



ANA CAMILA VILELA COSTA

**MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM
ESTUDO DAS RELAÇÕES MATEMÁTICAS NA COMPOSIÇÃO
E FUNCIONAMENTO DOS INSTRUMENTOS DE SOPRO**

LAVRAS – MG

2019

ANA CAMILA VILELA COSTA

**MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO DAS RELAÇÕES
MATEMÁTICAS NA COMPOSIÇÃO E FUNCIONAMENTO DOS INSTRUMENTOS DE
SOPRO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Lavras, como parte das
exigências do Curso de Licenciatura em
Matemática, para obtenção do título de
Licenciada.

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

ANA CAMILA VILELA COSTA

**MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO DAS RELAÇÕES
MATEMÁTICAS NA COMPOSIÇÃO E FUNCIONAMENTO DOS INSTRUMENTOS DE
SOPRO**

**MODELING IN MATHEMATICAL EDUCATION: A STUDY OF THE
MATHEMATICAL RELATIONS IN THE COMPOSITION AND THE OPERATION OF
WIND INSTRUMENTS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Lavras, como parte das
exigências do Curso de Licenciatura em
Matemática, para obtenção do título de
Licenciada.

APROVADA em 20 de novembro de 2019
Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade UFLA
Profa. Dra. Amanda Castro Oliveira UFLA
Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero UFLA

Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por me fortalecer por meio da fé e colocar em meu caminho pessoas que foram indispensáveis para que eu pudesse realizar meus sonhos.

A Universidade Federal de Lavras, é um enorme privilégio ter a oportunidade de me formar professora em uma universidade pública de qualidade. Também ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/UFLA), de onde surgiu a pesquisa que resultou neste trabalho.

A CAPES, pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UFLA), e à Prof.^a Dr.^a Rosana Maria Mendes, orientadora do grupo de trabalho da Escola Estadual Cinira Carvalho. Por meio deste programa tive a certeza de estar no caminho certo.

À todas as professoras e professores, especialmente da área da Educação Matemática, pelos ensinamentos e incentivo,

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade, pelo suporte e paciência durante esse processo.

Aos colegas do curso de Licenciatura em Matemática, o percurso é mais leve tendo pessoas com quem contar e compartilhar sentimentos semelhantes. Especialmente a meu namorado Guilherme, por todo amor compartilhado.

À minha mãe, meu irmão e minha cunhada por me apoiarem em todos os meus sonhos. Ter vocês ao meu lado me faz mais forte.

Às minhas avós, Zezé e Nentita, pelo amor e por todas as orações.

Às minhas amigas Luana e Bruna, foi incrível passarmos pela experiência do curso superior juntas, tenho muito orgulho de quem nos tornamos. Roubando a frase da Lu: Crescemos juntas, sempre!

Aos meus amigos Heraldo e Diego, por serem meus exemplos de que era possível passar em uma federal.

Agradeço de modo especial a Banda de Música Nossa Senhora das Dores, onde aprendi sobre música e sobre amizades. Ao maestro Ezequiel, por me permitir continuar participando das apresentações, mesmo estando a maior parte do tempo longe e sem ir aos ensaios. Manter esse contato foi essencial para que este trabalho fosse realizado.

Por fim, agradeço aqueles que já partiram, meu pai, meus avôs e minha amiga Mirian. Sinto vocês sempre comigo, obrigada por isso.

“Se fosse ensinar a uma criança a beleza da música não começaria com partituras, notas e pautas. Ouviríamos juntos as melodias mais gostosas e lhe contaria sobre os instrumentos que fazem a música. Aí, encantada com a beleza da música, ela mesma me pediria que lhe ensinasse o mistério daquelas bolinhas pretas escritas sobre cinco linhas. Porque as bolinhas pretas são apenas ferramentas para a produção da beleza musical. A experiência da beleza tem que vir antes. ” (Rubens Alves)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar relações entre a Matemática, a música e os instrumentos musicais de sopro. A metodologia utilizada para obter essas relações é a Modelagem Matemática, que tem por objetivo descrever matematicamente situações do cotidiano. Tem sido utilizada na educação como uma metodologia que torna o estudante protagonista de seu processo de aprendizagem, tendo em vista a possibilidade de utilizar a matemática em outras áreas do conhecimento. Assim, serão apresentadas algumas possibilidades de abordagem da Matemática na música considerando conteúdos matemáticos da Educação Básica. O objetivo final da Modelagem Matemática é obter um modelo matemático, que descreva a situação a partir de ferramentas matemáticas, para tanto é necessário seguir algumas etapas. A primeira etapa é a familiarização com o tema que se deseja modelar. Em seguida, é realizada a matematização, que visa a formulação do problema em linguagem matemática e sua resolução por meio de um modelo matemático. Por fim, o modelo obtido é avaliado para saber qual seu grau de proximidade com a situação real. Na primeira parte do trabalho é feita uma abordagem sobre a teoria musical, ressaltando as relações entre as duas áreas, em especial as contribuições matemáticas para o desenvolvimento da teoria musical. Nesta seção é desenvolvido um modelo matemático sobre escalas musicais utilizando o conceito de Progressão Geométrica. A seguir, é feita a classificação dos instrumentos musicais e é relatado um pouco da história dos instrumentos musicais de sopro. No último capítulo, trata-se da construção, composição e funcionamento desses instrumentos, onde inicialmente explica-se brevemente quais os principais elementos dos instrumentos e suas funções. E por fim, são desenvolvidos modelos matemáticos referentes a ondas sonoras, gravadas pelo *software Audacity* e analisadas no *GeoGebra*, buscando encontrar as funções correspondentes a onda sonora produzida por cada nota tocada em um saxofone alto.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Música. Instrumentos musicais de sopro.

ABSTRACT

The present work aims to study the relations between Music, Mathematics and wind instruments. For this purpose, it was used the methodology of Mathematical Modeling, which aims to describe mathematically everyday situations. It has been used in education as a methodology that allows the students to become the protagonist of the teaching-learning process, considering the possibility to use the Mathematics in other knowledge areas. Thus, it is presented some approaches to Mathematics in Music, considering the subject of Mathematics in basic education. The objective of Mathematical Modeling is to achieve a mathematical model that describes the situation stem from Mathematical tools, to get this is necessary to follow some stages. The first one is the familiarization with the topic chosen for modeling. Thereafter, it is made the mathematicizes which aims the formulation of the problem in a mathematical language and its resolution by a Mathematical model. Finally, the obtained model is evaluated to know its degree of proximity to a real situation. In the first part of this work, it is approached musical theory, emphasizing the relations between these two areas, especially the Mathematics contribution to the developing of music theory. In this chapter, it is developing a mathematical model on the musical scale stem from the conception of geometric progression. Succeeding, it is presented a brief history of wind instruments and their classification. The last chapter approaches the construction, composition, and operation of these instruments. It is explained what are the main elements of the instruments and their function. Finally, Mathematical Models are developed relating to the sound waves recorded by Audacity software and analyzed in GeoGebra. The aim was to find corresponding functions to the wave sound produced by each note played in a saxophone alto.

Keywords: Mathematical Modeling. Music. Wind Instruments.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Valores das figuras musicais.....	9
Figura 2 – Pentagrama ou pauta musical.....	10
Figura 3– Clave de Fá.....	10
Figura 4 – Clave de Sol.	10
Figura 5 – Compasso quatro por quatro.	11
Figura 6 – Compasso três por quatro.....	11
Figura 7 – Figuras musicais utilizadas nos compassos 2/4 e 3/8	11
Figura 8 – Monocórdio.	12
Figura 9 – Frequência das notas Dó, Dó#, Ré, Ré#.	14
Figura 10 – Frequência das notas Mi, Fá, Fá#.	15
Figura 11 – Frequência das notas Sol, Sol#, Lá.	15
Figura 12 – Frequência das notas Lá#, Si, Dó uma oitava acima.....	15
Figura 13 – Idiofones.....	20
Figura 14 - Membranofones: tabla, bongo e congas.	20
Figura 15 – Cordofone: violino.	21
Figura 16 – Aerofones.	21
Figura 17 - Eletrofone: piano digital.	22
Figura 18 – Instrumento confeccionado a partir do osso rádio de um ruminante.	23
Figura 19 – Sistema base de um instrumento de sopro.	24
Figura 20 – Flauta de oito chaves.....	25
Figura 21 –Flauta de bisel.	25
Figura 22 – Flauta Boehm.	25
Figura 23 – Serpentão.....	26
Figura 24 – Oficleides.	27
Figura 25 – Família dos Saxofones.	28
Figura 26 – Bocais de Aerofones do grupo dos metais.	29
Figura 27 – Boquilha, palheta e sistema de fixação do clarinete.	30
Figura 28 – Aresta da flauta transversal.	30
Figura 29 – Tubo do saxofone alto.....	30
Figura 30 - Campana do saxofone alto.....	31
Figura 31 – Sistema de digitação da flauta doce.	32

Figura 32 – Pontos referentes a relação entre o comprimento de tubo da flauta doce e a frequência das notas.....	33
Figura 33 – Pontos referentes a relação entre o comprimento de tubo da flauta doce e a frequência das notas com os pontos referentes às oitavas da nota Dó.	34
Figura 34 – Gráfico que relaciona o comprimento de tubo da flauta doce e as frequências das notas.....	35
Figura 35 – Interface do <i>Software Audacity</i>	36
Figura 36 - Gráfico obtido no <i>Audacity</i>	37
Figura 37 - Nota Dó com frequência de 310 Hz no saxofone alto.	37
Figura 38 – Gráfico da onda sonora no <i>Audacity</i> com zoom.	37
Figura 39 – Um ciclo da onda gerada pela nota Dó 310 Hz.....	38
Figura 40 – Imagem de um ciclo da onda inserida no <i>GeoGebra</i>	39
Figura 41 – Divisão da onda em quatro partes.	39
Figura 42 – Variação do parâmetro k	40
Figura 43 – Variação do parâmetro α	40
Figura 44 – Variação do parâmetro p	40
Figura 45 – Variação do parâmetro ϕ	41
Figura 46 – Amplitude da primeira parte do gráfico.	41
Figura 47 – Amplitude da terceira parte do gráfico.....	43
Figura 48 – Amplitude da terceira parte do gráfico.....	44
Figura 49 – Funções inseridas no <i>GeoGebra</i>	45
Figura 50 - Gráfico após primeiro ajuste.....	45
Figura 51 – Inserção da Figura 36 para verificar aproximação.	46
Figura 52 – Gráfico após segundo ajuste.	46
Figura 53 – Gráfico final após terceiro ajuste.	47
Figura 54 – Gráfico final nota Dó 310 Hz.....	48
Figura 55 – Nota Dó com frequência 465 Hz no saxofone alto.	48
Figura 56 – Gráfico da onda sonora no <i>Audacity</i> com zoom.	49
Figura 57 – Divisão da onda em duas partes e marcação de suas amplitudes.....	49
Figura 58 – Funções inseridas no <i>GeoGebra</i>	51
Figura 59 – Alteração do sinal do parâmetro α da função g	51
Figura 60 – Inserção da onda obtida no <i>Audacity</i> para verificar aproximação.	52
Figura 61 – Gráfico após ajustes com auxílio da imagem do gráfico da onda.....	52
Figura 62 – Gráfico final nota Dó 465 Hz.....	53

Figura 63 – Nota Dó com frequência 155 Hz no saxofone alto.	53
Figura 64 – Gráfico da onda sonora no <i>Audacity</i> com zoom.	54
Figura 65 – Divisão da onda em oito partes.	54
Figura 66– Gráfico final nota Dó 155 Hz.	55
Figura 67 – Gráficos de ondas gerados pelas oitavas da nota Dó tocadas em um saxofone tenor.	56
Figura 68 – Gráficos de ondas gerados pelas oitavas da nota Dó tocadas em uma flauta doce.	56
Figura 69 – Escala natural começando pela nota Mi até sua oitava.	57
Figura 70 – Gráficos e função referentes a nota Mi.	57
Figura 71 – Gráficos e função referentes a nota Fá.	58
Figura 72 – Gráficos e função referentes a nota Sol.	58
Figura 73 – Gráficos e função referentes a nota Lá.	59
Figura 74 – Gráficos e função referentes a nota Si.	59
Figura 75 – Gráficos e função referentes a nota Dó.	60
Figura 76 – Gráficos e função referentes a nota Ré.	60
Figura 77 – Gráficos e função referentes a nota Mi uma oitava acima.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Figuras musicais.....	8
Tabela 2 – Sinais de dinâmica.....	9
Tabela 3 – Escala Pitagórica.....	13
Tabela 4 – Frequência das notas na escala do saxofone alto.....	16
Tabela 5 – Frequência das notas na flauta doce.....	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	METODOLOGIA	3
3	TEORIA MUSICAL	7
3.1	Música e Som.....	7
3.2	Partitura	10
3.3	Escalas.....	11
4	OS INSTRUMENTOS MÚSICAIS	19
4.1	Classificação dos instrumentos musicais	19
4.2	Desenvolvimento histórico dos Aerofones	23
5	CONSTRUÇÃO, COMPOSIÇÃO E FUNCIONAMENTO	29
5.1	Audacity.....	35
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
7	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

A Matemática com certa frequência tem sido apresentada na Educação Básica como uma ciência que consiste apenas em fórmulas e aplicações que não tem sentido no contexto dos estudantes. Por outro lado, a música está presente na vida de grande parte, se não, de todas as pessoas. Pensar em relações entre essas duas áreas pode parecer complicado quando não se tem afinidade com uma das duas. Nesse trabalho, procura-se formas de aproximar o leitor dessas duas áreas, que já possuem uma história juntas.

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa iniciada por meio do Programa Institucional de Bolsas de Inicial Científica, PIBIC/UFLA, em 2018, que tinha como objetivo principal estudar as relações matemáticas presentes na música. A motivação para iniciar essa pesquisa surge quando percebi algumas relações simples da matemática na música, na contagem de tempo dos compassos e das figuras musicais utilizadas na escrita de partituras. Tal percepção surgiu nas aulas de música que frequento desde os 12 anos, na banda de Itaguara, uma típica banda do interior mineiro, onde são oferecidas aulas gratuitas de teoria musical, instrumentos de sopro e percussão.

No primeiro momento, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de artigos nas plataformas SciELO, Periódicos CAPES e Academia.edu, utilizando como palavras-chave “matemática, música” e “educação matemática, música”. Nessa busca foram encontrados doze artigos publicados entre os anos de 2011 e 2018, nos quais os assuntos abordados eram sobre as relações matemáticas na teoria musical e no desenvolvimento da mesma. Assim, surge a ideia de ir por um caminho diferente, onde além de tratar sobre as relações matemáticas na teoria musical, fossem explorados também os instrumentos musicais de sopro.

A Modelagem Matemática foi a metodologia utilizada para auxiliar no encontro de relações entre matemática e música. Uma característica dos modelos desenvolvidos é que os conteúdos matemáticos utilizados são aprendidos na Educação Básica, o que pode motivar professores a desenvolver projetos parecidos com este em suas salas de aula.

Em um primeiro momento, é apresentado um pouco sobre a teoria musical e alguns conceitos musicais básicos. Em seguida, trata-se sobre a parceria entre a Matemática e a música na construção da primeira escala musical desenvolvida por Pitágoras, que, apesar de ter sido um grande feito para a área, não era elaborada o suficiente para o uso prático por todos os músicos. Assim, cria-se a escala temperada, uma parceria entre matemáticos e músicos, onde se pode observar novamente o uso da Matemática. Algumas tabelas mostram a

diferença entre as duas escalas, e por fim obtém-se um modelo matemático de Progressão Geométrica que generaliza matematicamente a escala temperada.

A primeira abordagem sobre os instrumentos musicais é feita por meio de suas classificações, onde há um aprofundamento na classificação dos instrumentos de sopro. Em seguida, é relatado o desenvolvimento histórico dos instrumentos de sopro, fatos como por que foram criados, principais mudanças e as motivações para tais mudanças. Entender sobre esse processo auxilia na percepção sobre o início da preocupação de aplicar conhecimentos científicos, como matemática, física e acústica, na construção de instrumentos musicais.

O último capítulo é composto por duas partes. Na primeira, são apresentados alguns aspectos gerais sobre o funcionamento dos instrumentos musicais de sopro do ponto de vista físico, os principais elementos que compõe esses instrumentos e a influência desses elementos em seu funcionamento. É desenvolvido um modelo que relaciona a variação do tamanho de tubo da flauta doce com as frequências das notas, resultando em um gráfico definido por uma função logarítmica. Além disso, é deixado um apontamento que o mesmo pode ser feito para outros instrumentos de sopro, como o saxofone. Na segunda parte, é feita a análise de ondas sonoras, com o auxílio de software *Audacity* e da calculadora gráfica *GeoGebra*, onde além de aprofundar nos conceitos sobre ondas, explora-se funções trigonométricas em especial a função seno. São obtidas diversas funções por meio de gráficos de ondas sonoras.

2 METODOLOGIA

A metodologia adotada para realização deste trabalho é a Modelagem Matemática, que busca descrever situações ou solucionar problemas do cotidiano por meio da Matemática. Biembengut (2004) destaca que a modelagem pode ser utilizada em qualquer área do conhecimento e que consiste em um conjunto de procedimentos para a elaboração de um modelo matemático. Para utilizar a modelagem matemática é necessário a pesquisa, o conhecimento matemático e a leitura do fenômeno estudado sob uma perspectiva matemática.

A elaboração de modelos matemáticos para compreender melhor fenômenos do cotidiano não é uma ideia nova. Os egípcios e babilônios utilizavam a matemática para resolver problemas práticos. Os babilônios provocados pelo “problema de prever o futuro dos reis, segundo historiadores, elaboraram um modelo dos movimentos do sol, da lua e dos planetas por meio de séries numéricas e formas geométricas” (BIEMBENGUT, 2004, p. 20).

A civilização grega diferia dos egípcios e babilônios, pois não estavam preocupados apenas com problemas práticos. Contribuições deixadas por Tales de Mileto, Pitágoras, Platão, Euclides, dentre outros, passaram a ser desfrutadas por volta do século XVII. A contribuição de Pitágoras, considerado o pai da música, responsável pela criação da primeira escala musical será destacada neste trabalho.

No período do Renascimento, cientistas e pesquisadores como Leonardo da Vinci, Nicolau Copérnico, Galileu Galilei, Isaac Newton, dentre outros, também fizeram uso da matemática para contribuir com avanços em suas áreas. Biembengut e Hein (2011) destacam o trabalho do cientista Willian Harvey (1578-1657) que demonstrou por meio da Matemática a circulação sanguínea, que tem o fluxo em um único sentido durante toda a vida. Essa descoberta proporcionou avanços significativos na área.

Atualmente, a Modelagem Matemática continua contribuindo com diversas áreas e passou a ser utilizada como metodologia de ensino em sala de aula. Segundo Almeida (2011 citado MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011), a modelagem matemática começa a ser utilizada como uma estratégia de ensino a partir da década de 1970. As situações do cotidiano dos estudantes passam a ser as situações das aulas de matemática, assim, “a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda não conhece[...]” (BIEMBENGT; HEIN, 2011, p. 18).

O ensino de Matemática por meio da modelagem busca contrapor a ideia de que os estudantes são apenas receptores dos conteúdos e os professores são os detentores do saber. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), no desenvolvimento da modelagem o sujeito do

processo cognitivo é o estudante. Cada estudante irá construir seu conhecimento e atribuir significados da forma que lhe for conveniente. Ainda de acordo com esses autores,

a Modelagem vai por um caminho inverso, ou seja, ao invés de se dar uma pergunta para o aluno, em que ele vai ter de usar determinada ferramenta matemática para garantir a obtenção da resposta certa, o aluno faz a pergunta para si e para os outros. Junto com o professor e os outros alunos, ele vai aprender (e usar) as ferramentas matemáticas já existentes para entender o fenômeno escolhido e, eventualmente, levar à sala de aula conhecimentos já produzidos pela cultura local para responder a questões relevantes, muitas vezes, até de forma aproximada. (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 35)

Assim, na Modelagem não se trabalha com problemas teóricos encontrados com frequência nos livros didáticos, mas sim com problemas reais. Nesse sentido, cabe ao estudante decidir quais ferramentas matemáticas serão utilizadas para a resolução do problema. Porém, para que se possa chegar a uma solução satisfatória, algumas etapas devem ser seguidas. Biembengut (1999) define três etapas principais para o processo de modelagem matemática: interação, matematização e modelo matemático.

A interação pode ser subdividida em duas etapas, reconhecimento da situação problema e familiarização com o assunto que será modelado, que ocorrem de forma conjunta durante o primeiro contato com o tema que se tem interesse em modelar. O primeiro passo é fazer “um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções” (BASSANEZI, 2012, p. 11).

O tema escolhido inicialmente para modelar foi música, a partir daí, iniciou-se o processo de familiarização por meio de análise bibliográfica. Após essa análise, constatou-se a falta de trabalhos que tratassem da matemática relacionada com áreas da música e que fossem além da teoria musical. Assim, a direção que decidiu-se seguir foi a dos estudos sobre instrumentos musicais de sopro, pois, além de serem tratados com menor frequência em trabalhos de Modelagem na Educação Matemática, como já foi dito, são os instrumentos com os quais mais me familiarizo.

