



**SAMUEL LOUZADA SIMÕES**

**APLICAÇÃO DE MODELO DE FISSURAÇÃO PARA A  
SIMULAÇÃO DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO COM  
INTERAÇÃO PARCIAL**

**LAVRAS – MG**

**2019**



**SAMUEL LOUZADA SIMÕES**

**APLICAÇÃO DE MODELO DE FISSURAÇÃO PARA A SIMULAÇÃO DE VIGAS MISTAS  
AÇO-CONCRETO COM INTERAÇÃO PARCIAL**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2019**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos  
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Simões, Samuel Louzada

Aplicação de modelo de fissuração para a simulação de vigas mistas aço-concreto com interação parcial / Samuel Louzada Simões. 1<sup>a</sup> ed. rev., atual. e ampl. – Lavras : UFLA, 2019.

46 p. : il.

Monografia(Graduação)–Universidade Federal de Lavras, 2019.

Orientador: Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes.

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-808.066

**SAMUEL LOUZADA SIMÕES**

**APLICAÇÃO DE MODELO DE FISSURAÇÃO PARA A SIMULAÇÃO DE VIGAS MISTAS  
AÇO-CONCRETO COM INTERAÇÃO PARCIAL**  
APPLICATION OF CRACKING MODEL FOR SIMULATION OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE  
BEAMS WITH PARTIAL SHEAR INTERACTION

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Civil, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADO em 28 de Outubro de 2019.

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes UFLA  
Prof. D.Sc. Rafael Santos de Moraes UFLA  
Prof. M.Sc. Luís Eduardo Silveira Dias UNILAVRAS

Prof. D.Sc. Ígor José Mendes Lemes  
Orientador

**LAVRAS – MG**  
**2019**



*A Deus, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos.*





## **AGRADECIMENTOS**

A Deus que me guiou e protegeu durante minha jornada.

À minha família que sempre me apoiou e nunca me deixou desistir dos meus sonhos.

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Engenharia por toda estrutura oferecida.

Ao professor Ígor José Mendes Lemes, pela orientação, paciência e amizade.

Aos meus colegas, que com todo companheirismo me fizeram ser uma pessoa melhor.



*Sábio é aquele que conhece os limites da própria ignorância.*  
(Sócrates)



## RESUMO

O presente trabalho se refere ao estudo do processo da fissuração, da interação parcial e da plastificação em vigas mistas aço-concreto com interação parcial. Modelos representativos da fissuração com alto grau de precisão vêm sendo propostos. Aqui, visa-se a implementação do modelo de Patel na análise numérica via Método dos Elementos Finitos (MEF) para simular o comportamento da tipologia estrutural de interesse. As implementações concentraram-se na modificação das propriedades geométricas das seções transversais presentes nas estruturas, em especial no momento de inércia das seções. Assim, por meio de equações previamente definidas para essa propriedade geométrica, os efeitos da fissuração e da interação parcial são introduzidos ao modelo numérico. A formulação de elemento se baseia no acoplamento de uma abordagem corrotacional com o método da rótula plástica refinado (MRPR). No MRPR, tem-se a utilização de pseudo-molas para a simulação da degradação da rigidez da seção. Assim, o estudo das fases não fissurada, fissurada, elástica e inelástica devem ser realizados dentro do diagrama de interação força normal-momento fletor. A validação das implementações foi realizada por meio de comparações entre dados numéricos e experimentais presentes na literatura. Nos exemplos testados, verificou-se que a formulação numérica proposta foi satisfatória tanto para vigas simplesmente apoiadas quanto para vigas mistas contínuas. A capacidade resistente final de todos os corpos de provas convergem para os valores finais experimentais, bem como possuindo valores de rigidez inicial.

**Palavras-chave:** Fissuração. Interação parcial. Vigas mistas aço-concreto.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Tipos de interação em vigas mistas de aço e concreto . . . . .	24
Figura 3.1 – Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados . . . . .	26
Figura 3.2 – Deslocamentos no sistema global de coordenadas . . . . .	28
Figura 3.3 – Elemento finito híbrido para simulação da plasticidade com pseudo-molas . . . . .	30
Figura 3.4 – Elemento finito deformado com molas fictícias . . . . .	31
Figura 3.5 – Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas . . . . .	34
Figura 4.1 – Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial . . . . .	37
Figura 4.2 – Trajetória de equilíbrio - viga mista simplesmente apoiada com interação parcial . . . . .	38
Figura 4.3 – Vigas mistas contínuas com interação parcial . . . . .	39
Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio para as vigas com interação parcial . . . . .	42





## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Parâmetros das Equações 2.2 e 2.3 . . . . .	23
Tabela 4.1 – Dados dos materiais para a viga mista com interação parcial (em kN, cm) . . . . .	38
Tabela 4.2 – Dados geométricos e dos materiais das vigas VMIP . . . . .	40



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	19
1.1	Considerações Gerais	19
1.2	Motivação	19
1.3	Objetivo	20
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	21
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	25
3.1	Considerações Iniciais	25
3.2	CS-ASA - <i>Software de Cálculo Estrutural</i>	25
3.3	Matriz de Rigidez	27
3.4	Matriz de Rigidez no Referencial Corrotacional	30
3.5	Elementos de Mola Fictícios	30
3.6	Curvas de Interação para os Limites Fissurado, Elástico e Plástico	34
3.7	Transformação de Sistemas Corrotacional-Global	35
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	37
4.1	Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial	37
4.2	Vigas mistas contínuas com interação parcial	39
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	43
5.1	Introdução	43
5.2	Conclusões	43
5.3	Sugestões Para Trabalhos Futuros	44
	REFERÊNCIAS	45



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Gerais

Dentro da engenharia civil sempre existiu a necessidade de se aproveitar o máximo que um material tem a oferecer, ao mesmo tempo em que é alcançado um grau satisfatório de economia. As estruturas mistas de aço-concreto são utilizadas como forma de suprir essa necessidade.

Pelo fato do coeficiente de dilatação do aço ser próximo ao do concreto, os dois materiais interagem de forma satisfatória. Além disso, o fato do aço possuir alta resistência a tração, leveza e esbeltez, bem como o concreto possuir uma elevada resistência à compressão e uma certa robustez faz com que edifícios altos possam ser erguidos com rapidez e ainda assim possuir altas capacidades de carga, gerando assim um fator atrativo para o mercado financeiro.

Já a simulação computacional estrutural é uma opção para entender o comportamento de uma estrutura de forma rápida e eficiente, sem a necessidade de realizar diversos ensaios, os quais estão suscetíveis a erros humanos, ambientais e outros fatores que comprometem o resultado final. As simulações são cada vez mais utilizadas e divulgadas tanto no meio comercial quanto no meio acadêmico.

## 1.2 Motivação

No contexto atual da engenharia, metodologias computacionais são aplicadas com o objetivo de proporcionar maior confiabilidade aos projetos. Isso se deve ao fato do extenso e cansativo processo de cálculo inerente ao projeto de estruturas. Nesse âmbito, processos de cálculo com grande complexidade podem ser resolvidos com alta precisão na resposta. Assim, procedimentos numéricos ganham destaque dentro do ambiente acadêmico/profissional, principalmente no que diz respeito à eliminação das simplificações normativas.

Um dos ramos da pesquisa da engenharia de estruturas se concentra na redução do tempo de processamento computacional dos programas de simulação estrutural. Como solução, processos de cálculo com simplificações pontuais ganham espaço nas linhas de pesquisa, uma vez que o tempo de processamento apresenta redução considerável, sem perdas significativas do grau de precisão da análise.

Os métodos de plasticidade concentrada com molas rotacionais fictícias colocadas nas extremidades dos elementos (abordagem a ser utilizada no trabalho), foram concebidos para a aplicação em elementos de aço. Assim, o ideal é que o mesmo seja aplicado a materiais com comportamento elasto-plástico perfeito.

Processos explícitos, por meio de equações pré-determinadas devem ser inseridos para a eliminação das limitações. Por exemplo, para a simulação da fissuração de peças com concreto na sua composição e da interação parcial em vigas mistas.

