



EMANUELLE PEREIRA MACHADO FARIA
ISADORA CEOTTO DE OLIVEIRA

**PROJETO CONCEITUAL DE UMA BANCADA
DIDÁTICA PARA ANÁLISE DE MECANISMOS DE
QUATRO BARRAS**

LAVRAS - MG

2019

**EMANUELLE PEREIRA MACHADO FARIA
ISADORA CEOTTO DE OLIVEIRA**

**PROJETO CONCEITUAL DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA ANÁLISE
DE MECANISMOS DE QUATRO BARRAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, submetida à banca examinadora como parte das exigências para a conclusão do curso de Graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira
Orientador

**LAVRAS - MG
2019**

**EMANUELLE PEREIRA MACHADO FARIA
ISADORA CEOTTO DE OLIVEIRA**

**PROJETO CONCEITUAL DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA ANÁLISE
DE MECANISMOS DE QUATRO BARRAS
CONCEPTUAL DESIGN OF A TEACHING BENCH FOR FOUR-BAR
MECHANISM ANALYSIS**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, submetida à banca examinadora como parte das exigências para a conclusão do curso de Graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Bacharel.

APROVADA em 06 de dezembro de 2019.

Dr. Henrique Leandro Silveira - DEG - UFLA

Dr. Francisco Scinocca - DEG – UFLA

Dr. Fábio Lucio Santos - DEG – UFLA

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira
Orientador

**LAVRAS - MG
2019**

RESUMO

Face à necessidade de preparar os alunos de Engenharia Mecânica para aplicação dos conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Mecanismos e Dinâmica de Máquinas, com relação à simulação e análise do funcionamento de vários tipos de mecanismos, este trabalho tem como objetivo descrever as experiências obtidas em laboratório no desenvolvimento de uma bancada didática para simulação de mecanismos. Para isso, inicialmente foram utilizados recursos computacionais para visualização de trajetórias e movimentos resultantes. Assim, é feita a simulação de alguns mecanismos nos softwares *SolidWorks* e *Matlab*, inclusive com visualização gráfica em modo contínuo do movimento, e análise de variáveis cinemáticas como deslocamento, velocidade e aceleração. É possível demonstrar que mesmo para mecanismos simples como o mecanismo de quatro barras, se faz necessário durante a fase de projeto, se obter informações via simulação computacional, e fazer análises de sua funcionalidade através de medidas reais, como a obtenção de trajetórias e análise das forças atuantes nos componentes.

Palavras-chave: Análise cinemática, Análise dinâmica, Bancada didática, Simulação gráfica de mecanismos, Lei de Grashof

ABSTRACT

In order to prepare Mechanical Engineering students to apply the knowledge acquired in the disciplines of Mechanisms and Machine Dynamics, regarding the simulation and analysis of the operation of various types of mechanisms, this paper aims to describe the experiences obtained in the laboratory. development of a didactic bench for mechanisms simulation. For this, initially computational resources were used to visualize trajectories and resulting movements. Thus, some mechanisms are simulated in the SolidWorks and Matlab environment, including continuous graphical visualization of the motion, and analysis of parameters such as displacement, velocity and acceleration. It can be demonstrated that even for simple mechanisms such as the four-bar mechanism, it is necessary during the design phase to obtain information via computer simulation, and to make its functionality analyzes through real measurements, such as obtaining trajectories and analyzing the forces acting on the components.