Tendo o tema definido, iniciou-se um novo processo de familiarização específico para a nova área escolhida. O principal meio de familiarização utilizado continuou sendo a análise bibliográfica de trabalhos sobre a história desses instrumentos, sua construção, acústica musical, análise de ondas sonoras, funcionamento e a teoria da música.

Após todo esse processo de familiarização, chegou-se a cinco eixos principais para serem explorados em busca de modelos matemáticos: teoria musical, história dos

instrumentos musicais de sopro, construção, composição e funcionamento desses instrumentos. Não foram desenvolvidos modelos matemáticos para todos os eixos, porém, foram apontados alguns caminhos para que esse trabalho possa ter uma continuidade posteriormente.

A matematização, segunda etapa do processo de modelagem, tem por objetivo a formulação do problema a partir da criação de hipóteses e em sua resolução utilizando o modelo. Segundo Biembengut e Hein (2011), denomina-se “modelo matemático” o conjunto de símbolos e relações matemáticas que interagem entre si e tem por finalidade traduzir um fenômeno ou situação problema real. Essas relações podem ser expressas por meio de fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programa computacional, entre outros.

Um modelo matemático pode surgir a partir de outro já existente e servir de base para criação de modelos futuros. Os procedimentos utilizados para obter os modelos de cada um desses eixos serão especificados com mais detalhes no tópico referente a cada um deles. Aqui, será apresentado apenas um pouco sobre cada ponto.

A teoria musical é o primeiro assunto a ser trabalhado, pois muitos conceitos serão importantes para a construção dos modelos sobre os instrumentos. Serão ressaltados alguns pontos sobre a história da música e de onde surge a relação entre a música e a Matemática. Em seguida, é abordada a construção da escala pitagórica e como essa escala levou à criação da escala temperada. Foi feita uma reconstrução da escala temperada, onde obtém-se uma forma geral para encontrar as frequências das notas dessa escala. Para tanto, foi utilizado um saxofone alto e o aplicativo de afinação Cifra Club¹ para captar as frequências das notas.

O segundo eixo trabalhado é a classificação dos instrumentos musicais de modo geral e a história dos instrumentos musicais de sopro, os quais são utilizados pelo homem antes mesmo de se ter uma teoria musical formada. Na evolução dos instrumentos musicais de sopro, diversas mudanças foram feitas por experimentação e após um tempo, tais mudanças passaram a ser feitas tendo como base os estudos de acústica. Neste tópico, é possível perceber que a relação entre música e Matemática deixa de fazer parte apenas da teoria musical e passa a ser explorada na construção e aperfeiçoamento de instrumentos musicais. Além de conceitos matemáticos, também passam a ser usados conceitos físicos especialmente na área da acústica musical.

¹ O aplicativo de afinação Cifra Club possui algumas funções grátis e outras funções pagas. A função utilizada neste trabalho é grátis.

Como terceiro eixo, juntou-se os três últimos tópicos: construção, composição e funcionamento. Essa junção ocorreu devido ao fato de que faltavam informações sobre a composição e a construção dos instrumentos. A ideia inicial era visitar uma fábrica de instrumentos musicais, porém, ao entrar em contato com a única fábrica presente no país, a resposta foi de que não aceitam mais visitas. Sendo assim, inicialmente apresenta-se no texto apenas informações obtidas por meio de estudo teórico, e um modelo obtido pela relação entre a variação de comprimento de tubo da flauta doce e as frequências das notas obtendo uma função logarítmica. Posteriormente desenvolve-se um pouco mais sobre o funcionamento utilizando o *software Audacity* para a análise de ondas sonoras, com auxílio do *GeoGebra*. As ondas sonoras são obtidas ao gravar o som do instrumento no *software Audacity*. Em seguida, o gráfico de ondas obtido é analisado no *software GeoGebra* com a finalidade de encontrar quais as funções geram o gráfico de ondas em questão.

A última etapa do processo de modelagem, o modelo matemático, consiste na interpretação da solução e validação do modelo por meio de seu uso. Nesta etapa, o modelo pode ser rejeitado ou aprovado dependendo da proximidade dos resultados com a situação real analisada. Caso o modelo obtido não cumpra o objetivo esperado, é necessário retornar à segunda etapa, pois pode ter ocorrido o uso de alguma hipótese incorreta ou é necessário a ajustagem de alguma variável, ou ainda a ferramenta matemática utilizada não é a ideal para a situação em questão. Da mesma forma que no processo de matematização, onde cada eixo tem suas especificidades, na interpretação e validação dos modelos cada um será tratado de forma separada, visto que foram obtidos por diferentes meios.

Todas essas etapas são indispensáveis para a realização da Modelagem Matemática. Ressalta-se que tais etapas podem ocorrer de forma não-linear, ou seja, não há o encerramento de uma etapa para o início da outra, são fases do processo que podem acontecer concomitantemente. Em algum momento, quando o processo de modelagem já estiver na última etapa pode ser necessário voltar à segunda ou à primeira, para ajustes na descrição do problema ou nas hipóteses e variáveis. Essas mudanças caracterizam a dinâmica do processo de modelagem matemática.

3 TEORIA MUSICAL

Este capítulo será dividido em duas partes, na primeira serão apresentados ao leitor alguns conceitos básicos sobre música, o que facilitará o entendimento das análises feitas no Capítulo 4. Na segunda parte deste capítulo, será abordada a criação das escalas musicais, mais explicitamente, as relações matemáticas que contribuíram para o desenvolvimento dessas escalas.

3.1 Música e Som

Dentre algumas definições que existem para música, vamos considerar a de que a música é “a arte de combinar os sons simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo” (MED, 1996, p. 11). A música é constituída por quatro elementos principais:

1. Harmonia: concepção vertical da música. É a sobreposição de acordes simultâneos que formam uma composição musical e causam uma sensação sonora nos ouvintes. É o pilar principal para compor a base de uma música, e desta forma, possibilita ao músico variar entre diferentes sonoridades.
2. Melodia: concepção horizontal da música. É uma sequência sucessiva de sons que constitui um formato musical, e é percebida como unidade pela mente humana. A melodia está diretamente ligada à harmonia, pois é a vocalização das notas musicais, ambas caminham lado a lado em uma música, e para isso, elas precisam de mais um elemento, o ritmo.
3. Ritmo: determina a sucessão de tempos dentro da música, sequenciando os sons temporalmente e possibilitando o progresso da harmonia e melodia. O ritmo diz como se deve tocar, de acordo com a marcação de tempo e andamento que o ritmo determina dentro de cada música.
4. Contraponto: concepção ao mesmo tempo vertical e horizontal da música. É uma técnica usada na composição onde duas ou mais melodias são compostas/sobrepostas.

O som é a vibração de corpos elásticos que se propaga pelo ar na forma de ondas sonoras. Ele é percebido por nós quando as ondas sonoras atingem o aparelho auditivo, em seguida é traduzido em estímulos elétricos ao cérebro, que o interpreta. Todo som musical

apresenta as quatro características, descritas abaixo, sendo elas: altura, duração, intensidade e timbre (HENRIQUE, 2002).

A altura está relacionada diretamente à frequência da vibração. Assim, é possível diferenciar sons agudos de sons graves, onde uma vibração com maior frequência resulta em um som agudo e uma vibração com menor frequência resulta em um som grave.

Já a duração consiste no tempo das notas que é expressa pelas figuras musicais e pelo andamento. A variação de notas com tempos diferentes resulta no ritmo. A tabela a seguir mostra as figuras musicais e seus respectivos nomes.

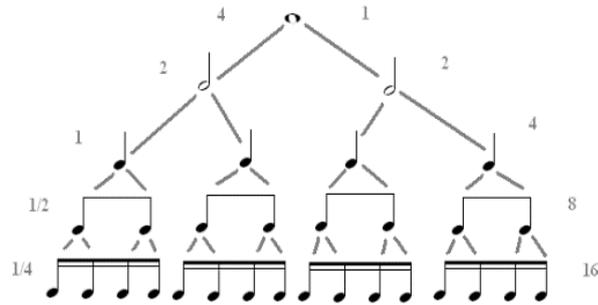
Tabela 1 – Figuras musicais.

Nome das figuras musicais	Figuras musicais
Semibreve	
Mínima	
Semínima	
Colcheia	
Semicolcheia	
Fusa	
Semifusa	

Fonte: Da autora (2019).

A Figura 1 a seguir representa as figuras musicais. Os números à esquerda são referentes ao tempo de duração de cada figura, enquanto que os números à direita são referentes as subdivisões da semibreve considerando-a como a unidade.

Figura 1 – Valores das figuras musicais.



Fonte: Aprendendo Música.²

A intensidade é definida pelos sinais de dinâmica, que são utilizados para graduar a intensidade sonora na execução musical, o que leva o nome de dinâmica. Abaixo, temos uma tabela que exemplifica um tipo de sinal de dinâmica que se refere a intensidade, que deve ser tocado em trecho musical. A tabela está em ordem crescente de intensidade.

Tabela 2 – Sinais de dinâmica.

Intensidade	Abreviatura	Como tocar
Bem pianíssimo	ppp	Mais fraco
Pianíssimo	pp	
Piano	p	
Mezzo piano	mp	
Mezzo forte	mf	Mais forte
Forte	f	
Fortíssimo	ff	
Bem fortíssimo	fff	

Fonte: Da autora (2019).

Por fim, o timbre é a característica específica do som emitido por determinado instrumento ou voz. Alguns dos fatores que caracterizam o som de determinado instrumento

²Disponível em: <<https://sites.google.com/site/musicaeoria/divisao>>. Acesso em : 10 nov. 2019.

são o material em que é fabricado o instrumento, o modo como o som é produzido e como ele ressoa. A alternância de timbres diferentes, ou seja, de instrumentos diferentes na execução musical resulta na instrumentação.

3.2 Partitura

Para escrever uma música instrumental, criou-se uma notação padronizada mundialmente com símbolos próprios, chamada partitura. Uma partitura é composta por pentagramas, notas, claves e compassos.

O pentagrama, ou pauta, consiste em um conjunto de cinco linhas (horizontais e paralelas) e quatro espaços entre as linhas. Conta-se as linhas e os espaços de baixo para cima, conforme a Figura 2 a seguir.

Figura 2 – Pentagrama ou pauta musical.



Fonte: Teoria de Música.³

As notas dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, são representadas no pentagrama por meio das figuras musicais, como visto na Tabela 1, que tem seus tempos definidos na Figura 1. Entretanto, não bastam as figuras musicais para saber qual nota está representada no pentagrama, é necessária uma clave. Tem-se dois tipos de claves mais usuais, a clave de Fá e a clave de Sol, como mostram as Figuras 3 e 4. Uma nota que corresponde à primeira linha da pauta com a clave de Sol é a nota Mi, já uma nota na mesma linha em uma pauta com a clave de Fá, corresponde à nota Sol.

Figura 3– Clave de Fá.



Fonte: Da autora (2019).

Figura 4 – Clave de Sol.



Fonte: Da autora (2019).

³ Disponível em: <<http://teoria-de-musica.blogspot.com/2012/08/pauta-ou-pentagrama.html>>
Acesso em: 10 nov. 2019

Os compassos são as linhas verticais do pentagrama, eles têm como função dividir um trecho musical em partes iguais de tempo e facilita a leitura e execução da partitura. O compasso é definido por uma fração escrita depois da clave, como indicam as Figuras 5 e 6.

Figura 5 – Compasso quatro por quatro.



Fonte: Da autora (2019).

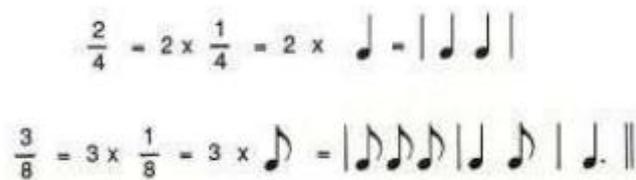
Figura 6 – Compasso três por quatro.



Fonte: Da autora (2019).

O numerador indica quantas figuras cabem em cada compasso e o denominador indica qual das figuras musicais deve ser considerada. Por exemplo, em um compasso $\frac{2}{4}$ cabem duas notas de valor $\frac{1}{4}$ (semínima). Em um compasso $\frac{3}{8}$ cabem três notas de valor $\frac{1}{8}$ (colcheia). A Figura 7 representa os dois exemplos citados.

Figura 7 – Figuras musicais utilizadas nos compassos $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{8}$.



Fonte: MED (1996).

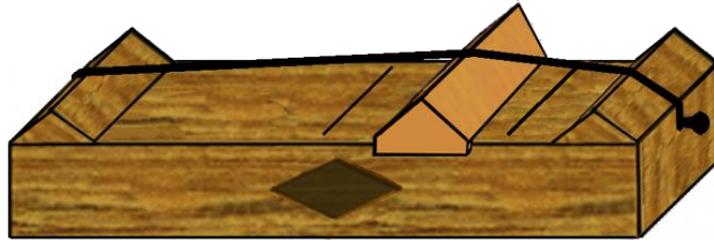
3.3 Escalas

As escalas são sequências de notas diferentes que obedecem a determinados padrões e a uma razão específica, compreendem o espaço que vai de uma nota de determinada frequência a outra nota que leva o mesmo nome da primeira, porém com o dobro da frequência. Uma escala pode ser crescente ou decrescente, de acordo com as frequências das notas que a compõe.

O filósofo e matemático Pitágoras “observou relações matemáticas a partir de sons emitidos por porções diferentes de cordas vibrantes, construindo uma escala musical e relacionando matematicamente os intervalos musicais produzidos pelas notas definidas” (BARNABÉ, 2011 p. 22). Para obter esses intervalos, Pitágoras utilizou um instrumento chamado monocórdio, indicado na Figura 8, que consiste em uma corda estendida e fixa nas

extremidades por dois cavaletes sobre uma tábua de madeira, contendo um terceiro cavelete móvel com a função de dividir a corda em duas partes.

Figura 8 – Monocórdio.



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP.⁴

Dividindo a corda ao meio, com o auxílio do cavelete móvel, Pitágoras percebeu que o som emitido ao tocar a corda com medida $\frac{1}{2}$ era o mesmo som da corda inteira, porém um pouco mais agudo, a esta relação deu o nome de oitava. Ao mudar o cavelete móvel de posição e tocar a corda de tamanho $\frac{2}{3}$ ele percebeu que o som obtido combinava com o som da corda inteira, a esta relação deu o nome de quinta. Novamente mudando o tamanho da corda e tocando o tamanho de medida $\frac{3}{4}$ foi obtido outro som que combinava com o som da corda inteira, a esse deu o nome de quarta (CONTADOR, 2007).

A partir das relações de quintas e quartas, Pitágoras construiu a escala conhecida como Escala Pitagórica, tal construção é feita da seguinte maneira:

Considere que o som da inteira seja a nota Dó, o valor desta nota será 1.

A oitava da nota Dó de valor 1 será a nota Dó seguinte com o dobro do valor, ou seja,

$$1 * 2 = 2.$$

Subindo a frequência a uma quinta a partir da nota Dó, obteremos a nota Sol, que terá como valor

$$\frac{1}{2} = 1 * \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Subindo uma quarta a partir da nota Dó, obteremos a nota Fá, que terá como valor

$$\frac{1}{3} = 1 * \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

⁴ Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>> Acesso em: 10 nov. 2019

Baixando uma quarta a partir da nota Sol, obteremos a nota Ré, que terá como valor

$$\frac{3}{2} * \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

Subindo uma quinta a partir da nota Ré, obteremos a nota Lá, que terá como valor

$$\frac{9}{8} * \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

Baixando uma quarta a partir da nota Lá, obteremos a nota Mi, que terá como valor

$$\frac{27}{16} * \frac{3}{4} = \frac{81}{64}$$

Subindo uma quinta a partir da nota Mi, obteremos a nota Si, que terá como valor

$$\frac{81}{64} * \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$$

Com os valores acima é possível construir a seguinte tabela de valores das notas e dos intervalos entre elas.

Tabela 3 – Escala Pitagórica.

Notas	Valores	Intervalos
Dó	1	 $\frac{9}{8}$
Ré	$\frac{9}{8}$	 $\frac{9}{8}$
Mi	$\frac{81}{64}$	 $\frac{256}{243}$
Fá	$\frac{4}{3}$	 $\frac{9}{8}$
Sol	$\frac{3}{2}$	 $\frac{9}{8}$
Lá	$\frac{27}{16}$	 $\frac{9}{8}$
Si	$\frac{243}{128}$	 $\frac{256}{243}$
Dó	2	

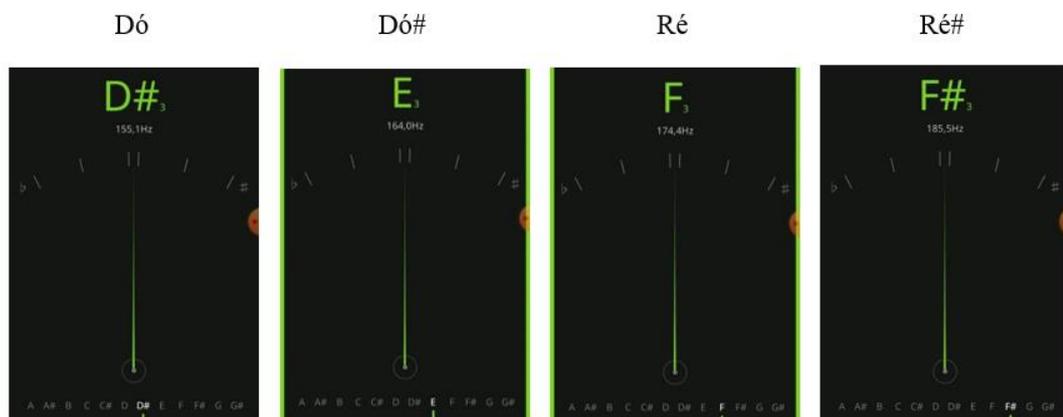
Fonte: Da autora (2019).

Segundo Contador (2007), a escala pitagórica também é conhecida como escala diatônica, pois os intervalos entre todas as notas possuem dois valores, $\frac{9}{8}$ e $\frac{256}{243}$, chamados respectivamente de tom pitagórico diatônico e semitom pitagórico diatônico. Essa escala possui um total de 12 notas considerando os cinco semitons (Dó#, Ré#, Fá#, Sol#, Lá#). Porém, como os intervalos não são constantes, ao multiplicar o semitom pitagórico 12 vezes por ele mesmo não resultava no valor 2, que é o esperado. Além disso, “nos tratados musicais do século XVI, o monocórdio seria o único instrumento descrito capaz de reproduzir auditivamente os intervalos calculados matematicamente” (BROMBERG, 2014, p. 4). Assim, pode-se perceber que apesar da importância da Escala Pitagórica, principalmente para a criação de outras mais sofisticadas utilizando conceitos matemáticos, ela não era útil para a execução musical com outros instrumentos musicais.

A Escala Temperada é criada para corrigir a diferença dos semitons que existem na Escala Pitagórica, ou seja, na divisão da oitava em 12 intervalos de semitons iguais, de modo que ao ser multiplicado por ele mesmo 12 vezes resulte no valor 2. Esse processo de dividir a oitava em intervalos iguais leva o nome de temperamento musical, por isso o nome da escala em questão é Escala Temperada. Os matemáticos Euler e D’Alembert e o compositor Johann Sebastian Bach contribuíram na criação dessa nova escala. (CONTADOR, 2007).

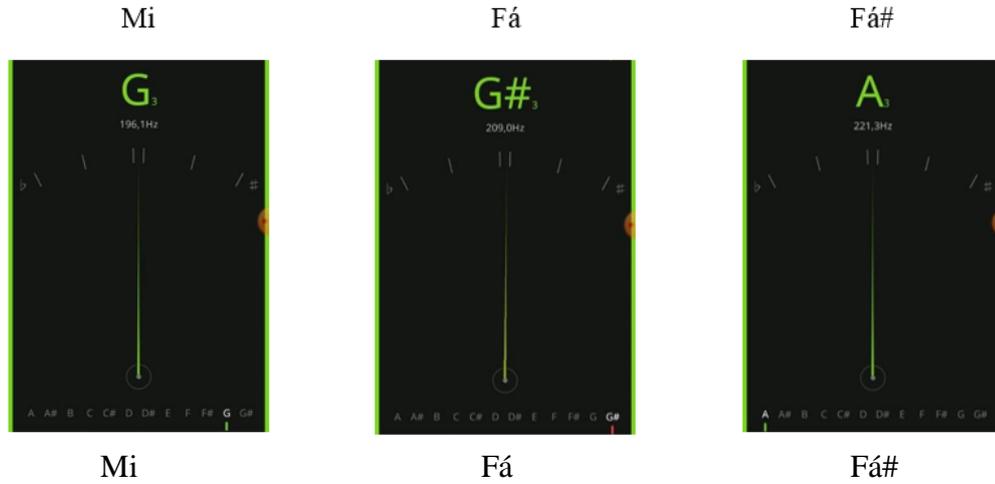
Grande parte dos instrumentos de sopro atuais conseguem produzir as notas da Escala Temperada, com todos os intervalos possuindo o mesmo valor. Assim, utilizando um saxofone alto da marca *Quaser* e o aplicativo de celular Afinador do Cifra Club, que mostra a frequência das notas tocadas na tela do aplicativo, é possível obter a frequência de cada nota. As figuras a seguir são *screenprints* do aplicativo de afinação e mostram as frequências das notas tocadas a partir da nota Dó até sua oitava.

