times 39)} \end{bmatrix}_{(19 \times 39)} \quad (5.12)$$

Aplicando-se a Equação 5.11 na 4.76e, o vetor de entradas fica da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{u}} = -[\mathbf{K}_i]_{(19 \times 19)} [\mathbf{K}_{control}]_{(19 \times 39)} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X}_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} + \{\mathbf{F}_{Shaker}\}_{(19 \times 1)} \quad (5.13)$$

Sendo assim, o modelo completo do sistema retroalimentado foi obtido aplicando-se a Equação 5.13 na 5.9, resultando na Equação 5.14.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{X}} \\ \dot{X}_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} &= \left([A_N]_{(39 \times 39)} - [B_N]_{(39 \times 19)} [K_i]_{(19 \times 19)} [K_{\text{control}}]_{(19 \times 39)} \right) \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ X_N \end{Bmatrix}_{(39 \times 1)} + \\ &+ [B_N]_{(39 \times 19)} \{F_{Shaker}\}_{(19 \times 1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.6 Calibração do controlador

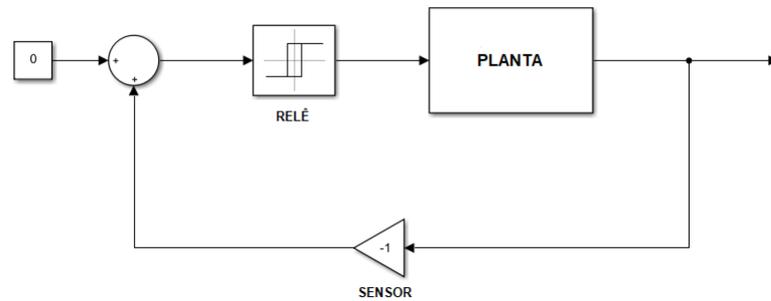
Uma vez estabelecido o modelo retroalimentado completo do sistema multifísico, foi necessário definir os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador. Primeiramente tentou-se utilizar o método clássico de Ziegler-Nichols para calibração de controladores.

O método de Ziegler-Nichols consiste em retroalimentar a planta com apenas um ganho proporcional e aumentar gradativamente esse ganho até a resposta do sistema atingir o limiar de instabilidade de forma oscilatória. O período de oscilação é chamado período crítico (T_u). O ganho proporcional que mantém o sistema oscilando com esse período é chamado ganho crítico (K_u) (OGATA, 2011).

Entretanto, no decorrer das simulações, percebeu-se que esse método não é adequado para o sistema aqui estudado, pois não é possível obter uma resposta oscilatória deste sistema no limiar de instabilidade da forma como é proposta pelo método, impossibilitando assim a calibração dos controladores.

Posto isso, foi necessário buscar outro método para realizar essa calibração. O método de realimentação por relê (*Relay Feedback*) se mostrou adequado ao sistema aqui proposto. Este método consiste em substituir o controlador, no sistema retroalimentado, por um relê, assim como apresentado na Figura 5.3. A amplitude de saída do relê é então aumentada até que a resposta do sistema atinja o limiar de instabilidade de forma oscilatória. Quando esse limiar é atingido, assim que o sistema entra em regime estacionário, as amplitudes do relê e da saída controlada da planta são aplicadas à Equação 5.15, para a obtenção do ganho crítico, na qual d é a amplitude da saída do relê e a é a amplitude da saída controlada da planta em regime estacionário (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984).

Figura 5.3 – Diagrama de blocos do método de calibração por relê.



Fonte: Do autor (2021).

$$K_u = \frac{4d}{\pi a} \quad (5.15)$$

A Equação 5.15 é obtida da seguinte forma: a saída do relê, que é uma onda quadrada, é expandida em uma série de Fourier; a amplitude dessa onda quadrada é considerada como sendo o primeiro harmônico dessa expansão, o qual é $4d/\pi$; então a amplitude da onda quadrada do relê é dividida pela amplitude de saída da planta em regime estacionário (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984).

O período crítico (T_u) foi obtido medindo-se a distância entre picos da saída controlada da planta em regime permanente.

Após a obtenção de K_u e T_u , foram utilizadas cinco regras apresentadas por Anantachaisilp e Lin (2013) para obtenção dos ganhos K_P , K_I e K_D do controlador PID. A seguir há uma breve explicação dessas regras.

- Regra de Ziegler Nichols (ZN): quando utilizada para calibração de controladores PID, resulta em respostas rápidas, geralmente com grandes sobressinais (*Overshoot*) (OGATA, 2011).
- Regra *Some Overshoot* (SO-OV): é uma modificação da regra ZN com o intuito de diminuir o sobressinal gerado. Isso é conseguido através da diminuição do K_P e do aumento do K_D .
- Regra *No Overshoot* (NO-OV): é também uma modificação da regra ZN, porém com o intuito de eliminar o sobressinal da resposta controlada. Isso é feito diminuindo-se ainda mais o K_P , comparado ao método SO-OV. De acordo com Anantachaisilp e Lin

(2013 apud SEBORG; EDGAR; MELLICHAMP, 2004), um pequeno sobressinal ainda é observado quando essa regra é utilizada na prática.

- Regra de Tyreus-Luyben (TL): tem o objetivo de melhorar a robustez do controlador. Isso é realizado através da modificação dos três ganhos em relação aos valores estabelecidos pela regra ZN.
- Regra de Pessen (PE): o objetivo dessa regra é minimizar o erro em regime permanente, através da modificação dos ganhos K_P , K_I e K_D em relação aos valores estabelecidos pela regra ZN.

As regras utilizadas estão apresentadas na Tabela 5.1. As constantes de tempo dos termos integral (T_I) e derivativo (T_D), presentes nessa tabela, são definidas nas Equações 5.16a e 5.16b.

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} \iff K_I = \frac{K_P}{T_I} \quad (5.16a)$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} \iff K_D = T_D K_P \quad (5.16b)$$

Tabela 5.1 – Regras de calibração de controladores utilizadas.

Controlador	Regra de calibração	K_P	T_I	T_D
PID	ZN	0,60 K_u	0,50 T_u	0,125 T_u
PID	SO-OV	0,33 K_u	0,50 T_u	0,330 T_u
PID	NO-OV	0,20 K_u	0,50 T_u	0,330 T_u
PID	TL	0,46 K_u	2,20 T_u	0,159 T_u
PID	PE	0,35 K_u	0,25 T_u	0,250 T_u

Fonte: Do autor (2021).

Tendo sido definidas as diferentes regras de calibração de controladores PID utilizadas neste trabalho, o próximo capítulo apresentará os parâmetros utilizados na análise computacional do sistema multifísico controlado, os resultados da redução de modelo proposta na Subseção 4.2.4 e os resultados do processo de calibração do controlador pelo método de realimentação por relê.

6 PARÂMETROS DA PLANTA E CALIBRAÇÃO DO CONTROLADOR

Neste capítulo serão apresentados os parâmetros da viga, do munhão, dos atuadores, do sensor e do amplificador utilizados nas simulações. Além disso, os resultados da redução de modelo da viga na condição livre-livre serão mostrados e discutidos e as dez primeiras frequências naturais da viga na condição engastada-livre serão também apresentadas. Por fim, os resultados do processo de calibração do controlador serão detalhados e discutidos.

6.1 Definição dos parâmetros do sistema

Os parâmetros da viga, do munhão e dos atuadores estão apresentados, respectivamente, nas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3. O parâmetro ε dos atuadores foi arbitrado igual à 1, pois o real valor dele pode ser obtido apenas experimentalmente.

Tabela 6.1 – Parâmetros da viga de Alumínio (Liga 6063).

Parâmetro	Símbolo	Valor do parâmetro	Unidade
Comprimento	c	$4,170 \cdot 10^{-1}$	m
Largura	l	$2,540 \cdot 10^{-2}$	m
Espessura	e	$3,200 \cdot 10^{-3}$	m
Módulo de Elasticidade	E	$70 \cdot 10^9$	Pa
Densidade	ρ	2710	kg/m ³
Área da secção transversal	A	$8,128 \cdot 10^{-5}$	m ²
Momento de inércia de área da secção transversal	I	$6,936 \cdot 10^{-11}$	m ⁴
Coefficiente de amortecimento α	α	0	-
Coefficiente de amortecimento β	β	$5 \cdot 10^{-6}$	-

Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.2 – Parâmetros do munhão de Aço Carbono (SAE 1020).

Parâmetro	Símbolo	Valor do parâmetro	Unidade
Comprimento	c_M	$8,740 \cdot 10^{-2}$	m
Largura	l_M	$3,280 \cdot 10^{-2}$	m
Espessura	e_M	$3,060 \cdot 10^{-2}$	m
Módulo de Elasticidade	E_M	$189 \cdot 10^9$	Pa
Densidade	ρ_M	7870	kg/m ³
Área da secção transversal	A_M	$2,368 \cdot 10^{-4}$	m ²
Largura do furo	l_f	$2,640 \cdot 10^{-2}$	m
Espessura do furo	e_f	$4,200 \cdot 10^{-3}$	m
Momento de inércia de área da secção transversal	I_M	$3,0925 \cdot 10^{-9}$	m ⁴
Coefficiente de amortecimento α	α_M	0	-
Coefficiente de amortecimento β	β_M	$5 \cdot 10^{-6}$	-

Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.3 – Parâmetros dos atuadores.

Parâmetro	Símbolo	Valor do parâmetro	Unidade
Número de espiras	N	800	-
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4 \pi 10^{-7}$	H/m
Área da secção transversal da bobina	A_m	$7,840 \cdot 10^{-4}$	m ²
Corrente <i>bias</i>	i_{bias}	0,6	A
Tamanho do <i>air-gap</i> (amplitude de zero a pico)	z	$5 \cdot 10^{-3}$	m
Coefficiente de perdas	ϵ	1	-

Fonte: Do autor (2021).

Os ganhos do sensor e do amplificador foram considerados lineares e arbitrados iguais à 1. Eles poderão ser obtidos adequadamente somente quando o aparato experimental estiver definido.

6.2 Resultados da redução do modelo em elementos finitos

A Tabela 6.4 apresenta os resultados da redução de modelo realizada. Através da análise deles, é possível observar que o modelo reduzido representa fielmente o modelo completo do sistema, demonstrando que a redução de modelo obteve resultados satisfatórios. As frequências naturais comparadas na Tabela 6.4 são da viga na condição livre-livre.

Tabela 6.4 – Comparação das 10 primeiras frequências naturais dos modelos completo e reduzido (redução estática de Guyan) - viga na condição livre-livre.

Modo	Frequências naturais do sistema completo (Hz)	Frequências naturais do sistema reduzido (Hz)
Modo 1	0	0
Modo 2	0	0
Modo 3	94,24	94,24
Modo 4	216,95	216,95
Modo 5	494,48	494,50
Modo 6	795,22	795,32
Modo 7	1251,81	1252,16
Modo 8	2021,72	2023,63
Modo 9	2383,91	2386,86
Modo 10	3810,26	3825,19

Fonte: Do autor (2021).

A Tabela 6.5 apresenta as 10 primeiras frequências naturais do modelo viga-munhão reduzido com os dois primeiros graus de liberdade (nós 1 e 2) engastados.

Tabela 6.5 – Frequências naturais do modelo viga-munhão reduzido com os dois primeiros graus de liberdade (nós 1 e 2) engastados (redução estática de Guyan).

Modo	Frequências naturais (Hz)
Modo 1	10,34
Modo 2	83,21
Modo 3	226,37
Modo 4	571,42
Modo 5	805,09
Modo 6	1474,81
Modo 7	2031,46
Modo 8	2837,14
Modo 9	3895,36
Modo 10	4673,94

Fonte: Do autor (2021).

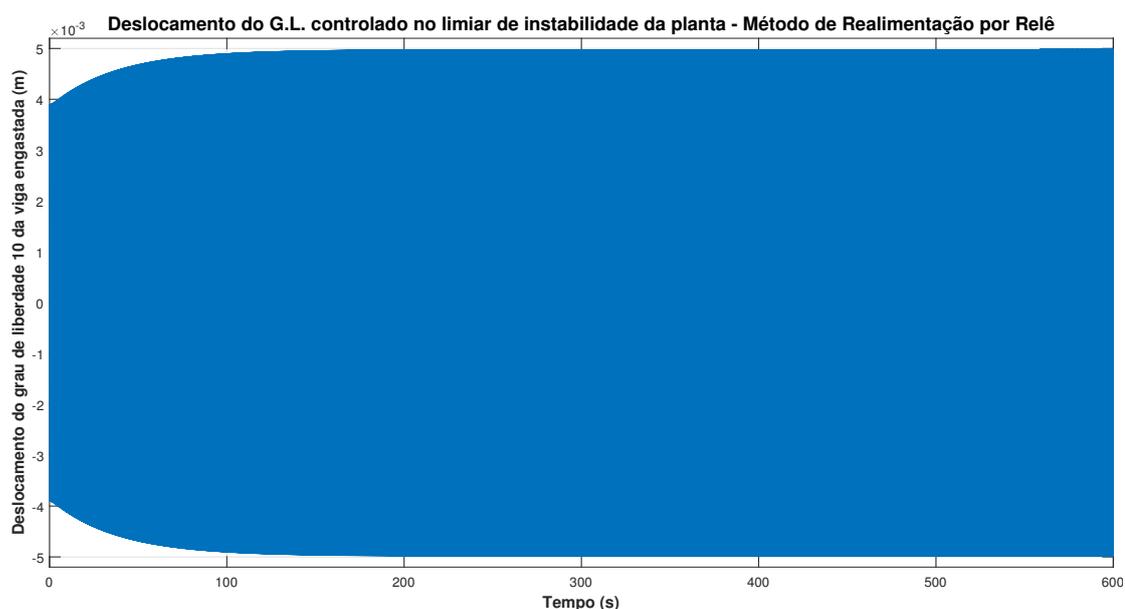
6.3 Resultados da calibração do controlador

A calibração do controlador foi um processo trabalhoso, pois foram necessárias várias simulações para que a resposta oscilatória da viga no limiar de instabilidade fosse obtida com o relê. Os parâmetros controlados para que essa resposta fosse obtida foram a amplitude de saída do relê e o *switch*, que é a sensibilidade do relê. Quando a entrada do relê muda de sinal, enquanto ela não atingir o valor do *switch*, a saída do relê não mudará de sinal.

A Figura 6.1 apresenta a saída controlada da planta no limiar de instabilidade. O limiar de instabilidade deste sistema é o grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) atingir amplitude máxima de deslocamento ligeiramente menor que 5mm, pois a distância entre os atuadores e o munhão é 5mm. Caso o grau de liberdade controlado atinja a amplitude de deslocamento de 5mm, o munhão encostará em um dos atuadores.

O gráfico da Figura 6.1 foi gerado com a viga partindo de condições iniciais não nulas, sem a presença de perturbações. As condições iniciais foram obtidas a partir de uma análise linear estática do modelo viga-munhão engastado submetido à uma força positiva de 5N perpendicular ao eixo principal da viga, no décimo grau de liberdade (nó 10). O *switch* e a amplitude de saída do relê utilizados para levar a planta ao limiar de instabilidade foram, respectivamente, $4 \cdot 10^{-6}V$ e 0,3V.

Figura 6.1 – Deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) no limiar de instabilidade - Método de Realimentação por Relê.



Fonte: Do autor (2021).

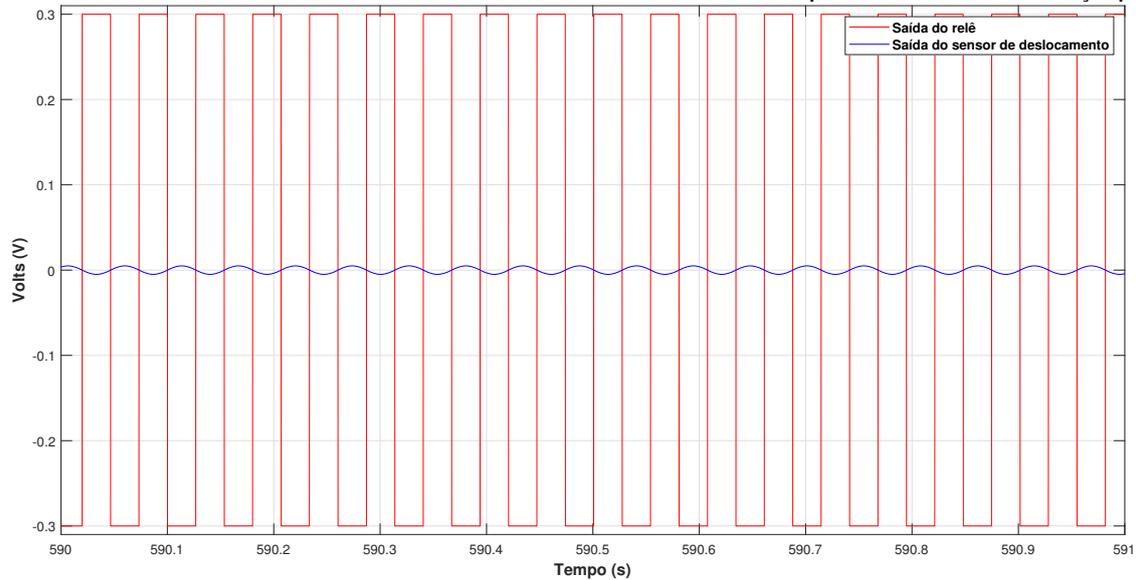
Como é possível observar na Figura 6.1, o tempo de simulação foi de 600 segundos. Esse tempo de simulação foi utilizado de forma a garantir que os parâmetros utilizados na calibração do controlador tivessem sido obtidos a partir da resposta em regime estacionário do sistema.

A Figura 6.2 mostra como foram obtidos os parâmetros utilizados para a calibração dos controladores. Nessa figura são apresentadas a saída do sensor de deslocamento do grau de liberdade controlado e a saída do relê, ambas em Volts (V), em função do tempo. Afim de permitir uma melhor visualização, é mostrada apenas a janela temporal entre 590 e 591

segundos. É interessante ressaltar que, devido ao fato do ganho do sensor de deslocamento ser igual à 1, a entrada e a saída desse sensor são iguais.

Figura 6.2 – Saídas do relê e do sensor de deslocamento do grau de liberdade controlado no limiar de instabilidade da planta - Método de Realimentação por Relê.

Saídas do relê e do sensor de deslocamento do nó controlado no limiar de instabilidade da planta - Método de Realimentação por Relê



Fonte: Do autor (2021).

A Tabela 6.6 apresenta o ganho crítico (K_u) e o período crítico (T_u). O ganho crítico foi obtido a partir da Equação 5.15 e do gráfico da Figura 6.2 e o período crítico foi obtido medindo-se a distância entre dois picos consecutivos da saída do sensor de deslocamento no gráfico da Figura 6.2. O ganho crítico e o período crítico foram então utilizados para a obtenção dos ganhos K_P , K_I e K_D , a partir das diferentes regras de calibração apresentadas na Tabela 5.1. Esses ganhos estão apresentados na Tabela 6.7.

Tabela 6.6 – Ganho crítico (K_u) e período crítico (T_u) obtidos no processo de calibração do controlador.

Parâmetro	Valor do parâmetro
K_u	76,639619
T_u	0,053399

Fonte: Do autor (2021).

Tabela 6.7 – Ganhos K_P , K_I e K_D das diferentes regras de calibração abordadas neste trabalho.

Regra de calibração	K_P	K_I	K_D
ZN	45,984	1,722	0,307
SO-OV	25,291	9,472	0,446
NO-OV	15,328	5,741	0,270
TL	35,254	3,001	0,299
PE	26,824	2,010	0,358

Fonte: Do autor (2021).

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Através da análise computacional realizada em MATLAB/Simulink, foi possível observar que o sistema proposto neste trabalho, quando descrito na forma retroalimentada, não apresenta resposta oscilatória no limiar de instabilidade, impossibilitando dessa forma o projeto de um controlador PID pelo método clássico de Ziegler Nichols. Por este motivo, o Método de Realimentação por Relê foi utilizado.

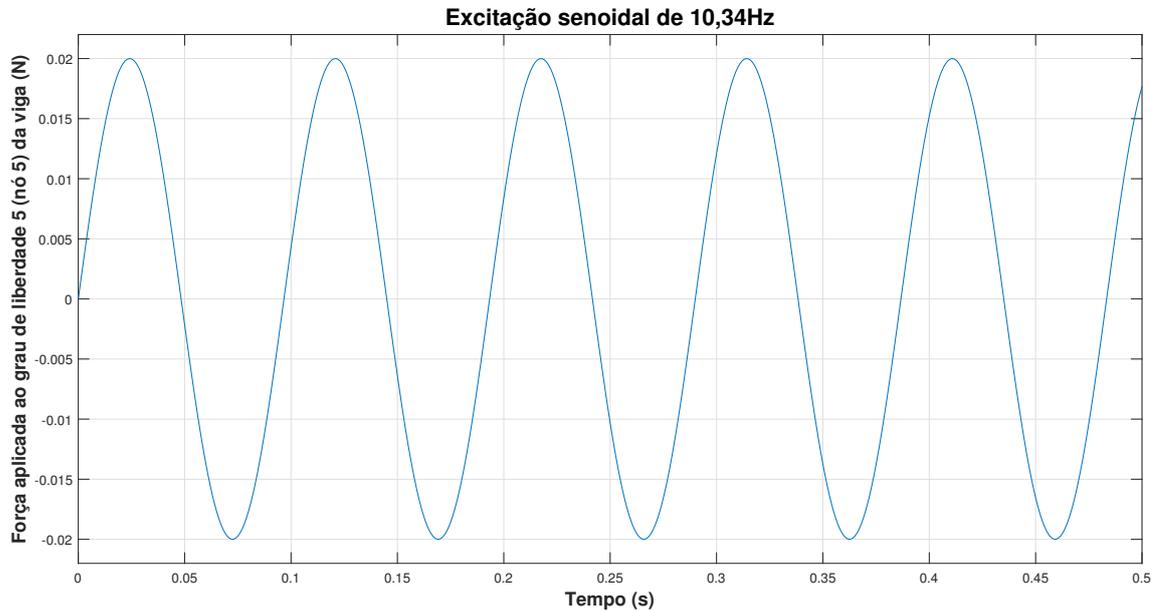
Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através da simulação de sete diferentes cenários, de forma a verificar e validar a eficiência do controlador. O que diferencia cada cenário é o tipo de excitação à qual a viga foi submetida. Os sete tipos de excitação utilizados foram: senoidal na primeira frequência de ressonância, senoidal na segunda frequência de ressonância, senoidal fora da frequência de ressonância, impulso unitário, função degrau, função chirp e excitação randômica. As sete simulações foram realizadas em ambiente computacional MATLAB, utilizando a ferramenta de integração numérica de equações diferenciais ordinárias lineares chamada *lsim*.

Serão apresentados e discutidos os gráficos das excitações às quais a viga foi submetida e do deslocamento do grau de liberdade controlado e da extremidade livre da viga com e sem a aplicação do controlador. Serão realizadas comparações do desempenho do controlador utilizando as diferentes regras de calibração apresentadas na Tabela 5.1. Os gráficos da força de controle realizada pelos atuadores e das correntes de controle também serão apresentados e discutidos.

7.1 Cenário 1 - Resposta à excitação senoidal de 10,34Hz

Neste cenário será apresentado o comportamento da viga submetida à uma excitação senoidal na primeira frequência de ressonância da viga (10,34Hz) com amplitude de 0,02N. A Figura 7.1 mostra a evolução temporal da força excitadora. A excitação foi aplicada ao quinto grau de liberdade da viga (nó 5). É importante ressaltar que o tempo total de simulação foi de 60 segundos e a excitação foi aplicada durante todo esse tempo, apesar da Figura 7.1 mostrar apenas a janela de tempo entre 0 e 0,5 segundo.

Figura 7.1 – Excitação senoidal na primeira frequência natural da viga (10,34Hz).