Keywords: Kinematic analysis, Dynamic analysis, Didactic bench, Graphical simulation mechanisms, Grashof's Criterion

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Movimento de Rotação.	13
Figura 2.2 – Movimento de Translação.	13
Figura 2.3 – Movimento Complexo: combinação de Rotação e Translação.	13
Figura 2.4 – a) Mecanismo (GDL=1); b) Estrutura (GDL=0) e c) Estrutura pré-carregada (GDL=-1).	15
Figura 2.5 – a) Suspensão de um automóvel guiada por um mecanismo de Watt; e b) Mecanismo de Watt.	16
Figura 2.6 – a) Suspensão Duplo A; e b) Representação do Mecanismo de quatro barras na Suspensão Duplo A.	16
Figura 2.7 – a) Movimento de abertura do compartimento do motor do carro; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de movimento.	17
Figura 2.8 – a) Limpador de para-brisa; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de movimento da palheta.	17
Figura 2.9 – a) Guindaste; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de percurso do guindaste.	18
Figura 2.10 – a) Alicates de pressão; e b) Mecanismo de quatro barras utilizado no sistema mecânico do alicate.	18
Figura 2.11 – a) Patins; e b) Mecanismo de quatro barras utilizado no sistema de freios do patins.	18
Figura 3.1 – Representação dos ângulos de rotação do mecanismo de quatro barras.	20
Figura 3.2 – Base inercial do mecanismo de quatro barras.	21
Figura 3.3 – Bases móveis do mecanismo de quatro barras.	21
Figura 3.4 – Diagrama de corpo livre da barra manivela.	30
Figura 3.5 – Diagrama de corpo livre da barra acopladora.	31
Figura 3.6 – Diagrama de corpo livre da barra seguidora.	31
Figura 3.7 – Mecanismo de quatro barras	34
Figura 3.8 – Esboço da bancada experimental de um mecanismo de quatro barras (SOLIDWORKS).	37
Figura 3.9 – Dimensão das barras [mm]	38
Figura 3.10 – Placa de suporte do mecanismo da bancada experimental.	39
Figura 3.11 – Esquema representando a fixação do motor de acionamento da manivela.	39

Figura 3.12 – Esquema representando a fixação do motor de acionamento da manivela.	40
Figura 3.13 – Representação da conexão entre as barras	40
Figura 3.14 – Laterais de apoio da bancada didática	41
Figura 4.1 – Simulação Gráfica dos Mecanismos: a) Dupla Manivela, b) Manivela Balancim, c) Duplo Balancim (Caso 1) e d) Duplo Balancim (Caso 2).	42
Figura 4.2 – Gráficos de posição angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS.	43
Figura 4.3 – Gráficos de Velocidade angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	43
Figura 4.4 – Gráficos de aceleração angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	44
Figura 4.5 – Gráficos de posição angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	44
Figura 4.6 – Gráficos de Velocidade angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	44
Figura 4.7 – Gráficos de aceleração angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	45
Figura 4.8 – Gráficos de posição angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	45
Figura 4.9 – Gráficos de velocidade angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	45
Figura 4.10 – Gráficos de aceleração angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS	46
Figura 4.11 – Gráficos do Momento atuante na manivela dos Mecanismos: a) Dupla Manivela e b) Manivela Balancim.	48
Figura 4.12 – Gráficos da posição angular da barra acopladora dos Mecanismos: a) Duplo Balancim (Caso 1) e b) Duplo Balancim (Caso 2).	48
Figura 4.13 – Trajetória do ponto B entre a manivela e a barra acopladora dos Mecanismos: a) Duplo Balancim (Caso 1) e b) Duplo Balancim (Caso 2).	49
Figura 4.14 – Mecanismo de Quatro Barras do Limpador de Para-Brisa.	50