Figura 9 – Frequência das notas Dó, Dó#, Ré, Ré#.



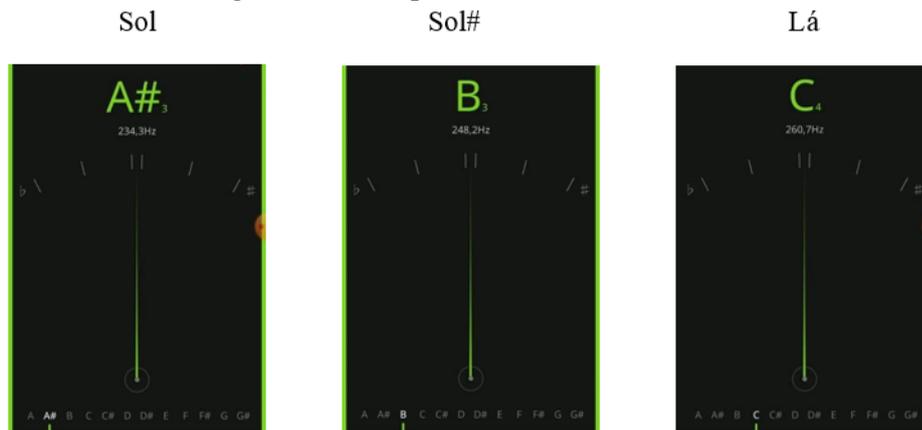
Fonte: Da autora (2019).

Figura 10 – Frequência das notas Mi, Fá, Fá#.



Fonte: Da autora (2019).

Figura 11 – Frequência das notas Sol, Sol#, Lá.



Fonte: Da autora (2019).

Figura 12 – Frequência das notas Lá#, Si, Dó uma oitava acima.



Fonte: Da autora (2019).

Percebe-se que as notas tocadas não correspondem às notas que aparecem no aplicativo, onde as notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, La e Si são representadas respectivamente por C, D, E, F, G, A, B. Quando foi tocada a nota Dó, por exemplo, o que aparece na tela do aplicativo é a letra D#, que se refere a nota Ré#. Isso acontece porque o Saxofone é um instrumento transpositor, esses instrumentos levam tal nome pois tem suas notas anotadas na partitura em altura diferente da que realmente soa. Isso acontece porque o saxofone existe em vários tamanhos. A família dos saxofones possui oito instrumentos diferentes e o fato de serem transpositores faz com que todos tenham o mesmo dedilhado, possibilitando a um músico tocar qualquer tipo de saxofone sem aprender diversos dedilhados. Na prática, podemos utilizar como exemplo o saxofone alto e o saxofone tenor, ambos possuem o mesmo dedilhado porém, a nota escrita como Dó na partitura ao ser tocada no Saxofone Alto produz um som mais agudo que a mesma nota Dó do Saxofone Tenor.

Para a construção da tabela a seguir, considerou-se as frequências das notas tocadas no saxofone alto durante as medições realizadas pela autora do aplicativo de afinação.

Tabela 4 – Frequência das notas na escala do saxofone alto.

Nota	Frequência (Hz)
Dó	155,1
Dó#	164
Ré	174,4
Ré#	185,5
Mi	196,1
Fá	209
Fá#	221,3
Sol	234,3
Sol#	248,2
Lá	260,7
Lá#	275,7
Si	292,6
Dó	311

Fonte: Da autora (2019).

Calculando a razão r entre uma nota e sua antecessora, obtém-se os seguintes resultados:

$$r_1 = \frac{Dó\#}{Dó} = \frac{164}{155,1} = 1,057$$

$$r_2 = \frac{Ré}{Dó\#} = \frac{174,4}{164} = 1,063$$

$$r_3 = \frac{Ré\#}{Ré} = \frac{185,5}{174,4} = 1,063$$

$$r_4 = \frac{Mi}{Ré\#} = \frac{196,1}{185,5} = 1,057$$

$$r_5 = \frac{Fá}{Mi} = \frac{209}{196,1} = 1,065$$

$$r_6 = \frac{Fá\#}{Fá} = \frac{221,3}{209} = 1,057$$

$$r_7 = \frac{Sol}{Fá\#} = \frac{234,3}{221,3} = 1,058$$

$$r_8 = \frac{Sol\#}{Sol} = \frac{248,2}{234,3} = 1,059$$

$$r_9 = \frac{Lá}{Sol\#} = \frac{260,7}{248,2} = 1,050$$

$$r_{10} = \frac{Lá\#}{Lá} = \frac{275,7}{260,7} = 1,057$$

$$r_{11} = \frac{Si}{Lá\#} = \frac{292,6}{275,7} = 1,061$$

$$r_{12} = \frac{Dó}{Si} = \frac{311}{292,6} = 1,062$$

A razão entre as notas variou entre 1,057 e 1,065. Essa variação pode ter ocorrido por diversos fatores, como ruídos externos no momento da gravação do som ou até mesmo questões referentes ao próprio instrumento. Esse segundo fator será tratado com maiores detalhes no tópico sobre Construção, Composição e Funcionamento dos instrumentos musicais de sopro.

De acordo com Contador (2007), para obter as próximas oitavas, basta continuar multiplicando as frequências por essa mesma razão r . Considerando a construção da Escala Temperada com os valores utilizados na construção da Escala Pitagórica, tem-se que a nota Dó possui valor 1, logo sua oitava tem valor 2. Como visto no experimento com o saxofone

alto, existem 12 intervalos entre uma nota e sua oitava. Tal relação pode ser representada pela seguinte igualdade.

$$1r^{12} = 2$$

Aplicando logaritmo na base 2 em ambos lados da igualdade.

$$\log_2 r^{12} = \log_2 2$$

$$\log_2 r^{12} = 1$$

$$r^{12} = 2$$

$$r = \sqrt[12]{2}$$

$$r \cong 1,059$$

O intervalo entre as frequências da Escala Temperada é aproximadamente 1,059. Assim pode-se construir uma Progressão Geométrica crescente com a razão 1,059, onde o primeiro termo é a frequência da primeira nota da escala. A partir disso, pode-se obter diversas oitavas, basta que continue a multiplicar pela razão. Assim, tendo a primeira nota da Escala Temperada tocada por algum instrumento, nesse caso o saxofone alto, é possível saber a frequência das notas seguintes sabendo que a razão da P.G. é 1,059.

$$PG (...; 155,1; 164,2; 173,8; 184; 194,8; ...)$$

Do ponto de vista matemático, essa Progressão Geométrica pode crescer infinitamente, tanto para o infinito negativo quanto para o positivo. Porém, como se trata de uma situação real, deve-se levar em consideração alguns aspectos, por exemplo, o ouvido humano só é capaz de captar sons com frequências entre 16 e 20000 Hz. Além disso, os instrumentos conseguem produzir uma quantidade limitada de notas, alguns produzem maior quantidade de sons graves, enquanto outros produzem uma maior quantidade de sons agudos. Portanto a P.G. para esse caso sempre será finita e pode ser definida de modo geral como

$$PG (x; x(1,059)^1; x(1,059)^2; x(1,059)^3; ...)$$

onde x é a primeira nota da Escala, ou seja, a mais grave.

4 OS INSTRUMENTOS MUSICAIS

Neste capítulo serão apresentados os instrumentos musicais de modo geral e os instrumentos musicais de sopro, e definidas suas classificações, pois os instrumentos musicais são divididos em diversos grupos e subgrupos. Para isso, será adotada a classificação de instrumentos musicais utilizada por Henrique (2004), a classificação *Hornbostel & Sachs*, segundo esse autor essa classificação é mais utilizada.

Em um segundo momento, será descrita um pouco da história do surgimento e desenvolvimento de tais instrumentos, aspectos como por que foram inventados, quais as principais modificações e o que motivou tais modificações.

4.1 Classificação dos instrumentos musicais

Para que se possa fazer a classificação dos instrumentos musicais, utiliza-se a Organologia, um dos ramos da musicologia. Henrique (2004) define Organologia como a ciência que estuda os instrumentos musicais que possui dois objetivos principais: compreender a terminologia dos instrumentos de acordo com a região de origem e sua relação com a cultura daquele local, e desenvolver métodos que permitam comparar e sistematizar informações sobre todos os instrumentos musicais.

A classificação utilizada em grande parte dos trabalhos lidos, inclusive no estudo de Henrique (2004), é a *Hornbostel & Sachs*, que se baseia nos princípios físicos e acústicos dos instrumentos. Esse sistema possui cinco categorias principais. A seguir, estão classificadas essas categorias com exemplos de instrumentos que as compõe.

- **Idiofones:** nesses instrumentos o som é produzido pela vibração do próprio corpo do instrumento, por exemplo, reco-reco, triângulo, castanholas.

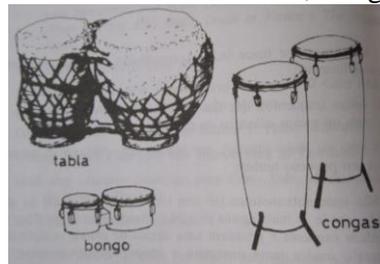
Figura 13 – Idiofones.



Fonte: Museu Virtual de Instrumentos Musicais. ⁵

- Membranofones: nesses instrumentos o som é produzido pela contração e descontração de uma membrana esticada, por exemplo, os diversos tipos de tambores.

Figura 14 - Membranofones: tabla, bongo e congas.



Fonte: Henrique, (2004).

- Cordofones: nesses instrumentos, o som é produzido pela vibração de cordas tensas, por exemplo, violão, violino, bandolim.

⁵ Disponível em <http://mvim.ibict.br/?page_id=964> Acesso em: 10 nov. 2019.

Figura 15 – Cordofone: violino.



Fonte: Museu Virtual de Instrumentos Musicais.

- Aerofones: o som é produzido pela vibração de uma massa de ar originada no ou pelo instrumento, por exemplo, flautas, clarinete, oboé, saxofones, trompete, trompas.

Figura 16 – Aerofones.

Flauta transversa



Trombone de válvulas



Fonte: Museu Virtual de Instrumentos Musicais.

- Eletrofonos: o som é produzido a partir da variação de intensidade de um campo eletromagnético. Distinguem-se nesta categoria os instrumentos eletrônicos e os eletromecânicos. Neste último, o som é produzido por meios mecânicos e depois amplificado e/ou modificado eletronicamente.

Figura 17 - Eletrofone: piano digital.



Fonte: Piano digital – Wikipédia.⁶

Como mostrado acima, existem cinco grupos distintos de instrumentos musicais, considerando a classificação Hornbostel & Sachs. Por meio dessa classificação, podem ser identificados os instrumentos conhecidos como instrumentos de sopro, denominados por essa classificação como Aerofones. A principal característica que distingue os Aerofones é a embocadura, ou seja, a técnica que permite a execução correta do instrumento. A categoria dos Aerofones se divide em outros seis subgrupos (HENRIQUE, 2004).

- Aerofones de aresta são os instrumentos cuja embocadura é uma aresta, para qual se direciona um jato de ar. Existem dois tipos de embocadura de aresta: simples (flauta transversal, flauta de Pã) e de apito (flauta de bisel).
- Aerofones de palheta são os instrumentos em que o jato de ar é modulado pela vibração de uma palheta, ou duas vibrando uma contra a outra. Existem vários tipos de palhetas: livres (acordeão, órgão de boca) ou batentes, estas por sua vez podem ser simples (saxofone, clarinete) ou duplas (oboé, corne inglês, fagote).
- Aerofones de bocal são os instrumentos nos quais o som é produzido por vibração labial. Os lábios do instrumentista atuam como palhetas duplas, razão pela qual muitos autores consideram estes instrumentos de palheta labial (trompete, trompa, serpentão). Neste caso o bocal não vibra, servindo de apoio à vibração dos lábios.

Os próximos três subgrupos são classificados à parte devido às suas especificidades, pois o som não é obtido de forma semelhante aos anteriores e nem entre si.

⁶ Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Piano_digital> Acesso em: 10 nov. 2019.

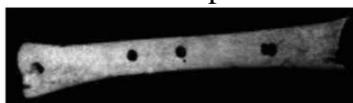
- Órgão é um aerofone munido de um ou mais teclados, contendo tubos labiais (embocadura de aresta) e tubos palhetados (embocadura de palheta). Os tubos são tocados de maneira mecânica, por meio de ar induzido por um fole, mecanismo produtor de ar.
- A voz humana é utilizada por cantores como um instrumento musical. O órgão da voz também designado sistema fonador é constituído pelo aparelho respiratório, cordas vocais e trato vocal.
- Aerofones livres são instrumentos em que o som é produzido pelo movimento de um corpo sólido que se desloca no ar. O corpo vibrante não é o instrumento, mas o ar que o rodeia (rombo, pião musical).

Definidos os subgrupos dos Aerofones, os instrumentos que terão enfoque neste trabalho serão os pertencentes aos dois primeiros subgrupos, Aerofones de aresta e Aerofones de palheta. O próximo tópico tem o objetivo de iniciar um estudo sobre esses instrumentos, por meio do estudo de suas origens e desenvolvimento.

4.2 Desenvolvimento histórico dos Aerofones

Os Aerofones, de modo geral, não surgiram da forma como os conhecemos hoje, sua história tem início na pré-história. Segundo Sá (2007), os instrumentos musicais são criados a partir do desejo do homem de se apropriar dos sons da natureza. Assim, os primeiros instrumentos de sopro foram produzidos por ossos de animais e tinham como objetivo reproduzir sons da natureza como o assobio do vento e o barulho da chuva, como pode ser observado na Figura 18.

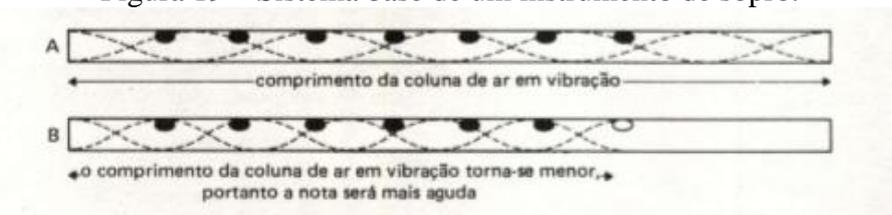
Figura 18 – Instrumento confeccionado a partir do osso rádio de um ruminante.



Fonte: Sá (2007).

De acordo com Bennet (1986), a partir de instrumentos como o mostrado na Figura 18, surge o sistema base das flautas, que tem o formato de um tubo cilíndrico. A Figura 19 abaixo exemplifica esse sistema.

Figura 19 – Sistema base de um instrumento de sopro.



Fonte: BENNET, (1986).

O tubo cilíndrico A representado na imagem acima está com todos os orifícios fechados, as linhas pontilhadas representam a coluna de ar em vibração. Quando o tubo está completamente fechado, o comprimento da coluna de ar em vibração é maior. A medida que os orifícios são abertos, como indica o tubo B da mesma imagem, o comprimento da coluna de ar em vibração torna-se menor. Na prática, isso significa que quanto mais orifícios fechados, maior será a coluna de ar em vibração e mais grave será o som. A medida que os orifícios são abertos, a partir do mais baixo para o mais alto, o comprimento da coluna de ar torna-se menor e são produzidas notas mais agudas.

Porém, esse sistema, que é a base das flautas primitivas, era capaz de produzir apenas a escala harmônica, conhecida como a escala desenvolvida por Pitágoras, ou seja, eram produzidas sete notas devido a quantidade de orifícios contidos na flauta. Sá (2007) descreve duas formas para que fosse possível conseguir outras notas que não estivessem na escala. A primeira, conhecida como “dedilhado de forquilha”, é um artifício para simular o comprimento de tubo a partir da manipulação da pressão da coluna de ar, por exemplo, “(...) se a flauta totalmente aberta soa Dó#, e o objetivo é ouvir um Dó, abaixa-se a afinação do Dó# fechando-se o orifício logo abaixo do último a ser aberto, ou seja, o quinto na ordem de subida da escala, aquele que se manteria fechado para produzir a nota Lá” (SÁ, 2007, p. 12).

As notas obtidas com esse método soam abafadas, pois não possuem o mesmo timbre das notas naturais.

O segundo método para obter outras notas é a colocação de chaves entre um orifício e outro, permitindo mais orifícios no comprimento do tubo, e assim mais sons entre os dois já existentes. Esses ajustes possibilitam que o instrumento seja capaz de obter as notas da Escala Temperada, que possui doze comprimentos de tubo ao invés de sete. Esse procedimento gera uma Escala mais equilibrada timbricamente, ou seja, mais afinada, em que os intervalos entre as notas tenham o mesmo valor, como foi visto no capítulo anterior.

As transformações pelas quais passaram as flautas são divididas em duas fases marcantes, a fase alemã e a fase da flauta moderna. Em ambas fases, a principal característica

que foi mudada é com relação à adição de chaves, como dito, a melhor maneira de se obter mais notas com melhor afinação (ARAÚJO, 1999).

Durante a fase “alemã”, começaram a ser implementadas algumas chaves nas flautas transversais. O ápice dessa fase foi a construção da flauta de oito chaves (Figura 20) no século XVIII. Nessa fase, as flautas eram de madeira e possuíam o tubo cilíndrico, o instrumentista tocava pela extremidade mais larga. As flautas de Bisel (Figura 21), também conhecidas como flauta doce, fizeram parte dessa fase, porém com o passar do tempo, deixaram de ser utilizadas pelas orquestras e corais, substituindo-a pela transversal.

Figura 20 – Flauta de oito chaves.



Fonte: ARAÚJO, (1999).

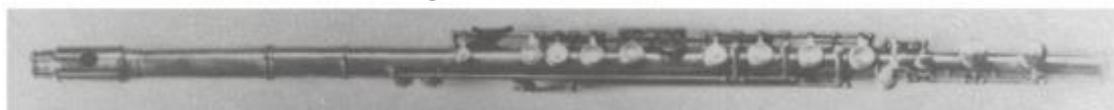
Figura 21 – Flauta de bisel.



Fonte: Google imagens.⁷

Já no século XIX, a flauta sofreu diversas modificações por Theobald Boehm, que foi o primeiro a utilizar conhecimentos físicos para a construção de instrumentos. A primeira mudança foi o posicionamento correto dos orifícios de acordo com seus princípios acústicos e o uso de mais chaves, para que fosse possível alcançar todos os orifícios. Outra mudança importante foi a determinação do tamanho do diâmetro de cada orifício. Por fim, a flauta deixou de ter um formato cônico, passou a ser cilíndrica e construída com metal, devido à instabilidade acústica causada pela madeira (ARAÚJO, 1999).

Figura 22 – Flauta Boehm.



Fonte: ARAÚJO, (1999).

⁷ Disponível em:

<

Além da flauta, diversos outros instrumentos sofreram alterações em seu funcionamento durante o século XIX, devido a inclusão das pesquisas científicas nos campos mecânico e tímbrico na construção dos instrumentos. Um instrumento que caiu em desuso em meados do século XIX foi o serpentão (Figura 23). Esse instrumento foi criado em 1590 por Edmé Guillaume e consistia em um bocal de osso, chifre ou marfim acoplado a um tubo de formato cônico produzido em madeira e revestido por couro. Os primeiros modelos desse instrumento possuíam apenas orifícios que eram fechados pelos dedos de quem tocava, com o passar do tempo foram adicionadas chaves para facilitar a execução. Por ter sido utilizado até meados do século XIX, acredita-se que era um instrumento que cumpria sua função satisfatoriamente (SÁ, 2007).

Figura 23 – Serpentão.



Fonte: SÁ, (2007).

Derivado do serpentão, o oficleide, patenteado em 1821, consistia em um bocal parecido com o do trombone e um tubo cônico metálico. O tubo possuía grandes orifícios que eram controlados por um sistema de chaves. Tal sistema funcionava de modo inverso ao sistema utilizado nos instrumentos atuais, as chaves do oficleide em estado inicial permaneciam fechadas até que ao ser executado, fossem abertas pelos dedos do instrumentista, exceto a chave localizada na extremidade grave do tubo que tinha como posição de repouso estar aberta (SÁ, 2007). A Figura 24 apresenta três tipos de oficleides e em detalhe à esquerda, o bocal.

Figura 24 – Oficleides.