### 1.3 Objetivo

Promover a criação de uma base computacional simplificada, mas com boa precisão de resposta, utilizando formulações matemáticas condizentes com o problema estudado, e com aplicação prática no campo da engenharia de estruturas (estruturas mistas aço-concreto). O modelo de fissuração de Patel et al. (2015) será aplicado a formulação presente no *software* CS-ASA (SILVA, 2009), para a análise de vigas mistas aço-concreto. Até os dias atuais, apenas Lemes et al. (2018) abordaram tal modelo no contexto do desenvolvimento de formulações numéricas para simulação estrutural, porém os autores concentraram suas análises exclusivamente em elementos de concreto armado. Aqui, visa-se expandir o horizonte de aplicação do modelo para a simulação de vigas mistas aço-concreto, abordando o processo de fissuração nas regiões próximas às ligações viga-pilar. No presente contexto, diversas fontes de efeitos não lineares (fissuração, plasticidade e interação parcial) inerentes à tipologia estrutural abordada serão considerados.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

De forma isolada, dentre os materiais mais usados na construção civil, destacam-se o concreto e o aço (LEMES, 2015). Tais materiais apresentam boas propriedades mecânicas, físicas, são de fácil produção, dentre outras características.

A associação do aço e do concreto visa, fundamentalmente, o melhor aproveitamento físico e mecânico dos materiais (DENAVID, 2012). Estruturas que são formadas por meio da união desses dois materiais recebem o nome de Estruturas Mistas de Aço e Concreto. Segundo Lemes (2018), essas estruturas apresentam melhorias em diversas áreas, tais como a capacidade resistente, rigidez, proteção dos elementos metálicos (incêndio e corrosão), custo benefício, ductilidade, dentre outros.

Para que ocorra interação entre os materiais componentes da seção transversal é necessário que se faça a união entre eles. Caldas (2004) apontou que a interação entre o aço e concreto pode ocorrer por meios mecânicos (conectores de cisalhamento, mossas e ressaltos), por simples aderência e repartição de cargas ou por atrito.

Os chamados métodos de plasticidade concentrada são abordados em diversos trabalhos (LIEW; CHEN; SHANMUGAM, 2001; IU; BRADFORD; CHEN, 2009; LEMES, 2015; IU, 2016; LEMES, 2018), justamente pela eficiência, aliando precisão e baixo tempo de execução. Liew, Chen e Shanmugam (2001), Iu, Bradford e Chen (2009), Iu (2016) utilizaram considerações feitas pela norma americana para projetos de estruturas mistas (AISC LRFD, 2016) em suas simulações.

Recentemente, Patel et al. (2015) apresentaram uma abordagem alternativa baseada em redes neurais para estimar o momento efetivo de inércia por meio de uma equação explícita. Dos resultados fornecidos por Patel et al. (2015), é possível verificar que existe um melhor ajuste do comportamento das vigas de concreto armado às metodologias mais precisas baseadas no método dos elementos finitos, se comparado à proposta de Branson e Metz (1963), que hoje é abordada na norma brasileira (NBR 6118, 2014). Assim sendo, tornam-se necessários estudos que visam a aplicação desse novo modelo (PATEL et al., 2015) em simulações de estruturais reais, para assim proporcionar melhorias no processo de cálculo de estruturas mistas aço-concreto.

Para se projetar estruturas mistas de aço e concreto é necessário utilizar a NBR 8800 (2008) (Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios), mesmo sendo desenvolvida para estruturas de aço, tal norma fornece uma quantidade razoável de informações para estruturas de aço-concreto.

Porém, parte das orientações fornecidas são provenientes da NBR 6118 (2014) (a qual trata dos elementos de concreto).

Branson e Metz (1963) desenvolveram uma equação para o momento de inércia efetivo  $I_{ef}$ , a qual é aplicada nas estruturas de concreto armado. Tal equação é utilizada para considerar a degradação do momento de inércia da seção transversal de concreto a medida que o processo de fissuração aumenta. Tal expressão é dada por:

$$\begin{aligned} \text{se } M \leq M_{cr} : \quad I_{ef} &= I_c \\ \text{se } M > M_{cr} : \quad I_{ef} &= \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3\right] I_{cr} \quad I_{ef} \leq I_c \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $M$  é o momento fletor atuante na seção e  $M_{cr}$  o momento de início de fissuração,  $I_c$  é o momento de inércia da seção de concreto intacta, enquanto  $I_{cr}$  é o momento de inércia da seção fissurada avaliado na análise não linear da seção.

Patel et al. (2015) chegaram a uma nova expressão para o momento de inércia efetivo considerando a redução do momento de inércia devido ao efeito de fissuração por meio de um estudo usando redes neurais. Essa equação promove um resultado mais preciso para vigas de concreto armado em relação à proposta de Branson e Metz (1963), ao mesmo tempo que garante uma eficiência computacional ao ser usada, a mesma é descrita como:

$$I_{ef} = \frac{3I_c}{1 + e^{-\left[7.4688 + \sum_{k=1}^6 \left(\frac{a_k}{1 + e^{H_k}}\right)\right]}} \quad (2.2)$$

em que:

$$H_k = b_k \chi_t + c_k \frac{I_{cr}}{I_c} + d_k \frac{M_{cr}}{M} + e_k \quad (2.3)$$

sendo  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  e  $e_k$  descritos na Tabela 2.1 e  $\chi_t$  a taxa de armadura tracionada.

No ambiente acadêmico atual Lemes et al. (2018) usaram a Equação 2.2 para o desenvolvimento de simulações estruturais. Realizando um estudo de simulação computacional comparando o uso das Equações 2.1 e 2.2 em estruturas de concreto armado. Focado na área do concreto armado, os resultados obtidos foram considerados satisfatórios quando comparados com os valores calculados ao se utilizar a Equação 2.1.



Tabela 2.1 – Parâmetros das Equações 2.2 e 2.3

Parâmetro	$k$					
	1	2	3	4	5	6
$a$	8.7116	-0.3754	11.6985	-10.7167	0.6177	22.9397
$b$	-0.1978	4.3806	2.8322	3.0191	10.1889	-3.7310
$c$	1.2333	-22.0048	-4.1654	-4.3927	-15.7592	5.4520
$d$	0.0011	-0.1823	9.4775	9.7598	5.0682	-0.0189
$e$	-0.0386	6.2396	-6.7756	-7.1914	-3.2443	-2.9660

Satisfazendo assim a NBR 6118 (2014), garantido uma segurança ao engenheiro projetista ao mesmo tempo que acelera o processo computacional.

Já Lemes (2018) desenvolveu uma nova formulação numérica de forma generalizada para as estruturas de aço, concreto e mistas. Utilizando o *software* CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), o qual foi desenvolvido por Silva (2009). Os resultados finais foram confrontados com dados experimentais, gerando assim uma confirmação da precisão tanto da formulação proposta quanto do *software* em questão, visto que o mesmo foi utilizando em todo o processo.

Lemes (2018) define a interação parcial quando os materiais (aço e concreto) trabalham de forma conjunta, porém a conexão entre eles é deformável. Assim ocorre um deslizamento na interface, o que gera um comportamento não monolítico da estrutura. Já a interação total é a conexão ideal entre os elementos, na qual a deformação na seção transversal é de forma quase linear. A Figura 2.1 ilustra os casos de interação anteriormente relatados e também a questão onde não ocorre interação nenhuma entre os materiais.

A NBR 8800 (2008) define o grau de interação ( $\eta_i$ ) como:

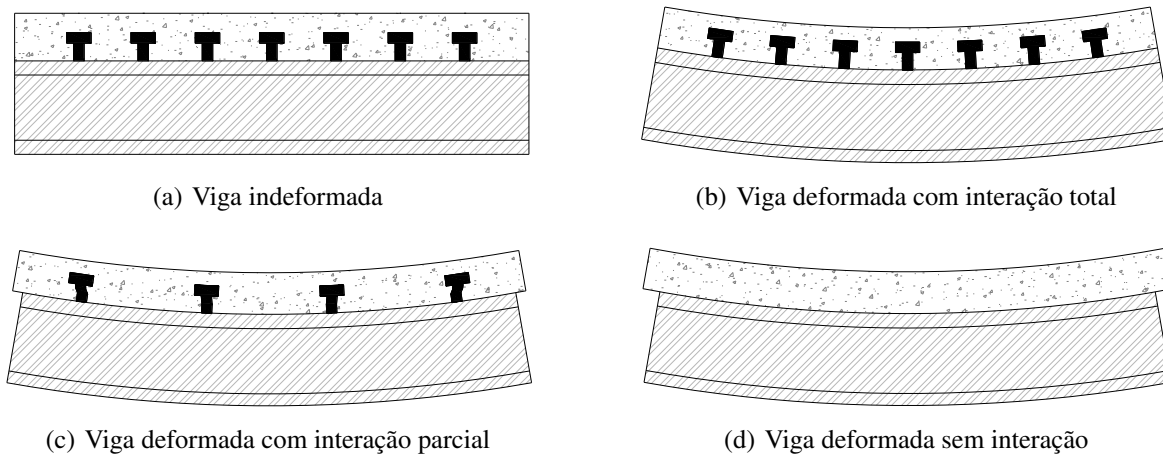
$$\eta_i = \frac{\Sigma H_{Rd}}{H_{Sd}} \quad (2.4)$$

em que  $\Sigma H_{Rd}$  é a força resistente dos elementos de conexão atuando em conjunto e  $H_{Sd}$  a força de cisalhamento solicitante de cálculo entre a laje de concreto e o componente de aço. Assim, a mesma define o momento de inércia efetivo por meio da Equação 2.5

$$I_{ef} = I_a + \sqrt{\eta_i} (I_{tr} - I_a) \quad (2.5)$$

em que  $I_a$  é o momento de inércia do perfil de aço isolado e  $I_{tr}$  o da seção mista homogeneizada considerando a equação de Patel et al. (2015) para o cálculo da parcela contribuinte do concreto.