Figura 4.15 – Simulação no MATLAB do Mecanismo de Quatro Barras do Limpador de Para-Brisa.	50
Figura 4.16 – Resultados de velocidade angular.	50
Figura 4.17 – Resultados de aceleração angular.	51
Figura 4.18 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro simulado na bancada projetada	51
Figura 4.19 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro	52
Figura 4.20 – Velocidade angular da manivela	53
Figura 4.21 – Comparação resultado real e simulado.	53
Figura 4.22 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro simulado na bancada projetada	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros Gerais de Simulação	35
Tabela 3.2 – Dimensões dos Mecanismos de Quatro Barras de Movimento Contínuo . .	36
Tabela 3.3 – Dimensões dos Mecanismos de Quatro Barras de Movimento Oscilatório .	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivos	11
1.1.1	Objetivo geral	11
1.1.2	Objetivos específicos	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1	Cinemática e Cinética	12
2.2	Máquinas e Mecanismos	12
2.3	Tipos de Movimento	12
2.4	Elos e Juntas	13
2.5	Graus de Liberdade (GDL)	14
2.6	Mecanismos e Estruturas	15
2.7	Motores e Acionadores	15
2.8	Aplicações	16
3	METODOLOGIA	19
3.1	Modelagem matemática	19
3.1.1	Grau de Liberdade	19
3.1.2	Sistema inercial de referência	20
3.1.3	Sistema móvel de referência	21
3.1.4	Análise cinemática considerando os vínculos	22
3.1.4.1	Análise de posição	22
3.1.4.2	Análise de velocidade	23
3.1.4.3	Análise de aceleração	24
3.1.5	Análise cinemática dos pontos de interesse: articulações e centro de massa	25
3.1.5.1	Análise de posição	25
3.1.5.2	Análise de velocidade	26
3.1.5.3	Análise de aceleração	27
3.1.6	Análise dinâmica	29
3.2	Implementação computacional	33
3.2.1	Considerações iniciais	34
3.2.1.1	Projeto conceitual da bancada didática	36
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	42

4.1	Comparação Cinemática: MATLAB vs SOLIDWORKS	43
4.2	Diferenças Dinâmicas	47
4.3	Geração de Trajetórias	48
4.4	Mecanismo de Quatro Barras aplicado ao Limpador de Para-Brisas	49
4.5	Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro	52
5	CONCLUSÃO	55
6	TRABALHOS FUTUROS	56
	APENDICE A – Tabelas	57
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

No contexto atual, observa-se a necessidade do aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem. Sobretudo, o modelo de educação tradicional perde espaço para ensinamentos eficazes que detêm de recursos que facilitem e motivem o processo de aprendizagem dos alunos. As universidades, em geral, têm o desafio de aliar educação à inovação, criatividade e modernização na sala de aula, para atingir uma geração cada vez mais informada e tecnológica.

Um importante recurso metodológico na construção do conhecimento consiste na elaboração de aulas práticas, que tornam os conteúdos teóricos das disciplinas de graduação mais interessantes, motivadores e próximos da realidade. Essa abordagem pode ser explorada nas disciplinas de Mecanismos e Dinâmica das Máquinas, visto que através da experimentação em laboratórios adequados, os alunos podem visualizar a teoria estudada e o docente, por sua vez, consegue proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos programáticos aos estudantes.

A teoria das máquinas e mecanismos é a ciência usada para compreender as relações entre a geometria e o movimento de partes de uma máquina ou de mecanismos (SHIGLEY, 1980). Para simplificação de estudo essa ciência pode ser dividida em duas partes, a primeira delas é a cinemática em que apenas são usadas as grandezas físicas de distância e tempo; e a segunda, é a dinâmica na qual a grandeza física de força é adicionada às de distância e tempo.

Os mecanismos podem ser divididos segundo seus princípios de funcionamento, a sua geometria ou ainda segundo o tipo de transformação de movimento que promovem (ERDMAN; SANDOR, 1997). Em suas diversas construções, os mecanismos de barras destacam-se dos demais pela sua simplicidade e extrema versatilidade. Dentre eles, o mecanismo de quatro barras ou quadrilátero articulado é o mais encontrado em dispositivos mecânicos devido a sua concepção extremamente simples e robusta, estando presente em inúmeras aplicações no âmbito da mecânica. É basicamente constituído por três barras móveis e uma fixa, e quatro articulações. A barra móvel que é conectada ao motor de acionamento é chamada de manivela, a barra móvel de saída denomina-se seguidor e a barra que liga a manivela ao seguidor, é chamada de acoplador.