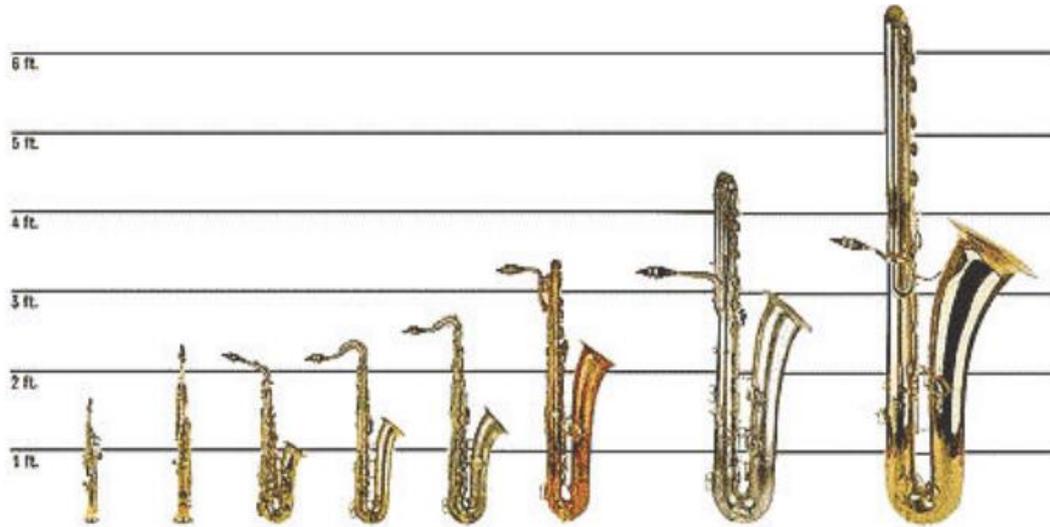
Fonte: SÁ, (2007).

Aproximadamente vinte anos depois do oficleide ser patenteado, o construtor de instrumentos Adolphe Sax criou um grupo de instrumentos conhecido como a família dos Saxofones. Todos os saxofones são construídos em metal, tendo os orifícios do tubo controlados por chave, de modo semelhante ao oficleide. Porém, sua sonoridade possui proximidade à sonoridade das madeiras, instrumentos de palheta, pois tem a embocadura, boquilha e palheta, semelhantes a embocadura do clarinete. Sobre o funcionamento de todos os instrumentos dessa família, tem-se que

O tubo possui orifícios controlados através de chaves, de forma muito parecida ao oficleide, sem esquecer que a posição de repouso da maior parte das chaves do saxofone é a aberta. O dedilhado foi elaborado baseado no sistema da flauta de Boehm e no oboé com melhorias também no estilo de Boehm, devido à sua lógica e praticidade. (SÁ, 2007, p. 11)

A princípio, a família dos saxofones possuía quatorze instrumentos, entretanto muitos caíram em desuso e atualmente são utilizados apenas oito instrumentos, mostrados na Figura 25, onde estão organizados do menor para o maior. Os nomes de cada um, da esquerda para a direita, sopranino, soprano, alto, tenor (Dó), tenor (Sib), barítono, baixo e contrabaixo.

Figura 25 – Família dos Saxofones.



Fonte: SÁ, (2007).

Apesar de serem oito saxofones, apenas cinco são utilizados com maior frequência: o soprano, o alto, os tenores e o barítono. O soprano é de difícil afinação e o baixo e o contrabaixo, por serem muito grandes possuem um alto custo de fabricação e são de difícil transporte.

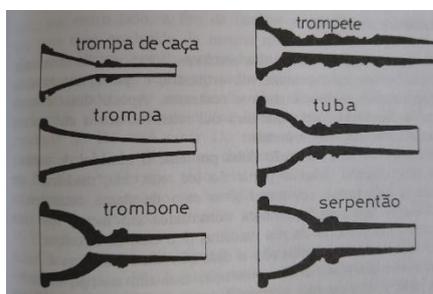
5 CONSTRUÇÃO, COMPOSIÇÃO E FUNCIONAMENTO

Neste tópico serão abordados alguns aspetos referentes à construção de alguns Aerofones, os elementos que os compõe e o funcionamento dos mesmos. De acordo com Henrique (2002), pode-se abordar os instrumentos musicais por meio de diversos pontos de vista, como físico, estético, artístico e histórico. Como o intuito deste trabalho é buscar relações matemáticas, o melhor caminho a seguir é observar os instrumentos pelo ponto de vista físico.

Quando um instrumento está sendo tocado é possível perceber algumas partes vibrando, por exemplo ao tocar um instrumento de cordas é fácil perceber a vibração das cordas, mas além das cordas todo o corpo do instrumento é posto em vibração, mesmo que não seja tão visível tal vibração. Dessa maneira, os instrumentos de modo geral comportam-se como um conjunto de vários osciladores. Assim, do ponto de vista físico pode-se considerar, de modo simplificado, que os instrumentos musicais são sistemas dinâmicos, constituídos por três elementos: sistema excitador, sistema ressoador e sistema radiante.

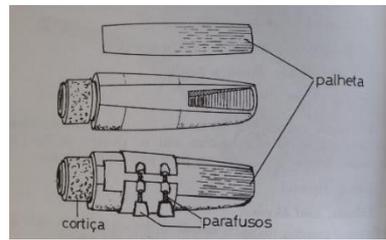
O sistema excitador é o componente físico que transforma a energia não vibratória em energia vibratória. Esse sistema difere de acordo com o tipo de energia envolvida na produção do som. Nos instrumentos de sopro, o sistema excitador consiste em provocar vibrações mecânicas ou acústicas por meio do fluxo de ar em interação com a vibração labial (no caso dos metais), ou do fluxo de ar com a vibração de palhetas simples ou duplas (no caso das madeiras), ou fluxo de ar com a aresta (no caso dos aerofones de aresta). As imagens a seguir exemplificam tais interações.

Figura 26 – Bocais de Aerofones do grupo dos metais.



Fonte: Henrique (2004).

Figura 27 – Boquilha, palheta e sistema de fixação do clarinete.



Fonte: Henrique (2004).

Figura 28 – Aresta da flauta transversal.



Fonte: Manual básico de flauta transversal.⁸

As imagens acima representam as estruturas dos instrumentos que em contato com o fluxo de ar produzem energia vibratória. O som produzido pelo sistema excitador é chamado som de base, que gera energia em muitas frequências.

Junto ao sistema excitador dos instrumentos, está o sistema ressoador, que tem como função amplificar, modificar ou filtrar as oscilações. Nos Aerofones, o elemento que possui as funções do sistema ressoador é o tubo, que além de amplificar o som, pode modificá-lo, alterando as frequências do som de base, isso é feito controlando os orifícios que estão presentes no tubo do instrumento.

Figura 29 – Tubo do saxofone alto.



Fonte: Da autora (2019).

⁸ Disponível em: <<https://www.flutemedic.com.br/manual-basico-de-flauta-transversal/>> Acesso em: 10 nov. 2019.

A energia que os sistema excitador e ressoador produzem são transformadas em energia vibratória, que é transmitida pelo ar até chegar ao ouvinte. O sistema radiante é responsável pela radiação do som. Nos instrumentos musicais em questão, os elementos responsáveis por esse sistema são os orifícios laterais contidos no comprimento do tubo e o pavilhão, localizado na extremidade oposta à boquilha ou bocal. No caso dos saxofones, o pavilhão recebe o nome de campana.

Figura 30 - Campana do saxofone alto.



Fonte: Da autora (2019).

Os três sistemas descritos são ligados e interagem entre si. Tal interação varia de acordo com cada instrumento e a forma como funciona, em alguns casos uma parte do instrumento tem diversas funções. Em alguns instrumentos, o sistema excitador é que determina a frequência emitida, já nos instrumentos de sopro são as características do tubo do instrumento que tem maior influência sobre a frequência emitida.

Como o tubo do instrumento é o elemento que exerce maior influência no som, observar os tipos de tubo pode ser um caminho de modelação. De acordo com Hümmelgen (1996),

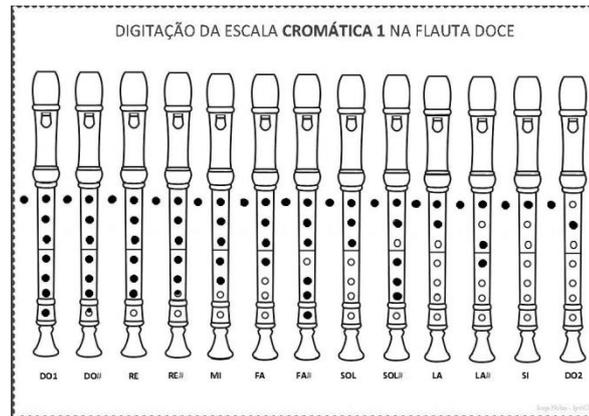
para que um tubo possa ser utilizado na construção de um instrumento musical de sopro, é necessário que as ondas acústicas estacionárias formadas nesse tubo mantenham uma relação fixa entre as frequências dos modos de vibração da coluna de ar confinada pelo tubo e que as frequências dos modos de vibração mais elevados sejam aproximadamente múltiplos inteiros da frequência do modo fundamental. Essa restrição limita tremendamente as formas de tubo utilizáveis para a construção de instrumentos de sopro. Surgem três candidatos, que por razões técnicas acabam se restringindo a dois: tubo cilíndrico e tubo cônico. (HÜMMELGEN, 1996, p. 145)

O tubo cilíndrico é usado em instrumentos como a flauta, fagote e clarinete, já o tubo em formato cônico é usado no oboé e saxofones. Além disso, os furos laterais presentes no tubo são responsáveis por alterar as frequências. Esses furos nem sempre possuem o mesmo

tamanho. Tubos que possuem o mesmo comprimento e furos laterais de diferentes tamanhos, resultam em comprimentos acústicos diferentes.

A flauta doce possui um sistema de digitação simples, como pode ser observado na Figura 31. A primeira nota, Dó, é obtida fechando todos os orifícios da flauta, a nota Ré abrindo completamente o último orifício.

Figura 31 – Sistema de digitação da flauta doce.



Fonte: Jorge Nobre.⁹

Nem todas as notas seguem a mesma lógica de apenas abrir um orifício para seguir a escala, porém com as notas que seguem tem essa característica é possível saber qual o comprimento do tubo correspondente a sua frequência. Medindo o comprimento da flauta para as notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, foi construída e seguinte tabela, onde a primeira coluna corresponde às notas, a segunda coluna às frequências e a terceira colunas aos comprimentos do tubo.

⁹ Disponível em: <<http://jorgenobredosax.blogspot.com/2017/02/>> Acesso em: 10 nov. 2019.

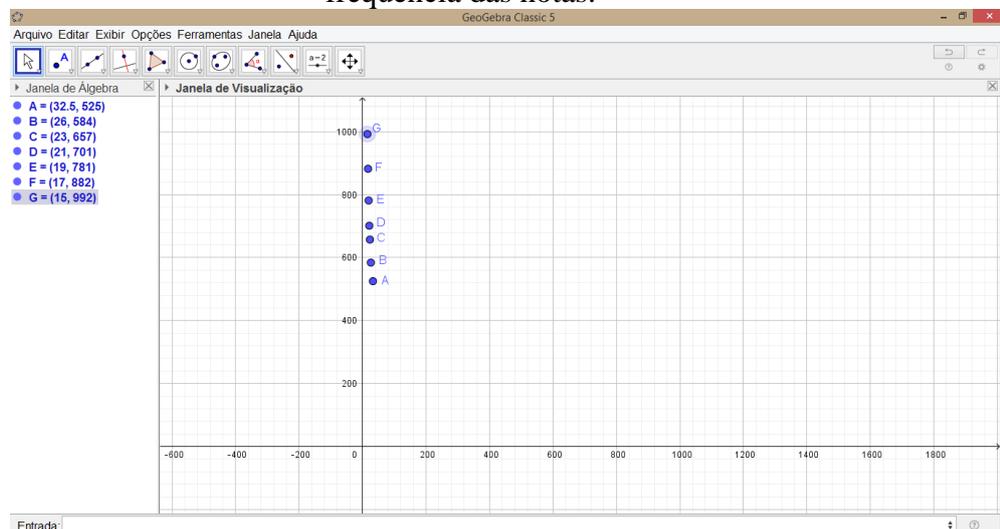
Tabela 5 – Frequências das notas da flauta doce.

Nota	Frequência	Comprimento
Dó	525 Hz	32,5 cm
Dó#	555 Hz	–
Ré	584 Hz	26 cm
Ré#	620 Hz	–
Mi	657 Hz	23 cm
Fá	701 Hz	21 cm
Fá#	740 Hz	–
Sol	781 Hz	19 cm
Sol#	832 Hz	–
Lá	882 Hz	17 cm
Lá#	936 Hz	–
Si	992 Hz	15 cm
Dó	1041 Hz	–

Fonte: Da autora (2019).

Com os valores disponíveis na Tabela 5, pode-se buscar um gráfico que represente a relação entre os valores das frequências e dos comprimentos do tubo. Inserindo os pontos (32,5,525), (26,584), (23,657), (21,701), (19,781), (17,882), (15,992) no GeoGebra tem-se o seguinte resultado.

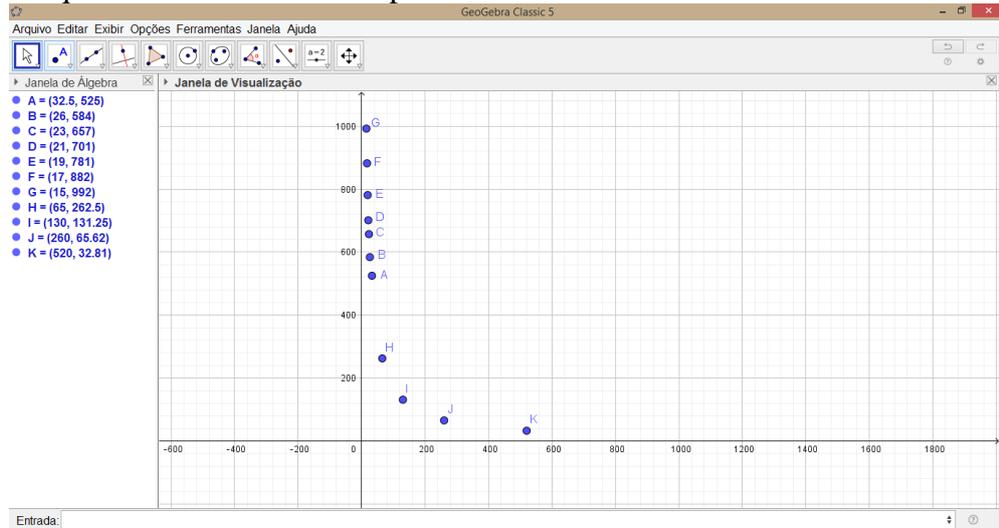
Figura 32 – Pontos referentes a relação entre o comprimento de tubo da flauta doce e a frequência das notas.



Fonte: Da autora (2019).

Apesar de a flauta doce não ser capaz de produzir notas em menores frequências, é possível simular quais comprimentos de tubo seriam necessários para gerar oitavas abaixo da nota Dó cuja frequência é 525 Hz. Basta que duplique o comprimento do tubo e divida pela metade a frequência. Assim, foram encontrados os pontos (65,262.5), (130,131.25), (260,65.62), (520,32.81).

Figura 33 – Pontos referentes a relação entre o comprimento de tubo da flauta doce e a frequência das notas com os pontos referentes às oitavas da nota Dó.



Fonte: Da autora (2019).

Pela disposição dos pontos pode-se perceber que a função que representa a relação entre o comprimento do tubo e a frequência deve ser uma função logarítmica. No primeiro modelo desenvolvido neste trabalho, foi mostrado que para encontrar a razão entre as frequências da escala temperada utiliza-se o logaritmo. Sendo assim, faz sentido que a função buscada nesse momento seja a logarítmica, pois a escala utilizada na flauta doce é a escala cromática, como indica a Figura 31, que possui o mesmo intervalo de aproximadamente 1,059.

Para encontrar a função logarítmica que passe pelos pontos, foi inserida no *GeoGebra* a seguinte função

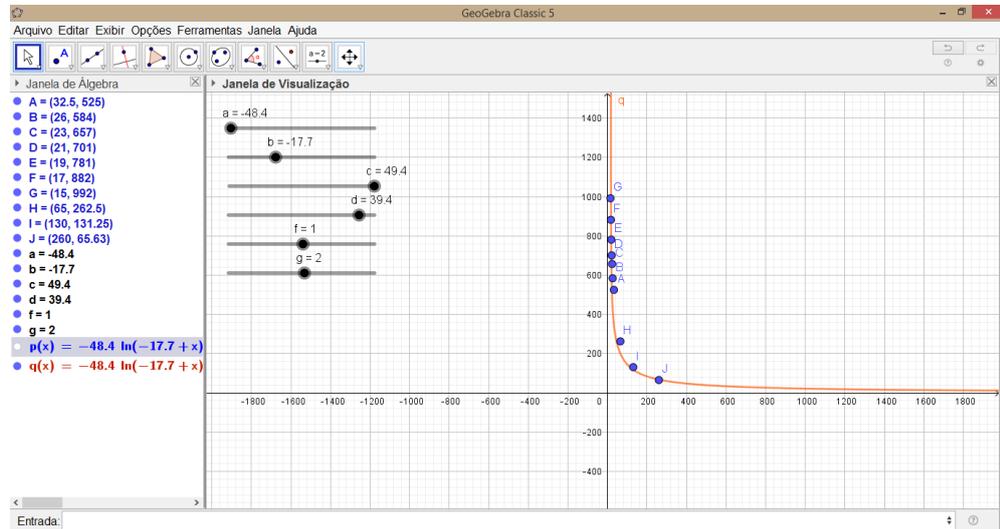
$$q(x) = a \ln(b + x) + c \ln(d + x) + f \ln(g + x) + p(x) \ln(x)$$

Onde

$$p(x) = a \ln(b + x) + c \ln(d + x) + f \ln(g + x)$$

Em seguida criou-se controles deslizantes para a, b, c, d, f, g, h , para que a medida que esses parâmetros fossem variando, fosse possível encontrar a curva que melhor se aproximasse dos pontos. A Figura 34 mostra a resultado final.

Figura 34 – Gráfico que relaciona o comprimento de tubo da flauta doce e as frequências das notas.



Fonte: Da autora (2019).

A função que resulta no gráfico acima é

$$q(x) = -48.4 \ln(-17.7 + x) + 49.4 \ln(39.4 + x) - \ln(2 + x) + (-48.4 \ln(-17.7 + x) + 49.4 \ln(39.4 + x) - \ln(2 + x)) \ln(x)$$

Tendo os resultados obtidos com a flauta doce, é possível buscar por relações em outros instrumentos de sopro, como o saxofone. Sabendo que o sistema de digitação desse instrumento possui características diferentes da flauta doce, como por exemplo um sistema de chaves complexo que controla 24 orifícios.

5.1 Audacity

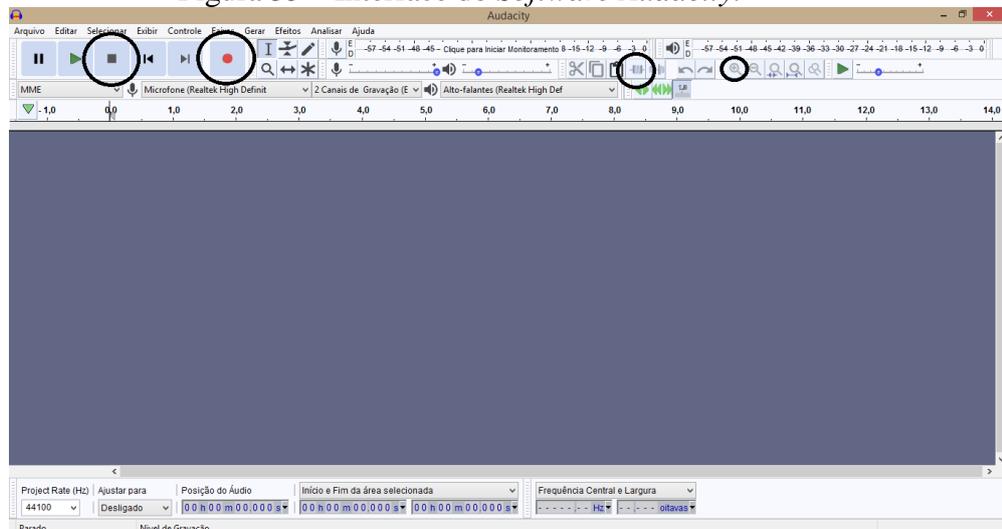
Nesta seção são apresentados alguns modelos construídos por meio de experimentos com instrumentos musicais de sopro, utilizando o *software Audacity* e o aplicativo *GeoGebra*. São explorados conceitos físicos e matemáticos, tais como espectro sonoro, ondas e funções trigonométricas.

A primeira análise refere-se às ondas sonoras. Define-se ondas como perturbações que se propagam através de um meio ou do vácuo. As ondas sonoras se originam de perturbações

em meios materiais, que podem ser sólidos, líquidos ou gasosos e precisam de um meio para se propagar. As principais características de uma onda sonora são: frequência, comprimento de onda, amplitude e timbre.

Para captar ondas sonoras dos instrumentos musicais utilizou-se o *software Audacity*. O *Audacity* é um *software* livre de gravação e edição de áudio, cuja primeira versão surgiu em meados de 1999. A versão utilizada neste trabalho é a 2.2.2. Suas ferramentas possibilitam a análise das características das ondas sonoras. A Figura 35 mostra sua interface com algumas ferramentas básicas destacadas.