Figura 2.1 – Tipos de interação em vigas mistas de aço e concreto



Fonte: (LEMES, 2018)

Dessa forma, o momento de inércia se torna o objeto de estudo desse trabalho. Altera-se então diretamente a rigidez à flexão dos elementos estruturais considerando a junção das equações de Patel et al. (2015) e da NBR 8800 (2008).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Considerações Iniciais

Para toda e qualquer implementação computacional é necessário que se utilizem conceitos, teorias, formulações, dentre outras alternativas que visem a melhor execução. Garantindo assim uma rotina simples, rápida e precisa.

Dessa forma, será explicado no decorrer desse trabalho algumas definições importantes para o desenvolvimento e alterações do *software* utilizado, visando simultaneamente elucidar os leitores de todos os passos que foram adotados para o desenvolvimento das análises que serão apresentadas nos próximos capítulos.

#### 3.2 CS-ASA - *Software de Cálculo Estrutural*

O programa escolhido para o desenvolvimento desse trabalho foi o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), visto que já existem trabalhos na mesma linha de pesquisa que o utilizam, desenvolvido por Silva (2009). Tendo como linguagem o *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003), é um sistema computacional estruturado em módulos, ou seja, a implementação de novas funcionalidades é feita de maneira simples, alterando só as regiões necessárias.

Inicialmente idealizado para calcular estruturas metálicas, com o tempo foi sendo modificado para atender diferentes materiais, como por exemplo o concreto armado. O mesmo realiza suas análises baseado no Método dos Elementos Finitos, com formulações avançadas no contexto estático e dinâmico das estruturas.

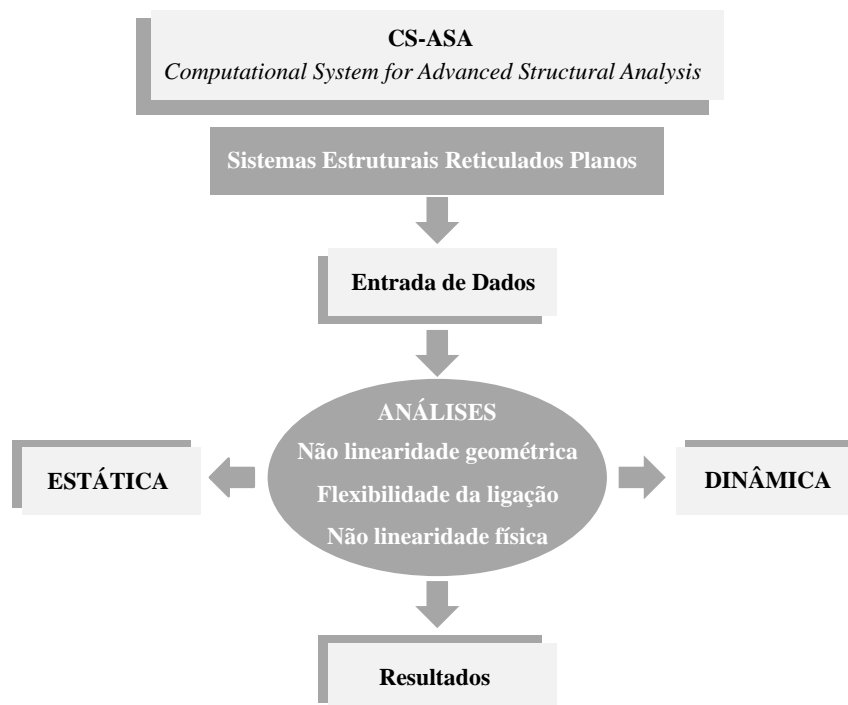
A primeira modificação para a viabilização de análises não lineares em estruturas com concreto na sua composição foi feita por Lemes (2015). No referido trabalho o autor introduziu condições necessárias para a simulação da degradação das rigidezes de elementos mistos aço-concreto desconsiderando a fissuração desse último. Além disso, as curvas de interação foram modificadas por uma formulação generalizada que avalia diferentes regimes de comportamento de quaisquer materiais em seções transversais de formas genéricas.

Todo o processo é feito através da leitura de dois arquivos de texto, onde o primeiro contém as informações referente à análise desejada, geometria da estrutura, condições de contorno, materiais, seções e carregamentos. Já o segundo arquivo fornece a formulação não linear a ser utilizada, como deve ser feito

o incremento de carga, o método de *Newton-Rapshon* a ser utilizado (padrão ou modificado) e o critério de parada. Sendo que a saída também é fornecida em arquivos de texto.

A Figura 3.1 exemplifica as funcionalidades do *software*. Sendo que a análise estática atualmente trabalha com estruturas de aço, concreto armado e mistas aço-concreto em temperatura ambiente e também em situação de incêndio.

Figura 3.1 – Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados



Fonte: (SILVA, 2009)

O presente trabalho se enquadra dentro do contexto das análises estáticas considerando exclusivamente a não linearidade física. Ou seja, a plastificação, a fissuração e a degradação da rigidez dos conectores de cisalhamento serão consideradas. Nesse sentido, haverá uma ampliação da gama de análises já presente no programa, considerando agora a contribuição da NBR 8800 (2008) para a avaliação da conexão por cisalhamento deformável. Assim, as implementações concentram-se exclusivamente na matriz de rigidez da estrutura e de seus elementos componentes.

### 3.3 Matriz de Rigidez

Uma mola com comportamento linear elástico é descrito como uma relação proporcional entre a força aplicada,  $F$ , e o deslocamento na direção da respectiva força,  $\Delta u$ . A Equação 3.1 descreve essa situação.

$$F = k\Delta u \quad (3.1)$$

em que  $k$  é a constante elástica da mola, ou como pode ser chamada: rigidez.

Podemos estender esse conceito de mola para um elemento finito qualquer, onde o deslocamento do mesmo será influenciado por sua respectiva constante de rigidez. Porém, no plano esse mesmo elemento estará sujeito a diferentes Graus de Liberdade (capacidade de se mover em difentes direções), portanto ações referentes ao esforço cortante, normal e momento fletor podem vir a surgir.

Assim, por se tratar de um problema com três graus de liberdade (problema plano) a constante de rigidez se transforma em uma matriz. Essa, por sua vez, pode ser obtida por deslocamentos unitários no sentido de cada grau de liberdade possível para um elemento estrutural inserido em um plano. Tal método consiste em restringir os graus de liberdade da estrutura e usar a equação da Linha Elástica para calcular os coeficientes em relação a força necessária para que ocorra um deslocamento unitário na peça, conforme descrito pela Equação 3.2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.2)$$