A modelagem das equações de movimento para um mecanismo de quatro barras consiste de um sistema de equações não lineares das relações cinemáticas (deslocamentos, velocidades e acelerações) e dinâmicas (forças e momentos) do mecanismo. A solução das equações de movimento desses sistemas são muito trabalhosas e difíceis para serem geradas à mão, mesmo para sistemas compostos de um pequeno número de corpos rígidos interconectados.

Assim sendo, essas equações de movimento podem ser geradas através de programas

computacionais em que os dados dos corpos rígidos (dados geométricos e inerciais) e das suas interconexões (vínculos cinemáticos e leis de força) são dados como argumentos para o programa. Tal técnica de simulação matemática de sistemas mecânicos pode ser usada para a análise e o estudo de projetos de qualquer sistema mecânico que possa ser modelado como uma série de corpos rígidos interconectados por juntas, sob a influência de forças, com movimentos pré-determinados e restrito por vínculos.

No projeto desses sistemas mecânicos o conjunto e a disposição das peças escolhidas constituirá normalmente um ou mais mecanismos que deverão ser analisados do ponto de vista cinemático e dinâmico e avaliados quanto à sua aplicabilidade, segundo o movimento resultante de cada configuração possível.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho apresenta o projeto conceitual de uma bancada didática de um mecanismo de quatro barras, como instrumento didático para validação teórico-experimental do modelo matemático nas salas de aula em face da realidade abordada.

1.1.2 Objetivos específicos

- Fazer a modelagem do mecanismo de quatro barras, realizando a análise cinemática e dinâmica completa, a partir da dinâmica inversa;
- Promover a validação teórica do mecanismo;
- Desenvolver e esboçar o projeto preliminar da estrutura da bancada experimental.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Cinemática e Cinética

A cinemática compreende o estudo do movimento sem considerar as forças que o causaram. Já a cinética estuda as forças de sistemas em movimento (NORTON, 2009). Sistemas mecânicos em movimento não podem ser modelados desconsiderando essas duas definições.

Criar e projetar sistemas mecânicos com movimentos desejados é um dos principais objetivos da cinemática, juntamente com o estabelecimento de relações de vínculos geométricos e de acionamento. E com isso, calcular as posições, velocidades e acelerações que os componentes assumem a partir do movimento.

No projeto de mecanismos, a cinemática possibilita determinar suas limitações físicas, a trajetória que é capaz de percorrer e as velocidades e acelerações aceitáveis de acordo com os materiais e a configuração escolhida.

Por outro lado a cinética tem por objetivo determinar os esforços atuantes no sistema mecânico decorrentes do movimento, as forças e torques necessários para acionar o sistema e as equações de movimento. Confere suporte ao projeto na fase de dimensionamento dos componentes e escolha dos materiais para fabricação.

2.2 Máquinas e Mecanismos

Transformar algum movimento qualquer em um movimento padronizado é o que caracteriza a função de um mecanismo (NORTON, 2009). Outra definição para mecanismos é um conjunto de elementos ligados entre si e organizados de forma a produzir um movimento específico, como o guarda-chuva e o apontador de lápis.

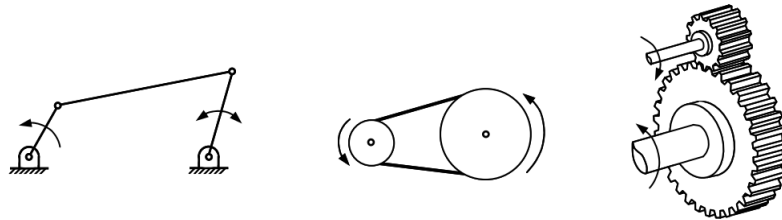
Máquinas são dotadas de mecanismos, que são capazes de transmitir altas potências e desenvolver forças de alta intensidade. Ou ainda, é um conjunto de elementos ligados entre si e organizados de forma a produzir um movimento específico e transmitir energia de uma forma predeterminada, como o trator e o motor elétrico.