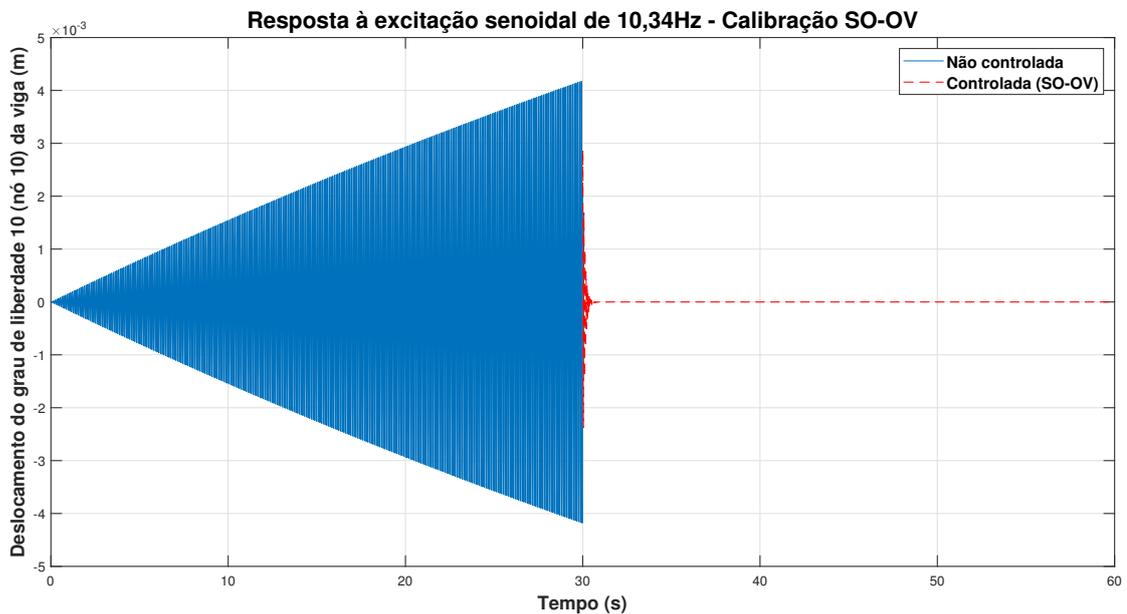


Fonte: Do autor (2021).

Nos primeiros 30 segundos, o controlador estava desligado. O controlador foi ligado aos 30 segundos de simulação. A Figura 7.2 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) em função do tempo. Nesta figura é possível observar a ocorrência de atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado a partir do momento em que o controlador é ligado, comprovando assim a eficácia do controlador utilizado.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.2 é a SO-OV, pois ela se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.3 a 7.6.

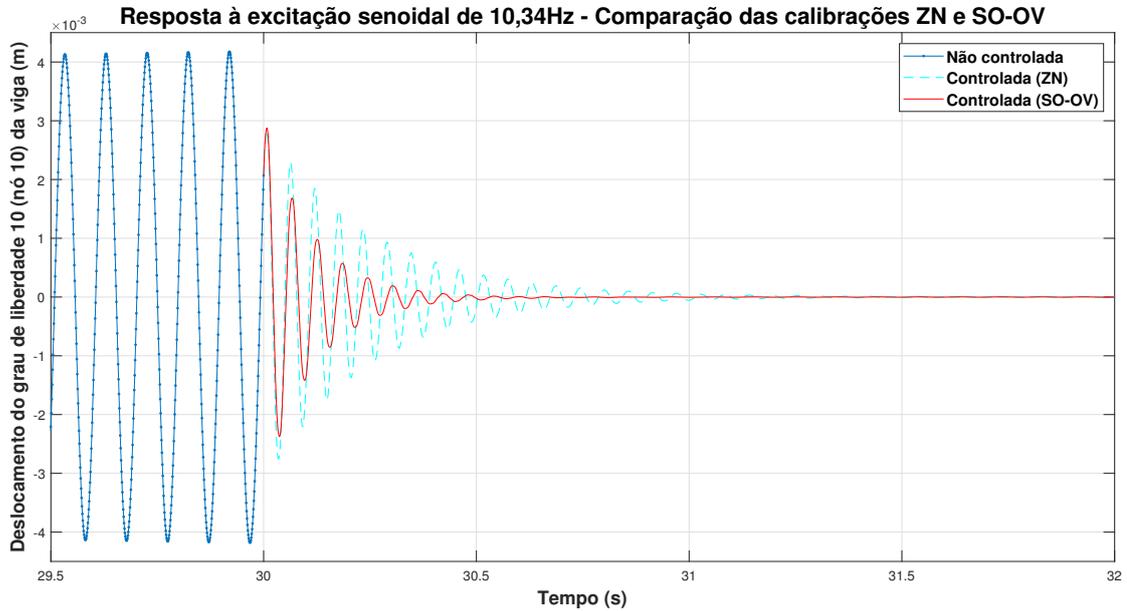
Figura 7.2 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



Fonte: Do autor (2021).

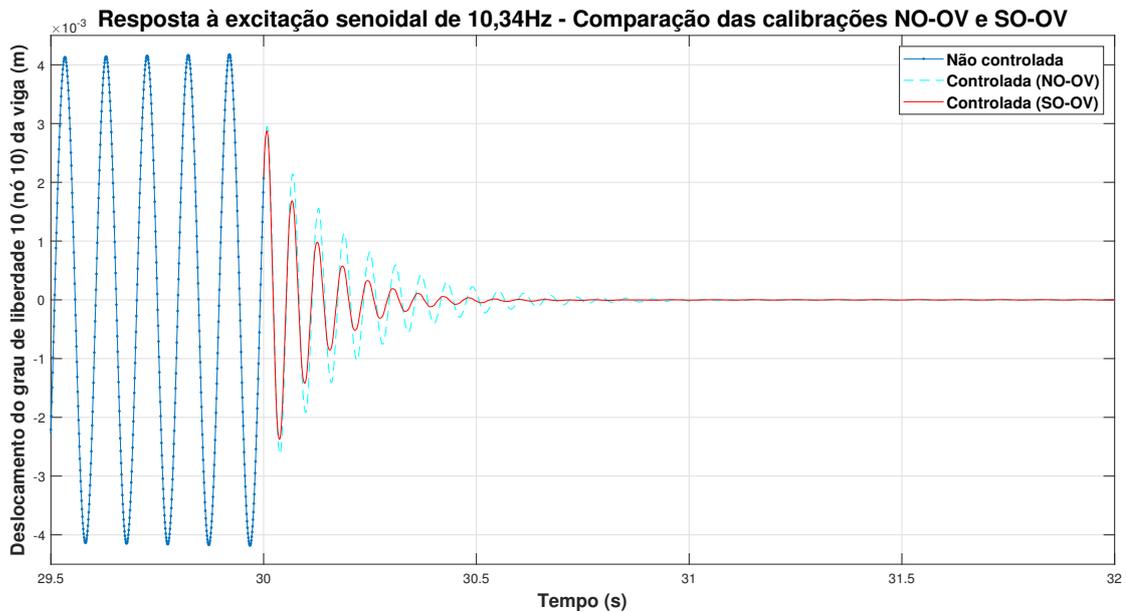
As Figuras 7.3 a 7.6 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e permanente das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 29,5 e 32 segundos.

Figura 7.3 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



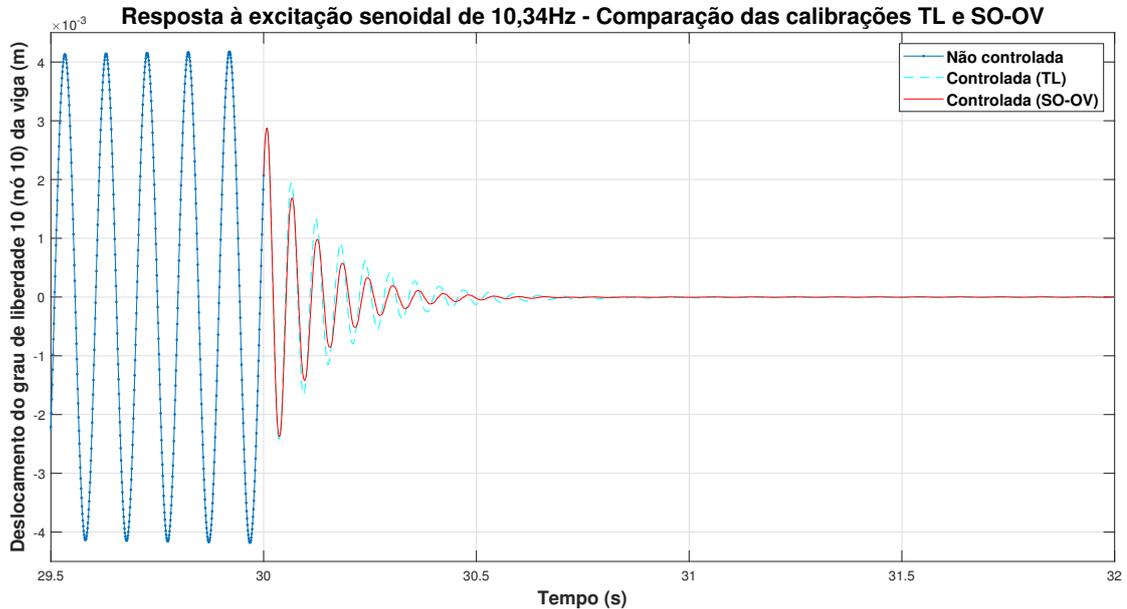
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.4 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



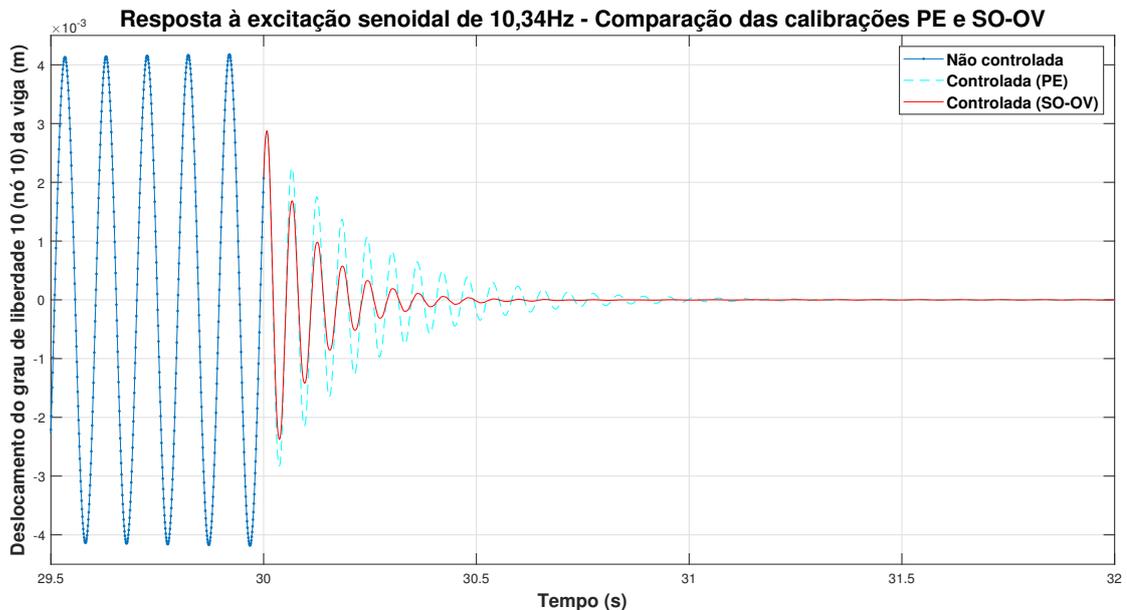
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.5 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.6 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



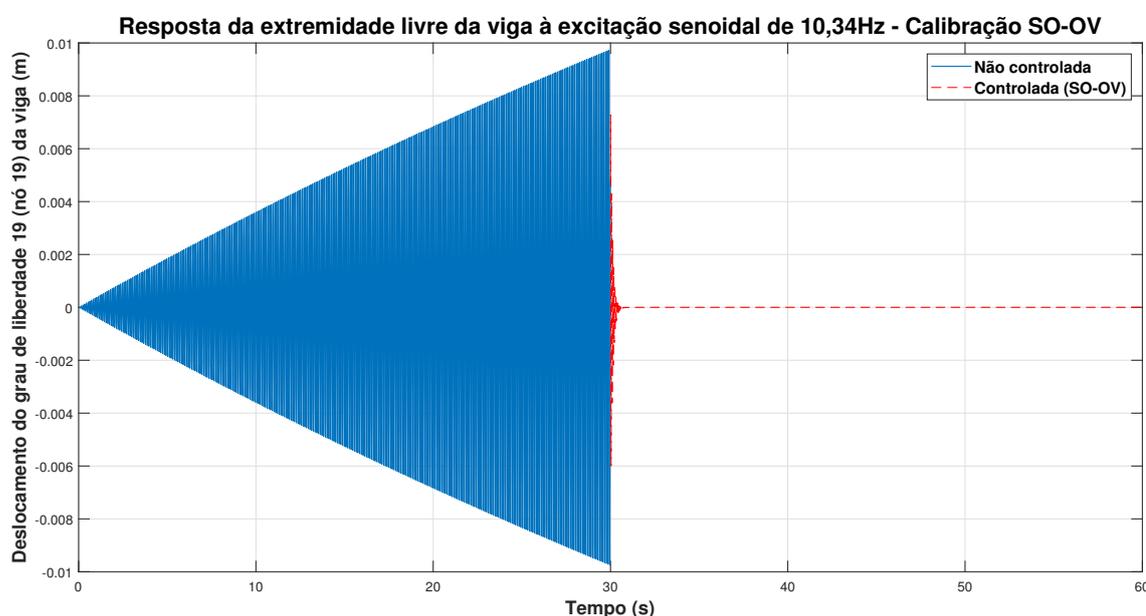
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.3 a 7.6 fica evidente que a regra de controle mais eficiente é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta é menor quando ela é utilizada. No que diz respeito à resposta em regime permanente, todas as regras de

controle simuladas neste cenário apresentaram o mesmo desempenho. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas são eficazes, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga.

A Figura 7.7 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga antes e após o controlador ser ligado. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade da viga, a atenuação da vibração também ocorre de forma instantânea na extremidade livre da mesma (grau de liberdade 19, nó 19).

Figura 7.7 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



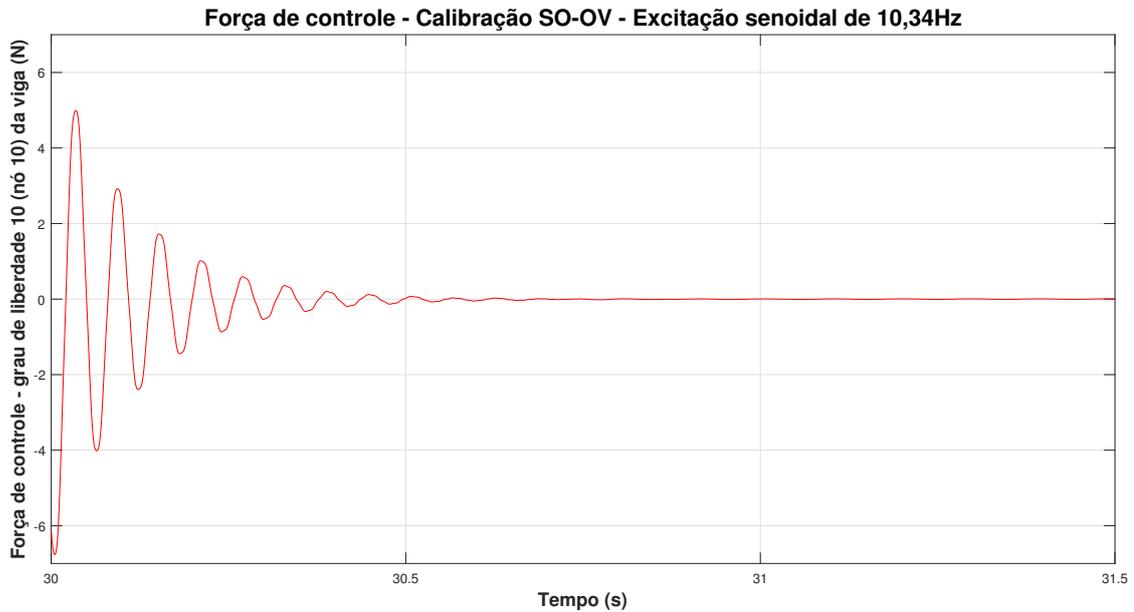
Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.8. Afim de mostrar detalhadamente as respostas transiente e permanente dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 31,5 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a força exercida pelos atuadores entra em regime estacionário rapidamente.

É interessante observar que a amplitude inicial da força de controle foi bem maior que a amplitude de excitação. Devido ao fato da viga ter sido excitada em uma de suas frequências naturais, ela entrou em ressonância e ganhou amplitude de deslocamento durante os 30 segundos iniciais de simulação, nos quais o controlador estava desligado. Sendo assim, para conter essa amplitude de vibração foi necessária grande quantidade de força no momento em que o

controlador foi acionado, porém quando a força de controle atingiu o estado estacionário, sua amplitude se igualou à da força excitadora.

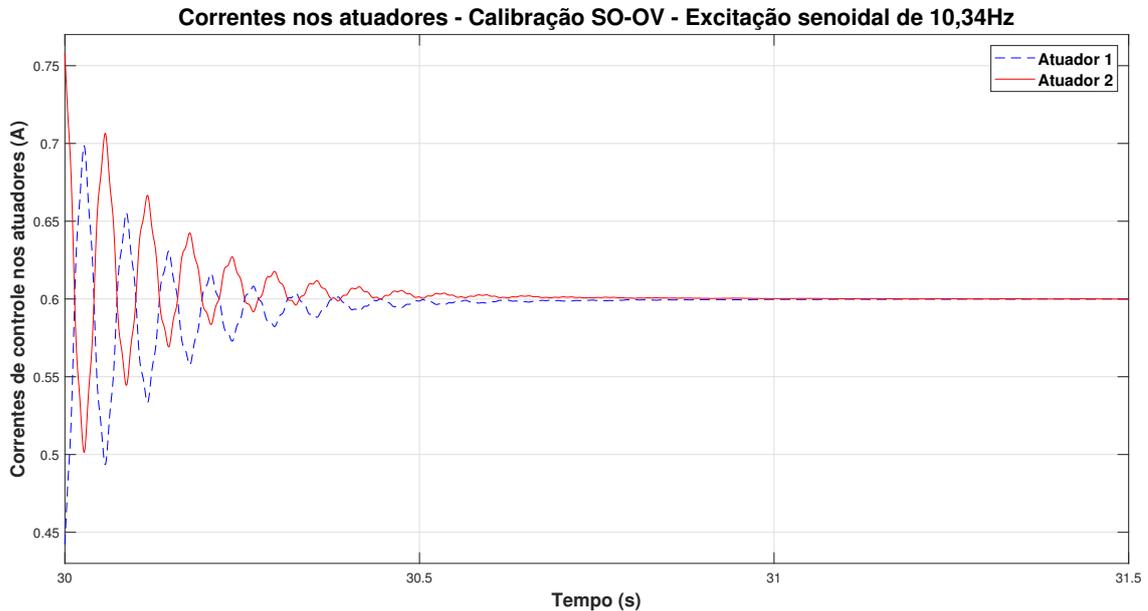
Figura 7.8 – Força de controle aplicada ao grau de liberdade 10 da viga em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.9 apresenta a corrente que circula nos atuadores em função do tempo. É interessante observar que os valores dessas correntes quando elas entram em estado estacionário é praticamente o valor da corrente *bias*. Isso ocorre devido ao fato da amplitude da força de controle necessária em regime permanente neste cenário ser praticamente nula.

Figura 7.9 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 10,34Hz.

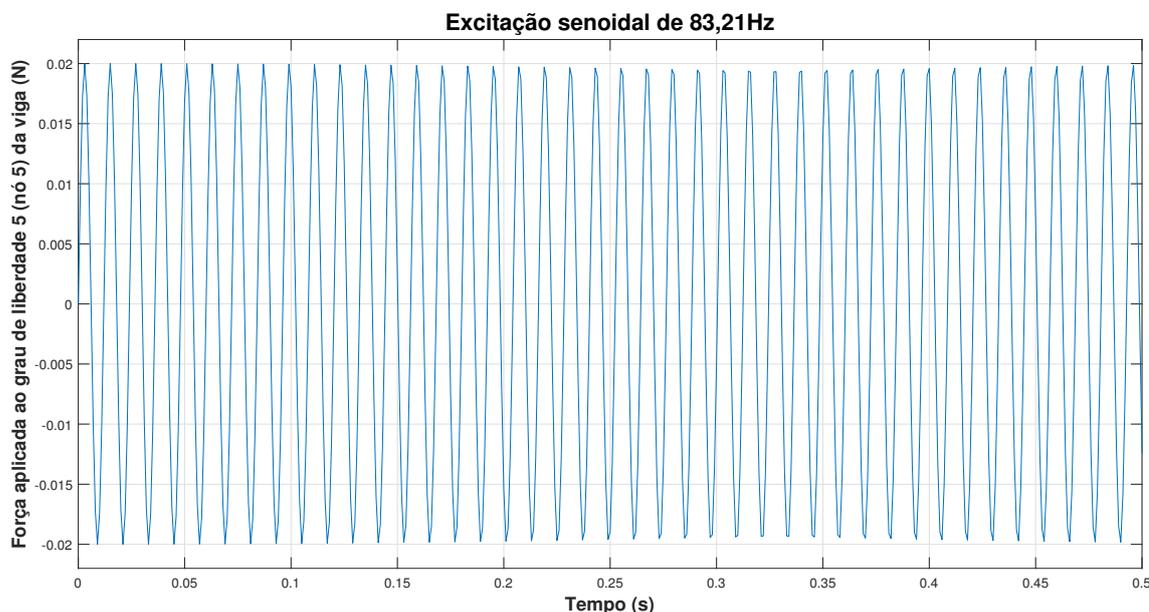


Fonte: Do autor (2021).

7.2 Cenário 2 - Resposta à excitação senoidal de 83,21Hz

Neste cenário será apresentado o comportamento da viga submetida à uma excitação senoidal na segunda frequência de ressonância da viga (83,21Hz) com amplitude de 0,02N. A Figura 7.10 mostra a evolução temporal da força excitadora. A excitação, assim como no cenário 1, foi aplicada ao grau de liberdade 5 (nó 5) da viga. É importante ressaltar que o tempo total de simulação também foi de 60 segundos e a excitação foi aplicada durante todo esse tempo, apesar da Figura 7.10 mostrar apenas a janela de tempo entre 0 e 0,5 segundo.

Figura 7.10 – Excitação senoidal na segunda frequência natural da viga (83,21Hz).



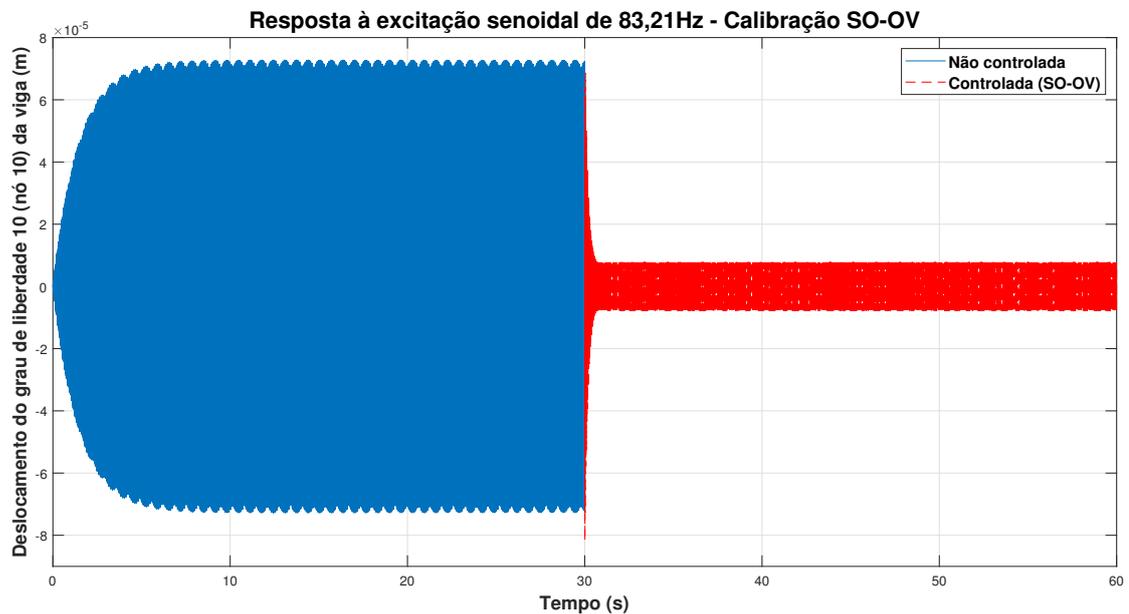
Fonte: Do autor (2021).