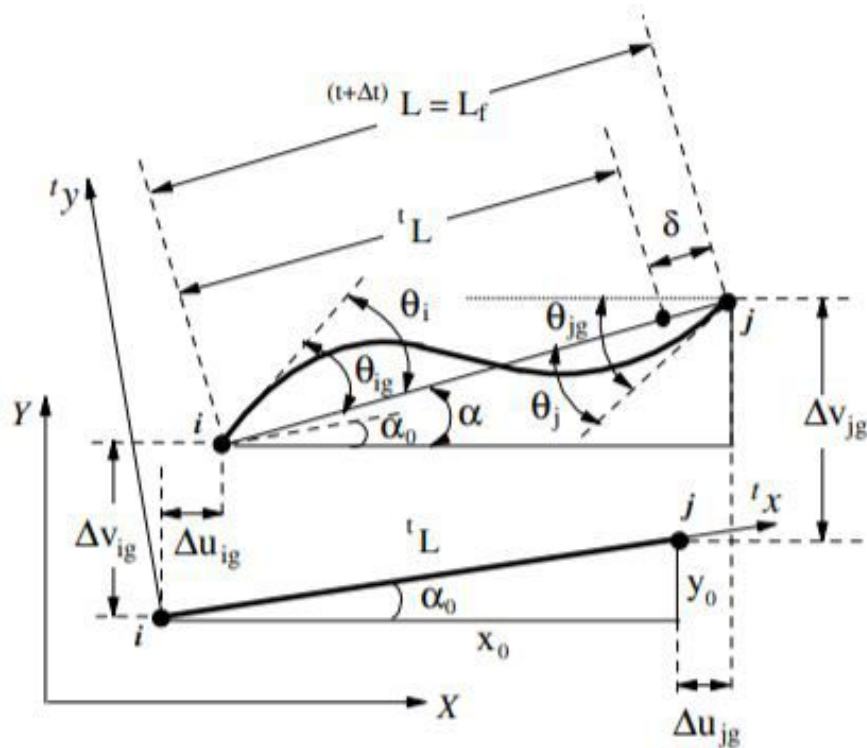
onde  $M$  é o momento fletor atuante no elemento estrutural,  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inércia do mesmo elemento,  $x$  o deslocamento horizontal ao longo do comprimento do elemento e  $y$  o deslocamento vertical gerado pelos esforços atuantes.

É escrita uma função para o Momento Fletor o qual varia com a posição das forças internas na peça, variando de 0 ao comprimento  $L$  da mesma. Com isso é possível integrar a Equação 3.2, onde a primeira integral nos fornece a rotação e a segunda o deslocamento vertical.

A análise de um determinado elemento muda conforme o referencial de coordenadas adotados, é definido que posicionar os eixos cartesianos no próprio elemento gera o sistema de coordenadas locais. Para desenvolver uma análise considerando diversos elementos com referenciais locais diferentes entre si, se faz necessário o uso de coordenadas globais, ou seja, coordenadas que são posicionadas no plano e atendem todos os elementos. Silva (2009) usa a Figura 3.2 para descrever ambos sistemas, onde  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  são respecti-

vamente, a translação horizontal, a translação vertical e a rotação. O subscrito *g* indica o sistema global de coordenadas e os *i* e *j* os nós do elemento.

Figura 3.2 – Deslocamentos no sistema global de coordenadas



Fonte: (SILVA, 2009)

Para cada caso analisado são determinado diferentes condições de contorno, as quais dependem das restrições impostas pelos apoios. Assim, é possível determinar a matriz de rigidez  $6 \times 6$ , e por fim definindo a forma matricial da constante de rigidez local, determinada pela Equação 3.3.

$$k_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $A$  e  $I$  são, respectivamente, a área e o momento de inércia da seção transversal homogeneizada e  $L$  o comprimento total do elemento.

Porém, é necessário considerar um sistema global de coordenadas, quando analisamos um conjunto de elementos ligados entre si, dessa forma se faz necessário o cálculo de um coeficiente de rigidez global para que todas as futuras operações sejam feitas de maneira correta.

Assim é definido uma matriz de rotação, a qual posiciona um elemento em relação a um plano de referência, comumente adotado como o plano cartesiano. A matriz  $R$  é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo do elemento com um plano na horizontal no sentido anti-horário.

A matriz de rigidez global é definida por:

$$k_g = R^T k_l R \quad (3.5)$$

Como as avaliações da rigidez axial e à flexão são feitas considerando as curvas de interação, discutida no item 3.6, pode-se notar que os termos referentes ao cortante estão excedentes na Equação 3.3. Assim, como já observado por outros pesquisadores (LEMES, 2015; SILVA, 2016), em análises não lineares esse grau de liberdade gera rigidez expúria afastando as análises numéricas dos resultados obtidos experimentalmente. Em função disso, no presente trabalho, optou-se por separar os graus de liberdade que realmente causam deformação no elemento para a simulação da plasticidade. Posteriormente à essa simulação, esses graus de liberdade são reintroduzidos no sistema. Essa abordagem é conhecida na literatura como sistema corrotacional (CRISFIELD, 1991).

### 3.4 Matriz de Rigidez no Referencial Corrotacional

Como descrito anteriormente, os graus de liberdade referentes ao esforço cortante são retirados da matriz de rigidez no sistema onde será realizada a análise plástica. Assim, a matriz de rigidez no sistema corrotacional,  $k_c$ , corrigida pela proposta de Ziemian e McGuire (2002) é definida como segue:

$$k_c = \begin{bmatrix} \frac{E_a A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_a (3I_{ef,i} + I_{ef,j})}{L} & \frac{E_a (I_{ef,i} + I_{ef,j})}{L} \\ 0 & \frac{E_a (I_{ef,i} + I_{ef,j})}{L} & \frac{E_a (I_{ef,i} + 3I_{ef,j})}{L} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

em que  $E_a$  é o módulo de elasticidade do aço,  $I_{ef,i}$  e  $I_{ef,j}$  são os momentos de inércia das seções transversais homogeneizadas obtidos conforme Equação 2.5 e  $L$  é o comprimento da peça como já apresentado anteriormente.

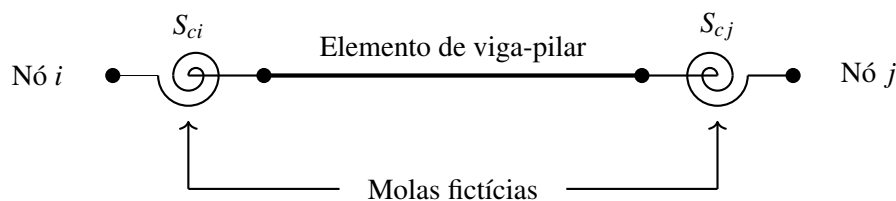
A matriz descrita na Equação 3.6 é função do momento de inércia efetivo, onde apenas a fissuração é considerada. No presente trabalho, optou-se pela formulação clássica do método da rótula plástica refinado (MRPR) onde molas fictícias são introduzidas no elemento finito com o intuito de captar a degradação da rigidez à flexão de forma localizada.

### 3.5 Elementos de Mola Fictícios

Para utilizar o Método da Rótula Plástica é necessário que ocorra a consideração da plasticidade concentrada em elementos com molas rotacionais fictícias em suas extremidades. Assim é garantido que a degradação das rigidezes axial e à flexão ocorra exclusivamente nos pontos nodais (LEMES, 2018).

A Figura 3.3 ilustra a situação de um elemento finito, onde em seus nós  $i$  e  $j$  se encontram molas fictícias com uma rigidez rotacional  $S_c$ , que descreve o comportamento não linear do material.

Figura 3.3 – Elemento finito híbrido para simulação da plasticidade com pseudo-molas

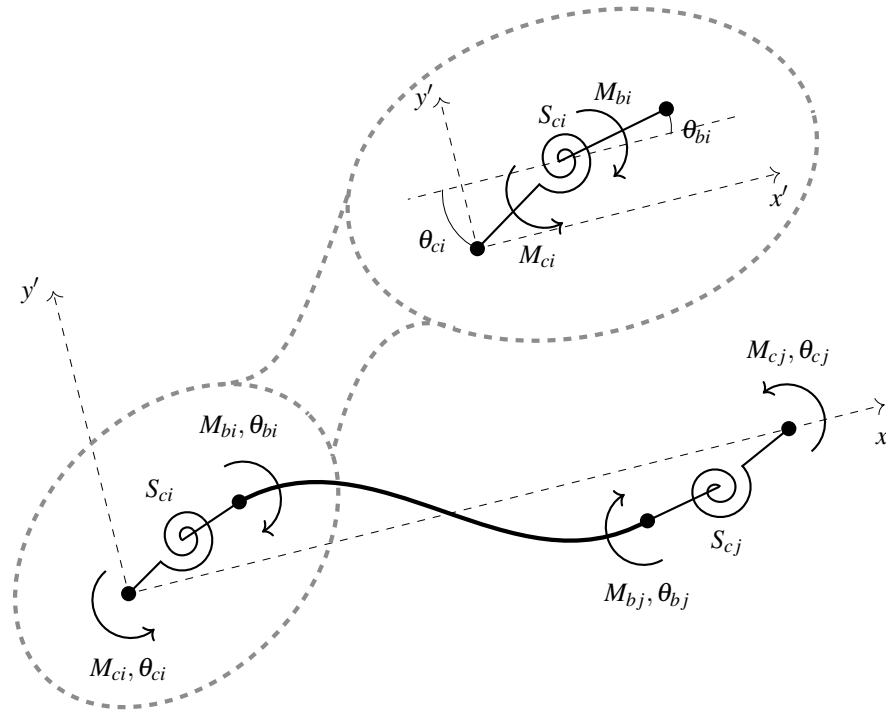


Fonte: (LEMES, 2018)



Chan e Chui (2000) define a rotação relativa,  $\phi_c$ , entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento,  $\theta_c$ , e daquele conectado ao elemento de viga-pilar,  $\theta_b$ , como ilustrado pela Figura 3.4. Assim, as rotações nas extremidades  $i$  e  $j$  são dadas por:

Figura 3.4 – Elemento finito deformado com molas fictícias



Fonte: (LEMES, 2018)

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{ci} &= \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\phi_{cj} &= \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}\end{aligned}\quad (3.7)$$

em que  $\Delta\phi_{ci}$  e  $\Delta\phi_{cj}$  são as rotações relativas incrementais.