2.3 Tipos de Movimento

Os mecanismos podem ser classificados pelo tipo de movimento que admitem ao serem acionados. Esses movimentos podem ser de rotação, translação ou uma combinação simultânea dos dois, gerando o movimento complexo.

- Rotação pura: o corpo possui um centro instantâneo de rotação (fixo em relação ao sistema inercial) em torno do qual os demais pontos do corpo descrevem trajetórias curvas (Figura 2.1).

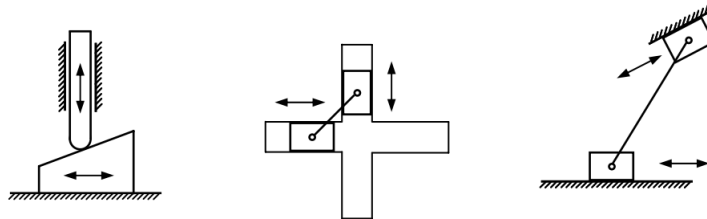
Figura 2.1 – Movimento de Rotação.



Fonte: (FLORES; CLARO, 2007)

- Translação pura: todos os pontos do corpo descrevem trajetórias paralelas (curvilíneas ou retilíneas). A posição linear pode ser mudada, mas a orientação angular não (Figura 2.2).

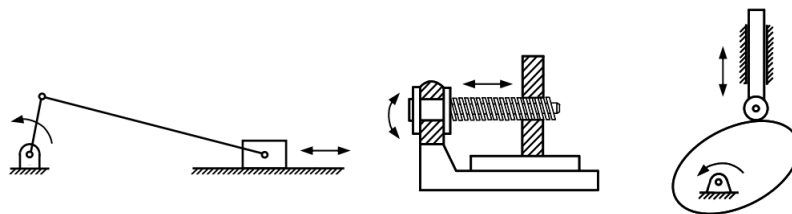
Figura 2.2 – Movimento de Translação.



Fonte: (FLORES; CLARO, 2007)

- Movimento Complexo: rotação e translação ocorrem simultaneamente. A cada instante do movimento o centro de rotação é alterado (Figura 2.3).

Figura 2.3 – Movimento Complexo: combinação de Rotação e Translação.



Fonte: (FLORES; CLARO, 2007)

2.4 Elos e Juntas

Um corpo material é considerado rígido quando a distância entre quaisquer dois pontos do corpo permanecer constante com o tempo. Corpos rígidos não existem na prática devido

às deformações que esses materiais sofrem sob a presença de esforços externos. Porém, se essa deformação for pequena de maneira a ser desprezada, o corpo pode ser considerado rígido (SIMONI, 2008).

Elos são os corpos rígidos que fazem parte de um mecanismo ou de uma máquina e que possuem pelo menos dois nós, que são os pontos para se anexar aos outros elos. Um elo será chamado de binário se ele é conectado somente a outros dois elos, será chamado de ternário se é conectado somente a outros três elos e de quaternário se é conectado somente a outros quatro elos.

A conexão entre dois elos é chamada de junta, a qual permite o mesmo movimento entre os elos conectados e pode adicionar restrições a ele. As juntas podem ser classificadas por:

- Tipo de contato entre os corpos: sendo um par cinemático superior, quando esse contato é uma linha ou um ponto, ou par cinemático inferior, quando esse contato é uma superfície;
- Número de graus de liberdade permitidos na junta;
- Tipo de fechamento da junta;
- Número de elos unidos, classificando a ordem da junta podendo essa ser binária ou múltipla.

2.5 Graus de Liberdade (GDL)

Graus de liberdade (GDL) são definidos pelo número de coordenadas independentes necessárias para representar a posição de um corpo ou sistema mecânico no plano ou no espaço em qualquer instante de tempo (MABIE H. H.; REINHOLTZ, 1987).