Nos primeiros 30 segundos o controlador estava desligado. Ele foi ligado aos 30 segundos de simulação. A Figura 7.11 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) em função do tempo. Nessa figura é possível observar a ocorrência de atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado quando o controlador é ligado, comprovando assim que o controlador utilizado também é eficaz nas condições impostas por este cenário.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.11 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.12 a 7.15.

Outro aspecto importante a ser observado é que, apesar das amplitudes das excitações impostas à viga nos cenários 1 e 2 serem iguais, o fato dessas excitações estarem em frequências naturais distintas da viga impacta a amplitude da resposta da mesma. Enquanto a amplitude máxima do deslocamento do grau de liberdade controlado da viga no cenário 1 (Figura 7.2) foi de aproximadamente 4,2mm, a amplitude máxima deste deslocamento no cenário 2 foi menor que um décimo de milímetro (Figura 7.11).

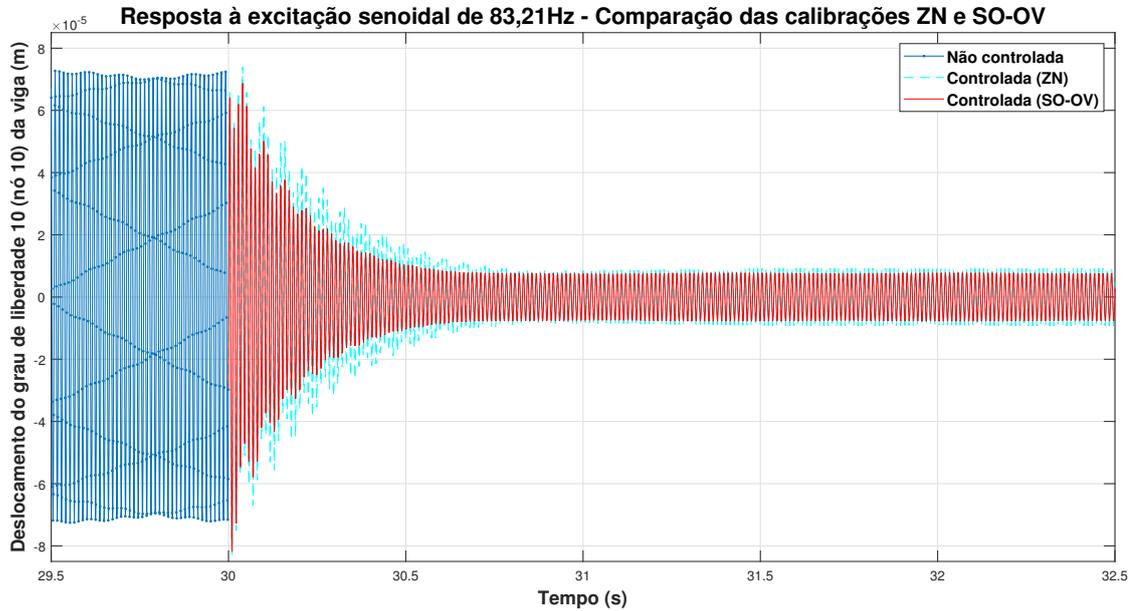
Figura 7.11 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



Fonte: Do autor (2021).

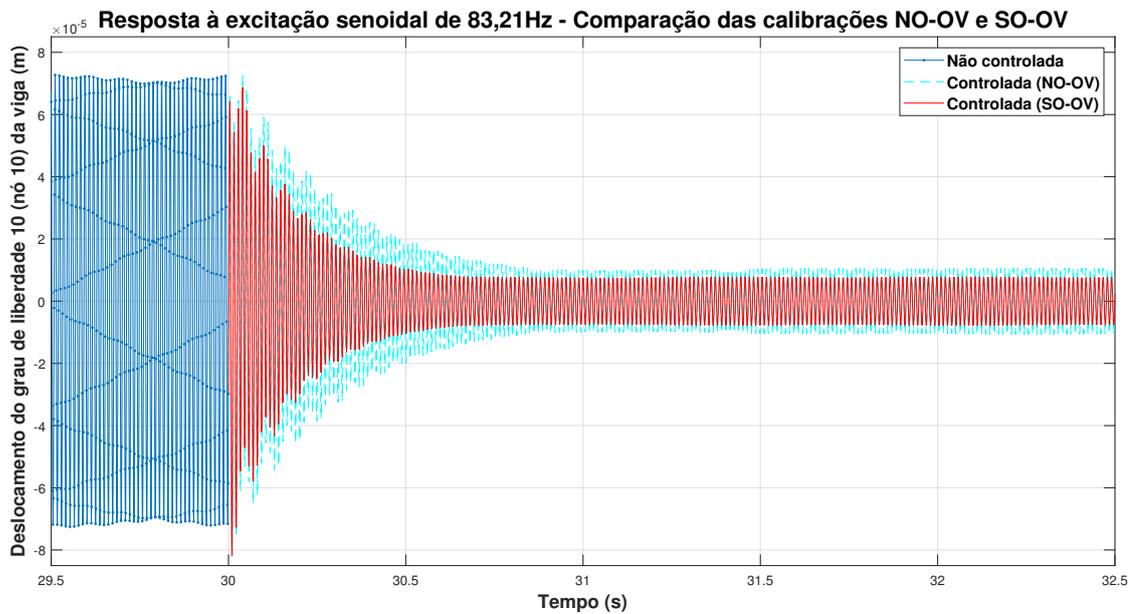
As Figuras 7.12 a 7.15 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e estacionário das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 29,5 e 32,5 segundos.

Figura 7.12 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



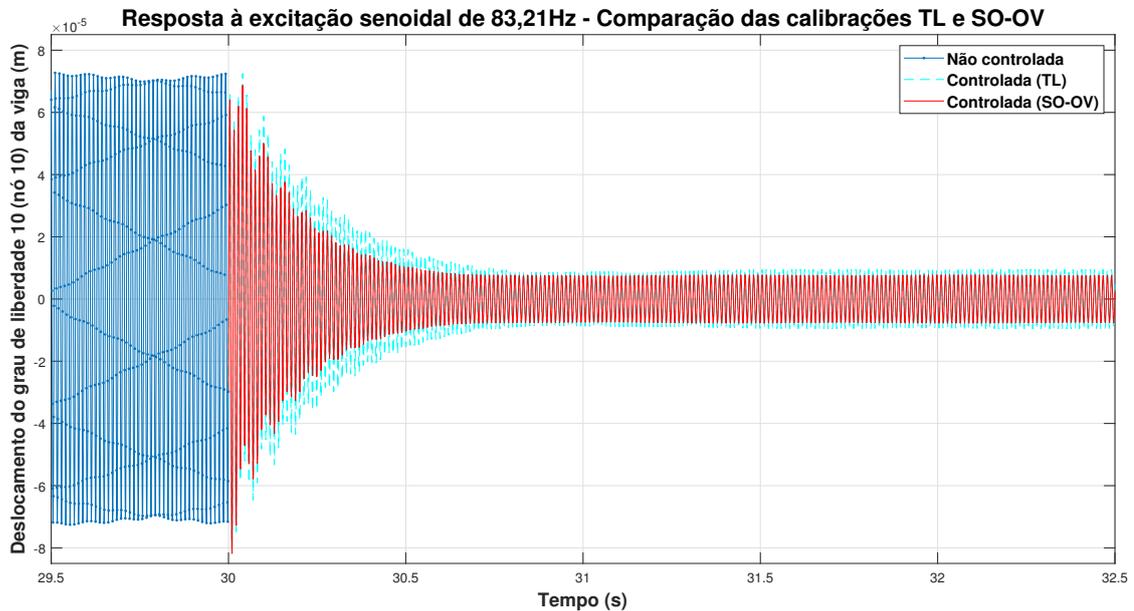
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.13 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



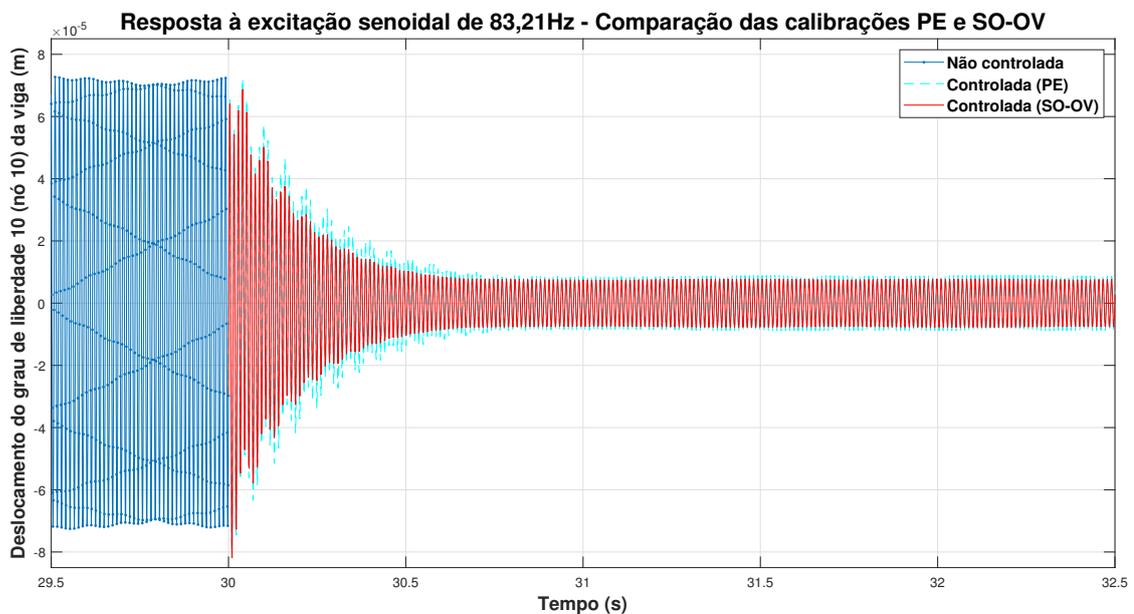
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.14 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.15 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



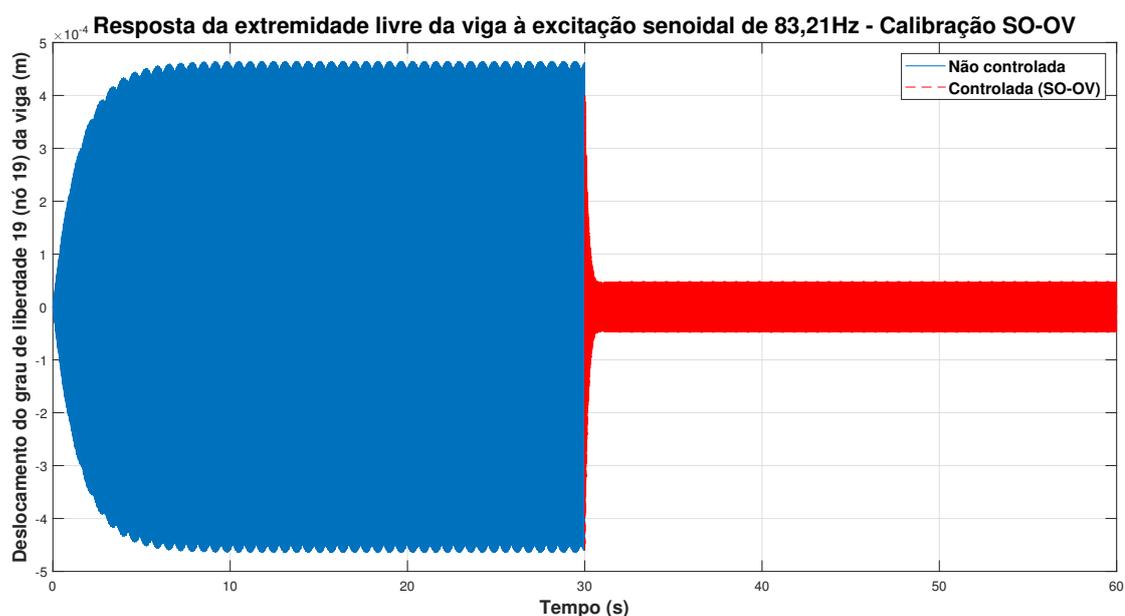
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.12 a 7.15, fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta e a amplitude do deslocamento em regime permanente são menores quando ela é utilizada.

Quanto à eficácia das regras de controle, é possível afirmar que todas elas também são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga.

A Figura 7.16 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga antes e após o controlador ser ligado. A estratégia de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade (nó 10) da viga, a atenuação da vibração também ocorre de forma instantânea na extremidade livre dela (grau de liberdade 19, nó 19). Comparando-se o deslocamento da extremidade livre da viga deste cenário com o do cenário 1 (Figura 7.7), é possível perceber que a amplitude máxima do deslocamento obtida neste cenário é bem menor que a obtida no cenário 1. Isso também se justifica pelo fato das frequências de excitação dos dois cenários serem diferentes, apesar de ambas serem frequências naturais da viga.

Figura 7.16 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.

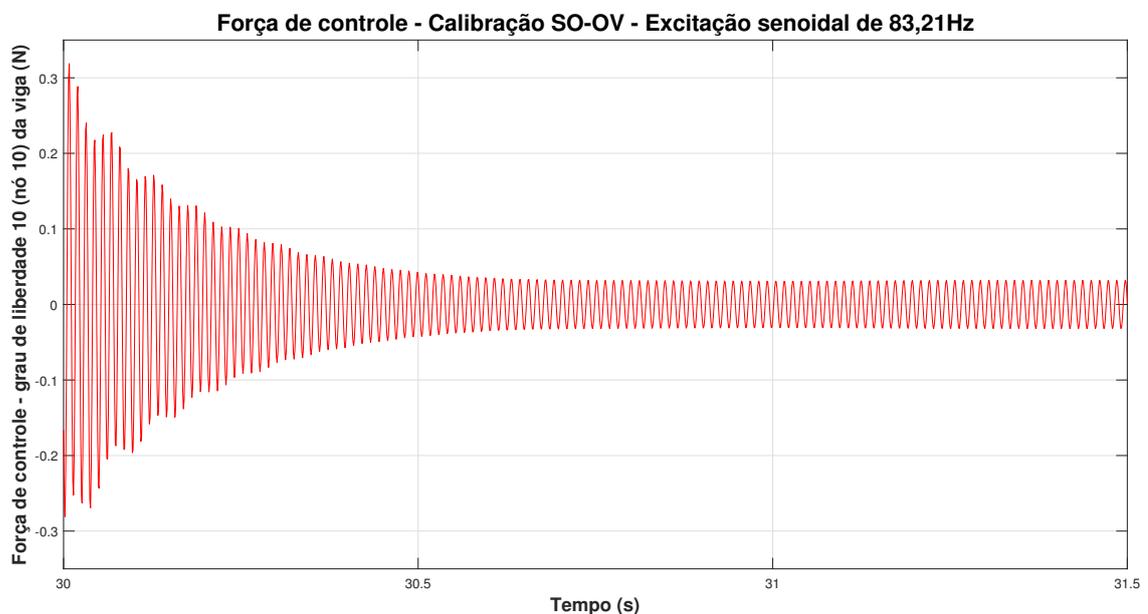


Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.17. Afim de mostrar detalhadamente as respostas transiente e permanente dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 31,5 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a força exercida pelos atuadores entra em regime estacionário rapidamente, assim como ocorreu no cenário 1.

É importante observar que, neste cenário, a amplitude inicial da força de controle também foi bem maior que a amplitude de excitação. Devido ao fato da viga ter sido excitada em uma de suas frequências naturais, ela entrou em ressonância e ganhou amplitude de deslocamento durante os 30 segundos iniciais de simulação, nos quais o controlador estava desligado. Sendo assim, para conter essa amplitude de vibração, foi necessária grande quantidade de força no momento em que o controlador foi acionado. Porém quando a força de controle atingiu o estado estacionário, sua amplitude se igualou à da força excitadora, assim como ocorreu no cenário 1.

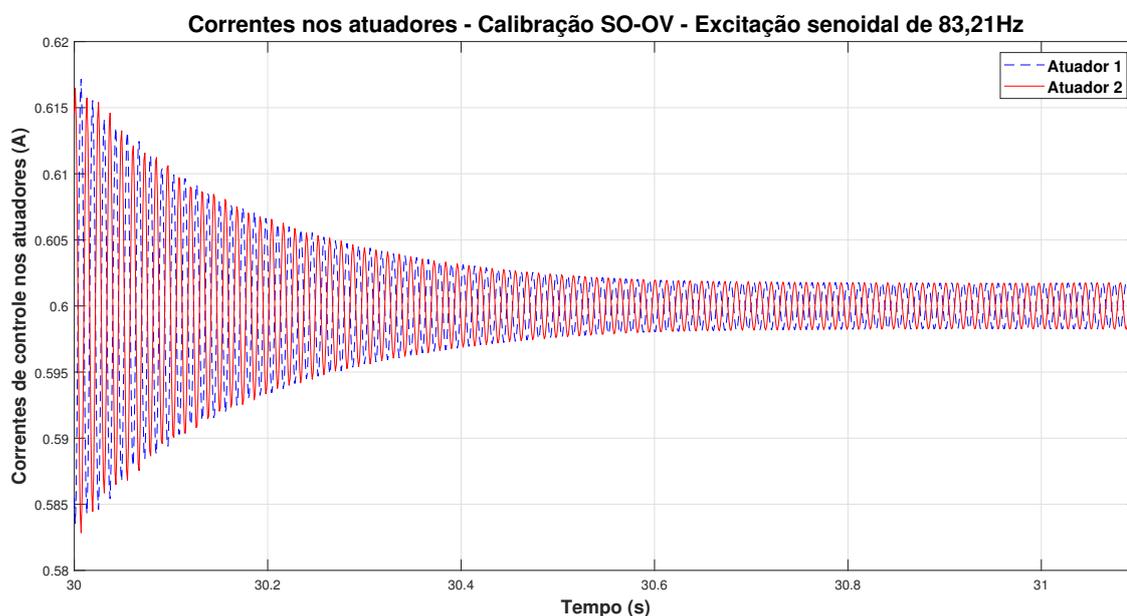
Figura 7.17 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade (nó 10) da viga em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.18 apresenta a corrente que circula nos atuadores em função do tempo. É interessante observar que os valores dessas correntes quando elas entram em estado estacionário é extremamente próximo do valor da corrente *bias*. Isso ocorre devido ao fato da amplitude da força de controle necessária em regime permanente neste cenário também ser praticamente nula.

Figura 7.18 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 83,21Hz.



Fonte: Do autor (2021).

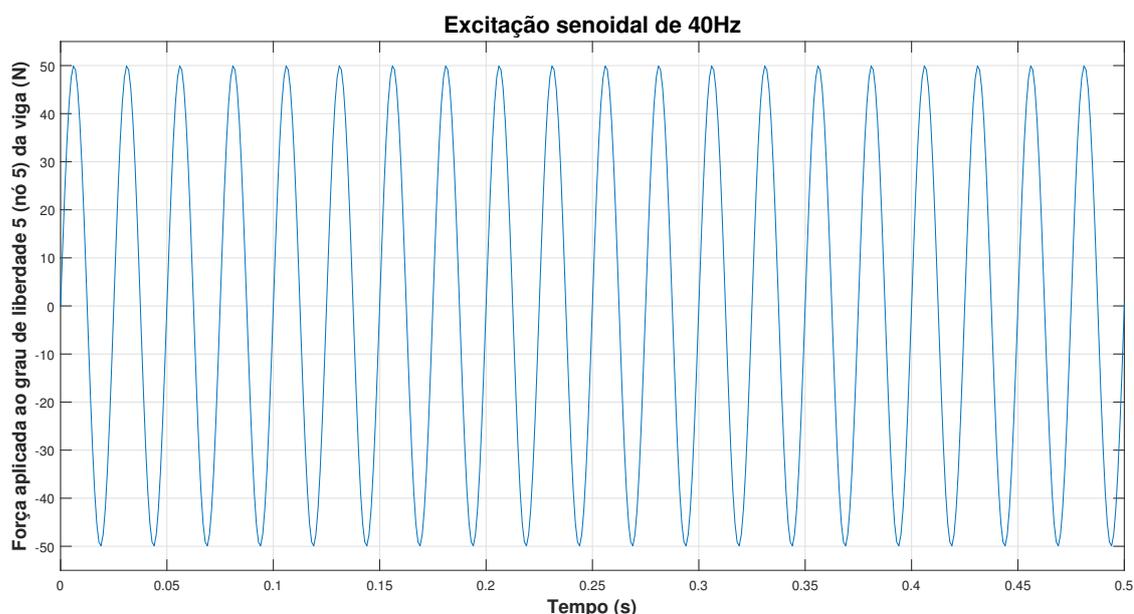
Um dos objetivos de se realizar as simulações utilizando excitações senoidais de mesma amplitude e em duas frequências naturais distintas da viga era justamente destacar o fato de que, apesar das amplitudes da força de excitação serem iguais, a frequência em que essas excitações ocorrem influenciam fortemente o comportamento dinâmico da viga. As Figuras 7.2, 7.7, 7.11 e 7.16 mostram que a excitação na frequência natural de 10,34Hz resultou em amplitudes de respostas mais altas que as amplitudes de respostas resultantes da excitação na frequência natural de 83,21Hz. Sendo assim, é possível concluir que há um comportamento inversamente proporcional entre a frequência de excitação e a amplitude de resposta, sendo que quanto mais alta a frequência de excitação, menor será a amplitude de resposta da viga. Este resultado já era esperado, pois a dinâmica em alta frequência é dominada pela inércia, enquanto que a em baixa frequência é dominada pela rigidez.

O outro objetivo de se realizar as simulações utilizando excitações senoidais de mesma amplitude e em duas frequências naturais distintas da viga era demonstrar que a eficácia do controlador em atenuar vibrações na viga é independente de qual frequência de ressonância da viga é utilizada como frequência da excitação senoidal. Este objetivo também foi concluído com sucesso.

7.3 Cenário 3 - Resposta à excitação senoidal de 40Hz

Neste cenário foi apresentado o comportamento da viga submetida à uma excitação senoidal com frequência arbitrária de 40Hz e amplitude máxima de 50N. A frequência de 40Hz não coincide com frequências naturais da viga. A Figura 7.19 mostra o comportamento da força excitadora ao longo do tempo. A excitação, assim como nos cenários 1 e 2, foi aplicada ao quinto grau de liberdade (nó 5) da viga. É importante ressaltar que o tempo total de simulação também foi de 60 segundos e a excitação foi aplicada durante todo esse tempo, apesar da Figura 7.19 mostrar apenas a janela de tempo entre 0 e 0,5 segundos, para melhor visualização.

Figura 7.19 – Excitação senoidal com frequência arbitrária (40Hz) não coincidente com frequência natural da viga.