Além disso, tem-se as relações constitutivas das molas nos pontos  $i$  e  $j$ :

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} &= S_{ci}\Delta\phi_{ci} \\ \Delta M_{cj} &= S_{cj}\Delta\phi_{cj}\end{aligned}\quad (3.8)$$

onde  $\Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_{cj}$  são os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Como os momentos atuantes nos pontos nodais precisa ser um sistema equilibrado, tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} &= 0 \\ \Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

Relacionando as Equações 3.8 e 3.9, define-se:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} &= S_{ci}(\Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi}) \\ \Delta M_{bi} &= -\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta\theta_{bi} - \Delta\theta_{ci}) \\ \Delta M_{cj} &= S_{cj}(\Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}) \\ \Delta M_{bj} &= -\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta\theta_{bj} - \Delta\theta_{cj})\end{aligned}\tag{3.10}$$

sendo  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  os momentos atuantes no elemento de viga-pilar (Figura 3.4).

Colocando a Equação 3.10 em forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{bi} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{cj} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{3.11}$$

sendo que as matrizes representam as matrizes de rigidez nas extremidades  $i$  e  $j$ .

A relação força-deslocamento para elementos de viga-pilar pode ser descrito por meio da Equação 3.12, considerando apenas o grau de liberdade referente as rotações nos nós.

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix}\tag{3.12}$$

em que os termos de rigidez,  $k_{m,n}$ , são os mesmos coeficientes correspondentes à matriz de rigidez convencional nas suas respectivas linhas e colunas, sendo que as ligações são consideradas perfeitamente rígidas.

Associando as Equações 3.11 e 3.12, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{22} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{32} & S_{cj} + k_{33} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix}\tag{3.13}$$

Se as cargas são aplicadas exclusivamente nos pontos nodais globais do elemento, logo tem-se  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  iguais a zero, levando ao rearranjo matricial das linhas 2 e 3, resultando a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & S_{cj} + k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

e, para as linhas 1 e 4 da Equação 3.13, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

É possível chegar na seguinte expressão ao isolar o vetor  $[\Delta \theta_{bi} \quad \Delta \theta_{bj}]^T$  da Equação 3.14 e substituindo na Equação 3.15:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} + \left( -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + k_{33} & -k_{23} \\ -k_{32} & S_{ci} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde  $\beta = (S_{ci} + k_{22})(S_{cj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$ . Desenvolvendo a expressão anterior chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + k_{33})}{\beta} & \frac{S_{ci}k_{23}S_{cj}}{\beta} \\ \frac{S_{cj}k_{32}S_{ci}}{\beta} & S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Por fim, tem-se que a expressão final para a relação força-deslocamento de um elemento finito híbrido, no sistema local e considerando todos os graus de liberdade é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & \\ & k_{12} & & & & \\ & & k_{13} & & & \\ & k_{21} & & S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + k_{33})}{\beta} & & \frac{S_{ci}k_{23}S_{cj}}{\beta} \\ & & & \frac{S_{cj}k_{32}S_{ci}}{\beta} & & S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + k_{22})}{\beta} \\ k_{31} & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

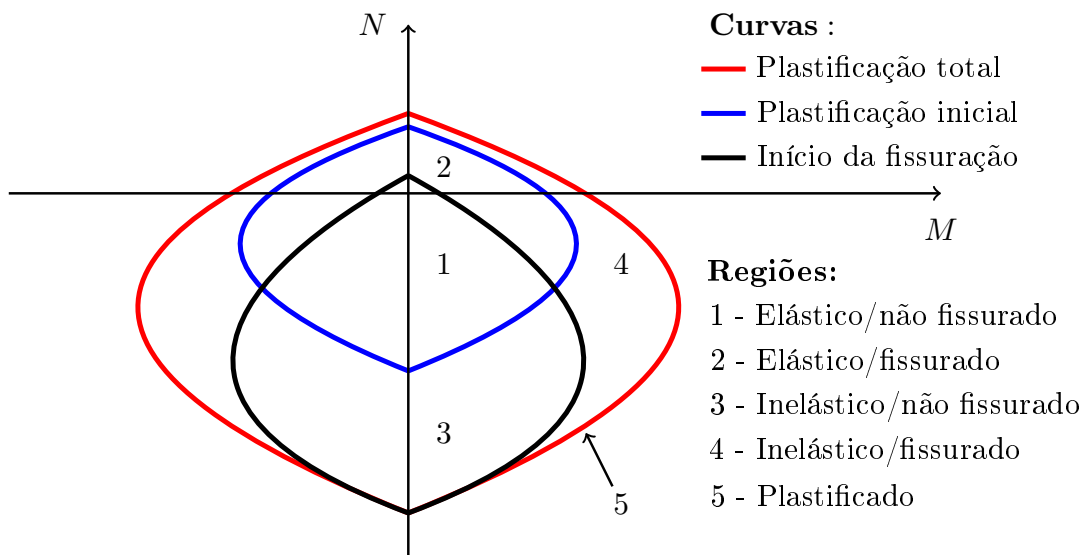
No presente trabalho, o momento de inércia efetivo da seção de concreto, utilizado nas constantes de rigidez  $k_{i,j}$ , será calculado conforme a formulação de Patel et al. (2015) através da Equação 2.2. Posteriormente os momentos de inércia do aço e do concreto, fissurado ou não, são homogeneizados, ou seja, transformando o concreto em aço para que ocorra a compatibilização de material.

### 3.6 Curvas de Interação para os Limites Fissurado, Elástico e Plástico

Para se usar o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) é necessário que a degradação da rigidez das molas fictícias sejam condizentes com o material do elemento estudado. A proposta original foi feita com o objetivo de descrever o comportamento de uma estrutura em aço com um comportamento elasto-plástico perfeito. Portanto, para que sejam utilizadas em estruturas mistas aço-concreto ou estruturas de concreto armado surge a necessidade de uma modificação no MRPR.

Para tal finalidade, Lemes (2018) apresentou uma metodologia generalizada para a obtenção das curvas de interação (Figura 3.5), as quais tendem a descrever o comportamento do material com base no esforço normal e momento fletor que o elemento está submetido. Três curvas são formadas: a curva de plastificação total - indicando o limite resistente; a curva mostrando a plastificação inicial - delimitando a região elástica e por fim a curva de início de fissuração - definindo o estado não fissurado da seção transversal.

Figura 3.5 – Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas



Fonte: (LEMES, 2018)

Conforme as curvas se interceptam é possível delimitar quatro regiões, as quais definem o regime em que o elemento se encontra (elástico ou plástico) e se está fissurado ou não. Qualquer situação que não se encontre nessas quatro regiões é dada que o elemento já está plastificado e fissurado.

Dessa forma, é possível obter o valor de  $S_c$  através das relações que se segue. Também é necessário saber os valores de momento fletor interno combinado com um esforço normal.

$$\begin{aligned} \text{se } M \leq M_{er} : \quad S_c &= 1 \times 10^{10} \\ \text{se } M_{er} \leq M \leq M_{pr} : \quad S_c &= \frac{E_a I_{ef}}{L} \left( \frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \\ \text{se } M_{pr} \leq M : \quad S_c &= 1 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $M_{er}$  é o momento de início de plastificação,  $M_{pr}$  é o momento de plastificação total (ambos reduzidos pela ação conjunta do esforço axial),  $L$  o comprimento do elemento,  $I_{ef}$  o momento de inércia efetivo da seção homogeneizada (já discutido) e  $E_a$  o módulo de elasticidade secante do aço.