O número de graus de liberdades, de uma maneira geral, para um mecanismo fechado, pode ser determinado pelo critério de Gruebler, dado pela Equação 2.1:

$$GDL = 3(n - 1) - H - 2L \quad (2.1)$$

Onde:

n = número de peças;

H = número de juntas superiores;

L = número de juntas inferiores.

O nome dado a esse conjunto de coordenadas capazes de representar completamente a configuração de um mecanismo, é coordenadas generalizadas. Assim, um sistema que possui "n" graus de liberdade pode ser especificado por "n" coordenadas generalizadas, as quais são consideradas variáveis primárias.

Essas coordenadas abrangem desde coordenadas cartesianas retangulares, polares e outras variáveis que também são responsáveis por descrever, de forma completa e independente, a configuração do sistema.

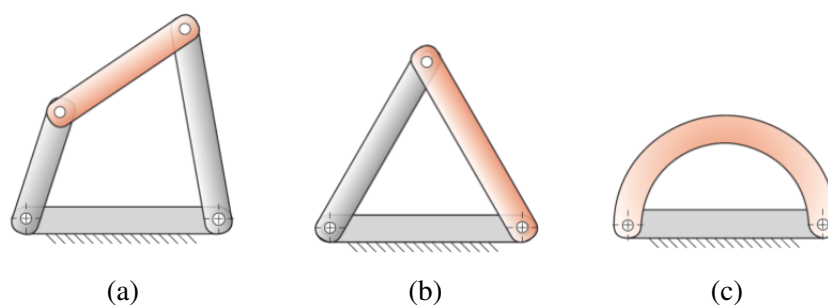
Depois de definidas as variáveis primárias, as variáveis cinemáticas restantes, que não estão associadas aos graus de liberdade do mecanismo, são chamadas de variáveis secundárias.

2.6 Mecanismos e Estruturas

Existem somente três tipos de comportamento determinados pelo número de graus de liberdade de uma composição de elos, conforme demonstrado na Figura 2.4.

- GDL positivo: a montagem será um mecanismo e os elos terão movimento relativo;
- GDL igual a zero: a montagem será uma estrutura e não é possível o movimento;
- GDL negativo: a montagem será uma estrutura pré-carregada e o movimento também não é possível e algumas tensões podem estar presentes.

Figura 2.4 – a) Mecanismo (GDL=1); b) Estrutura (GDL=0) e c) Estrutura pré-carregada (GDL=-1).



Fonte: (NORTON, 2009)

2.7 Motores e Acionadores

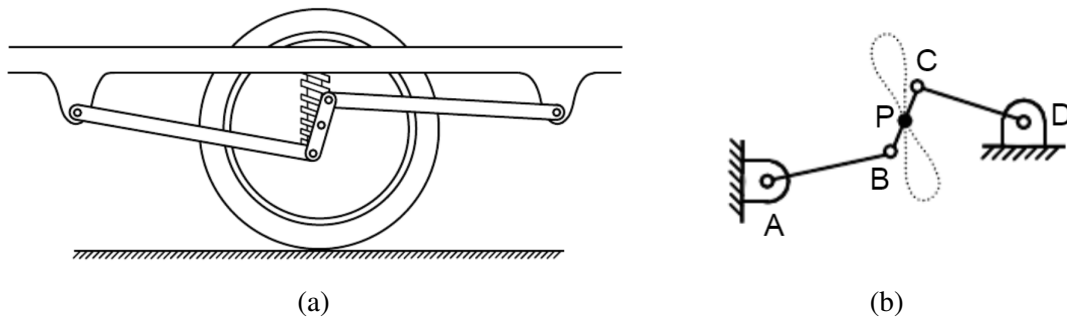
Um mecanismo necessita de um dispositivo que confira a ele movimento e energia iniciais, podendo ele ser obtido através de um motor, por exemplo, ou pela própria operação manual. Para mecanismos de movimento contínuo com entrada rotativa, como Grashof, um motor

elétrico, ou de combustão interna são aplicáveis ao projeto. Caso o movimento inicial seja de translação, muito utilizado em sistemas de movimentação de terras, os cilindros hidráulicos ou pneumáticos são comumente necessários. Existem, portanto, muitas possibilidades que devem ser analisadas de acordo com a necessidade do projeto.