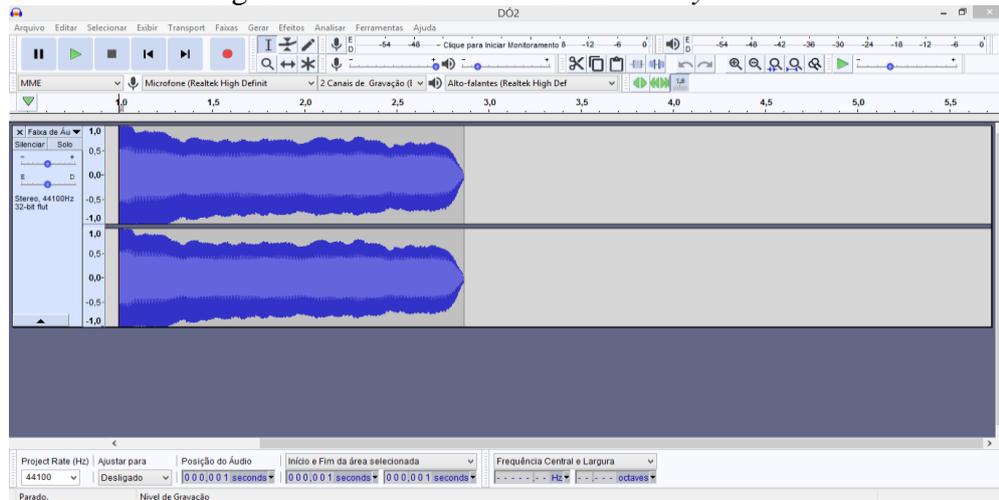
Figura 35 – Interface do *Software Audacity*.



Fonte: Da autora (2019).

Os quatro comandos selecionados representam respectivamente, da esquerda para direita: reproduzir, gravar, aparar todo o áudio fora da seleção e aumentar zoom. Esses comandos auxiliam na gravação e visualização dos gráficos obtidos ao tocar os instrumentos. Neste primeiro momento, serão analisados gráficos referentes às notas tocadas em um saxofone alto da marca Michael. Após gravar o áudio, obtém-se o gráfico em que o eixo horizontal representa o tempo em segundos e o eixo vertical representa a amplitude que possui variação $[-1,1]$, conforme a Figura 36.

Figura 36 - Gráfico obtido no *Audacity*.



Fonte: Da autora (2019).

Esse gráfico representa as amplitudes da nota Dó, representada no pentagrama no terceiro espaço como mostra a Figura 37, tocada pelo Saxofone Alto. Essa nota possui frequência de aproximadamente 310Hz.

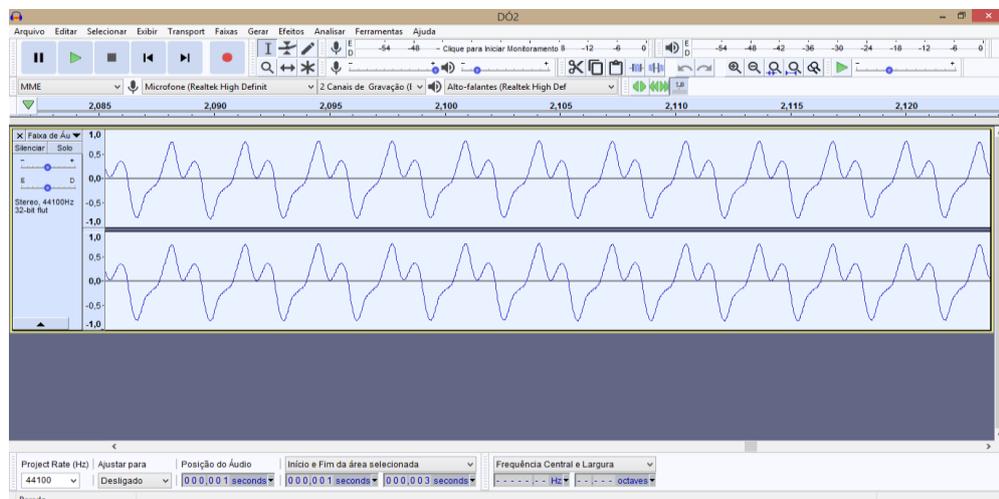
Figura 37 - Nota Dó com frequência de 310 Hz no saxofone alto.



Fonte: Da autora (2019).

Para que o gráfico das ondas sonoras possa ter seu comportamento melhor observadas, utiliza-se a função zoom. Chegando ao resultado do gráfico a seguir:

Figura 38 – Gráfico da onda sonora no *Audacity* com zoom.



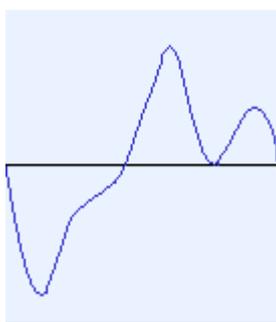
Fonte: Da autora (2019).

As ondas sonoras são vibrações periódicas, ou seja, seu movimento se repete. Tal característica é perceptível no gráfico da figura anterior, pois há um padrão que se repete dentro de determinado período de tempo, esse padrão leva o nome de ciclos. A frequência da onda é determinada pelo número de ciclos em um certo intervalo de tempo.

As ondas sonoras periódicas têm seu gráfico gerado a partir de uma soma de ondas sinusoidais, ou seja, de funções seno. A partir dessas informações e do gráfico gerado pelo *Audacity*, buscou-se descobrir qual função resulta no gráfico de ondas de determinadas notas. Para auxiliar esse processo, foi utilizado o aplicativo *GeoGebra*.

O primeiro passo para construção da função foi selecionar apenas um ciclo da onda, conforme indica a Figura 39 a seguir.

Figura 39 – Um ciclo da onda gerada pela nota Dó 310 Hz.

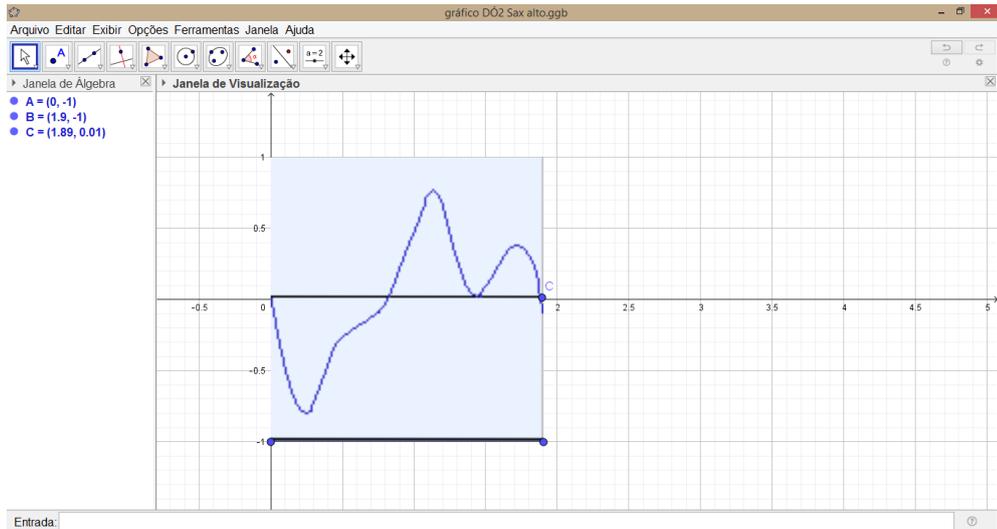


Fonte: Da autora (2019).

Em seguida, a Figura 36 foi importada para o aplicativo *GeoGebra* e posicionada de modo que o intervalo no eixo y fosse o mesmo intervalo do eixo vertical do *Audacity*, que corresponde a amplitude, $[-1,1]$. Já o intervalo do eixo x, que no *Audacity* corresponde ao tempo em segundos, foi posicionado de modo que não distorça a imagem capturada. Logo, tem-se que para o intervalo de 0,003 segundos, no plano cartesiano corresponde ao intervalo $[0; 1.89]$ ¹⁰, ponto C da Figura 40.

¹⁰ A notação dos números decimais será feita com ponto e não vírgula, de acordo com o que é feito no aplicativo *GeoGebra*.

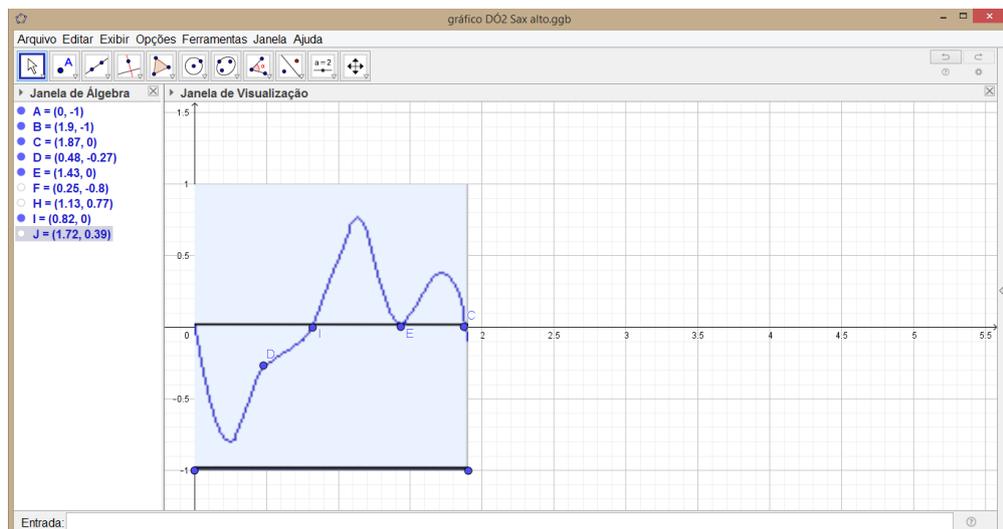
Figura 40 – Imagem de um ciclo da onda inserida no *GeoGebra*.



Fonte: Da autora (2019).

O gráfico foi dividido em quatro partes: do ponto (0,0) ao ponto D, do ponto D ao ponto I, do ponto I ao ponto E e por fim, do ponto E ao ponto C. A partir dessa divisão buscase quatro funções seno, onde cada função corresponda a uma dessas partes. O resultado obtido não será exato, visto que trata-se apenas de uma aproximação e que os *softwares* usados possuem limitações.

Figura 41 – Divisão da onda em quatro partes.



Fonte: Da autora (2019).

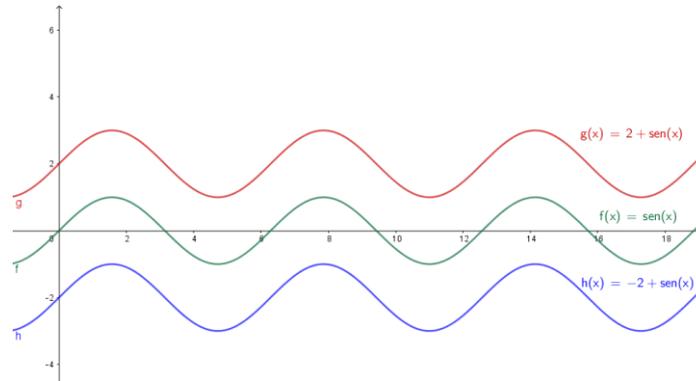
Para encontrar as funções é necessário saber qual a forma geral de uma função seno e o significado de cada um de seus parâmetros. Uma onda é representada pela função trigonométrica seno, da forma

$$f(x) = k + \alpha \sin(px + \phi)$$

Onde,

k translada o gráfico verticalmente:

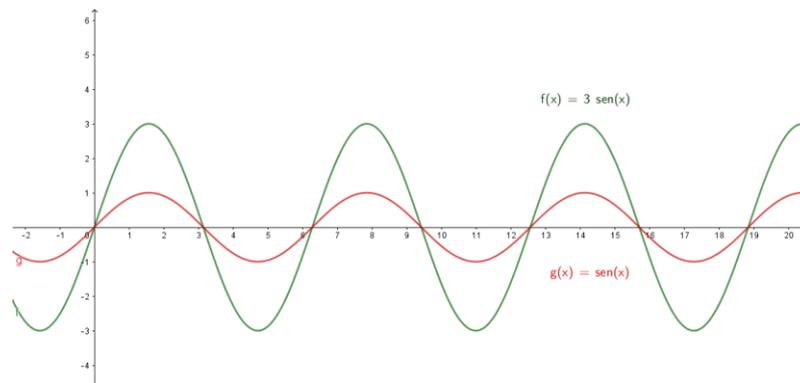
Figura 42 – Variação do parâmetro k .



Fonte: Da autora (2019).

α altera a amplitude do gráfico:

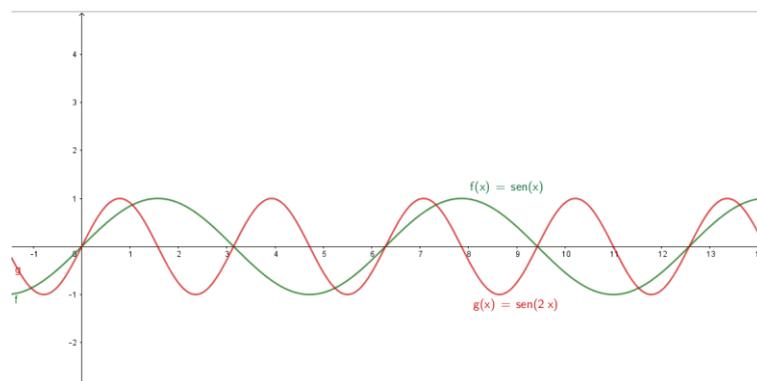
Figura 43 – Variação do parâmetro α



Fonte: Da autora (2019).

p altera o período gráfico:

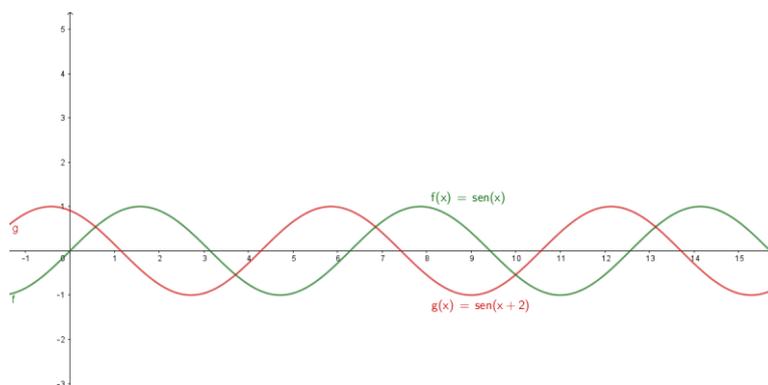
Figura 44 – Variação do parâmetro p .



Fonte: Da autora (2019).

ϕ desloca horizontalmente o gráfico:

Figura 45 – Variação do parâmetro ϕ .

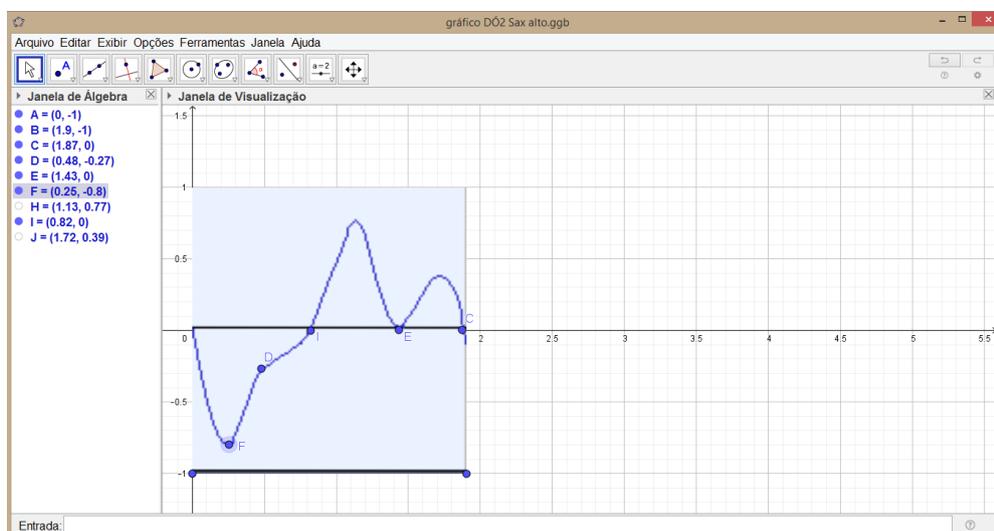


Fonte: Da autora (2019).

Iniciando pela função que representa a primeira parte do gráfico, do ponto $(0,0)$ ao ponto D,, busca-se a função que tem domínio no intervalo $(0,0.48]$

Para encontrar o parâmetro α , que representa a amplitude da onda, marca-se o ponto $F = (0.25, -0.8)$, conforme a Figura 46. Assim tem-se que $\alpha = -0.8$.

Figura 46 – Amplitude da primeira parte do gráfico.



Fonte: Da autora (2019).

Para encontrar o parâmetro p , que representa o período da onda, utiliza-se uma regra de três inversamente proporcional, pois a medida que o valor de p aumenta o período da onda diminui. Tal cálculo é realizado da seguinte maneira, quando $p = 1$, meio período de onda corresponde ao ponto $(\pi, 0)$. No *GeoGebra* podemos encontrar o ponto $(x, 0)$ correspondente a meio período da onda analisada, que será o parâmetro p procurado. Não é explícito qual o

ponto $(x, 0)$, mas sabe-se que a onda é simétrica em relação a reta $x = 0.25$. Logo, o ponto que corresponde a metade do período dessa onda é $(0.5, 0)$. Com essas informações, pode ser encontrado p .

$$1 \rightarrow \pi$$

$$p \rightarrow 0.5$$

Como a regra de três é inversamente proporcional tem-se que,

$$1 \rightarrow 0.5$$

$$p \rightarrow \pi$$

$$0.5p = \pi$$

$$p \cong 6.28$$

Os parâmetros k e ϕ serão igual a zero, pois o gráfico não está deslocado verticalmente nem horizontalmente.

Pelos cálculos anteriores temos que a função que representa a primeira onda deve ser

$$f(x) = -0.8 \sin(6.28x), \text{ se } 0 < x \leq 0.48.$$

O mesmo procedimento foi feito para as outras três partes do gráfico.

Para a segunda parte, do ponto D ao ponto I, intervalo $(0.48, 0.82]$, a amplitude da onda foi considerada como o valor de y no ponto D. Assim temos $\alpha = -0.27$. Já para encontrar o valor de p , tem-se que a distância horizontal entre D e I é de 0.34, e como já foi dito, o fato da onda ser simétrica, agora com relação a reta $x = 0.48$, é possível concluir que o valor de meio período dessa onda é 0.68. Assim,

$$1 \rightarrow \pi$$

$$p \rightarrow 0.68$$

Como a regra de três é inversamente proporcional tem-se que,

$$1 \rightarrow 0.68$$

$$p \rightarrow \pi$$

$$0.68p = \pi$$

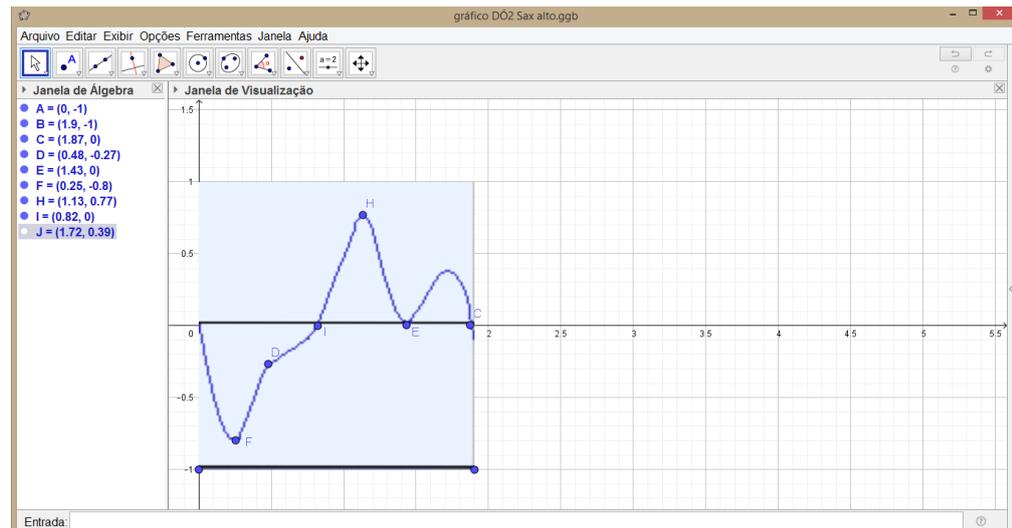
$$p \cong 4.6$$

Até este momento, nada pode ser dito sobre os parâmetros k e ϕ , então consideremos ambos iguais a zero. A função obtida é

$$g(x) = -0.27 \sin(4.6x), \text{ se } 0.48 < x \leq 0.82$$

Para a terceira parte do gráfico, do ponto I ao ponto E, intervalo $(0.82, 1.43]$, a amplitude foi obtida por meio da marcação do ponto H, como mostra a Figura 47. Assim, temos que $\alpha = 0.77$.