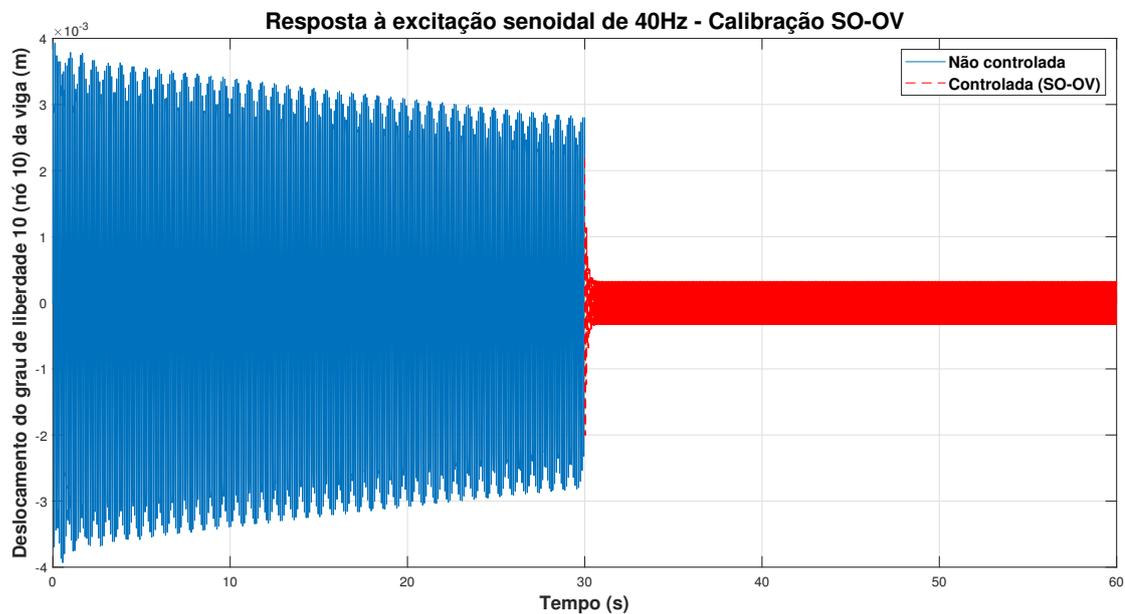
Fonte: Do autor (2021).

Nos primeiros 30 segundos o controlador estava desligado. O controlador foi ligado aos 30 segundos de simulação. A Figura 7.20 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (grau de liberdade 10, nó 10) em função do tempo. Nessa figura é possível observar a atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado quando o controlador é ligado, comprovando assim que o controlador utilizado é eficaz nas condições impostas por este cenário.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.20 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.21 a 7.24.

É interessante observar que, apesar da amplitude máxima da excitação imposta à viga neste cenário ser 2500 vezes maior que a amplitude máxima das excitações impostas à viga nos cenários 1 e 2, a amplitude máxima do deslocamento do grau de liberdade controlado no cenário atual (Figura 7.20) é menor que a amplitude máxima do deslocamento do grau de liberdade controlado no cenário 1. Isso ocorre devido ao fato da frequência da força excitadora do cenário atual não ser uma frequência natural da viga, não ocorrendo assim o fenômeno de ressonância.

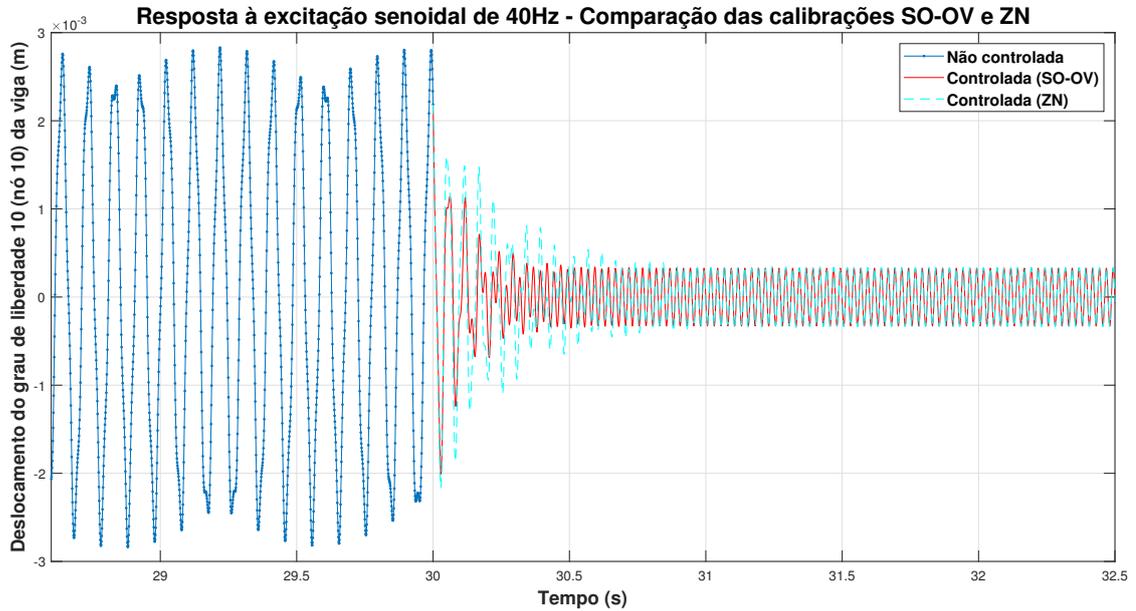
Figura 7.20 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



Fonte: Do autor (2021).

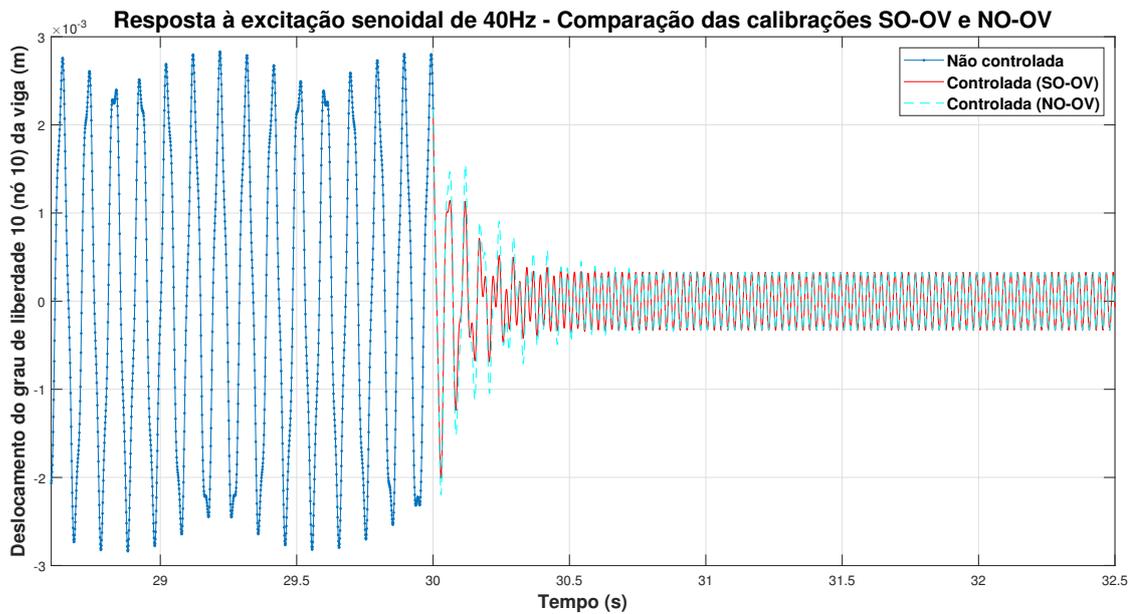
As Figuras 7.21 a 7.24 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyublen (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e permanente das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 28,6 e 32,5 segundos.

Figura 7.21 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) e Ziegler-Nichols (ZN) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



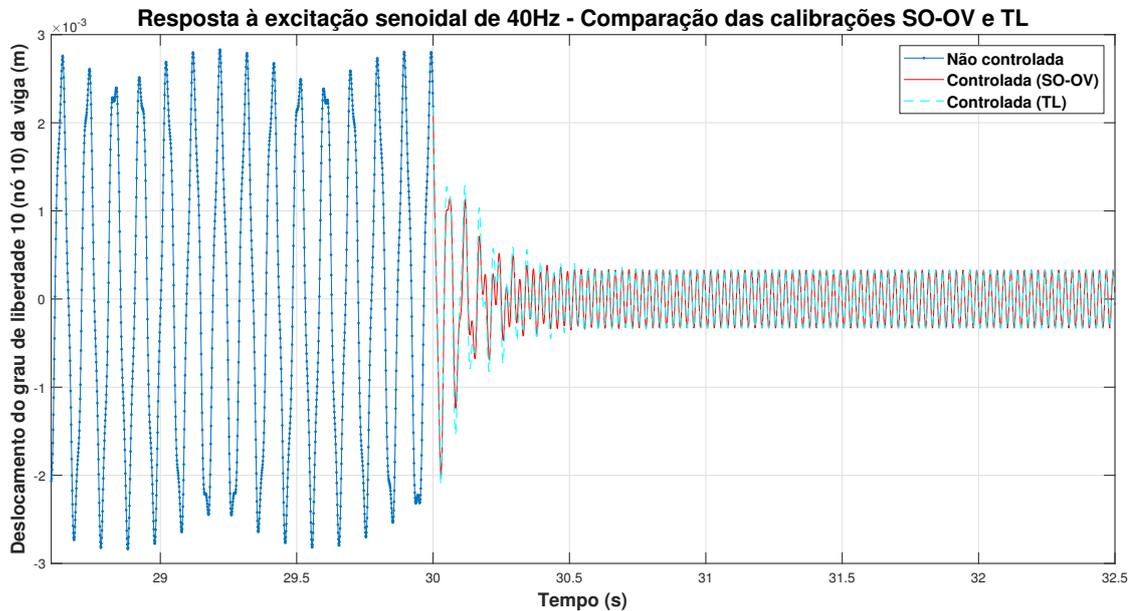
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.22 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) e *No Overshoot* (NO-OV) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



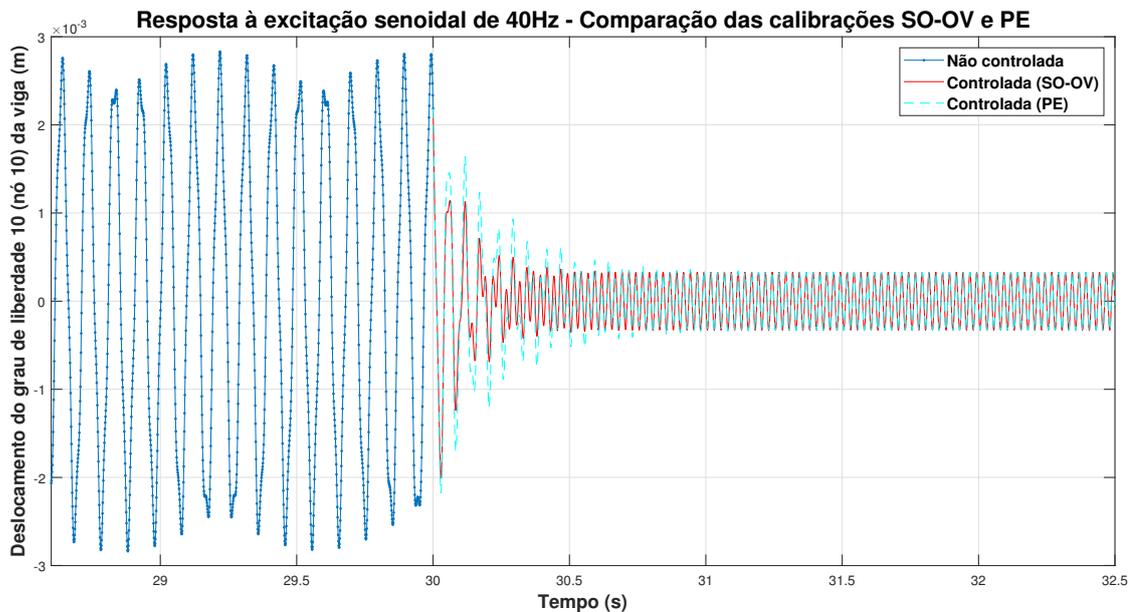
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.23 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) e Tyreus-Luyben (TL) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.24 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) e Pessen (PE) - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



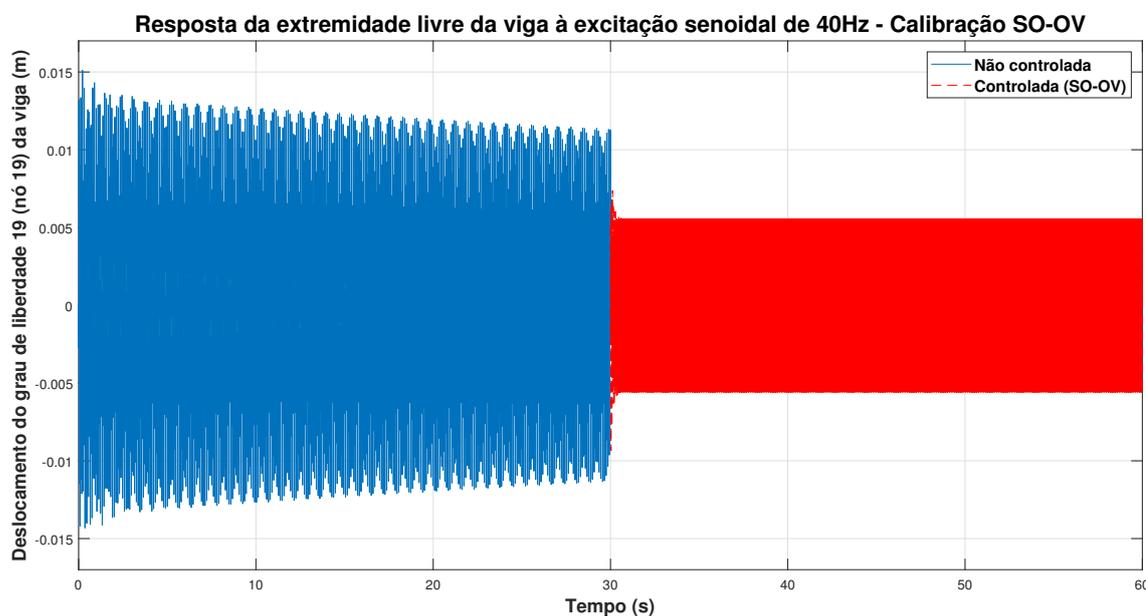
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.21 a 7.24 fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta é menor quando ela é utilizada. No que diz respeito à resposta em regime estacionário, todas

as regras de controle simuladas neste cenário apresentaram o mesmo desempenho. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas também são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga.

A Figura 7.25 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) antes e após o controlador ser ligado. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10), a atenuação da vibração também ocorre de forma instantânea na extremidade livre dela, pois a amplitude de deslocamento nessa extremidade cai de aproximadamente 12mm para 5mm. Comparando-se o deslocamento da extremidade livre da viga deste cenário com os dos cenários 1 e 2 (Figuras 7.7 e 7.16) é possível perceber que a amplitude máxima do deslocamento da resposta controlada obtida no cenário atual é bem maior que as obtidas nos cenários 1 e 2. Isso se justifica pelo fato da amplitude máxima de excitação do cenário atual ser bem maior que a amplitude máxima de excitação dos cenários 1 e 2.

Figura 7.25 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



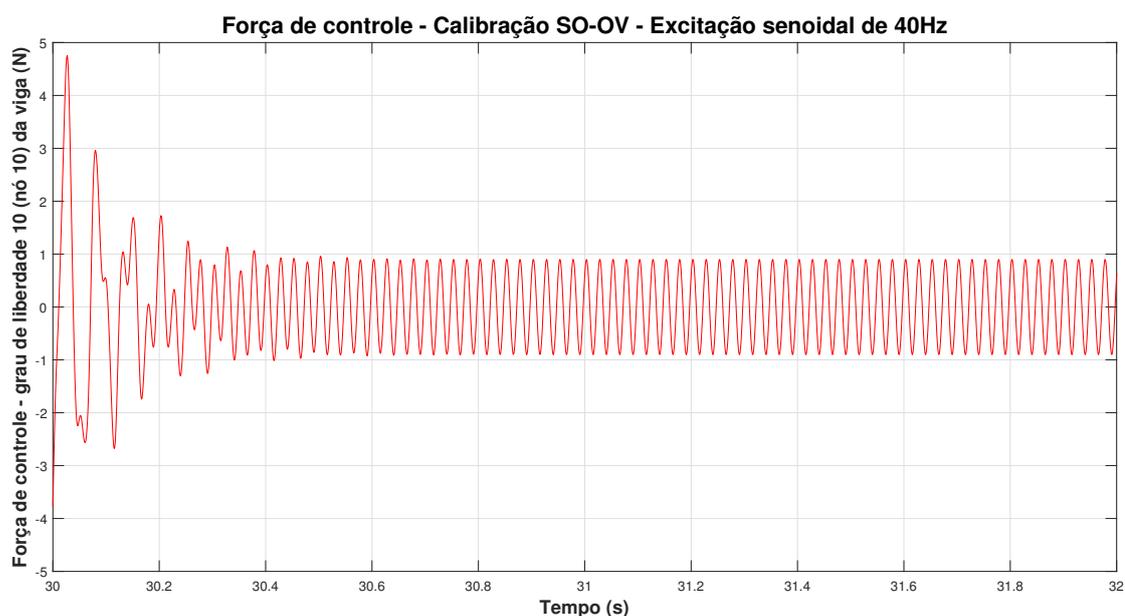
Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.26. Afim de mostrar detalhadamente as respostas transiente e permanente dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 32 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a

força exercida pelos atuadores entra em regime estacionário rapidamente, assim como ocorreu nos cenários 1 e 2.

Comparando-se a força de controle exercida pelos atuadores com a força excitadora, é possível notar que a amplitude máxima da força de controle é aproximadamente 10 vezes menor que a amplitude máxima da força de excitação. Esse comportamento é o oposto do ocorrido nos cenários 1 e 2. Devido ao fato da frequência de excitação não ser uma frequência natural da viga, não ocorre o fenômeno de ressonância, sendo necessária uma maior força para causar uma vibração razoável na viga. Porém, a força necessária para atenuar essa vibração é bem menor que a força excitadora, pois elas estão defasadas entre si. Através da análise das Figuras 7.19 e 7.26, fica evidente que a amplitude máxima em regime estacionário da força de controle é aproximadamente 50 vezes menor que a amplitude máxima da força de excitação.

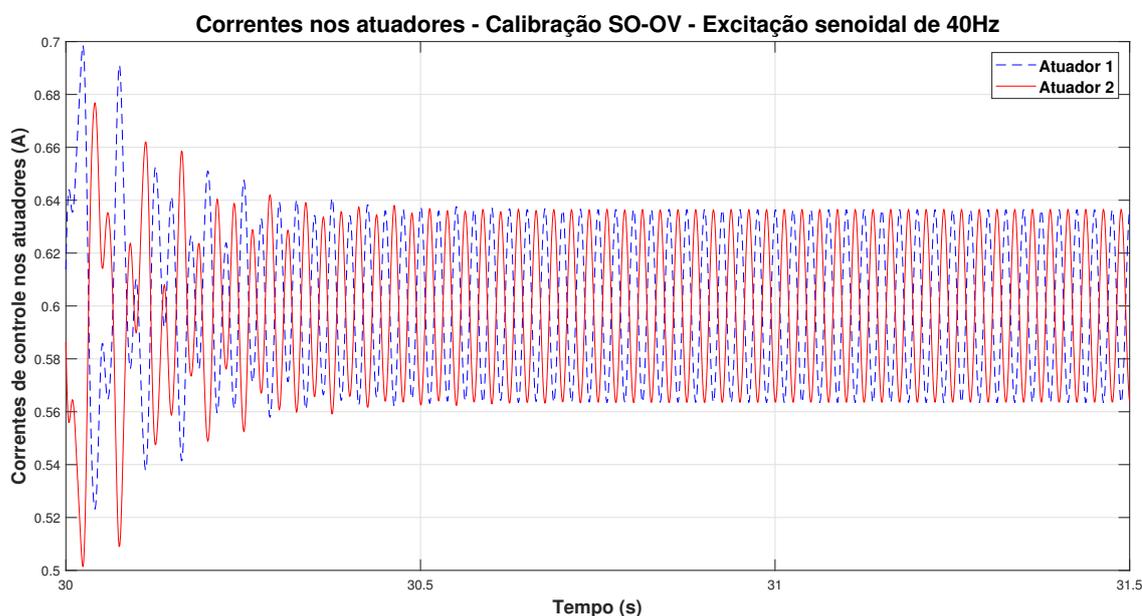
Figura 7.26 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.27 apresenta as correntes que circulam nos atuadores em função do tempo. Diferentemente do ocorrido nos cenários 1 e 2, as amplitudes em regime estacionário das correntes nos atuadores são maiores que a corrente *bias*. Isso ocorre pelo fato da amplitude da força de controle em regime permanente no cenário atual ter valor consideravelmente maior do que zero.

Figura 7.27 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação senoidal de 40Hz.



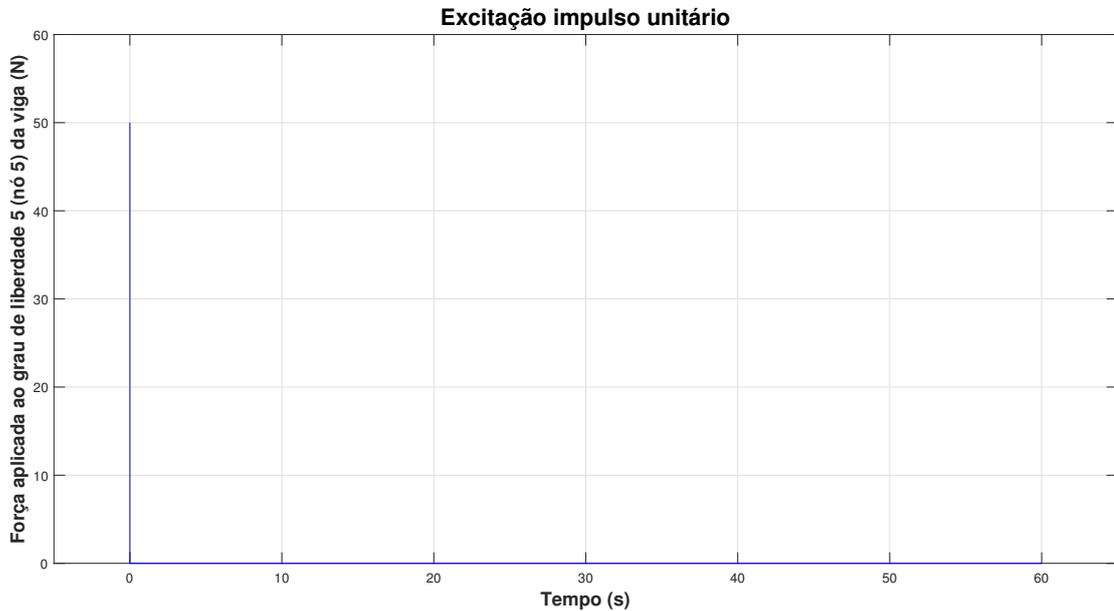
Fonte: Do autor (2021).

As análises realizadas nos cenários 1, 2 e 3 foram importantes para se compreender a influência da frequência e da amplitude da força excitadora senoidal no comportamento dinâmico da viga e na atuação do sistema de controle. A partir dessas análises foi possível concluir que, se a viga for excitada por uma força senoidal com frequência igual à alguma de suas frequências naturais, a força de controle necessária para atenuar a vibração gerada será maior do que a força de controle necessária para atenuar a vibração gerada por uma força excitadora senoidal de mesma amplitude e com frequência diferente das frequências naturais da viga.

7.4 Cenário 4 - Resposta ao impulso unitário

Neste cenário será apresentado o comportamento dinâmico da viga submetida à uma excitação impulso unitário de 50N (amplitude escolhida arbitrariamente). O impulso foi aplicado à viga logo no início da simulação, como é possível observar na Figura 7.28. Assim como nos cenários 1, 2 e 3, a excitação foi aplicada ao quinto grau de liberdade da viga (nó 5). O tempo total de simulação foi de 60 segundos.

Figura 7.28 – Excitação impulso unitário com amplitude de 50N.