2.8 Aplicações

Diante das inúmeras configurações possíveis, o mecanismo de quatro barras é vastamente utilizado no âmbito da mecânica. A Figura 2.5 mostra uma suspensão de um veículo na qual é utilizado um mecanismo de Watt para guiar o eixo de rotação do automóvel. Esse mecanismo é composto por quatro barras articuladas, uma fixa, duas manivelas e uma biela.

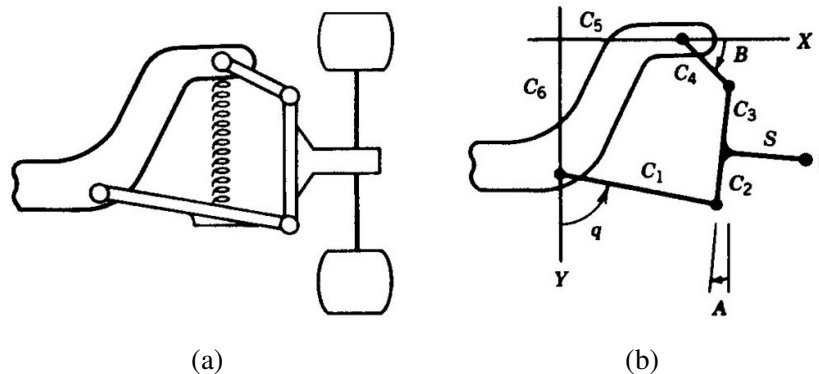
Figura 2.5 – a) Suspensão de um automóvel guiada por um mecanismo de Watt; e b) Mecanismo de Watt.



Fonte: (FLORES; CLARO, 2007)

No modelo de suspensão Duplo A esse mecanismo também está presente, como ilustra a Figura 2.6.

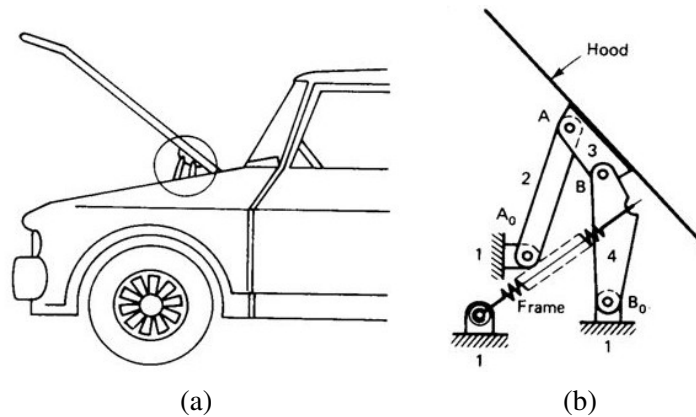
Figura 2.6 – a) Suspensão Duplo A; e b) Representação do Mecanismo de quatro barras na Suspensão Duplo A.



Fonte: (DOUGHTY, 1988)

O movimento de abertura do compartimento do motor do carro também pode ser gerado através de um mecanismo de quatro barras ilustrado na Figura 2.7, e o mesmo se aplica na abertura do porta malas de um veículo.