Figura 47 – Amplitude da terceira parte do gráfico.



Fonte: Da autora (2019).

Para encontrar o valor de p , temos que no ponto E, $x = 1.43$ e no ponto I, $x = 0.82$, logo o valor de meio período dessa onda é 0.61. Assim, o valor de p é

$$1 \rightarrow \pi$$

$$p \rightarrow 0.61$$

Como a regra de três é inversamente proporcional, tem-se que

$$1 \rightarrow 0.61$$

$$p \rightarrow \pi$$

$$0.61p = \pi$$

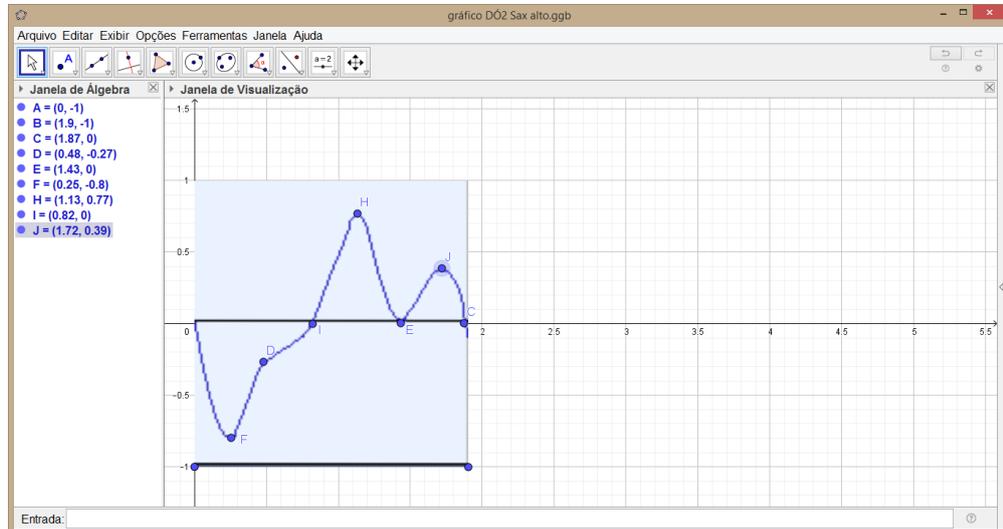
$$p \cong 5.14$$

Até este momento nada pode ser dito sobre os parâmetros k e ϕ , então consideremos ambos iguais a zero. A função obtida é

$$h(x) = 0.77 \sin(5.14x), \text{ se } 0.82 < x \leq 1.43.$$

Por fim, a quarta parte do gráfico do ponto E ao ponto C, intervalo $(1.43, 1.87]$, tem amplitude $\alpha = 0.39$ definida pelo valor de y no ponto J, como mostra a Figura 48 a seguir.

Figura 48 – Amplitude da terceira parte do gráfico.



Fonte: Da autora (2019).

Para encontrar o valor de p , temos que no ponto E, $x = 1.43$ e no ponto C, $x = 1.87$, logo o valor de meio período dessa onda é 0.44. Assim, o valor de p é

$$1 \rightarrow \pi$$

$$p \rightarrow 0.44$$

Como a regra de três é inversamente proporcional, tem-se que

$$1 \rightarrow 0.44$$

$$p \rightarrow \pi$$

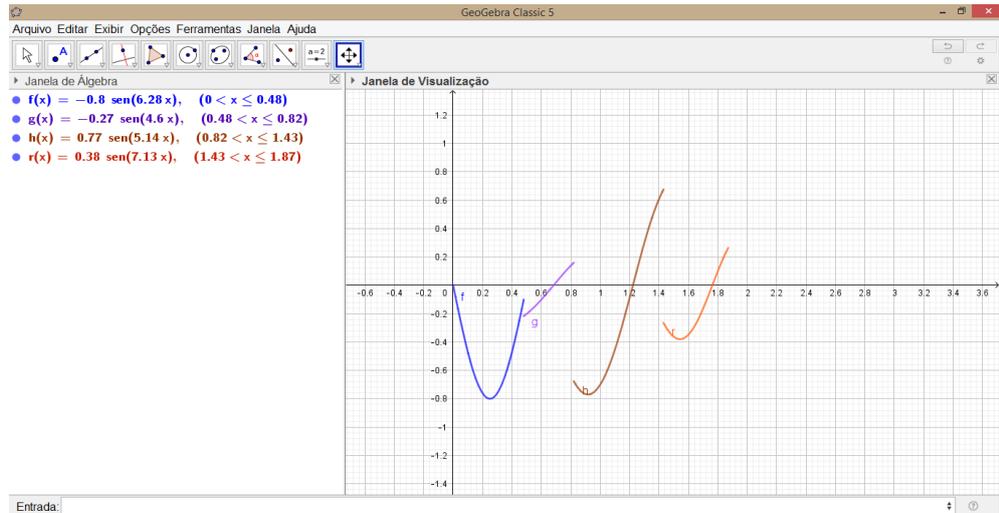
$$0.44p = \pi$$

$$p \cong 7.13$$

Como nas funções anteriores, até o momento não há como saber os valores dos parâmetros k e ϕ , então são considerados com valor igual a zero. Logo a função obtida é

$$r(x) = 0.39 \sin(7.13x), \text{ se } 1.43 < x \leq 1.87.$$

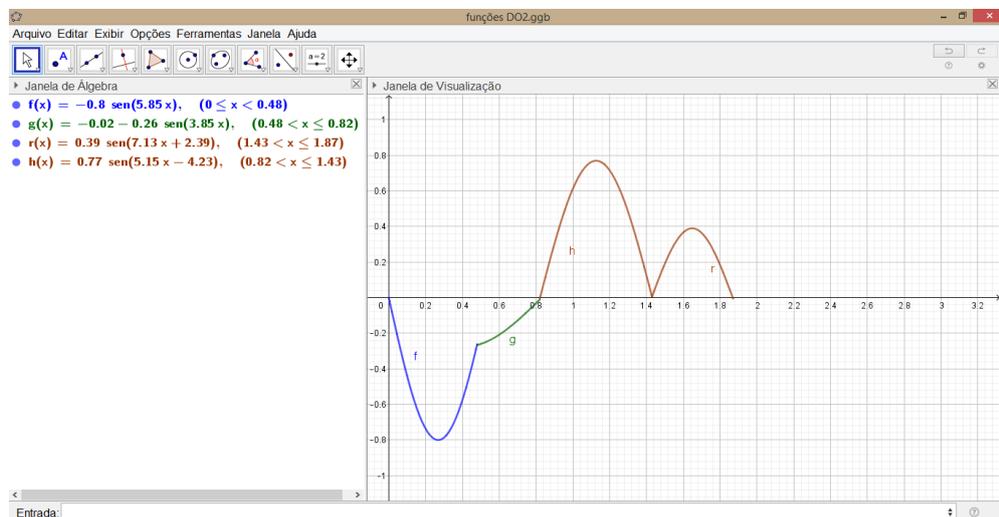
Após encontrar as quatro funções elas, o passo seguinte é inseri-las no *GeoGebra* para verificar o grau de aproximação com o gráfico original da onda. O resultado desse passo pode ser observado na Figura 49 a seguir.

Figura 49 – Funções inseridas no *GeoGebra*.

Fonte: Da autora (2019).

É possível verificar que as funções g , h e r precisam ser deslocadas para que o gráfico se aproxime do original. Assim, utilizando a janela de Propriedades da função, os parâmetros k e ϕ foram alterados até obter um resultado satisfatório. O resultado dos ajustes está a seguir na Figura 50.

Figura 50 - Gráfico após primeiro ajuste.



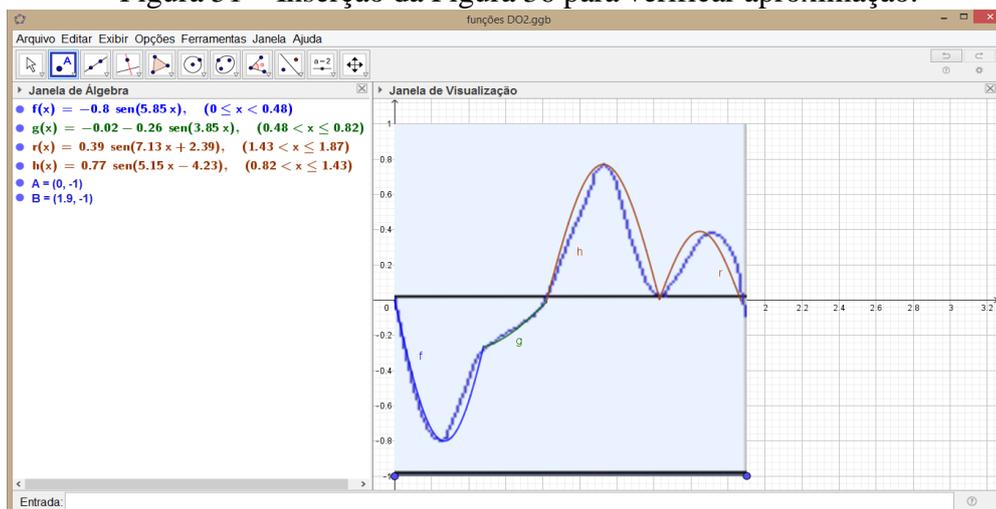
Fonte: Da autora (2019).

O gráfico acima é obtido pela seguinte função por partes

$$f_1(x) = \begin{cases} -0.8 \sin(5.85x), & \text{se } 0 < x \leq 0.48 \\ -0.02 - 0.26 \sin(3.85x), & \text{se } 0.48 < x \leq 0.82 \\ 0.77 \sin(5.15x - 4.23), & \text{se } 0.82 < x \leq 1.43 \\ 0.39 \sin(7.13x + 2.39), & \text{se } 1.43 < x \leq 1.87 \end{cases}$$

Aparentemente o gráfico gerado pela função f_1 está mais próximo do esperado. Para verificar o quão próxima da realidade estão as curvas, no mesmo arquivo da Figura 50 pode ser inserida a Figura 39, que é o *screenprint* de um ciclo da onda gerada no *Audacity*. De modo que a Figura 39 fique abaixo do gráfico gerado no *GeoGebra*, como na Figura 51 a seguir.

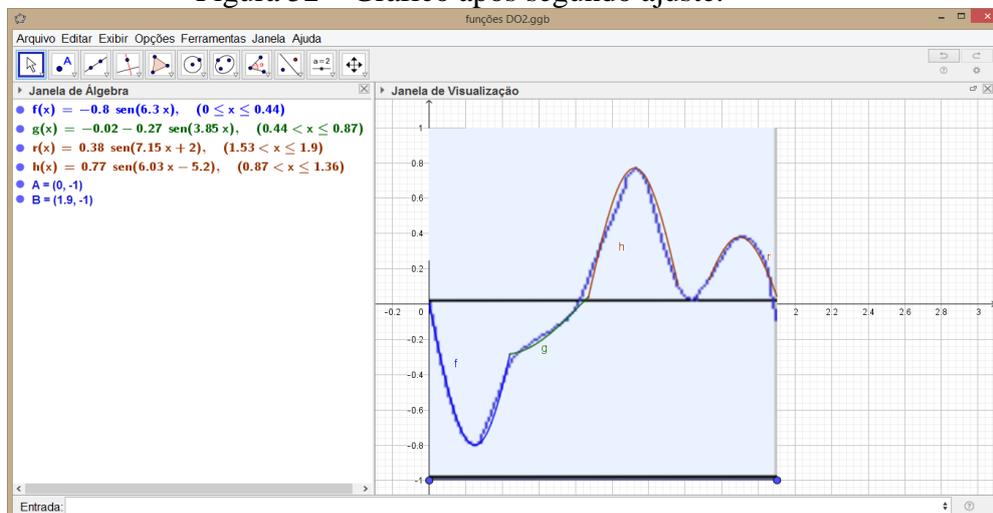
Figura 51 – Inserção da Figura 36 para verificar aproximação.



Fonte: Da autora (2019).

Os valores das amplitudes e do deslocamento vertical α e k são os com maior aproximação quando compara-se a imagem com as curvas sobrepostas. Os parâmetros p e ϕ , período e deslocamento horizontal, respectivamente, podem sofrer mais alterações para um melhor resultado. Utilizando a imagem inserida no *GeoGebra*, como mostra a figura acima, os ajustes podem ser feitos de uma maneira mais fácil. Com esse segundo ajuste, foi possível chegar ao seguinte gráfico da Figura 52.

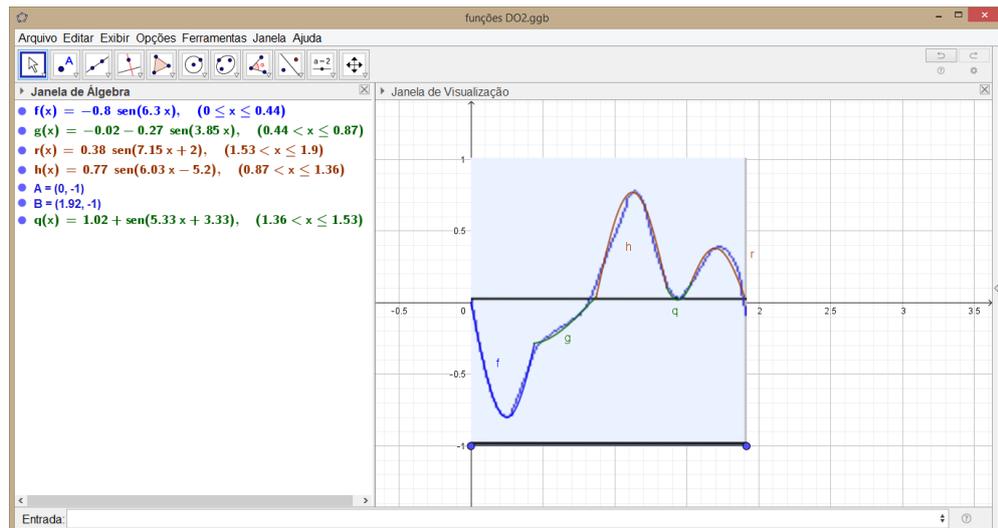
Figura 52 – Gráfico após segundo ajuste.



Fonte: Da autora (2019).

Note que depois da terceira curva, referente a função h , o gráfico sofreu uma “quebra”. Nesse intervalo, $(1.36, 1.53]$, existe uma outra função seno, considerando que tenha amplitude e deslocamento vertical de aproximadamente $a = 1$ e $k = 1$. Após os mesmos ajustes pelos quais foram submetidas as outras funções, o resultado alcançado é o indicado na Figura 53.

Figura 53 – Gráfico final após terceiro ajuste.



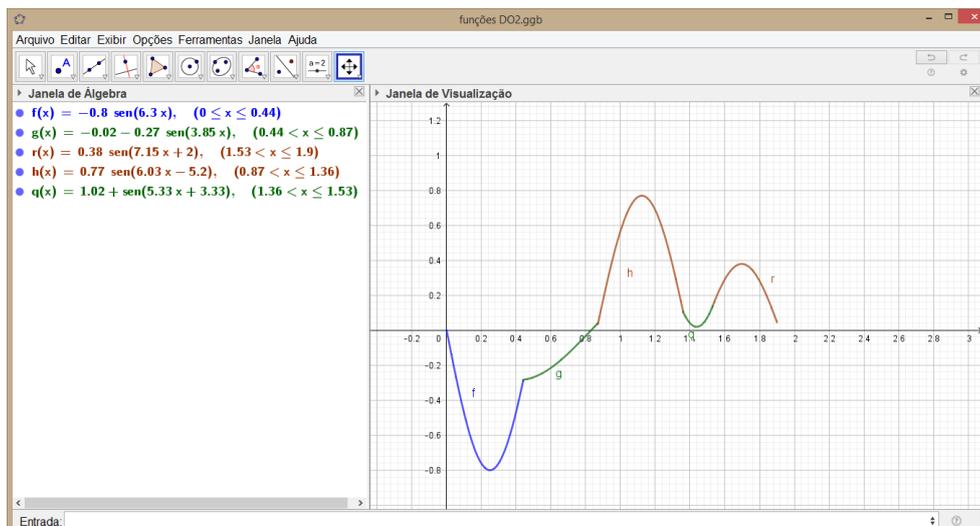
Fonte: Da autora (2019).

O gráfico final é definido pela seguinte função por partes

$$f_1(x) = \begin{cases} -0.8 \sin(6.3x), & \text{se } 0 < x \leq 0.44 \\ -0.02 - 0.27 \sin(3.85x), & \text{se } 0.44 < x \leq 0.87 \\ 0.77 \sin(6.03x - 5.2), & \text{se } 0.87 < x \leq 1.36 \\ 1.02 + \sin(5.33x + 3.33), & \text{se } 1.36 < x \leq 1.53 \\ 0.38 \sin(7.15x + 2), & \text{se } 1.53 < x \leq 1.9 \end{cases}$$

E o resultado final pode ser observado a seguir.

Figura 54 – Gráfico final nota Dó 310 Hz.



Fonte: Da autora (2019).

Como foi dito anteriormente, o resultado alcançado não seria exato, mas sim aproximado. Inicialmente o gráfico foi dividido em apenas quatro partes, apenas no momento dos ajustes viu-se a necessidade de dividir em cinco partes, a fim de uma melhor aproximação entre as curvas. Assim, quanto maior a quantidade de partes que o gráfico de ondas for dividido melhor será o resultado final.

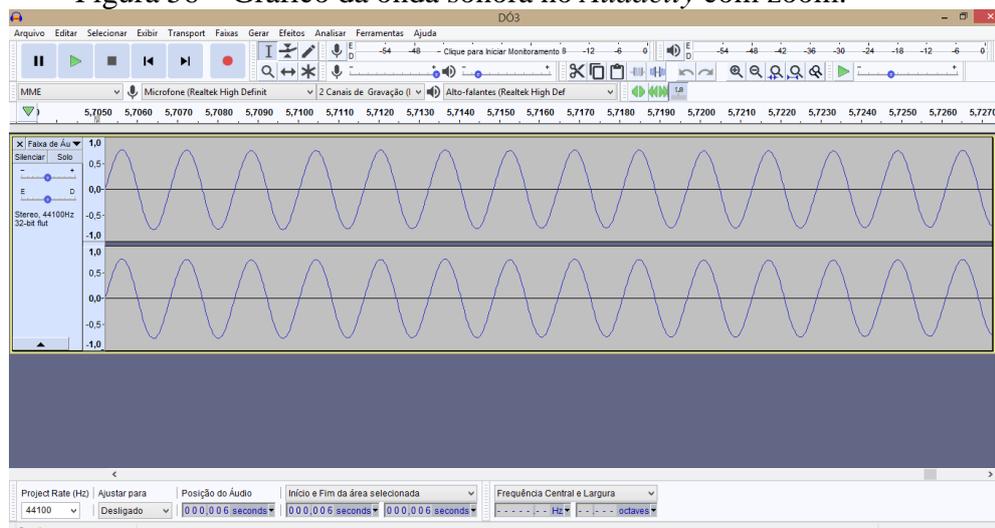
A próxima nota Dó, uma oitava acima da analisada anteriormente, é escrita no pentagrama como mostra a Figura 55 a seguir. Essa nota possui a frequência de aproximadamente 465Hz.

Figura 55 – Nota Dó com frequência 465 Hz no saxofone alto.



Fonte: Da autora (2019).

O gráfico de ondas, dessa nota ao ser tocada por um Saxofone Alto, gerado pelo *Audacity*, é o seguinte.

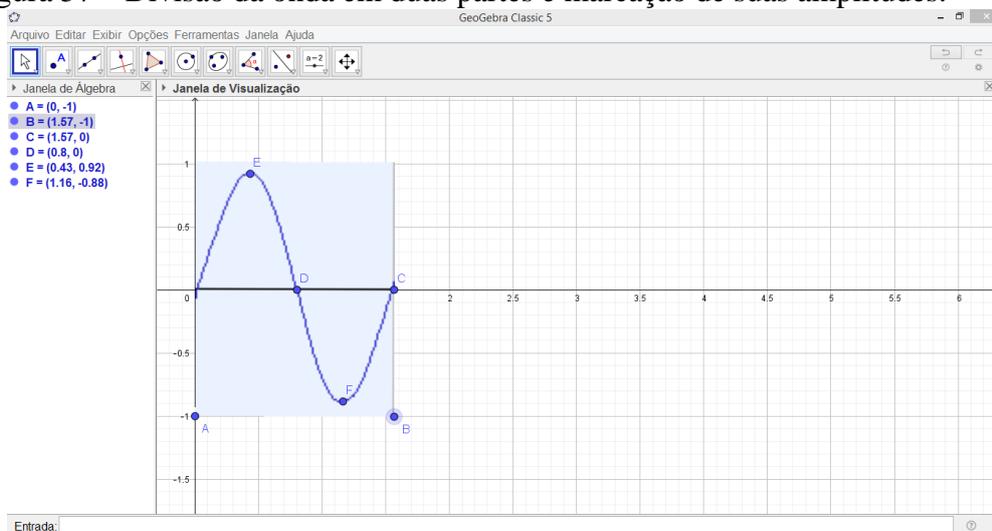
Figura 56 – Gráfico da onda sonora no *Audacity* com zoom.