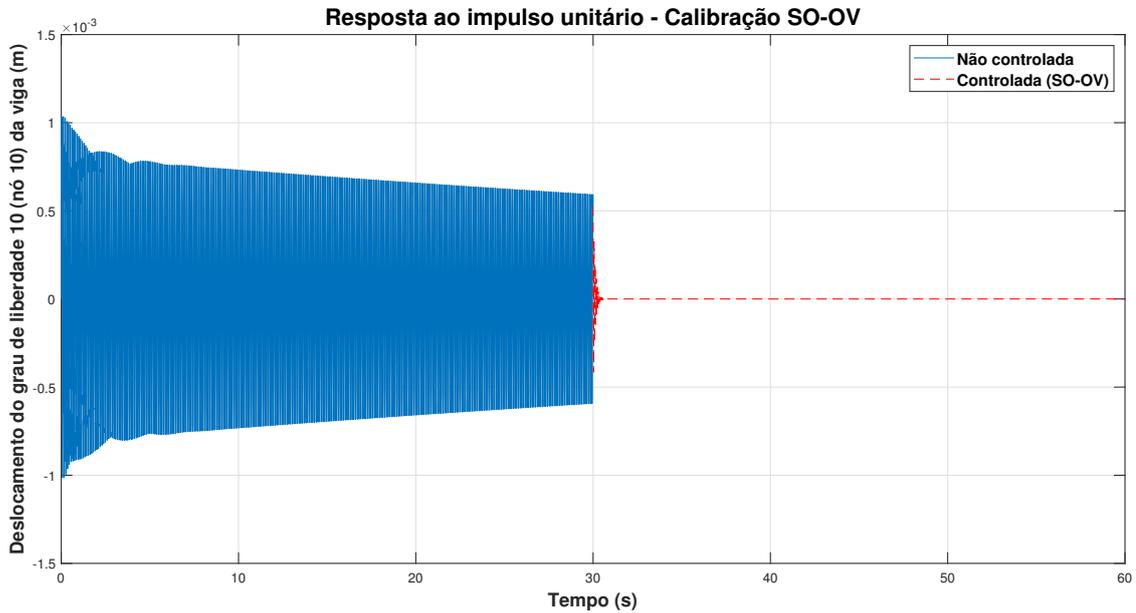


Fonte: Do autor (2021).

Nos primeiros 30 segundos o controlador estava desligado. Ele foi ligado aos 30 segundos de simulação. A Figura 7.29 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) em função do tempo. Nessa figura é possível observar a atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado quando o controlador é ligado, comprovando assim que o controlador utilizado é eficaz nas condições impostas por este cenário.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.29 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.30 a 7.33.

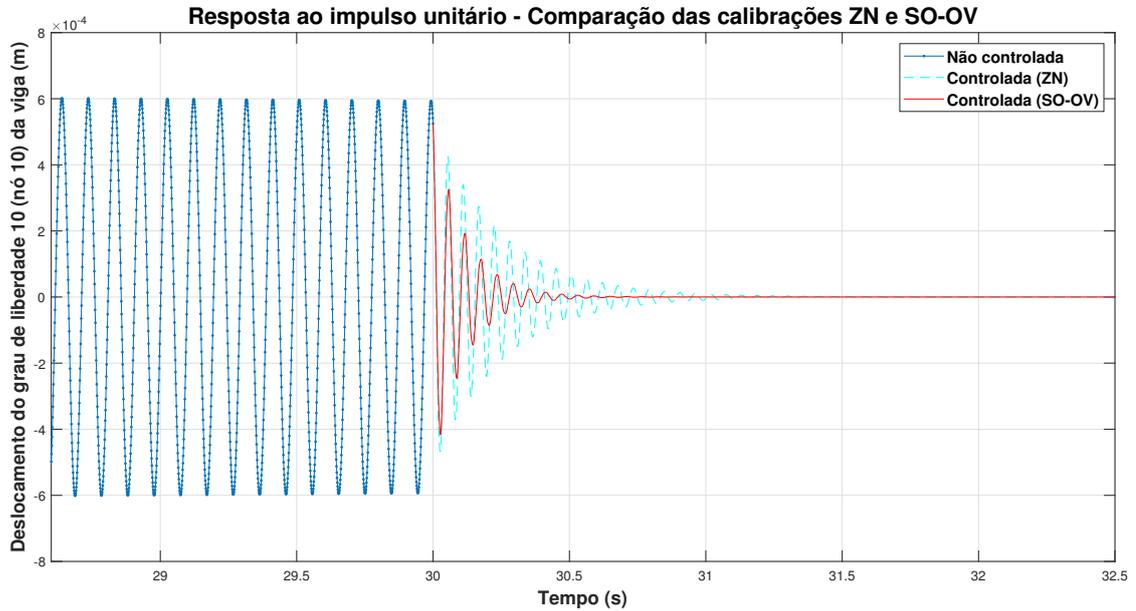
Figura 7.29 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.



Fonte: Do autor (2021).

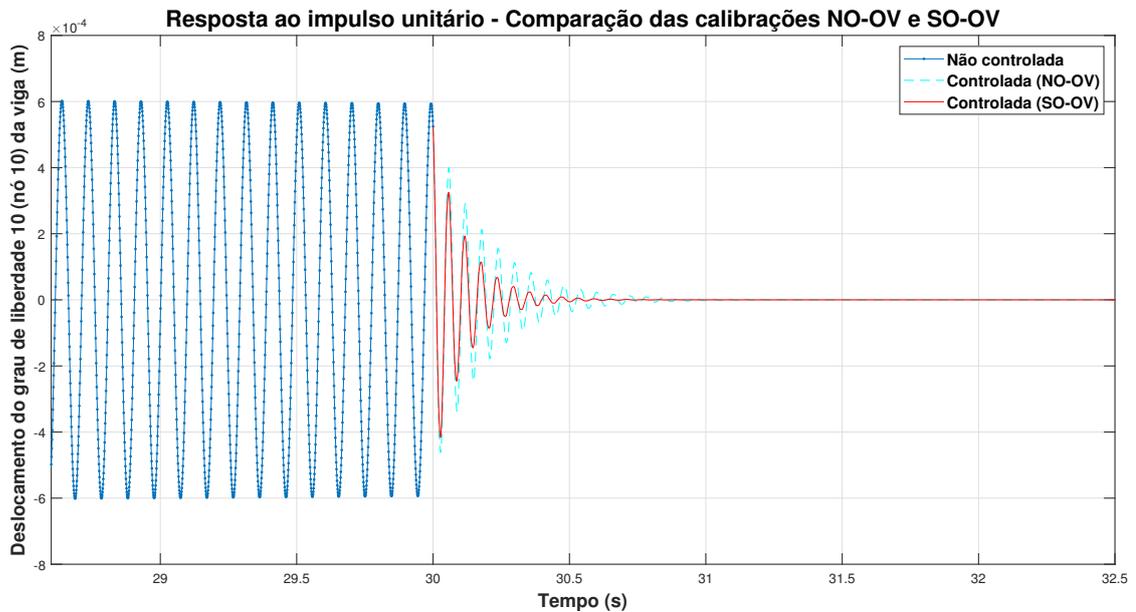
As Figuras 7.30 a 7.33 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e estacionário das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 28,6 e 32,5 segundos.

Figura 7.30 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.



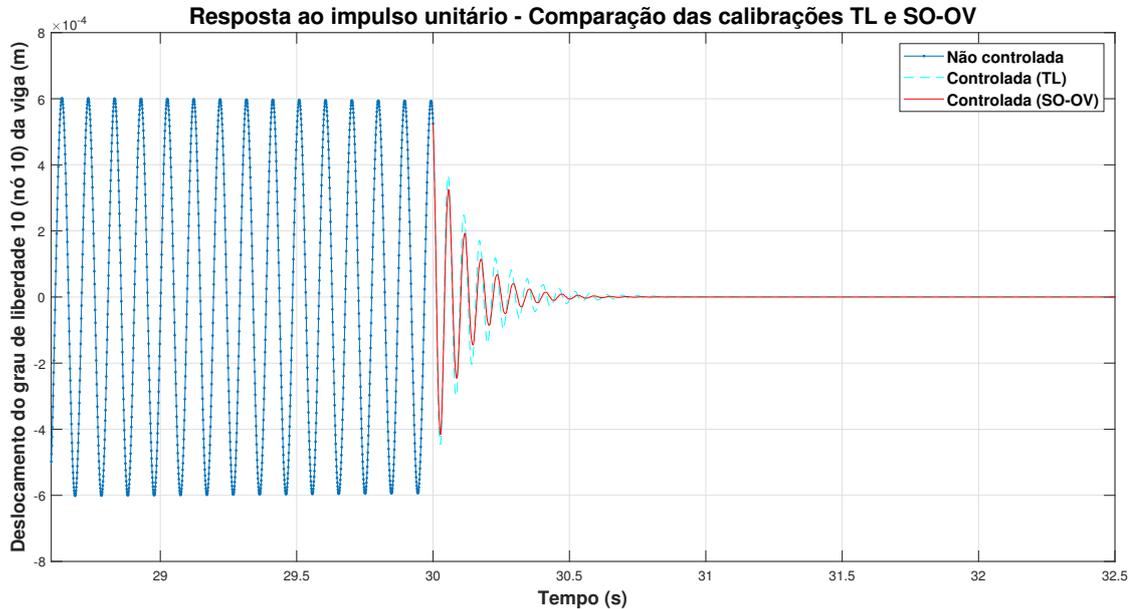
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.31 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.



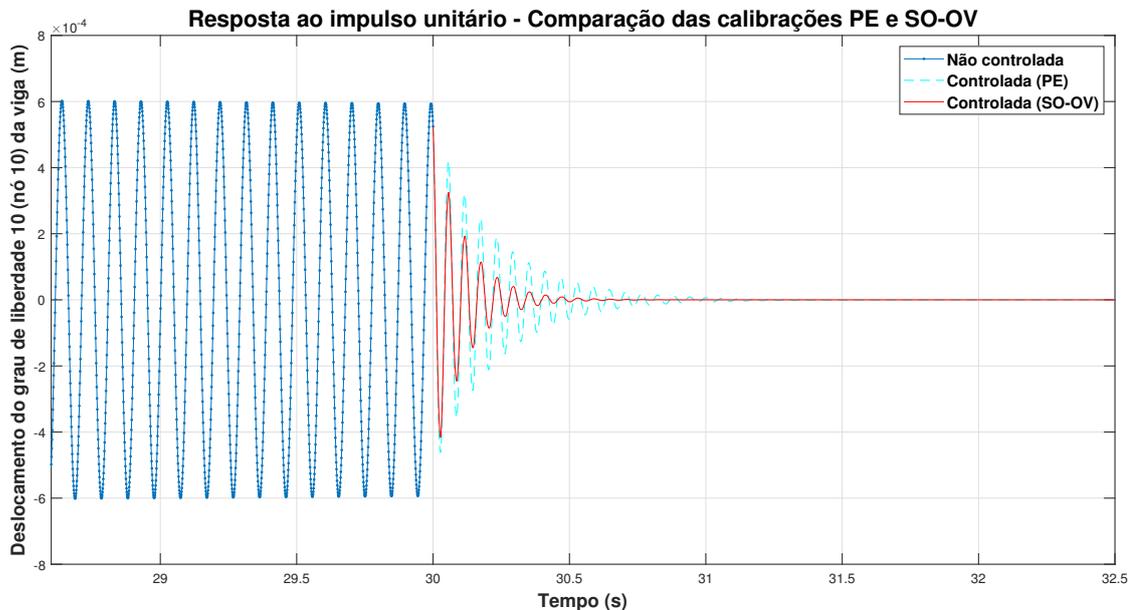
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.32 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.33 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação impulso unitário.



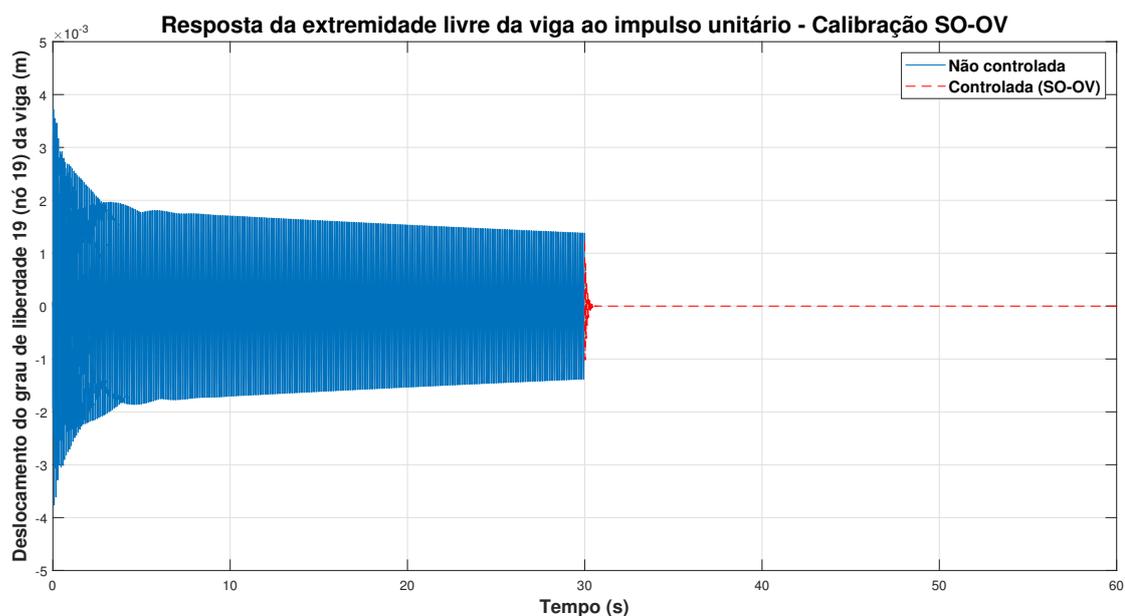
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.30 a 7.33, fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário também é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta é menor quando ela é utilizada. No que diz respeito à resposta em regime estacionário,

todas as regras de controle simuladas neste cenário apresentaram o mesmo desempenho. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas também são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga.

A Figura 7.34 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga antes e após o controlador ser ligado. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10), a atenuação da vibração também ocorre de forma instantânea na extremidade livre dela (grau de liberdade 19, nó 19), pois a amplitude de deslocamento nessa extremidade cai de aproximadamente 15mm para 0mm.

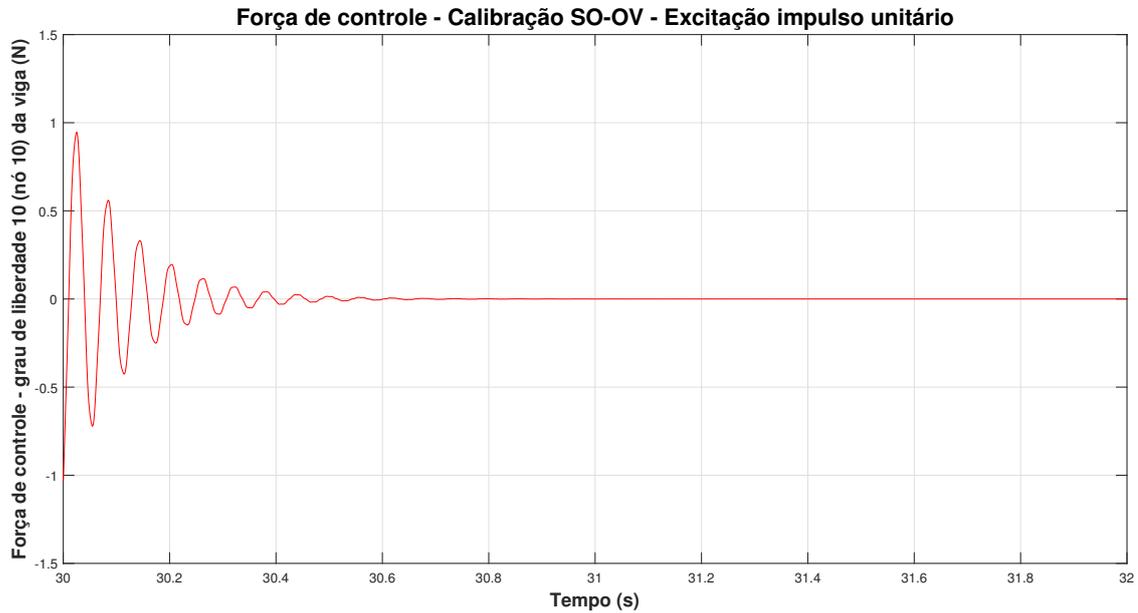
Figura 7.34 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.



Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.35. Afim de apresentar detalhadamente as respostas transiente e estacionária dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 32 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a força exercida pelos atuadores entra em regime permanente rapidamente.

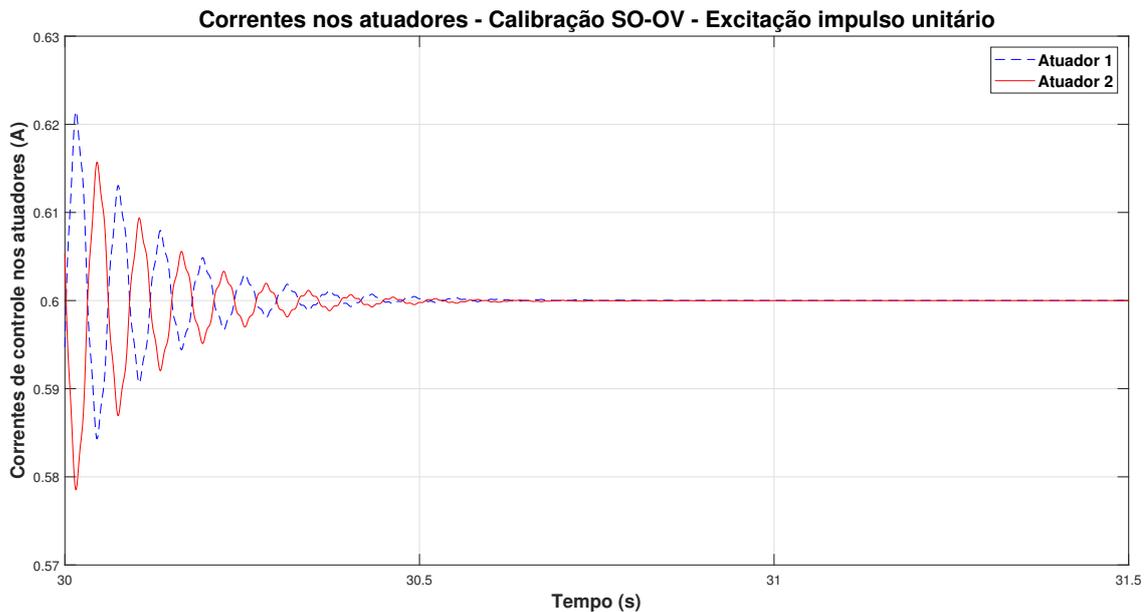
Figura 7.35 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.36 apresenta as correntes que circulam nos atuadores em função do tempo. Os valores dessas correntes quando elas entram em estado estacionário é extremamente próximo do valor da corrente *bias*. Isso ocorre pelo fato da amplitude da força de controle necessária em regime permanente neste cenário também ser praticamente nula.

Figura 7.36 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação impulso unitário.

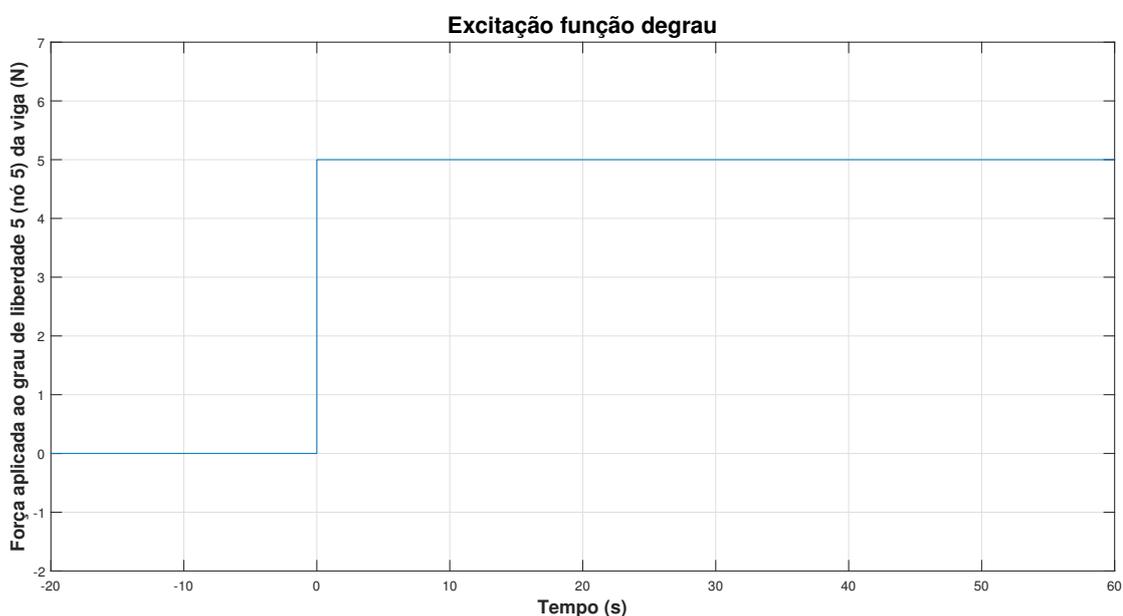


Fonte: Do autor (2021).

7.5 Cenário 5 - Resposta à função degrau

Neste cenário será apresentado o comportamento dinâmico da viga submetida à uma excitação função degrau de 5N (valor escolhido arbitrariamente). Assim como nos cenários 1, 2, 3 e 4, a excitação foi aplicada ao quinto grau de liberdade da viga (nó 5). A Figura 7.37 apresenta o comportamento da força excitadora ao longo do tempo. O tempo total de simulação foi de 60 segundos e a excitação foi aplicada durante todo esse tempo.

Figura 7.37 – Excitação função degrau com amplitude de 5N.



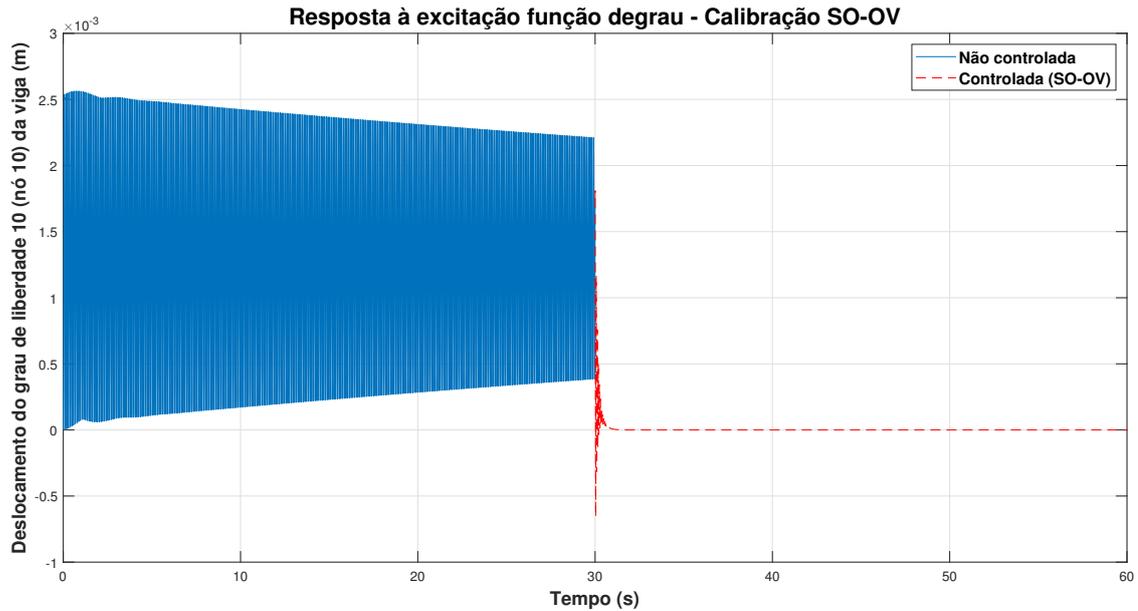
Fonte: Do autor (2021).

O controlador iniciou a simulação desligado e foi ligado aos 30 segundos. A Figura 7.38 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) em função do tempo. Nessa figura é possível notar a ocorrência de atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado quando o controlador é ligado. Além disso, o controlador fez com que o deslocamento do grau de liberdade controlado fosse para o valor de referência instantaneamente. Sendo assim, fica comprovada a eficácia do controlador utilizado neste cenário.