### 3.7 Transformação de Sistemas Corrotacional-Global

Após a avaliação dos parâmetros degradados, inércia (fissuração) e molas (plastificação), o sistema de equações globais deve ser montado para enfim obter novos deslocamentos e seguir a construção das curvas carga  $\times$  deslocamento. Para que essa transformação seja feita, Lemes (2018) determina a matriz de transformação de sistemas corrotacional-global,  $T_{cg}$  é definida como segue:

$$T_{cg} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que  $s$  é o  $\text{sen}\alpha$  e  $c$  é o  $\text{cos}\alpha$ , sendo  $\alpha$  definido na Figura 3.2.

Assim a matriz de rigidez no sistema global é definida como:

$$K_g = T_{cg}^T k_c T_{cg} \quad (3.21)$$

Com essa matriz global de cada elemento, é possível conectá-los por meio de suas respectivas conectividades e obter o sistema de equações globais para a solução do sistema. O procedimento aqui utilizado é um processo incremental-iterativo, ou seja, a carga é aplicada à estrutura em passos. Em sequência, o

método de *Newton – Raphson* é aplicado para que o problema linear atinja a convergência em cada passo de carga. Esse processo é repetido inúmeras vezes para a construção das trajetórias de equilíbrio discutidas no próximo capítulo.

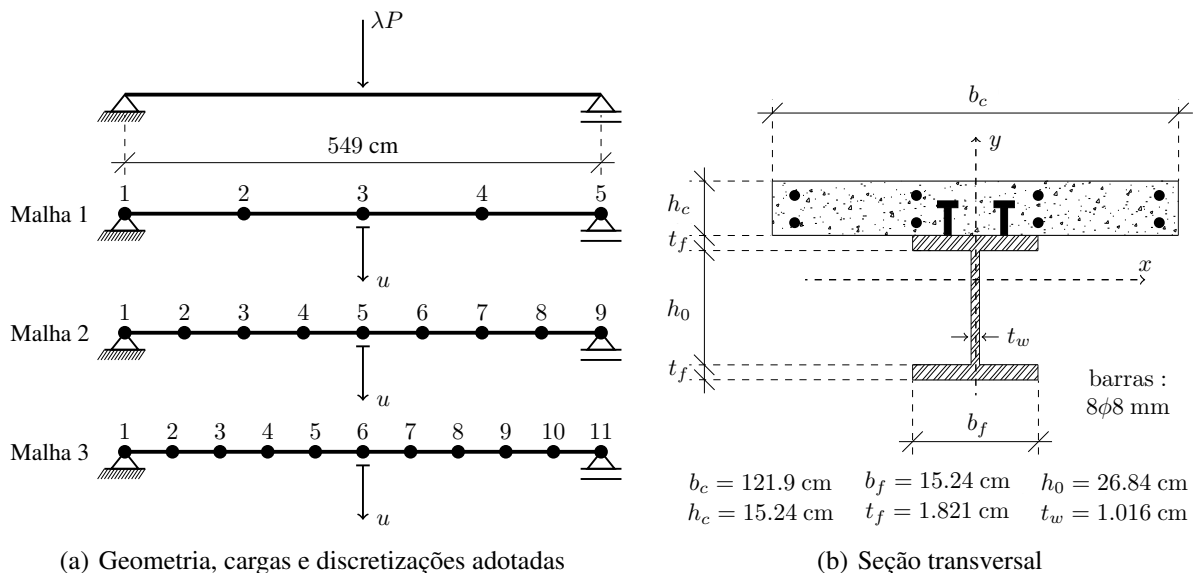
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial

Chapman e Balakrishnan (1964) realizaram ensaios experimentais utilizando vigas simplesmente apoiadas com interação parcial. Tais resultados foram utilizados por diferentes estudos com enfoque em formulações numéricas (EL-LOBODY; LAM, 2003; QUEIROZ; VELLASCO; NETHERCOT, 2007; CHI-OREAN; BURU, 2017). A viga experimental é representada na Figura 4.1, possuindo uma seção transversal da laje de concreto de  $15.24 \times 121.9$  cm, a qual é conectada em um perfil do tipo I através de 100 conectores de cisalhamento do tipo *stud*.

A viga mista também é discretizada em três malhas diferentes, onde o número de nós varia e cada nó apresenta uma mola fictícia. Devido ao fato das análises com degradações das rigidezes serem realizadas apenas nas molas, quanto a maior a quantidade de nós, mais preciso o *software* será e por consequência melhor será o resultado obtido.

Figura 4.1 – Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial



Fonte: (LEMES, 2018)

A mesma figura descreve o comprimento total da viga, ilustrando o carregamento no centro do vão e três malhas diferentes utilizadas na simulação, onde o que varia nelas são as quantidades de nós para a discretização no Método dos Elementos Finitos (MEF). A Tabela 4.1 descreve os dados dos materiais (laje de concreto, viga de aço e conectores).

Tabela 4.1 – Dados dos materiais para a viga mista com interação parcial (em kN, cm)

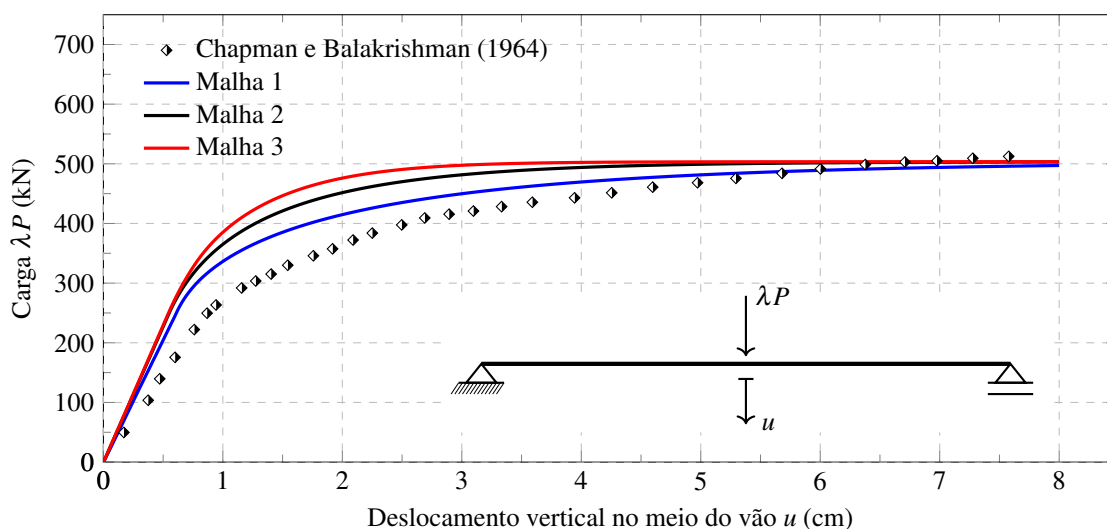
Material	Dado/Valor	Material	Dado/Valor		
Concreto	$f_c$	3.268	$f_y$	25.82	
	$\epsilon_{ci}$	-0.0022	$E_a$	20200	
	$\epsilon_{cu}$	-0.00395	Aço - perfil	$E_{a2}$	0
Conectores	$n_c$	100	$E_{a3}$	350	
	$n_{cl}$	2	$\epsilon_u$	0.0482	
	$e_s$	12.1	Aço - barra	$f_{pyd}$	32
	$H_{max}$	110	$E_s$	20500	

Fonte: Do autor (2019)

Devido as informações necessárias para o processamento do programa, é definido que o comportamento uniaxial do concreto é fornecido pela relação constitutiva parábola-retângulo sob compressão, e para a tração é utilizado o modelo de Vecchio e Collins (1986). Em relação ao perfil metálico, a formulação garantirá uma relação elastoplástica perfeita.

A Figura 4.2 apresenta a trajetória de equilíbrio (relação Carga x Deslocamento Vertical) das malhas demonstradas pela Figura 4.1(a) e dos dados experimentais de Chapman e Balakrishnan (1964) utilizando o momento de inércia efetivo fornecido por meio da equação de Patel et al. (2015).

Figura 4.2 – Trajetória de equilíbrio - viga mista simplesmente apoiada com interação parcial



Fonte: Do autor (2019)

Com uma rápida observação é possível notar que os dados fornecidos pela formulação numérica tendem a distanciar dos dados experimentais, logo tais resultados foram superestimados. Todavia, os mesmos



tendem a convergir conforme o deslocamento vertical aumenta, fornecendo um valor compatível com a capacidade resistente do corpo de prova.