Fonte: Da autora (2019).

Comparado com o gráfico que representa a oitava abaixo, o gráfico acima possui um menor número de senóides diferentes. Para verificar quais funções geram um gráfico que se aproxime do real, utilizou-se novamente o aplicativo *GeoGebra*.

Ao selecionar um período da onda e inseri-lo no aplicativo, ajustou-se a imagem para que no eixo y o intervalo seja entre $[-1,1]$, ou seja, o mesmo intervalo da amplitude no *Audacity*. Já a variação do eixo x está entre $[0,1.57]$, no *Audacity* a variação do eixo horizontal, referente ao tempo, é de 0,0016 segundos. A onda foi dividida em duas partes, pelo ponto D, e os pontos E e F auxiliam na interpretação das amplitudes. A Figura 57 apresenta todas essas informações.

Figura 57 – Divisão da onda em duas partes e marcação de suas amplitudes.



Fonte: Da autora (2019).

A função que gera a primeira parte do gráfico possui o parâmetro $\alpha = 0.92$ referente ao valor da coordenada y no ponto E. Já o parâmetro p pode ser definido como anteriormente, a partir da relação a seguir

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \pi \\ p &\rightarrow 0.8 \end{aligned}$$

Pois meio período dessa onda corresponde a $x = 0.8$. Como essa relação é inversamente proporcional, tem-se que

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 0.8 \\ p &\rightarrow \pi \\ 0.8p &= \pi \\ p &\cong 3.92 \end{aligned}$$

Como o gráfico não está descolado verticalmente e horizontalmente, conclui-se que os parâmetros k e ϕ são iguais a zero. Assim, a função deve ser

$$f(x) = 0.92 \sin(3.92x), \text{ se } 0 < x \leq 0.8$$

Já a segunda parte do gráfico possui amplitude $\alpha = -0.88$, referente ao valor da coordenada y do ponto F. Para definir o valor de p tem-se que a distância horizontal entre os pontos D e C é 0.77, segue a relação

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \pi \\ p &\rightarrow 0.77 \end{aligned}$$

Sabendo que a regra de três é inversamente proporcional,

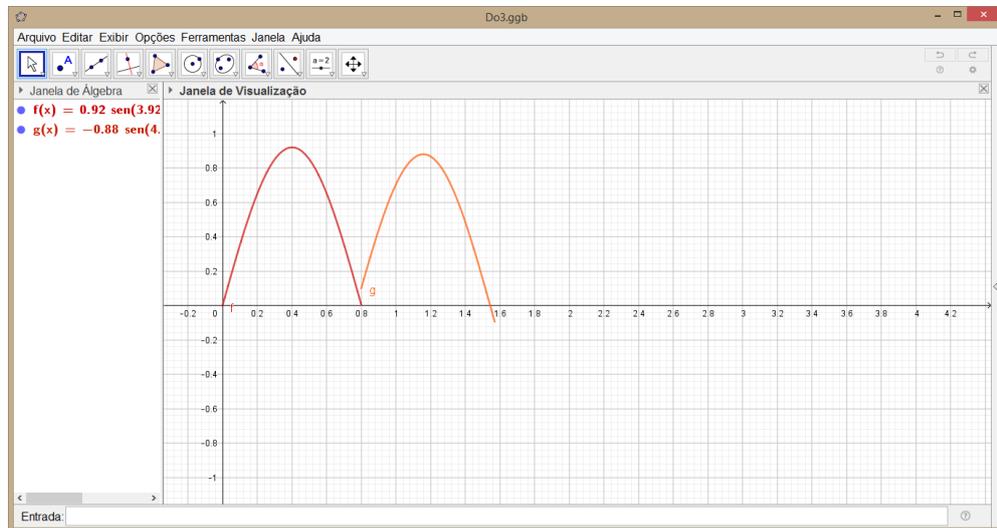
$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 0.77 \\ p &\rightarrow \pi \\ 0.77p &= \pi \\ p &\cong 4.07 \end{aligned}$$

Como feito para o gráfico modelado anteriormente, os parâmetros k e ϕ tem seus valores iguais a zero inicialmente. Logo a função resultante para a segunda parte do gráfico é

$$g(x) = -0.88 \sin(4.07x), \text{ se } 0.8 < x \leq 1.57$$

Inserindo essas duas funções no *GeoGebra* obtém-se o resultado apresentado na Figura 58.

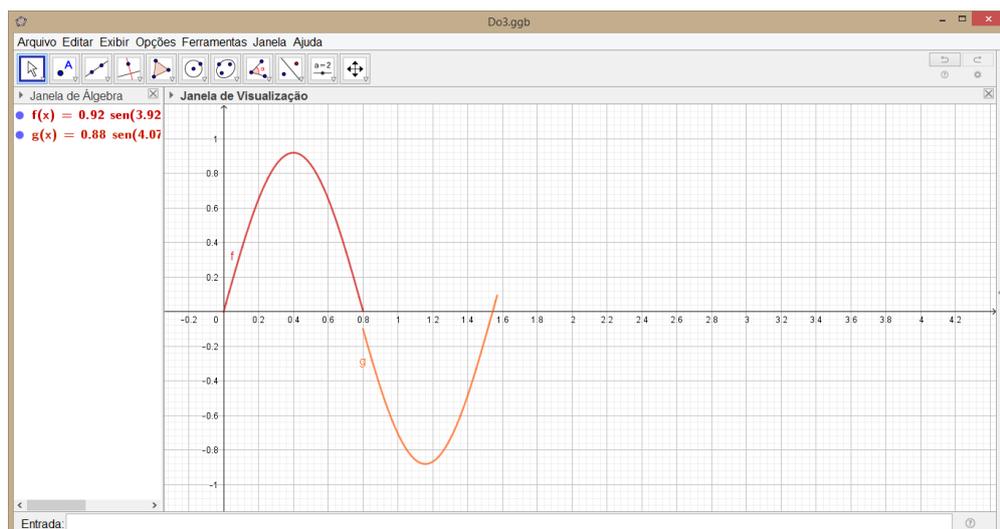
Figura 58 – Funções inseridas no *GeoGebra*.



Fonte: Da autora (2019).

A princípio para que a curva da função g se aproxime da real pode-se tomar duas decisões: utilizar a amplitude com sinal negativo ou deslocar o gráfico horizontalmente até que a parte da curva cuja amplitude é negativa apareça no intervalo $0.8 < x \leq 1.57$. Utilizando a primeira opção obtém-se o seguinte gráfico.

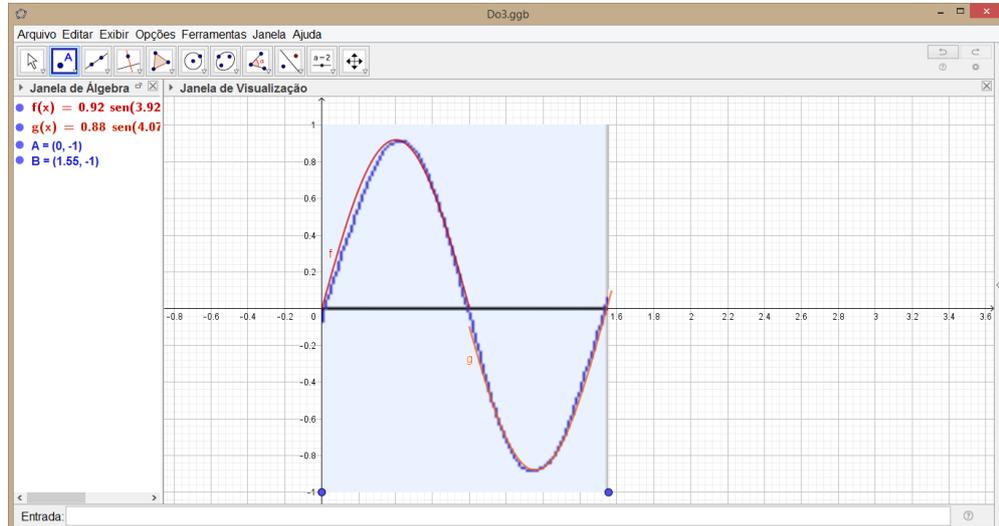
Figura 59 – Alteração do sinal do parâmetro α da função g .



Fonte: Da autora (2019).

Como feito no caso anterior, utilizando a imagem do gráfico obtido no *Audacity*, pode-se ter uma ideia de quais podem ser os próximos ajustes necessários. Ao inserir a imagem no *GeoGebra*, tem-se o resultado conforme mostrado na Figura 60.

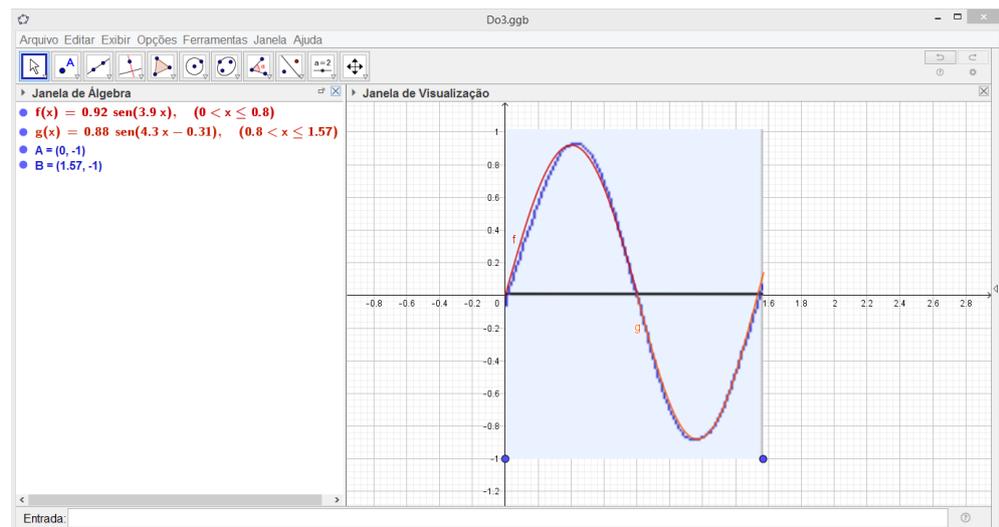
Figura 60 – Inserção da onda obtida no *Audacity* para verificar aproximação.



Fonte: Da autora (2019).

Nota-se que há um intervalo no eixo y que não pertence ao gráfico formado pelas funções f e g . Esse é um dos detalhes que podem ser corrigidos ao variar os parâmetros k , α , p e ϕ , além de aproximar as curvas das funções da curva da imagem da onda inserida.

Figura 61 – Gráfico após ajustes com auxílio da imagem do gráfico da onda.



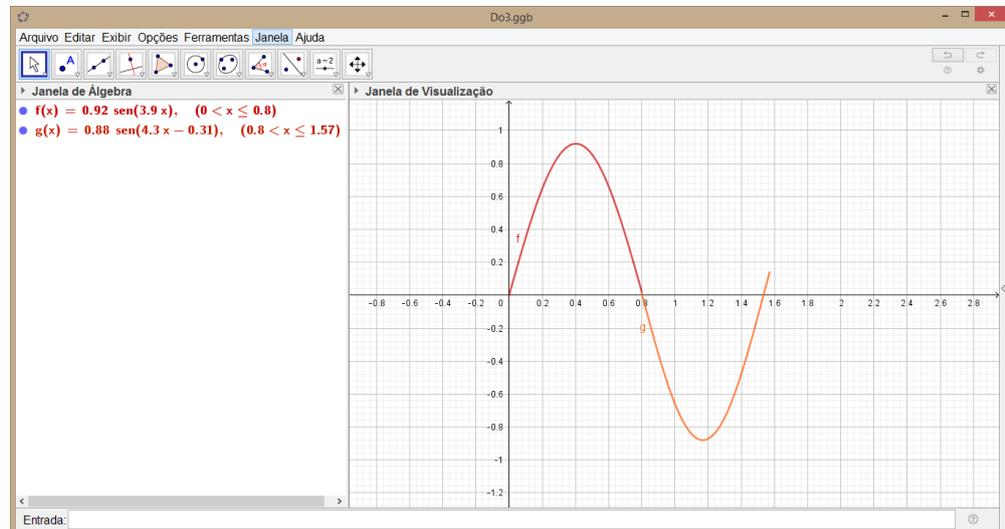
Fonte: Da autora (2019).

O resultado final é o gráfico gerado pela função por partes f_2

$$f_2(x) = \begin{cases} 0.92 \sin(3.9x), & \text{se } 0 < x \leq 0.8 \\ 0.88 \sin(4.3x - 0.31), & \text{se } 0.8 < x \leq 1.57 \end{cases}$$

A Figura 62 mostra o resultado final ao inserir a função acima no *GeoGebra*.

Figura 62 – Gráfico final nota Dó 465 Hz.



Fonte: Da autora (2019).

No início deste capítulo, foi modelado o gráfico da onda sonora obtida ao tocar a nota Dó que possui frequência 310 Hz em um saxofone alto. Em seguida, foi modelado o gráfico da oitava acima, ou seja, a nota Dó de frequência 465 Hz. Ainda no saxofone alto é possível obter a nota Dó uma oitava abaixo da primeira analisada, ou seja, a nota Dó com frequência de aproximadamente 155 Hz. No pentagrama essa nota é representada como mostra a Figura 63 abaixo.

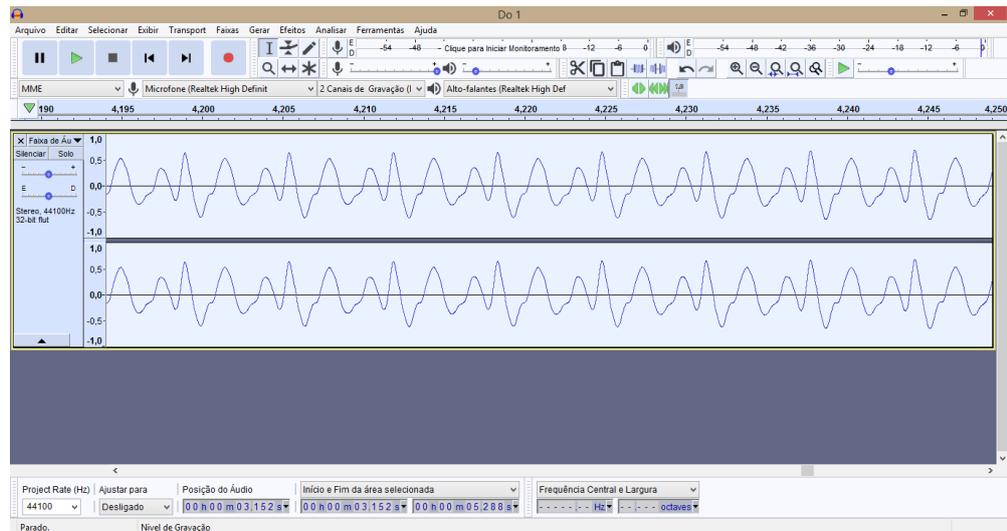
Figura 63 – Nota Dó com frequência 155 Hz no saxofone alto.



Fonte: Da autora (2019).

A Figura 64 mostra o gráfico de ondas ao captar o som da nota Dó de frequência 155 Hz no *software Audacity*, e em seguida utilizando a ferramenta de Zoom.

Figura 64 – Gráfico da onda sonora no *Audacity* com zoom.

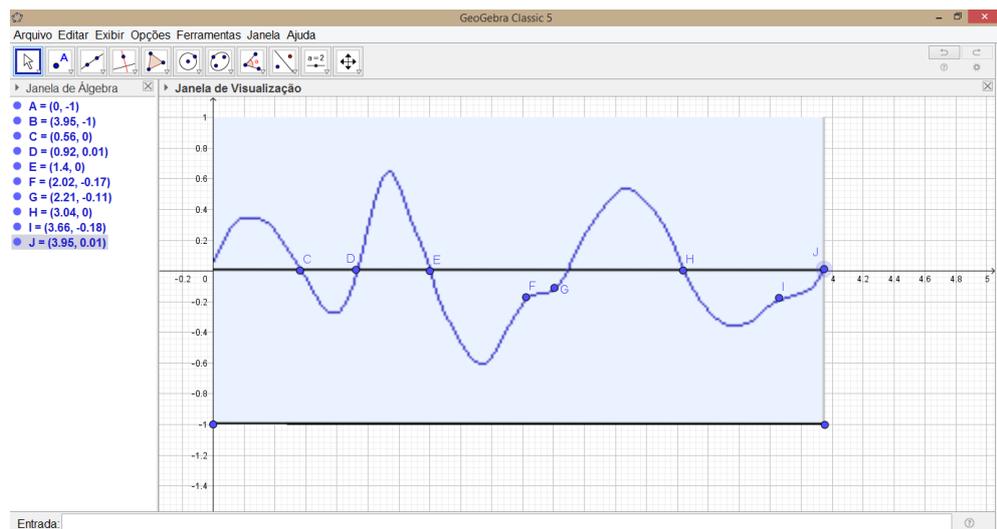


Fonte: Da autora (2019).

O gráfico acima representa a nota Dó mais grave que as anteriores, ou seja, possui uma frequência menor. Uma característica que pode ser observada no gráfico é que um ciclo dessa onda é formado por mais senóides, comparando com o gráfico da mesma nota uma e duas oitavas acima.

A Figura 65 mostra um ciclo da onda selecionado e inserido no *GeoGebra* para que assim possa ser dividido, de acordo com o procedimento já utilizado anteriormente.

Figura 65 – Divisão da onda em oito partes.



Fonte: Da autora (2019).

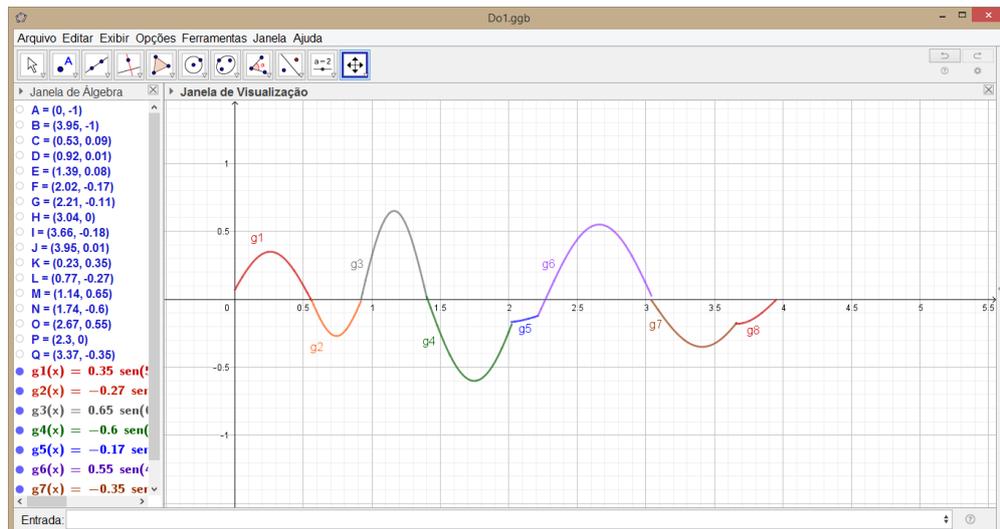
Como já era esperado, a quantidade de divisões do gráfico foi de fato maior. Tem-se uma divisão em oito partes, e no processo de obtenção das funções pode ser dividido mais

vezes com a finalidade de uma melhor aproximação. De modo análogo aos anteriores, tem-se que a função definida por partes que gera o gráfico no *GeoGebra* é

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.35 \sin(5.3x + 0.2), & \text{se } 0 < x \leq 0.56 \\ -0.27 \sin(8.5x + 1.55), & \text{se } 0.56 < x \leq 0.92 \\ 0.65 \sin(6.5x + 0.3), & \text{se } 0.92 < x \leq 1.4 \\ -0.6 \sin(4.61x - 0.2), & \text{se } 1.4 < x \leq 2.02 \\ -0.17 \sin(3x + 2), & \text{se } 2.02 < x \leq 2.21 \\ 0.55 \sin(4x + 3.5), & \text{se } 2.21 < x \leq 3.04 \\ -0.35 \sin(4.2x + 6.1), & \text{se } 3.04 < x \leq 3.66 \\ -0.18 \sin(5.41x + 0.6), & \text{se } 3.66 < x \leq 3.95 \end{cases}$$

Como resultado final, a função f_3 ao ser inserida no *GeoGebra* gera o gráfico da Figura 66.

Figura 66– Gráfico final nota Dó 155 Hz.