É interessante observar que a viga atingiu uma posição de equilíbrio diferente de zero antes do controlador ser ligado. Isso ocorreu devido ao fato da função degrau atuar como um carregamento estático na viga. Quando o controlador foi ligado, os atuadores realizaram uma força contrária à esse carregamento estático.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.38 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.39 a 7.42.

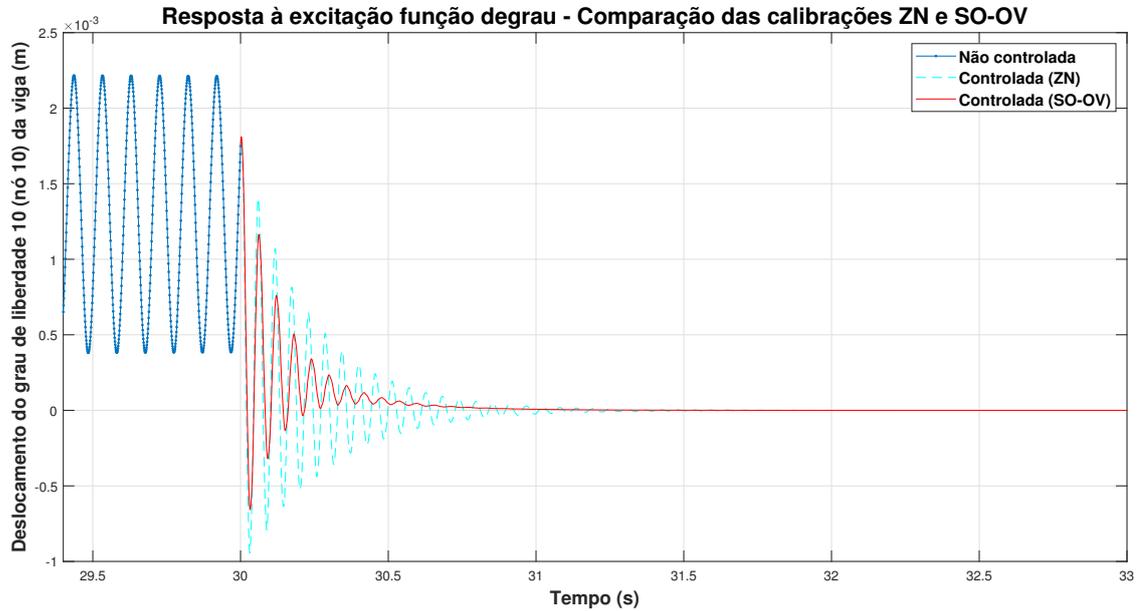
Figura 7.38 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.



Fonte: Do autor (2021).

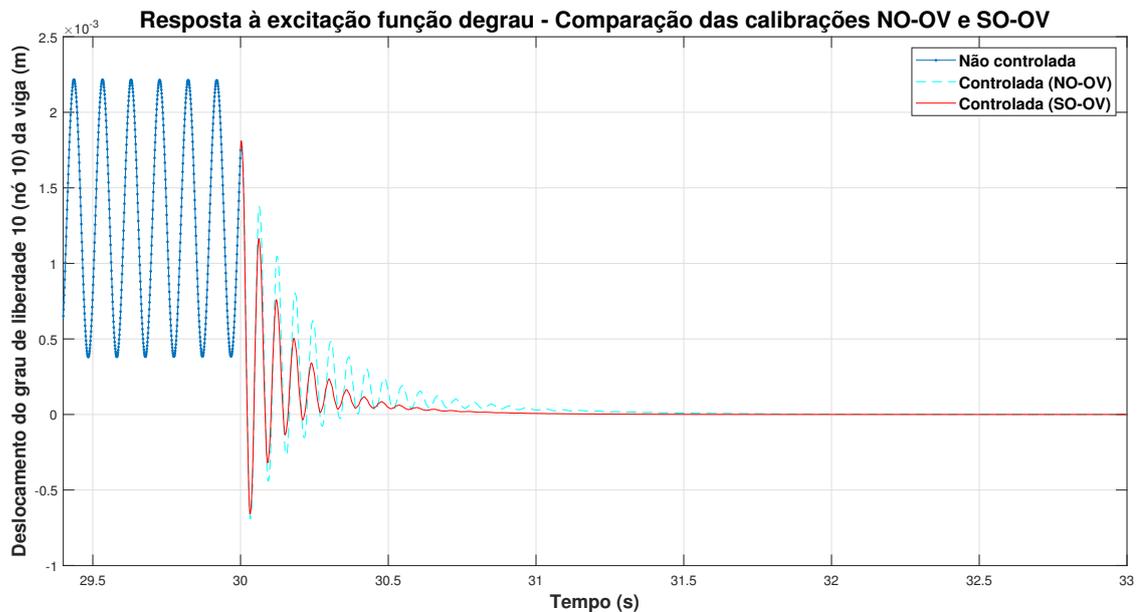
As Figuras 7.39 a 7.42 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e estacionário das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 29,4 e 33 segundos.

Figura 7.39 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.



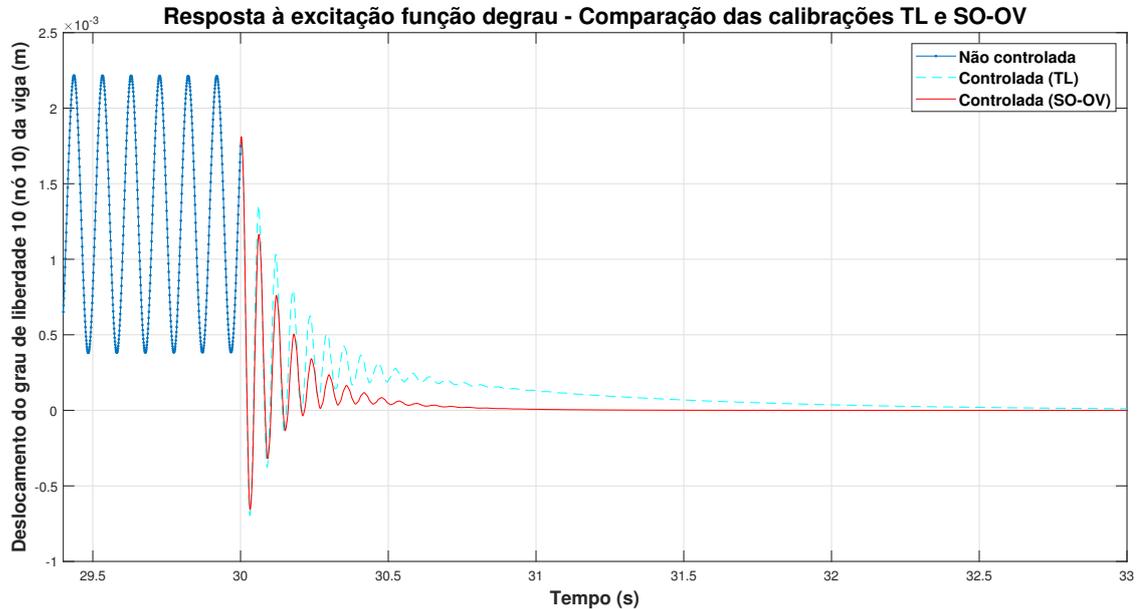
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.40 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.



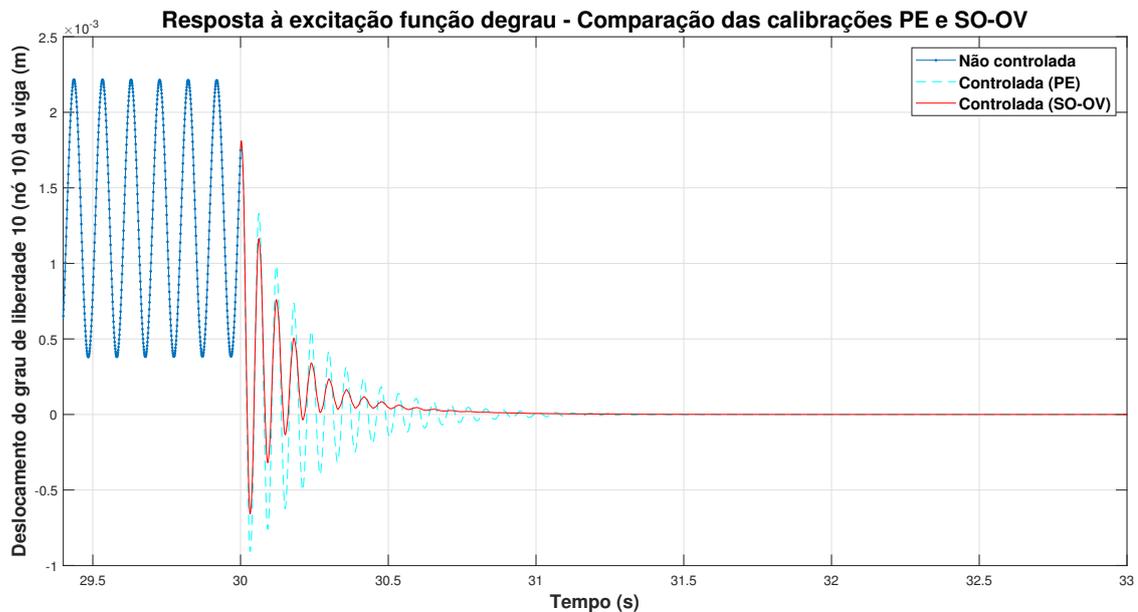
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.41 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.42 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação função degrau.



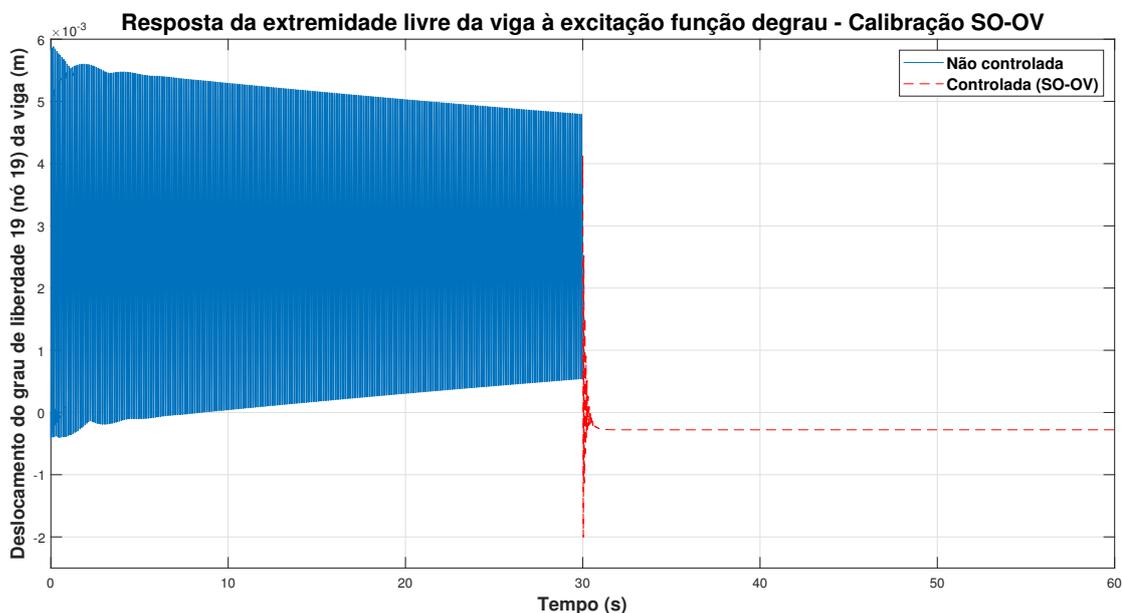
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.39 a 7.42, fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta é menor quando ela é utilizada. No que diz respeito à resposta em regime permanente, todas

as regras de controle simuladas neste cenário apresentaram o mesmo desempenho. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas também são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga e levar o deslocamento do grau de liberdade controlado para o valor de referência.

A Figura 7.43 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) antes e após o controlador ser ligado. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, quando o controlador é ligado, o deslocamento da extremidade livre da viga é levado para um valor diferente do valor de referência estabelecido para o grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10). Isso ocorre pelo fato da viga ser uma estrutura flexível e estar submetida a uma força excitadora estática positiva no grau de liberdade 5 (nó 5) (Figura 7.37) e a uma força de controle, no grau de liberdade 10 (nó 10), que é estática e negativa em regime permanente (Figura 7.44).

Figura 7.43 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.

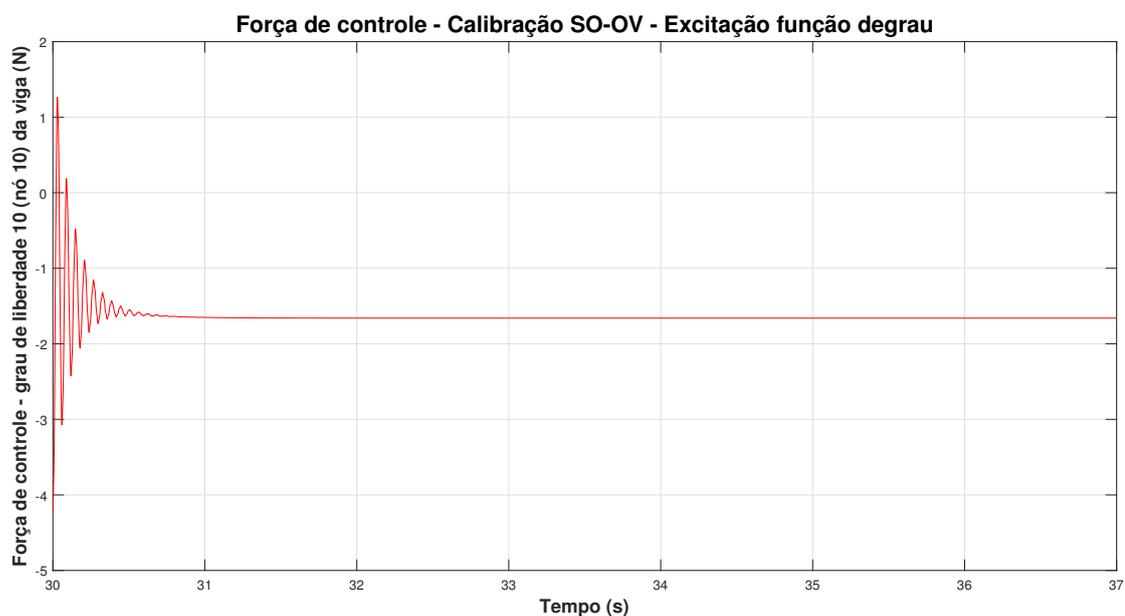


Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.44. Afim de mostrar detalhadamente as respostas transiente e permanente dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 37 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a força exercida pelos atuadores entra em regime estacionário rapidamente.

É importante atentar-se ao fato da força de controle assumir o valor de aproximadamente -1.6N em regime estacionário. Isso ocorre pois, para levar o deslocamento do grau de liberdade controlado (décimo grau de liberdade, nó 10) ao valor de referência (0), os atuadores devem fazer uma força que seja capaz de equilibrar a força estática de 5N imposta ao grau de liberdade 5 (nó 5) da viga.

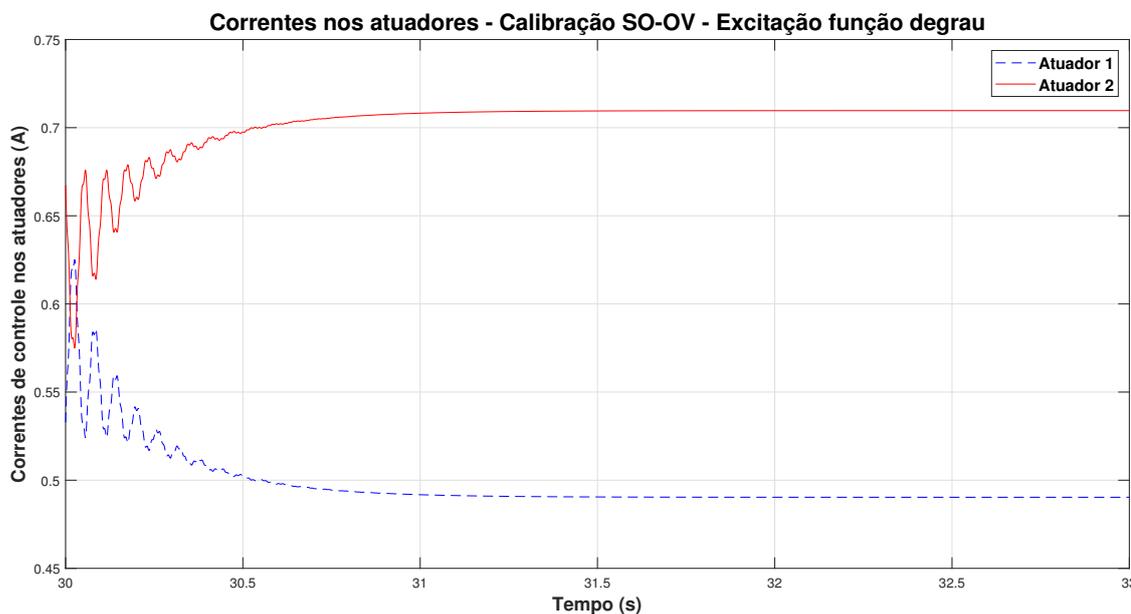
Figura 7.44 – Força de controle aplicada ao grau de liberdade 10 da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.45 apresenta as correntes que circulam nos atuadores em função do tempo. A corrente no atuador 1 se estabiliza em um valor bem menor que a corrente *bias* e a corrente no atuador 2 se estabiliza em um valor bem maior que a corrente *bias*. Isso ocorre devido ao fato da força de controle assumir um valor negativo fixo em regime permanente (Figura 7.44).

Figura 7.45 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação função degrau.

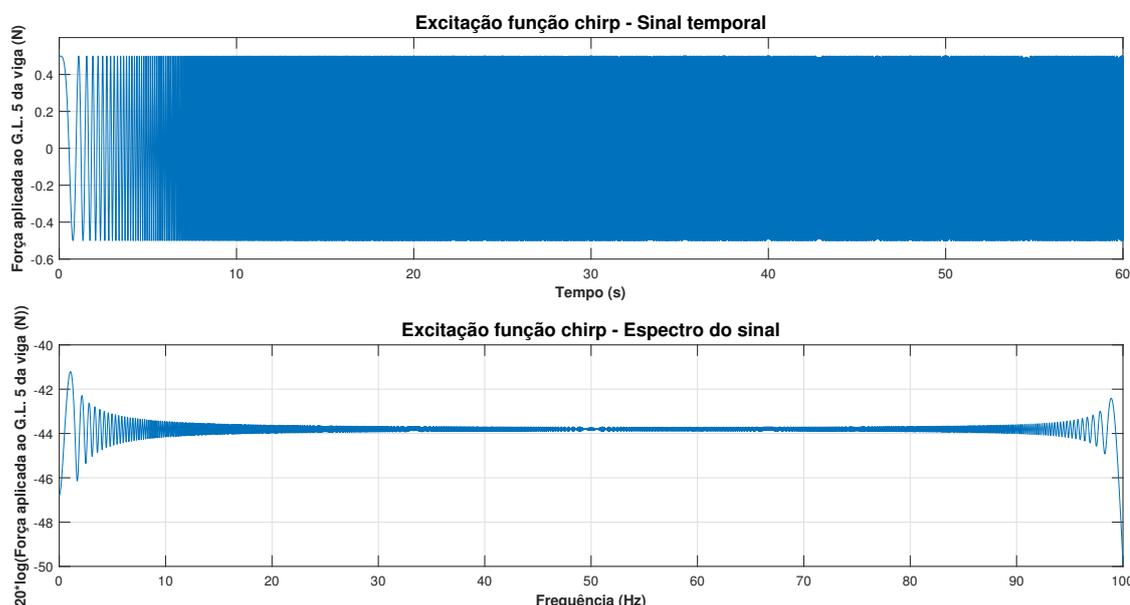


Fonte: Do autor (2021).

7.6 Cenário 6 - Resposta à função chirp

Neste cenário será apresentado o comportamento dinâmico da viga submetida à uma excitação função chirp com amplitude de 0,5N (valor escolhido arbitrariamente). A função chirp utilizada consiste em uma função senoidal cuja frequência é aumentada linearmente de 0Hz à 100Hz (valor escolhido arbitrariamente) em 60 segundos. Essa excitação começou a ser aplicada logo no início da simulação, ao quinto grau de liberdade da viga (nó 5), como é possível observar na Figura 7.46. O tempo total de simulação foi de 60 segundos.

Figura 7.46 – Excitação função chirp (0Hz à 100Hz em 60 segundos) com amplitude de 0,5N - grau de liberdade 5 (G.L. 5, nó 5).



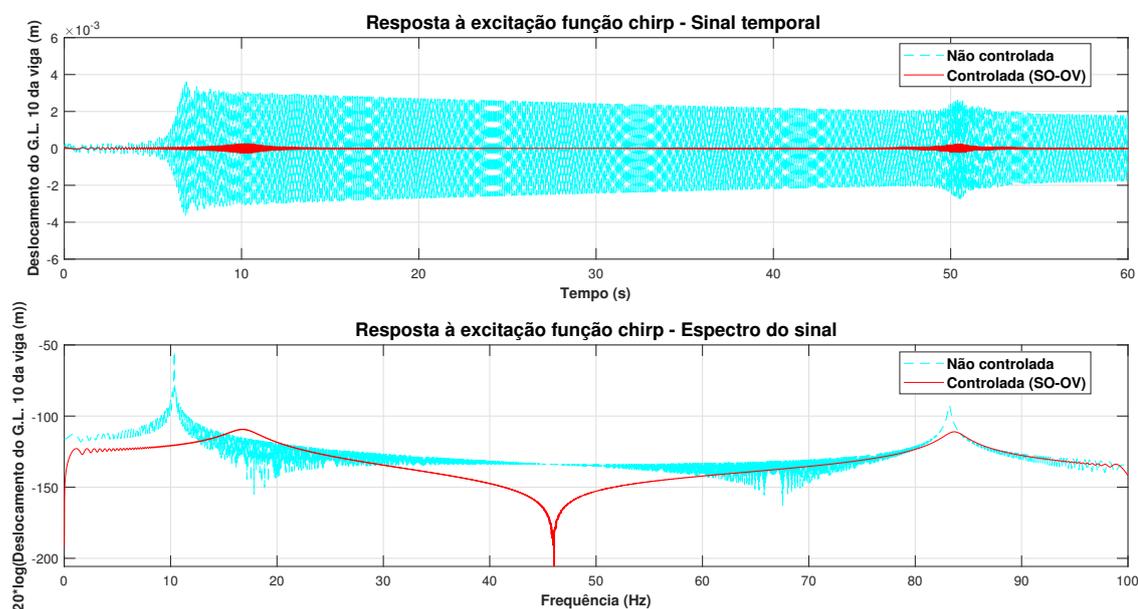
Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.47 apresenta os deslocamentos do décimo grau de liberdade da viga (nó 10) (grau de liberdade controlado) para os casos sem e com a aplicação de controle. Esses deslocamentos são apresentados em função do tempo e da frequência. Para o caso com a aplicação de controle, o controlador permanece ligado durante a simulação inteira.

Através da análise da Figura 7.47 é possível perceber que, quando o controlador está desligado, a amplitude do deslocamento é aumentada nos momentos em que a frequência de excitação passa pelas frequências naturais da viga (10,34Hz e 83,21Hz), devido ao fenômeno de ressonância. Quando o controlador está ligado, a dinâmica do sistema é alterada e as frequências de ressonância do sistema assumem valores ligeiramente diferentes das frequências naturais da viga. No entanto, essa ligeira mudança nos valores das frequências naturais do sistema atenua as amplitudes de vibração da viga na ressonância.

É possível também observar, na Figura 7.47, que, na simulação com o controlador ligado, houve atenuação da amplitude de vibração da viga em quase todo o espectro de frequência simulado (quando o controlador é utilizado, as vibrações no grau de liberdade controlado são levemente amplificadas entre as frequências 15Hz e 20Hz, se comparadas ao caso sem aplicação de controle). Isso comprova a eficácia do controlador utilizado para as condições impostas por este cenário. A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.47 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.48 a 7.51.