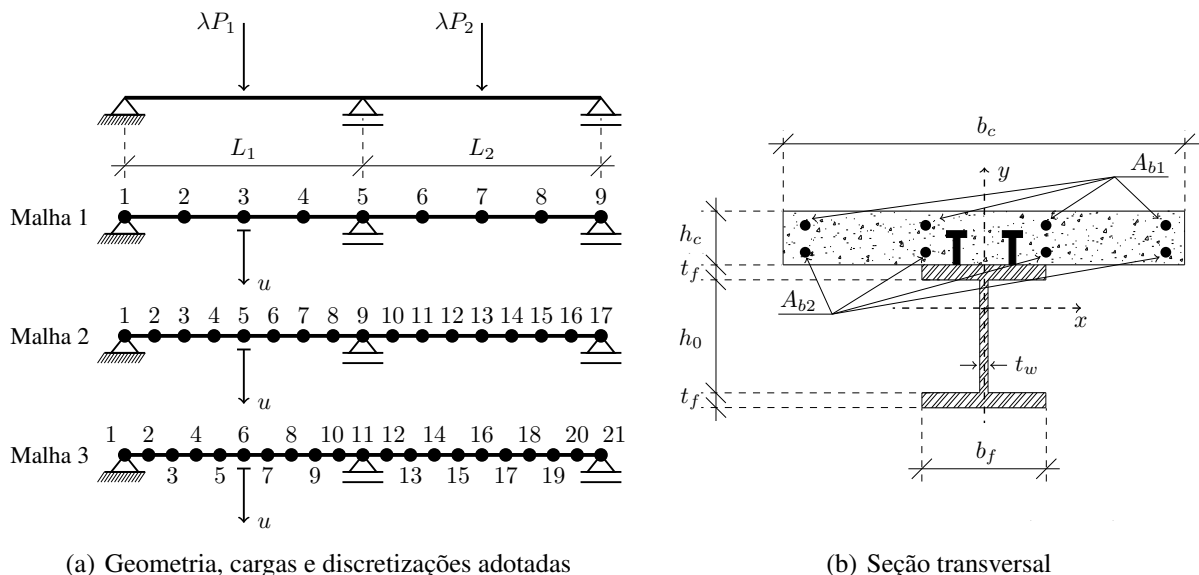
A malha 3, por ser a com maior discretização dos nós, tende a possuir valores maiores que as outras duas malhas, enquanto a malha 1 é a que mais se aproxima dos valores teóricos, indicando que nesse caso quanto menor a discretização, menor será a superestimação.

## 4.2 Vigas mistas contínuas com interação parcial

O caso de estudo atual são vigas contínuas. Para realizar as devidas análises foram utilizados os dados experimentais fornecidos por Ansourian (1981) como parâmetro de comparação. Dessa vez, serão testadas três vigas, todas possuindo dois vãos. A viga VMIP-1 (viga mista com interação parcial 1) possui apenas uma carga sendo aplicada,  $\lambda P_2 = 0$ , enquanto as vigas VMIP-2 e VMIP-3 os dois vãos são igualmente carregados,  $\lambda P_1 = \lambda P_2$ .

Novamente são usadas três malhas com diferentes graus de discretização, como ilustrado na Figura 4.3(a). Já a Figura 4.3(b) ilustra a seção transversal do elemento estrutural de forma genérica, podendo ser realizada a discretização de cada corpo de prova através da Tabela 4.2.

Figura 4.3 – Vigas mistas contínuas com interação parcial



Fonte: (LEMES, 2018)

Tabela 4.2 – Dados geométricos e dos materiais das vigas VMIP

Variável e unidade	Sigla	Viga		
		VMIP-1	VMIP-2	VMIP-3
Carga (kN)	$\lambda P_1$	$\lambda P$	$0.5\lambda P$	$0.5\lambda P$
	$\lambda P_2$	-	$0.5\lambda P$	$0.5\lambda P$
Comprimento (m)	$L_1$	400	450	450
	$L_2$	500	450	450
Área das barras em $M^-$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{b1}$	8.00	8.04	12.06
	$A_{b2}$	3.16	7.67	4.70
Área das barras em $M^+$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{b1}$	-	1.6	3.20
	$A_{b2}$	1.60	1.60	1.60
Dimensões laje (m)	$h_c$	10.0	10.0	10.0
	$b_c$	80.0	80.0	130.0
Dimensões do perfil (m)	$t_f$	0.85	1.00	0.98
	$h_0$	18.30	17.00	22.04
	$b_f$	10.00	20.00	12.00
	$t_w$	0.56	0.65	0.62
Concreto (kN,cm)	$f_c$	2.46	2.79	2.30
	$\epsilon_{ci}$	-0.00220	-0.00220	-0.00220
	$\epsilon_{cu}$	-0.00484	-0.00452	-0.00502
Aço dos perfis (kN,cm)	$f_y$	29.109	23.770	26.782
	$E_a$	20600	20600	20600
	$E_{a2}$	0	0	0
	$E_{a3}$	600	300	480
	$\epsilon_u$	0.0287	0.0703	0.0502
Aço das barras (kN,cm)	$f_{pyd}$	43	43	43
	$E_s$	20600	20600	20600
	$E_{s2}$	600	300	480
Conectores (kN,cm)	$n_c$	66	84	60
	$n_{cl}$	2	3	2
	$s$	28	33	30
	$H_{max}$	110	110	110

Fonte: Do autor (2019)

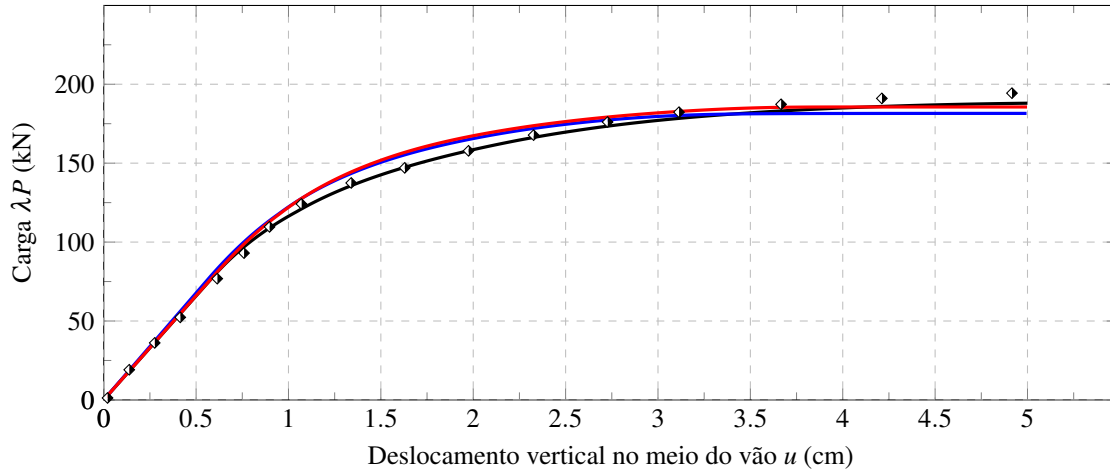
A Figura 4.4 ilustra as trajetórias nos três corpos de prova, comparando os resultados das diferentes malhas com os dados experimentais (ANSOURIAN, 1981). É possível observar que em todos os casos existe uma convergência de valores das malhas, com uma grande aproximação dos resultados experimentais.

Para o caso da VMIP-1 é possível notar que a malha 1 tende a descrever a trajetória dos dados experimentais, enquanto a malha 2 e 3 possuem valores parecidos. Utilizando a formulação de Patel et al.