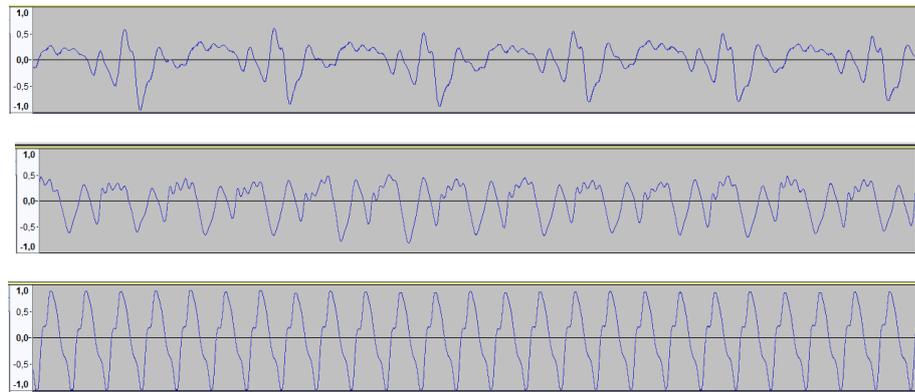


Fonte: Da autora (2019).

Neste caso específico, da nota Dó tocada em diferentes oitavas, constatou-se que quanto mais grave o som, mais complexo ele será, ou seja, mais funções seno serão necessárias para compor seu gráfico de ondas. Para as notas Dó tocadas no saxofone alto sabe-se que a afirmação é verdadeira. A seguir, podem ser observados os gráficos de outras notas e algumas de suas oitavas tocadas por outros instrumentos musicais.

A Figura 67 apresenta três gráficos de ondas distintos, são os gráficos de ondas de três notas Dó tocadas no saxofone tenor. O primeiro gráfico é gerado pela nota Dó cuja frequência é aproximadamente 110 Hz, o segundo gráfico é a nota Dó uma oitava acima da anterior, que tem frequência de 220 Hz, e o terceiro gráfico se refere a nota Dó uma oitava acima da anterior, tendo frequência de 330 Hz.

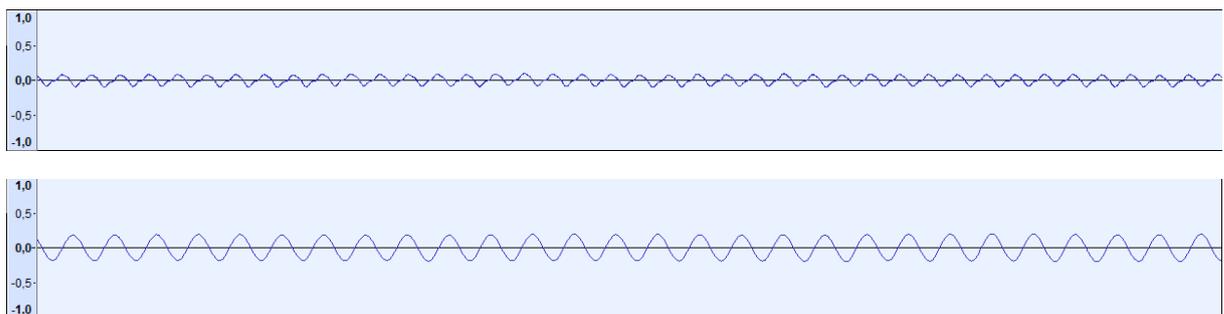
Figura 67 – Gráficos de ondas gerados pelas oitavas da nota Dó tocadas em um saxofone tenor.



Fonte: Da autora (2019).

Novamente pode-se observar que a medida que a nota fica mais aguda, seu gráfico de ondas é composto por uma quantidade menor de senóides. Já a Figura 68 mostra os gráficos de ondas obtidos ao tocar a nota Dó e sua respectiva oitava em uma flauta doce barroca. Esse instrumento, frequentemente utilizado em aulas de música para iniciantes, tem como característica obter sons mais agudos. A nota Dó mais grave possui frequência de aproximadamente 524 Hz, conseqüentemente sua oitava possui frequência de aproximadamente 1048 Hz.

Figura 68 – Gráficos de ondas gerados pelas oitavas da nota Dó tocadas em uma flauta doce.



Fonte: Da autora (2019).

Como a flauta doce barroca é naturalmente mais aguda que os demais instrumentos considerados, é possível observar que o primeiro gráfico não é formado por uma grande quantidade de senóides, e o segundo se aproxima ainda mais de uma função seno simples. Outra característica que pode ser ressaltada é com relação à amplitude, que caracteriza um som mais forte ou mais fraco. Ao ouvir uma flauta e um saxofone, não é difícil perceber qual

deles possui o som mais forte. Essa característica é verificada por meio dos gráficos, pois as amplitudes das notas do saxofone possuem valores maiores que as amplitudes da flauta doce.

A partir das conclusões obtidas nas análises dos gráficos, nas funções encontradas para cada um deles e na comparação entre oitavas, o próximo passo é verificar de modo análogo as funções que geram outros gráficos de ondas e procurar por relações entre tais funções. Tem-se as funções f_1 , f_2 e f_3 , que foram resultantes das oitavas da nota Dó tocada no Saxofone Alto. Agora considerando as seguintes notas representadas no pentagrama abaixo.

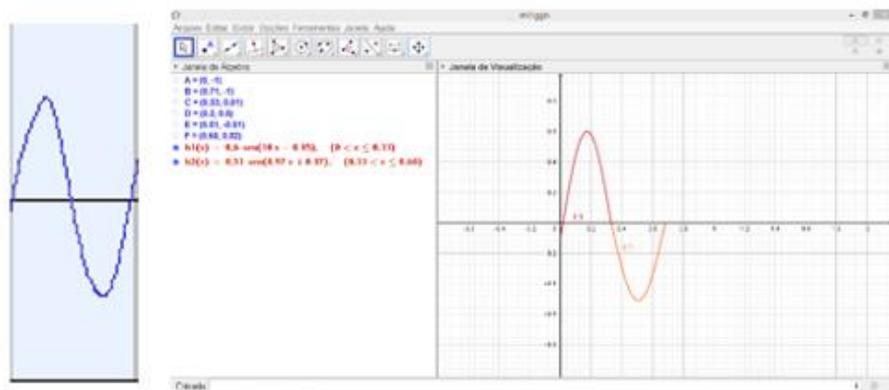
Figura 69 – Escala natural começando pela nota Mi até sua oitava.



Fonte: Da autora (2019).

Essas notas são Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, que possuem frequências aproximadas de 384 Hz, 415 Hz, 472 Hz, 524 Hz, 581 Hz, 620 Hz, 714 Hz e 772 Hz, respectivamente. A seguir, estão os gráficos de ondas de cada uma dessas notas no *Audacity*, apenas com um ciclo selecionado. E de forma análoga são encontradas as funções dos gráficos no *GeoGebra*, o resultado final também está apresentado a seguir. Por fim, após cada gráfico está sua respectiva função.

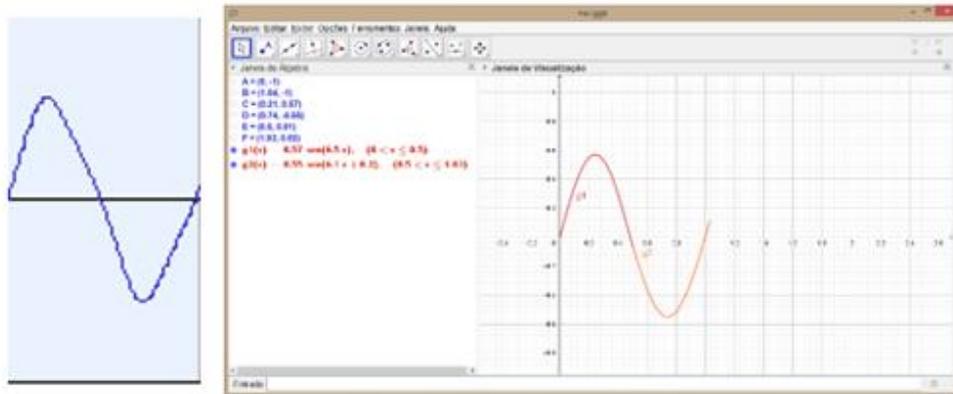
Figura 70 – Gráficos e função referentes a nota Mi.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_1(x) = \begin{cases} 0.6 \sin(10x - 0.15), & \text{se } 0 < x \leq 0.33 \\ 0.51 \sin(8.97x + 0.17), & \text{se } 0.33 < x \leq 0.68 \end{cases}$$

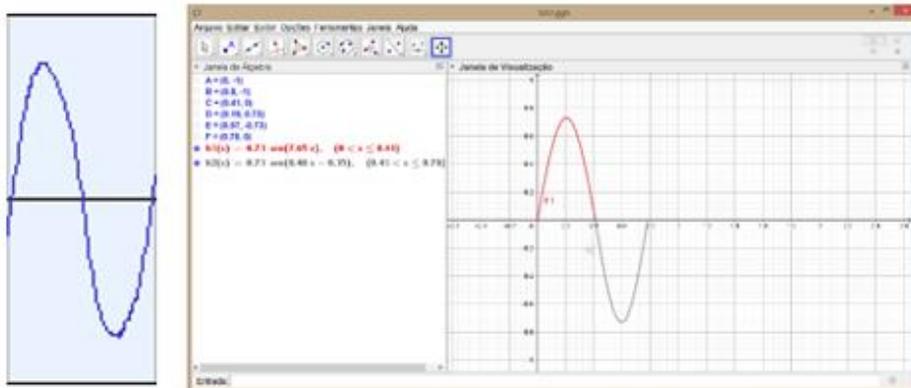
Figura 71 – Gráficos e função referentes a nota Fá.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_2(x) = \begin{cases} 0.57 \sin(6.5x) & \text{se } 0 < x \leq 0.5 \\ 0.55 \sin(6.1x + 0.2) & \text{se } 0.5 < x \leq 1.03 \end{cases}$$

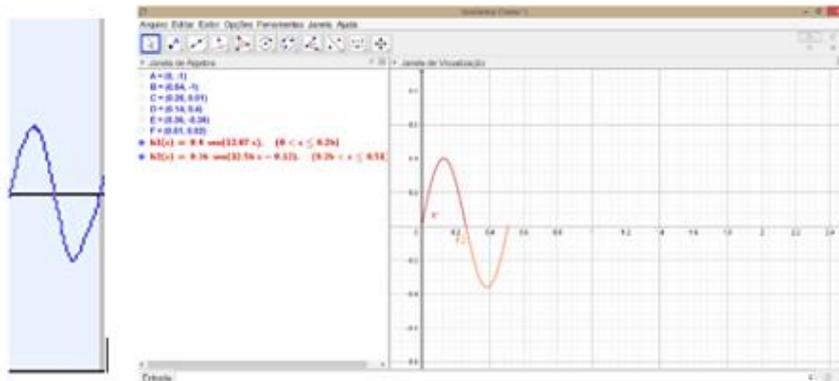
Figura 72 – Gráficos e função referentes a nota Sol.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_3(x) = \begin{cases} 0.73 \sin(7.65x), & \text{se } 0 < x \leq 0.41 \\ 0.73 \sin(8.48x - 0.35), & \text{se } 0.41 < x \leq 0.78 \end{cases}$$

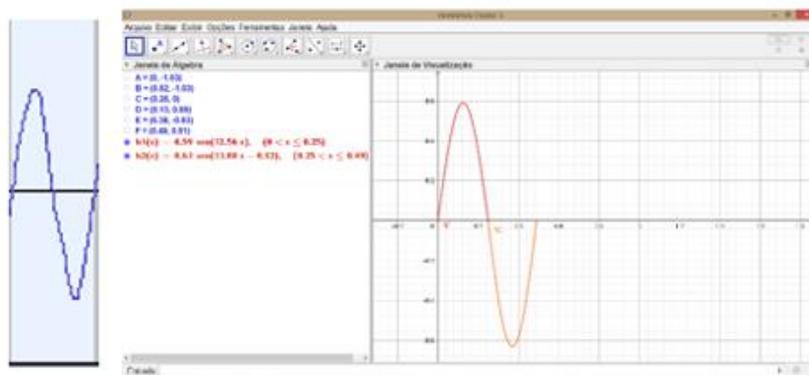
Figura 73 – Gráficos e função referentes a nota Lá.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_4(x) = \begin{cases} 0.4 \sin(12.07x), & \text{se } 0 < x \leq 0.26 \\ 0.36 \sin(12.56x - 0.12), & \text{se } 0.26 < x \leq 0.51 \end{cases}$$

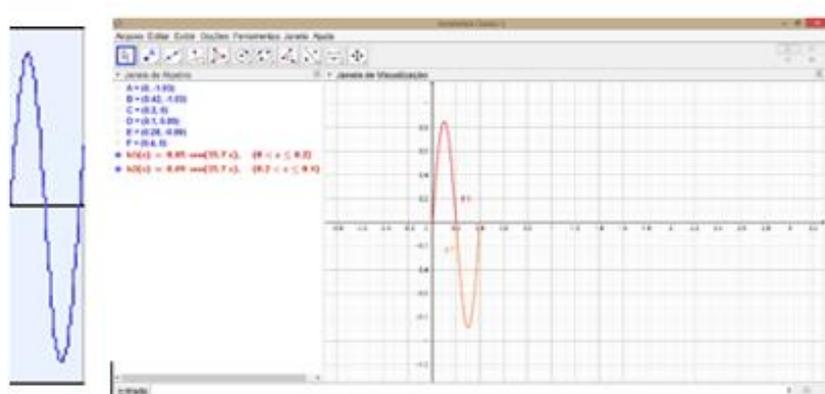
Figura 74 – Gráficos e função referentes a nota Si.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_5(x) = \begin{cases} 0.59 \sin(12.56x), & \text{se } 0 < x \leq 0.25 \\ 0.63 \sin(13.08x - 0.12), & \text{se } 0.25 < x \leq 0.49 \end{cases}$$

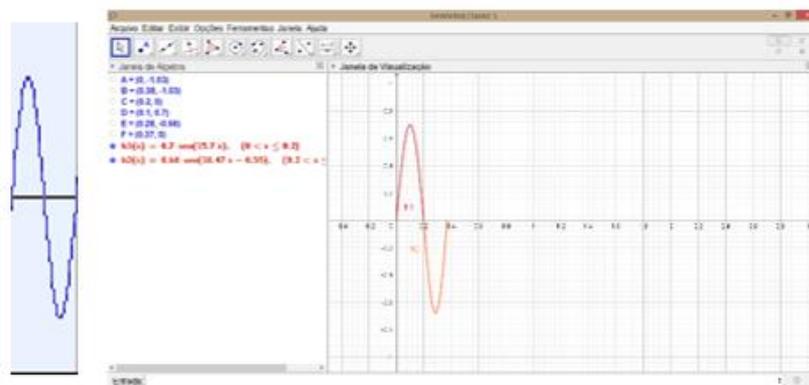
Figura 75 – Gráficos e função referentes a nota Dó.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_6(x) = \begin{cases} 0.85 \sin(15.7x), & \text{se } 0 < x \leq 0.2 \\ 0.89 \sin(15.7x), & \text{se } 0.2 < x \leq 0.4 \end{cases}$$

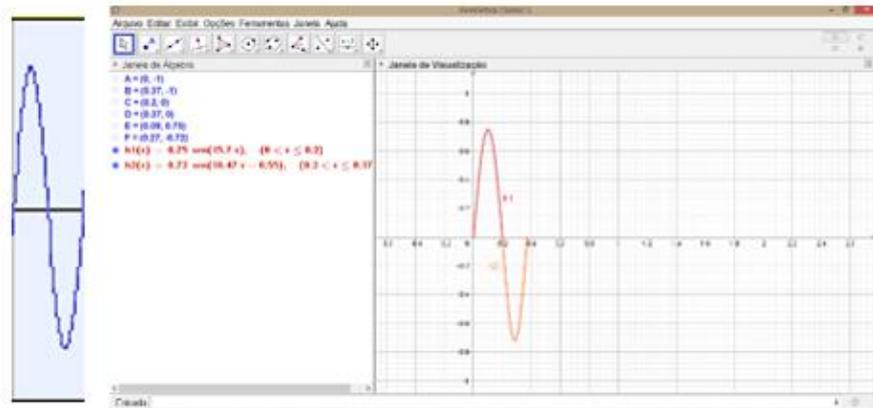
Figura 76 – Gráficos e função referentes a nota Ré.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_7(x) = \begin{cases} 0.7 \sin(15.7x), & \text{se } 0 < x \leq 0.2 \\ 0.68 \sin(18.47x - 0.55), & \text{se } 0.2 < x \leq 0.37 \end{cases}$$

Figura 77 – Gráficos e função referentes a nota Mi uma oitava acima.



Fonte: Da autora (2019).

$$g_8(x) = \begin{cases} 0.75 \sin(15.7x), & \text{se } 0 < x \leq 0.2 \\ 0.72 \sin(18.47x - 0.55), & \text{se } 0.2 < x \leq 0.37 \end{cases}$$

Com os gráficos e as funções de cada nota da escala, é possível observar algumas relações. As notas mais graves possuem um intervalo maior do que as notas mais agudas, o que é esperado, visto que a frequência, número de ciclos em determinado período de tempo, é maior em notas mais agudas. Já o valor do parâmetro p aumenta a medida em que a nota analisada fica mais aguda, graficamente isso significa que o período da onda passa a ser menor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim deste trabalho, espera-se ter alcançado a compreensão de que não apenas há relações matemáticas na música, como também que a matemática foi fundamental para que a música pudesse ser desenvolvida. Essa percepção só é possível quando se volta o olhar para a história da parceria entre as duas áreas. Não é necessário que seja músico ou matemático para se aventurar nesse processo, basta ter curiosidade de entender um pouco mais como conhecimentos aparentemente distantes estão ligados.

Para professores e futuros professores de matemática, um trabalho como este pode apresentar novos caminhos para trabalhar conteúdos matemáticos de uma forma diferente da tradicional, afinal usar conteúdos matemáticos da Educação Básica foi uma preocupação no desenvolvimento dos modelos. É esperado que ao levar uma proposta como essa para a sala de aula, surjam novas ideias de possíveis modelos matemáticos. Particularmente, esse é um desejo que tenho e creio que seja uma experiência ainda mais enriquecedora do que trabalhar sozinha na construção de modelos.

O processo de matematização foi realizado com meios limitados, por exemplo o local de gravação do som não foi livre de ruídos externos, não foram utilizados equipamentos apropriados para a gravação. Essas limitações não impediram que os modelos matemáticos fossem alcançados, mas é importante ressaltar que é possível obter modelos com melhores ajustes contando com melhores equipamentos.

Sem dúvidas, o que pode ser considerado mais importante neste trabalho, considerando as aulas de matemática, é que os estudantes podem fazer com que surja a necessidade de novos conteúdos matemáticos. No primeiro modelo referente às escalas musicais, por exemplo, a Progressão Geométrica foi o meio utilizado para representar uma forma geral de encontrar as frequências de uma escala temperada. Para encontrar qual a PG, é preciso entender todos os elementos que compõem uma sequência desse tipo.

Sobre a construção e o funcionamento dos instrumentos musicais de sopro, foi desenvolvido um modelo que relaciona o comprimento do tubo da flauta doce e a frequência das notas. Além disso foram deixados alguns caminhos para seguir, utilizando outros instrumentos de sopro, como o saxofone. Provavelmente seja necessário um conhecimento matemático e físico mais avançado para desenvolver modelos com instrumentos mais sofisticados que a flauta doce, visto que a acústica musical exerce grande influência na construção desses instrumentos.

Por fim, o estudo sobre as ondas sonoras proporciona um contato com a função seno, em que se pode trabalhar com todas as variáveis dessa função e entender o comportamento de seu gráfico. Vale ressaltar que poderiam ser utilizadas outros tipos de funções que se aproximariam melhor da curva da onda, como funções quadráticas, porém esse uso contraria o fato de que qualquer onda sonora é formada por funções seno. Como a intenção da modelagem é descrever matematicamente uma situação real, o uso de outras funções não seria satisfatório.

7 REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, S. A evolução histórica da flauta até Boehm. 1999. Disponível em: < https://musicaeadoracao.com.br/recursos/arquivos/tecnicos/instrumentos/evolucao_historica_f_lauta.pdf>. Acesso em: 11. nov. 2019.
- BARNABÉ, F. M. **A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática.** 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos.** Campinas: Edição do autor, 2012.
- BENNET, R. **Instrumentos da orquestra.** 2. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1985.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem e matemática: implicações no ensino e na aprendizagem de matemática.** 2. ed. Blumenau: Edfurb, 2004.
- _____. **Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem de matemática.** – Blumenau: Ed da Furb, 1999.
- BROMBERG, C. Do experimento com Instrumentos Musicais em Tratados do século XVI. In: 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia 2014. Belo Horizonte. Belo Horizonte: 2014, p. 1-10. Disponível em: < https://www.14snhct.sbhct.org.br/conteudo/view?ID_CONTEUDO=800>. Acesso em: 17 out. 2019.
- CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S.; MEYER, J. F. C. A. **Modelagem da matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- HENRIQUE, L. L. **Instrumentos musicais.** 4. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2004.
- HENRIQUE, L. L. **Acústica musical.** 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- HUMMELGEN, I. A. O clarinete-uma introdução à análise física do instrumento. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 13, n. 2, p. 139-153, 1996.
- MED, B. **Teoria da Música.** 4. ed., rev. e aum. Brasília: Musimed Edições Musicais, 1996.
- SÁ, C. No princípio eram ossinhos de rena: para se compreender o saxofone no universo dos sopros. **Revista científica FAP.** Curitiba, v.2. p.11-25, 2007