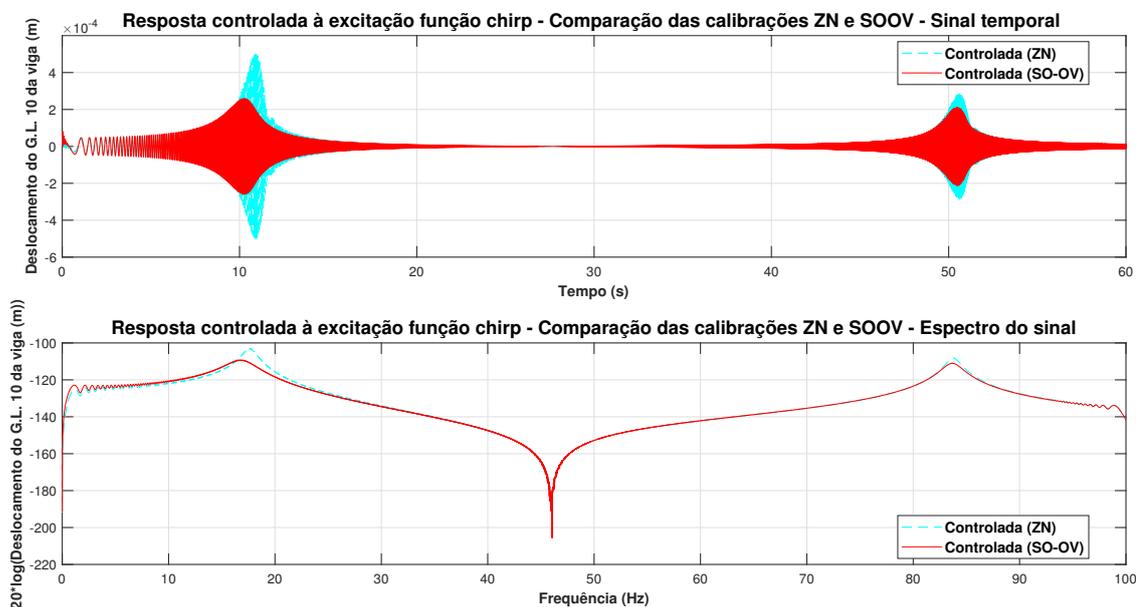
Figura 7.47 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas não controlada e controlada (regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



Fonte: Do autor (2021).

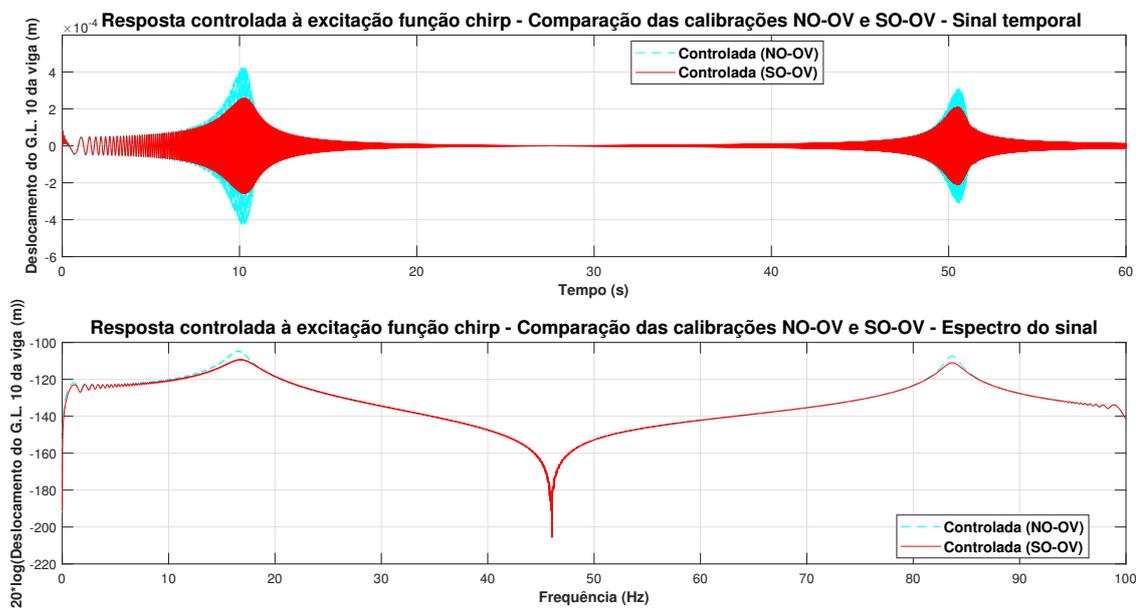
As Figuras 7.48 a 7.51 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se o desempenho do controlador em atenuar a vibração da viga quando a frequência de excitação passa pelas frequências naturais da mesma (10,34Hz e 83,21Hz).

Figura 7.48 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



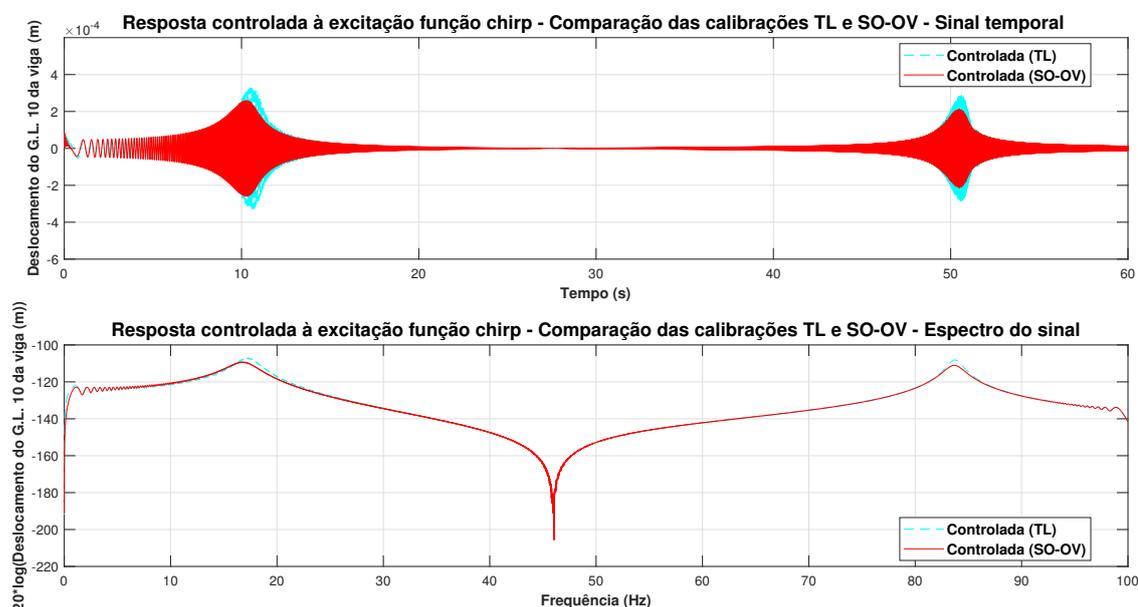
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.49 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



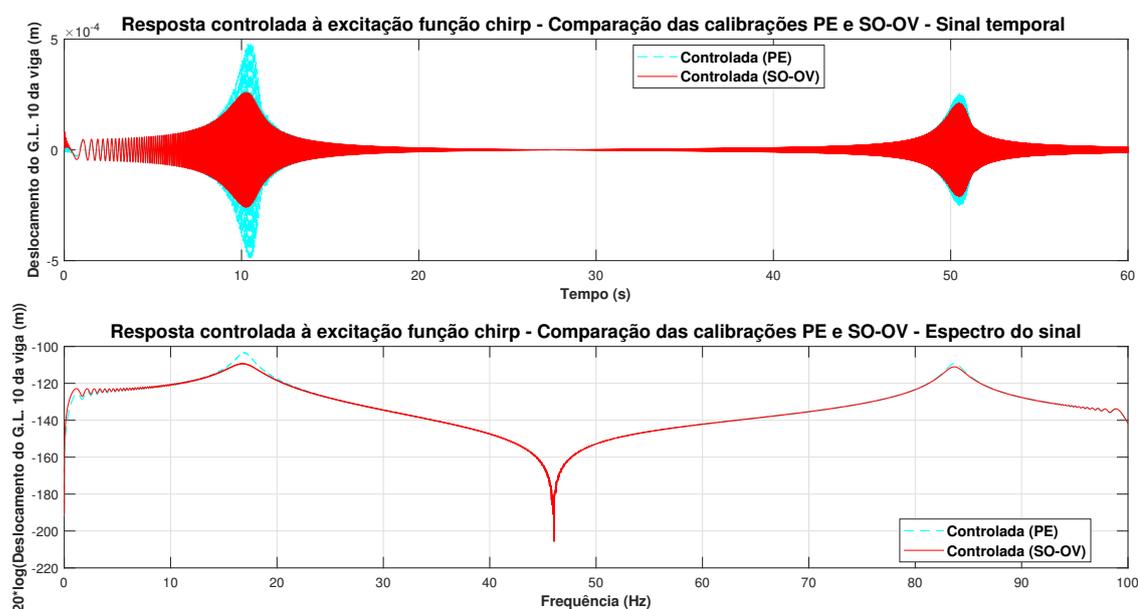
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.50 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.51 – Deslocamento do grau de liberdade 10 (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas controladas com as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



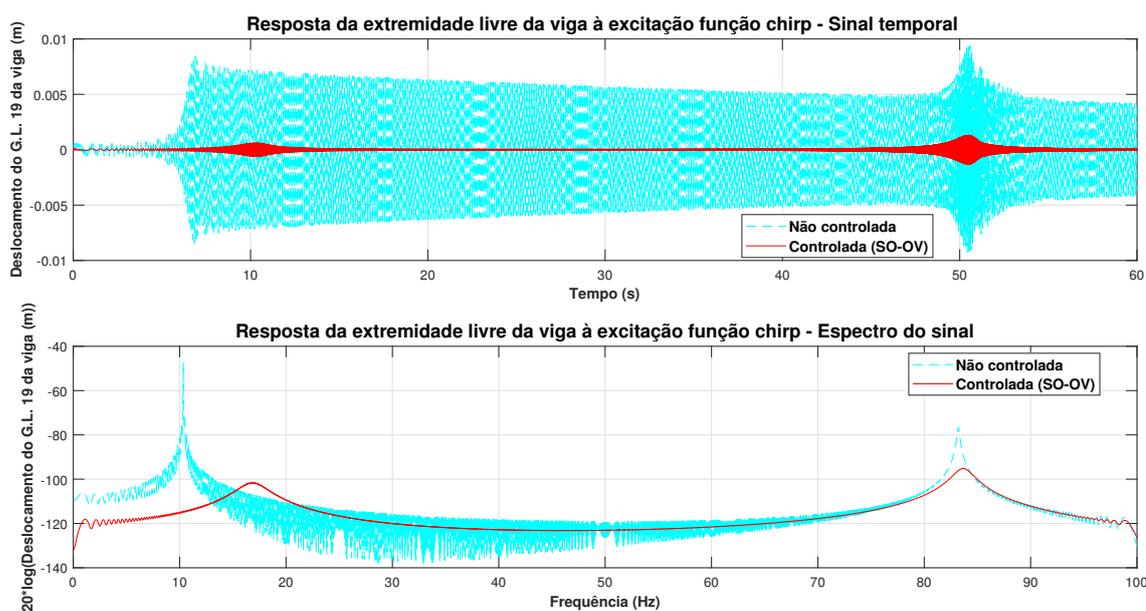
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.48 a 7.51 fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário também é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois a amplitude de vibração da viga é menor quando a frequência de excitação passa pelas frequências naturais da viga e essa

regra de calibração é utilizada. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga quando a frequência de excitação passa pelas frequências naturais dela.

A Figura 7.52 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga para os casos sem e com a aplicação de controle. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade da viga, a vibração da extremidade livre dela (grau de liberdade 19, nó 19) também é atenuada em quase todo o espectro de frequência simulado (quando o controlador é utilizado, as vibrações na extremidade livre da viga são levemente amplificadas entre as frequências 15Hz e 20Hz, se comparadas ao caso sem aplicação de controle).

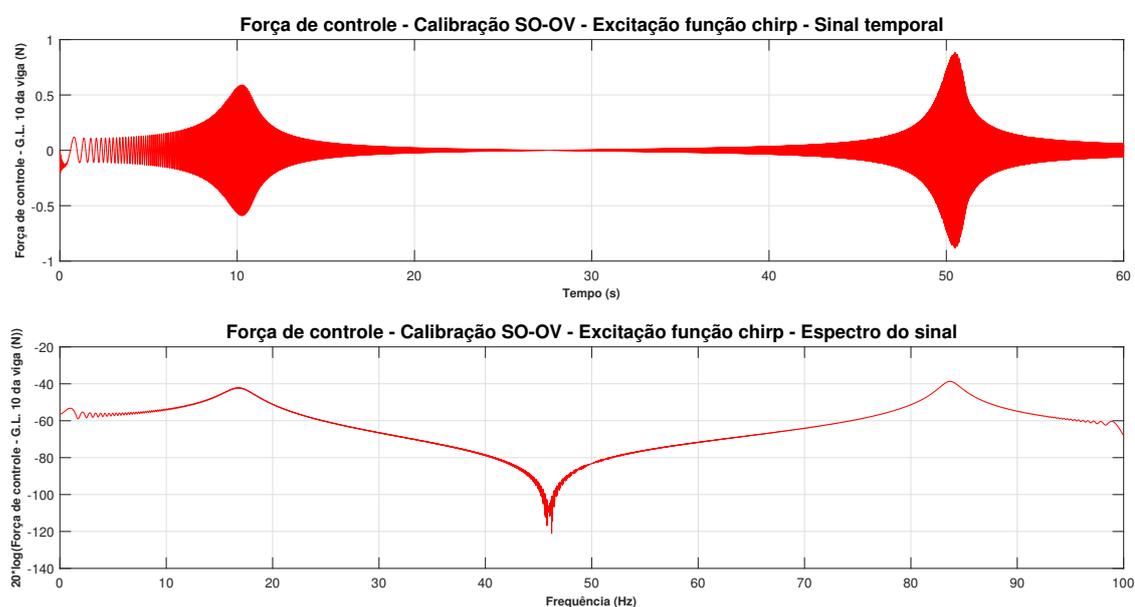
Figura 7.52 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo e da frequência - comparação entre as respostas não controlada e controlada (regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV)) - viga submetida à excitação função chirp.



Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo e da frequência na Figura 7.53. Analisando essa figura é possível perceber que o controlador exerce uma maior força na viga nas frequências próximas às frequências naturais da viga. Isso ocorre pois nessas frequências a amplitude de vibração da viga é maior, devido à ressonância causada pela força excitadora, sendo necessário uma maior força para atenuar essa vibração.

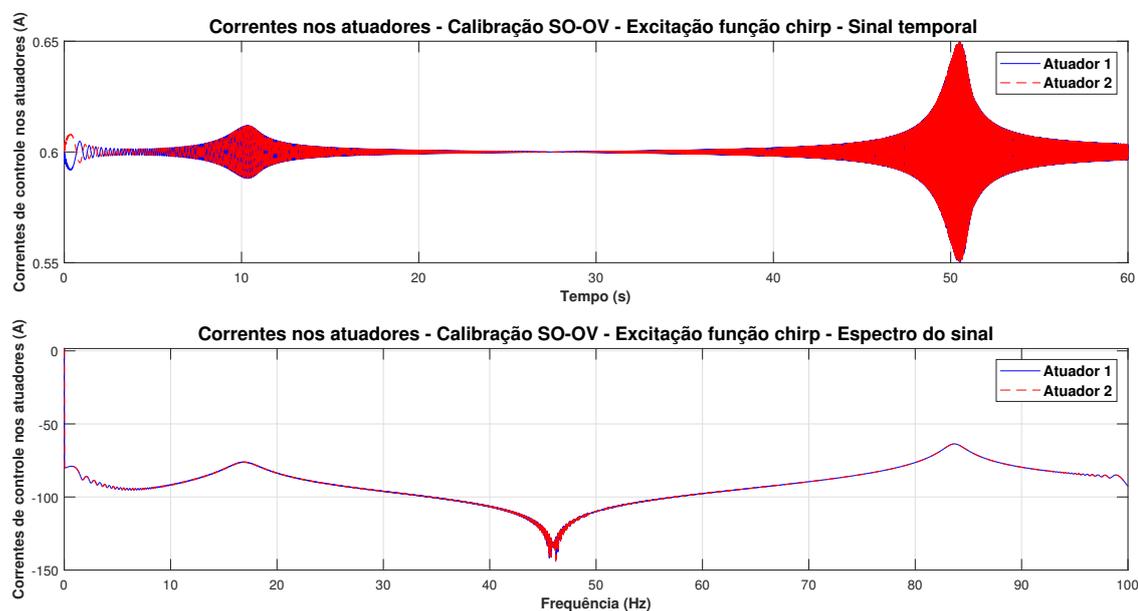
Figura 7.53 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (G.L. 10, nó 10) em função do tempo e da frequência - viga submetida à excitação função chirp.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.54 apresenta as correntes que circulam nos atuadores em função do tempo e da frequência. Os valores dessas correntes são maiores nas frequências próximas às frequências naturais da viga. Isso ocorre devido ao fato da força de controle necessária nessas frequências ser maior. Em frequências distantes das frequências naturais da viga as correntes nos atuadores têm valores praticamente iguais ao valor da corrente *bias*. Isso se justifica pelo fato da força de controle ser muito próxima de zero nas frequências distantes das frequências naturais da viga.

Figura 7.54 – Correntes nos atuadores em função do tempo e da frequência - viga submetida à excitação função chirp.

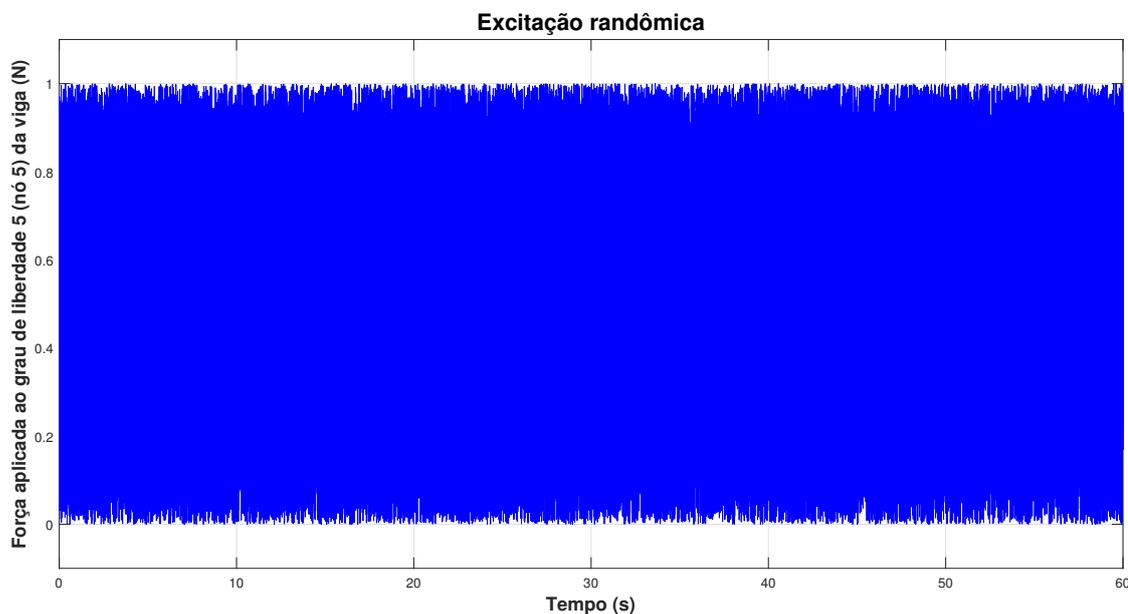


Fonte: Do autor (2021).

7.7 Cenário 7 - Resposta à excitação randômica

Neste cenário será apresentado o comportamento dinâmico da viga submetida à uma excitação randômica (ruído branco) de amplitude máxima de 1N (valor escolhido arbitrariamente). Essa excitação foi aplicada ao quinto grau de liberdade da viga (nó 5). É importante ressaltar que o tempo total de simulação foi de 60 segundos e a excitação foi aplicada durante todo esse tempo, como é possível observar na Figura 7.55.

Figura 7.55 – Excitação randômica (ruído branco) com amplitude máxima de 1N.

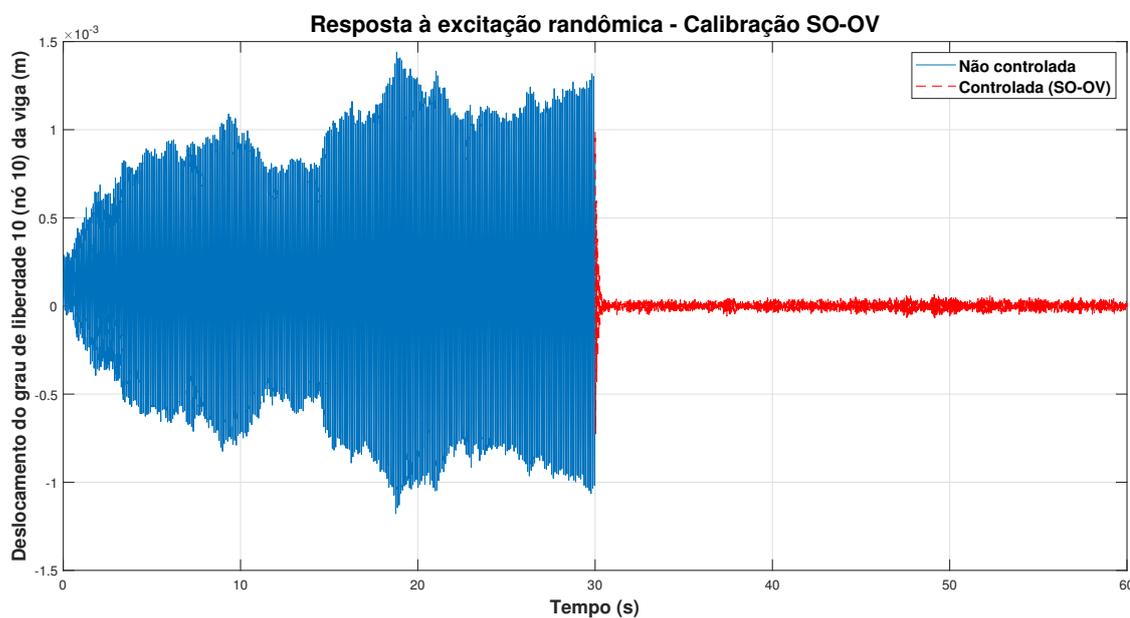


Fonte: Do autor (2021).

Nos primeiros 30 segundos o controlador estava desligado. Ele foi ligado aos 30 segundos de simulação. A Figura 7.56 apresenta o deslocamento do grau de liberdade controlado (grau de liberdade 10, nó 10) em função do tempo. Nessa figura é possível observar a atenuação instantânea da amplitude de vibração do grau de liberdade controlado quando o controlador é ligado, comprovando assim que o controlador utilizado é eficaz nas condições impostas por este cenário.

A regra de calibração do controlador utilizada na Figura 7.56 é a SO-OV, pois neste cenário ela também se mostrou a mais eficiente dentre todas as regras da Tabela 5.1. Isso será comprovado com os gráficos apresentados nas Figuras 7.57 a 7.60.