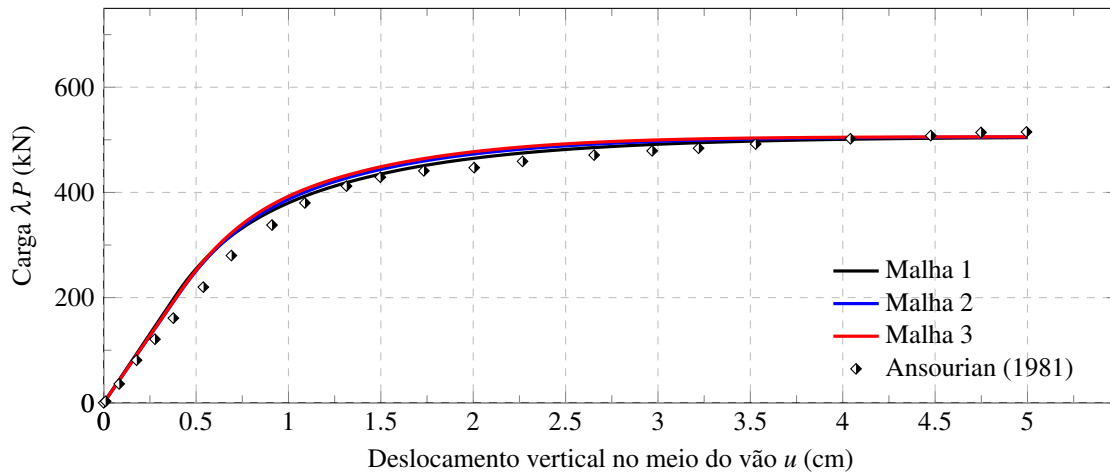
(2015) a discretização dos elementos finitos, nesse caso, não se faz tão importante. O que garante uma rapidez computacional, pois quanto menos elementos mais rápido o processamento.

Como existe uma diferença entre a quantidade de conectores entre as vigas, bem como outras características variando, é esperado três diferentes curvas, mesmo ocorrendo uma convergência nas cargas no caso das Figuras 4.4(b) e 4.4(c).

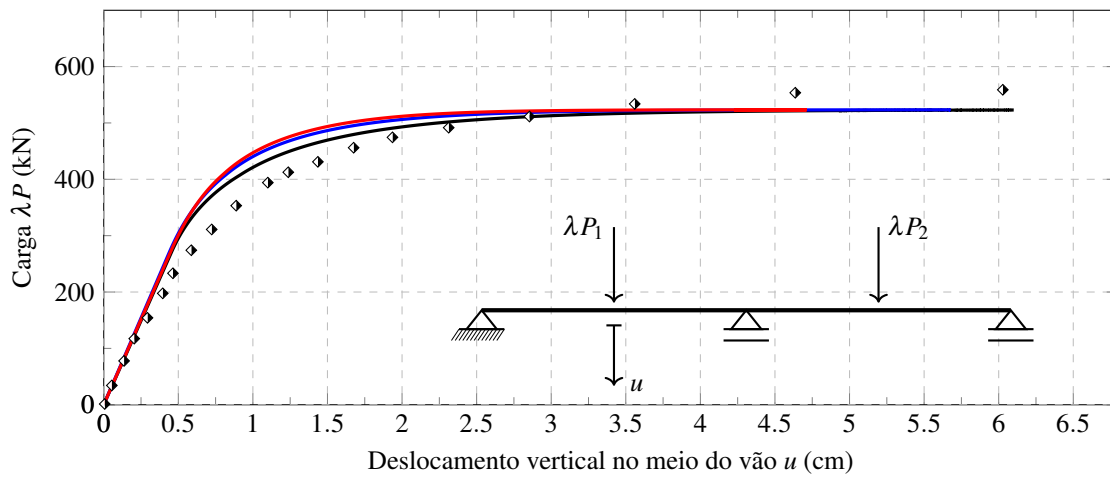
Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio para as vigas com interação parcial



(a) Viga VMIP-1



(b) Viga VMIP-2



(c) Viga VMIP-3

Fonte: Do autor (2019)

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Introdução

No presente trabalho foi realizado um estudo a respeito do comportamento de estruturas mistas aço-concreto por meio de análises computacionais utilizando da equação para cálculo do momento de inércia efetivo fornecido por Patel et al. (2015), a qual foi formulada por meio de redes neurais. Sendo que ao mesmo tempo foram considerados algumas fontes de não linearidade, sendo a principal delas as ligações semirrígidas. A referida expressão também foi acoplada a uma equação normativa para simular a interação parcial.

Toda base computacional foi feita por meio do *software* desenvolvido por Silva (2009), o qual inicialmente foi desenvolvido para tratar apenas de estruturas metálicas. Lemes (2015) implementou a análise de estruturas mistas aço-concreto no CS-ASA, sendo a formulação desenvolvida no referido trabalho, continuada no presente estudo.

Apesar de ser utilizado uma equação não normativa para a obtenção de momento de inércia efetivo da estrutura, outros aspectos foram estabelecidos conforme normas (NBR 8800, 2008; NBR 6118, 2014; AISC LRFD, 2016), tais como os modelos constitutivos dos materiais ou os modelos de tensões residuais nas seções de aço. O que garante uma aplicabilidade prática e não apenas experimental das implementações.

### 5.2 Conclusões

Os resultados obtidos para uma viga mista simplesmente apoiada e com interação parcial se mostraram superestimados quando comparados com os valores experimentais. Tal ocorrência pode se dar por diversos fatores, como por exemplo a falta de momento fletor negativo na viga ou até mesmo um fator puramente numérico do processamento do *software*. Contudo, os valores finais de resistência do corpo de prova tendem a convergir, o que se mostra um resultado satisfatório.

Para a análise de vigas mistas contínuas com interação parcial é conclusivo que as análises computacionais são capazes de fornecer valores satisfatórios quando comparados com os dados experimentais. Também é possível notar que a quantidade de nós não fornece uma grande variância nos resultados, ou seja, é cabível usar uma discretização menos refinada das molas fictícias para acelerar o processo computacional.

Em suma, os resultados foram satisfatórios e podem ser usados de forma prática, visto que os resultados encontrados no presente trabalho apresentaram convergência com dados experimentais presentes na literatura.

### **5.3 Sugestões Para Trabalhos Futuros**

Alguns temas podem ser abordados a partir da base computacional implementada no presente trabalho, descartam-se:

- a utilização de equações e modelos normativos para obtenção do momento de inércia efetivo da seção de concreto fissurada e para o cálculo dos momentos fletores limites;
- realizar análises dinâmicas;
- incluir o comportamento de ligações semirrígidas e da não linearidade geométrica para simular pórticos completos.

## REFERÊNCIAS

- AISC LRFD. Specification for structural steel buildings. **American Institute of Steel Construction, Chicago, IL**, 2016.
- ANSOURIAN, P. Experiments on continuous composite beams. **Proceedings of the Institution of Civil Engineer**, v. 71, n. 2, p. 25–51, 1981.
- BRANSON, D.; METZ, G. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams**. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University, 1963.
- CALDAS, R. B. **Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2004.
- CHAN, S. L.; CHUI, P. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Oxford: Elsevier, 2000.
- CHAPMAN, J. C.; BALAKRISHNAN, S. Experiments on composite beams. **Structural engineers**, v. 42, p. 369–383, 1964.
- CHAPMAN, S. **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- CHIOREAN, C. G.; BURU, S. M. Practical nonlinear inelastic analysis method of composite steel-concrete beams with partial composite action. **Engineering Structures**, v. 134, p. 74–106, 2017.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. USA: John Wiley & Sons Inc., 1991. v. 1.
- DENAVIT, M. **Characterization of behavior of steel-concrete composite members and frames with applications for design**. 2012. 727 f. Tese (Doutorado) — Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America, 2012.
- EL-LOBODY, E.; LAM, D. Finite element analysis of steel-concrete composite girders. **Advances in Structural Engineering**, v. 6, n. 4, p. 267–281, 2003.
- IU, C.; BRADFORD, M.; CHEN, W. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. **Engineering Structures**, v. 31, p. 799–813, 2009.
- IU, C. K. Nonlinear analysis for the pre and post yield behaviour of a composite structure with the refined plastic hinge method. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 119, p. 1–16, 2016.
- LEMES, Í. J. M. **Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2015.
- LEMES, Í. J. M. **Estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2018.
- LEMES, Í. J. M. et al. Numerical analysis of rc plane structures: a concentrated nonlinear effect approach. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 2, 2018.

LIEW, J.; CHEN, H.; SHANMUGAM, N. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 2, p. 194–202, 2001.

NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, 2014.

NBR 8800. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, 2008.

PATEL, K. et al. Explicit expression for effective moment of inertia of RC beams. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 3, p. 542–560, 2015.

QUEIROZ, F.; VELLASCO, P.; NETHERCOT, D. Finite element modelling of composite beams with full and partial shear connection. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, n. 4, p. 505–521, 2007.

SILVA, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. 2009. 322 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.

SILVA, J. L. e. **Formulações corrotacionais 2D para análise geométrica não nlinear de estruturas reticuladas**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2016.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. Modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **Journal of American Concrete Institute**, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.

ZIEMIAN, R. D.; McGUIRE, W. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, n. 10, p. 1301–1307, 2002.