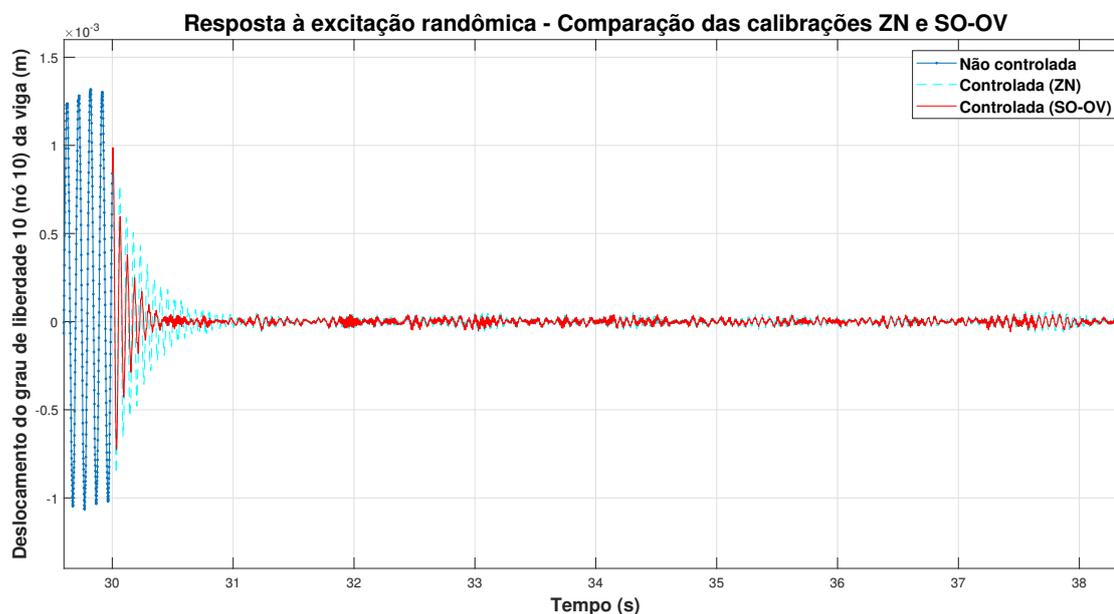
Figura 7.56 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.



Fonte: Do autor (2021).

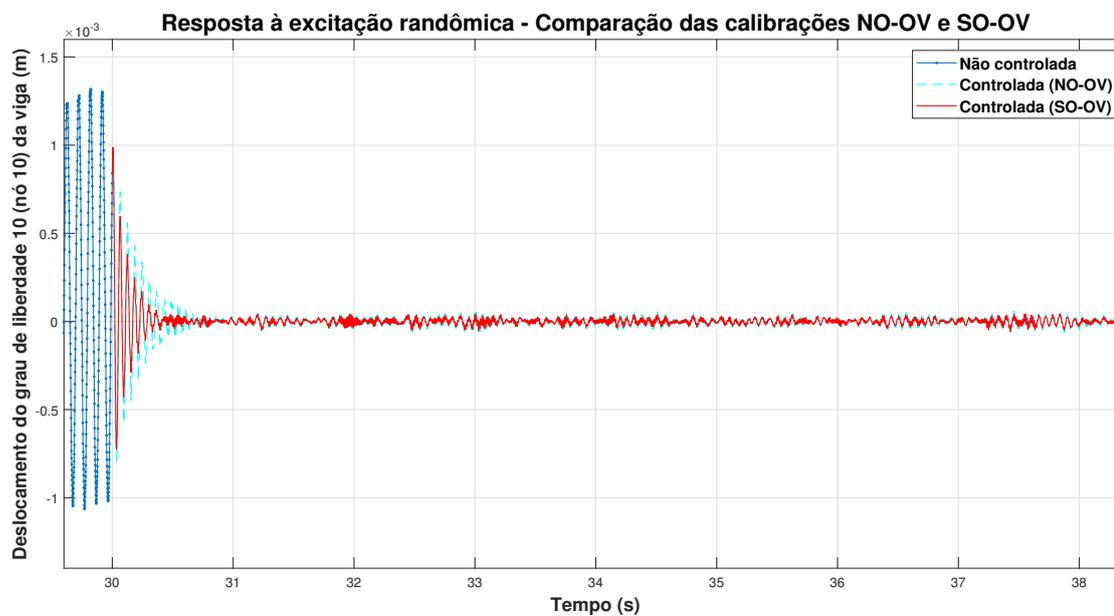
As Figuras 7.57 a 7.60 apresentam a comparação da regra de calibração *Some Overshoot* (SO-OV) com as regras Ziegler-Nichols (ZN), *No Overshoot* (NO-OV), Tyreus-Lyuben (TL) e Pessen (PE), respectivamente. Essas comparações são realizadas analisando-se os regimes transiente e permanente das respostas controladas. Afim de tornar essa análise mais fácil e precisa, é apresentada nessas figuras apenas a janela de tempo entre 29,6 e 38,4 segundos.

Figura 7.57 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Ziegler-Nichols (ZN) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.



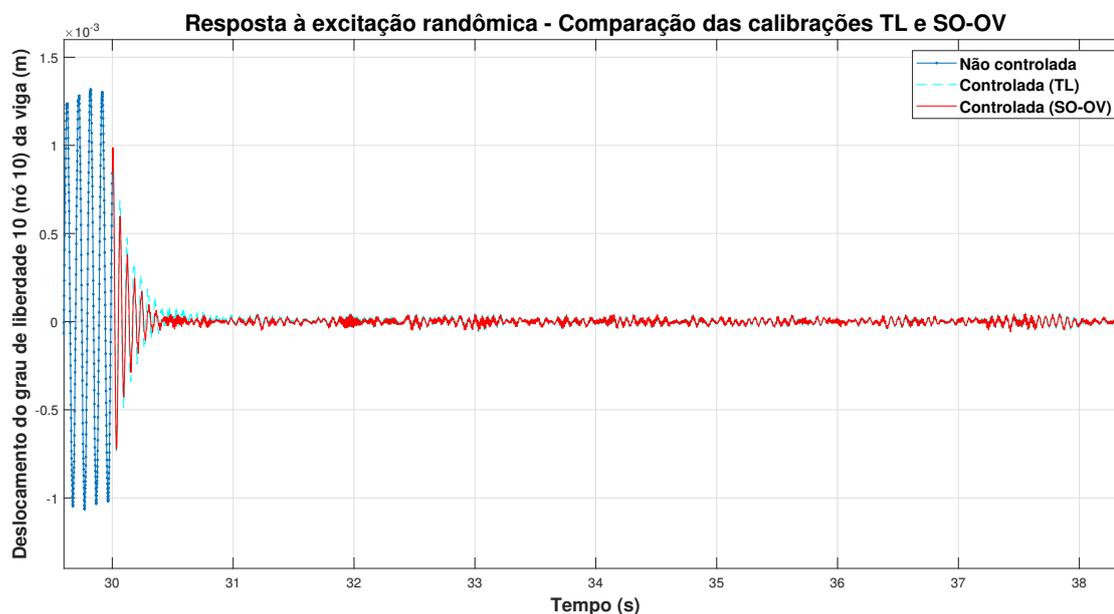
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.58 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração *No Overshoot* (NO-OV) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.



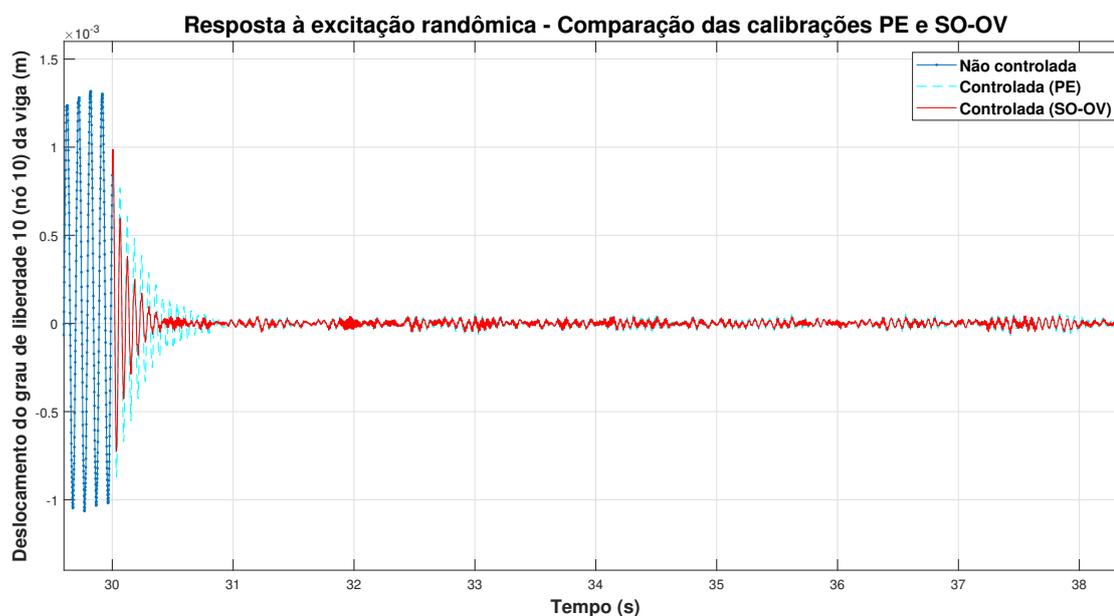
Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.59 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Tyreus-Luyben (TL) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 7.60 – Deslocamento do grau de liberdade controlado em função do tempo - comparação entre as regras de calibração Pessen (PE) e *Some Overshoot* (SO-OV) - viga submetida à excitação randômica.



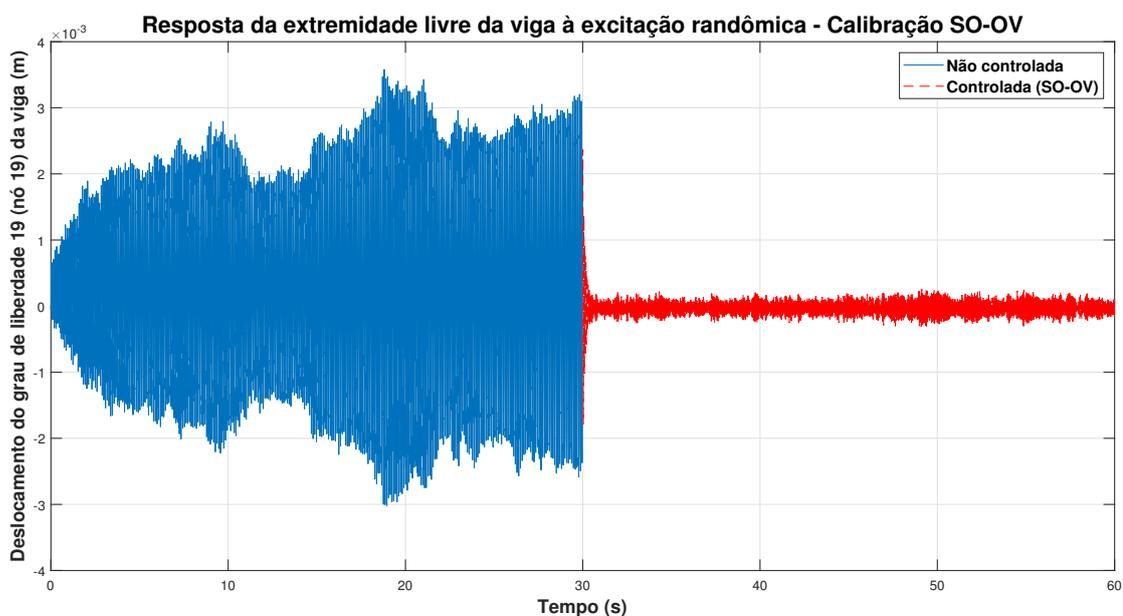
Fonte: Do autor (2021).

Após a observação das Figuras 7.57 a 7.60 fica evidente que a regra de controle mais eficiente neste cenário também é a *Some Overshoot* (SO-OV), pois o tempo de acomodação da resposta é menor quando ela é utilizada. No que diz respeito à resposta em regime estacionário,

todas as regras de controle simuladas neste cenário apresentaram praticamente o mesmo desempenho. Quanto à eficácia dessas regras, é possível afirmar que todas elas também são eficazes neste cenário, pois cumprem o objetivo de atenuar a vibração da viga.

A Figura 7.61 mostra o deslocamento da extremidade livre da viga antes e após o controlador ser ligado. A regra de controle utilizada é a SO-OV. É possível observar que, apesar do controle ter sido aplicado ao décimo grau de liberdade da viga, a atenuação da vibração também ocorre de forma instantânea na extremidade livre dela (grau de liberdade 19, nó 19), pois a amplitude de deslocamento nessa extremidade cai de aproximadamente 3mm para praticamente 0mm.

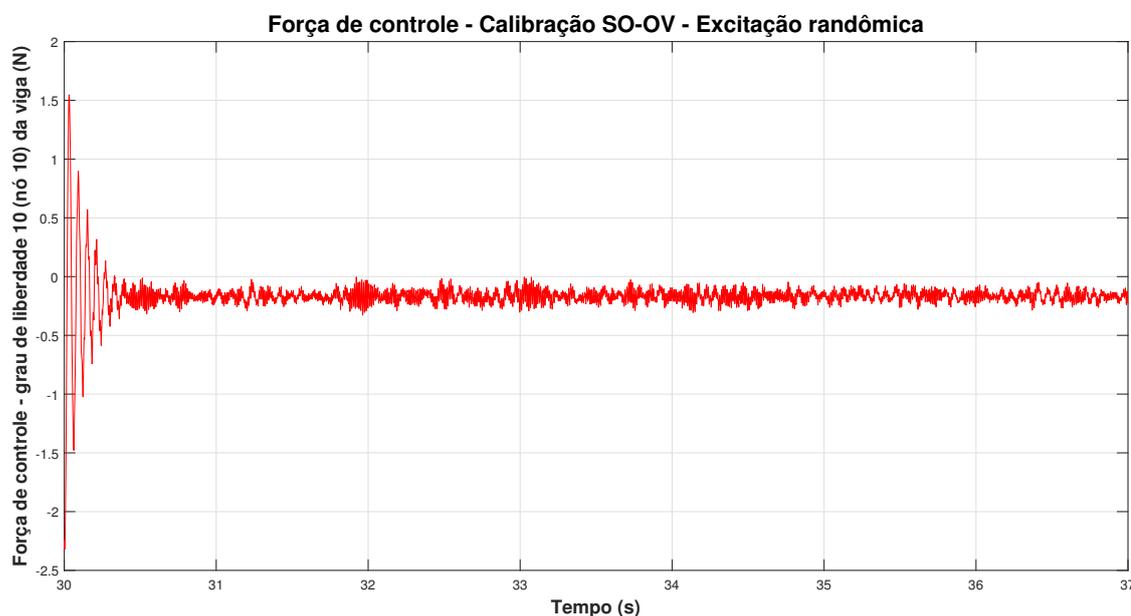
Figura 7.61 – Deslocamento da extremidade livre da viga (grau de liberdade 19, nó 19) em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.



Fonte: Do autor (2021).

A força de controle exercida pelos atuadores quando o controlador é calibrado com a regra SO-OV é plotada em função do tempo na Figura 7.62. Afim de apresentar detalhadamente as respostas transiente e permanente dessa força, nessa figura é mostrada apenas a janela de tempo entre 30 e 37 segundos, pois o controlador é ligado aos 30 segundos de simulação e a força exercida pelos atuadores entra em regime estacionário rapidamente.

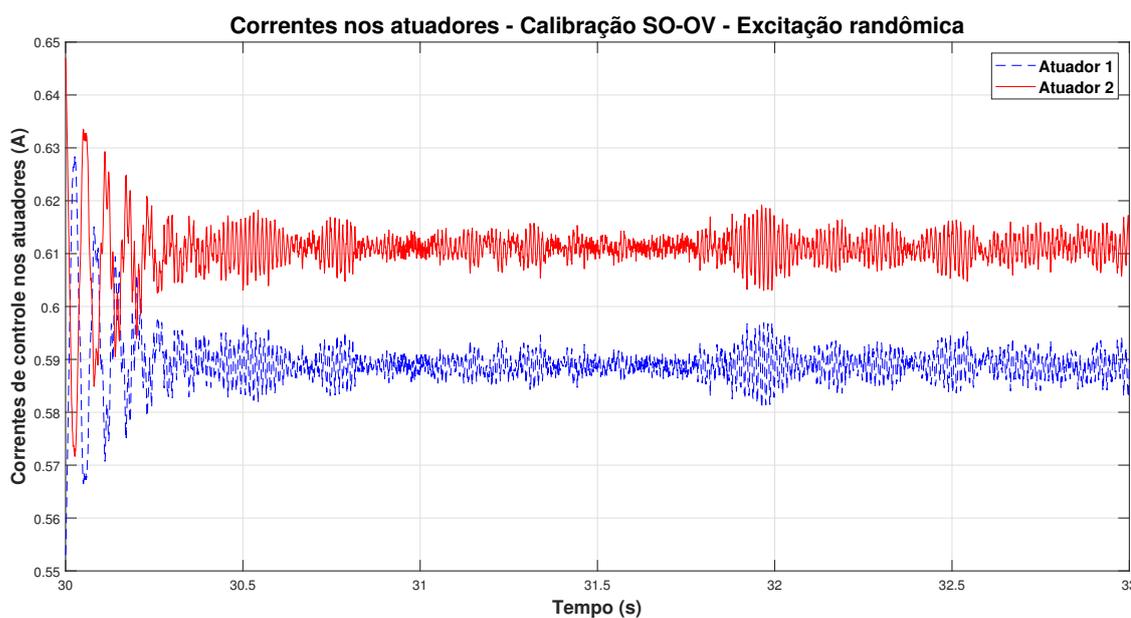
Figura 7.62 – Força de controle aplicada ao décimo grau de liberdade da viga (nó 10) em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.



Fonte: Do autor (2021).

A Figura 7.63 apresenta as correntes que circulam nos atuadores em função do tempo. Os valores dessas correntes quando elas entram em estado estacionário é bem próximo do valor da corrente *bias*. Isso ocorre pelo fato da amplitude da força de controle necessária em regime permanente neste cenário ser pequena.

Figura 7.63 – Correntes nos atuadores em função do tempo - viga submetida à excitação randômica.



Fonte: Do autor (2021).

8 CONCLUSÕES

Os resultados da redução do modelo de elementos finitos da viga na condição livre-livre (Seção 6.2), de 42 para 21 graus de liberdade, comprovaram que a redução estática de Guyan é adequada para o modelo aqui trabalhado.

O método de Ziegler-Nichols não é adequado para calibrar o controlador PID da estrutura estudada, pois através dele não é possível levar o sistema ao limiar de instabilidade. A calibração do controlador foi uma etapa desafiadora, pois levar o sistema ao limiar de instabilidade utilizando o relê envolveu o ajuste de parâmetros extremamente sensíveis dele.

A partir da comparação dos deslocamentos do décimo grau de liberdade (nó 10) da viga e da extremidade livre dela (grau de liberdade 19, nó 19) nas condições com e sem a aplicação de controle, conclui-se que todas as regras de calibração do controlador apresentadas na Tabela 5.1 são eficazes para atenuar as vibrações da viga submetida aos sete diferentes cenários.

As respostas controladas da viga, utilizando as cinco diferentes regras de calibração, foram comparadas e percebeu-se que, apesar de todas as regras de calibração serem eficazes, a regra *Some Overshoot* (SO-OV) foi a mais eficiente em todos os cenários, pois apresentou melhor desempenho em regime transiente em todos eles. No cenário 2 essa regra também se mostrou mais eficiente que as demais em regime estacionário.

Sendo assim, é possível concluir que o atual trabalho cumpriu com todos os seus objetivos. Algumas sugestões para a continuidade deste trabalho são: a construção de um aparato experimental para validação do modelo aqui proposto; a utilização de outros métodos de controle neste sistema, como controle ótimo e robusto, por exemplo; e a aplicação dos atuadores aqui modelados e da metodologia de controle aqui utilizada para controlar e atenuar vibrações em outros tipos de estrutura.

REFERÊNCIAS

- ANANTACHAISILP, P.; LIN, Z. An experimental study on pid tuning methods for active magnetic bearing system. **International Journal of Advanced Mechatronic Systems**, v. 5, n. 2, p. 146 – 154, 2013.
- ÅSTRÖM, K.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. **Automatica**, v. 20, n. 5, p. 645 – 651, 1984.
- BODDULA, R.; ASIRI, A. **Actuators and Their Applications: Fundamentals, Principles, Materials, and Emerging Technologies**. [S.l.]: Wiley, 2020. ISBN 9781119661146.
- BOEHM, J.; GERBER, R.; C., K. N. R. Sensors for magnetic bearings. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 29, n. 6, p. 2962 – 2964, November, 1993.
- CASTRO, H. F. et al. Experimental performance evaluation of magnetic actuator used in rotating machinery analysis. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering**, v. 29, n. 1/93, p. 99 – 108, 2007.
- CHEN, S.; LIU, K. Sensorless control for a three-pole active magnetic bearing system. **ACES Journal**, v. 32, n. 8, p. 720 – 725, August, 2017.
- CRIVELLARO, C. **Controle robusto de suspensão semi-ativa para caminhonetes utilizando amortecedores magneto-reológicos**. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2008.
- DING, J. et al. Three-dimensional numerical analysis and optimization of electromagnetic suspension system for 200km/h maglev train considering eddy current effect. **IEEE Access**, v. 6, p. 61547 – 61555, November, 2018.
- FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. T.; GARVEY, S. D. Model reduction for structures with damping and gyroscopic effects. **ISMA 25**, p. 1151 – 1158, 2000.
- GIRI, D. K. Attitude control of satellites actuated by hybrid actuators. **2019 International Conference on Mechatronics, Robotics and Systems Engineering (MoRSE)**, 4-6 December, 2019.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: volume 3 : eletromagnetismo**. [S.l.]: LTC, 2008. ISBN 9788521616078.
- HAN, B. et al. A fem-based method dynamic analysis of a thrust magnetic bearing with permanent magnet bias. **IEEE**, 2012.
- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; T., W. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 5, n. 225, p. 935 – 988, 1999.
- HOWE, D. Magnetic actuators. **Sensors and Actuators**, v. 81, p. 268 – 274, 2000.
- INMAN, D. **Vibration with Control**. [S.l.]: Wiley, 2006. ISBN 9780470010525.
- KLUEVER, C. **Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control**. [S.l.]: Wiley, 2015. ISBN 9781118289457.
- KWON, Y.; BANG, H. **The Finite Element Method Using MATLAB**. [S.l.]: CRC-Press, 2000. ISBN 9780849396533.

- LOGAN, D. **A First Course in the Finite Element Method**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. ISBN 9781305887176.
- MAIA, N.; SILVA, J. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. [S.l.]: Research Studies Press, 1997.
- MARTIN, L. B. S. **Controle de vigas flexíveis em balanço**. Campinas, Brasil: [s.n.], 2016.
- MIN, X.; LI, Y.; TONG, S. Adaptive fuzzy output feedback inverse optimal control for vehicle active suspension systems. **Neurocomputing**, v. 403, p. 257 – 267, May, 2020.
- NADERI, M.; SEDIGH, A. K. Actuator selection for over-actuated systems using the actuator effectiveness index. **International Journal of Dynamics and Control**, January, 2020.
- NISE, N. **Engenharia De Sistemas De Controle**. [S.l.]: LTC, 2013. ISBN 9788521621355.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Prentice Hall Brasil, 2011. ISBN 9788576058106.
- PILOTTO, R. **Modelagem e otimização de atuadores magnéticos no controle de vibrações**. Campinas, Brasil: [s.n.], 2015.
- RAO, S. **The Finite Element Method in Engineering**. [S.l.]: Elsevier Science, 2005. ISBN 9780750678285.
- SCHWEITZER, G. Active magnetic bearings - chances and limitations. **Sixth International IFToMM Conference on Rotor Dynamics**, 2002.
- SEBORG, D.; EDGAR, T.; MELLICHAMP, D. **Process Dynamics and Control**. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780471000778.
- SKOWRONSKY, L.; BISESE, A. Introduction to magnetic bearings. **NASA - CR -197187, Uncla, ECE 485, 16.p, April 05**, 1993.
- SUBBIAH, R.; BHAT, R. B.; SANKAR, T. S. Dynamic response of rotors using modal reduction techniques. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 111, p. 360 – 365, 1989.
- TIPLER, P.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros: eletricidade e magnetismo, óptica. vol. 2**. [S.l.]: Grupo Gen - LTC, 2011. ISBN 9788521617112.