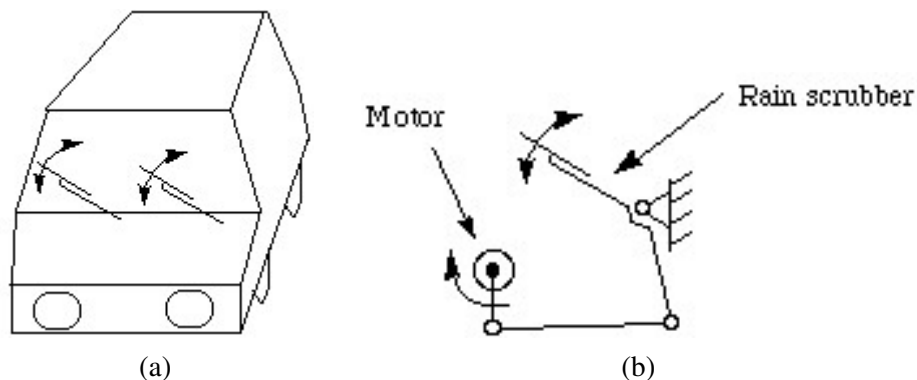
Figura 2.7 – a) Movimento de abertura do compartimento do motor do carro; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de movimento.



Fonte: (ERTHAL, 2013)

Ainda nos veículos, é aplicado na geração de movimento do limpador de para-brisa, em que a rotação contínua da manivela é convertido em um movimento de oscilação angular da palheta (Figura 2.8).

Figura 2.8 – a) Limpador de para-brisa; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de movimento da palheta.

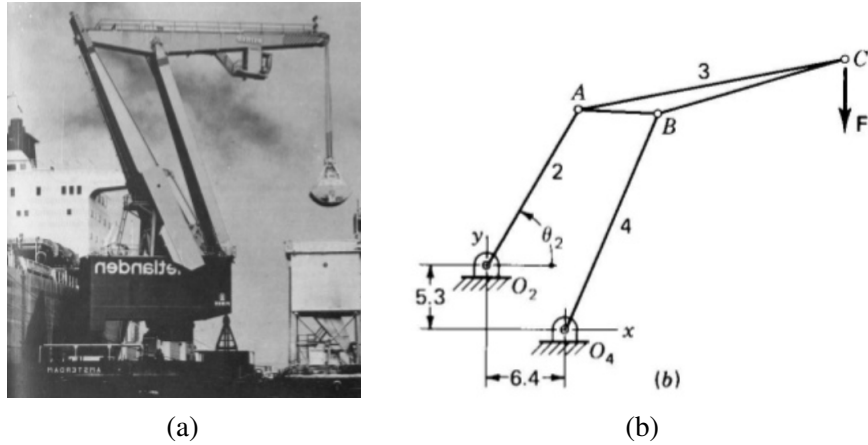


Fonte: (ZHANG; FINGER; BEHRENS, 2003)

Outras aplicações do mecanismo de quatro barras ilustradas a seguir incluem a geração de percurso de um guindaste, conforme demonstrado na Figura 2.9), braços robóticos, pantógrafos, alicates de pressão, representado na Figura 2.10 e sistema de freios de patins ilustrado na Figura 2.11.

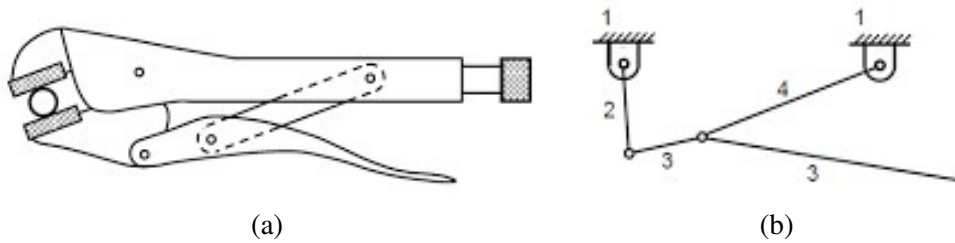
Em virtude da extensa aplicação e da grande importância do mecanismo de quatro barras, o presente trabalho irá abordar a implementação do modelo em uma bancada experimental.

Figura 2.9 – a) Guindaste; e b) Mecanismo de quatro barras para geração de percurso do guindaste.



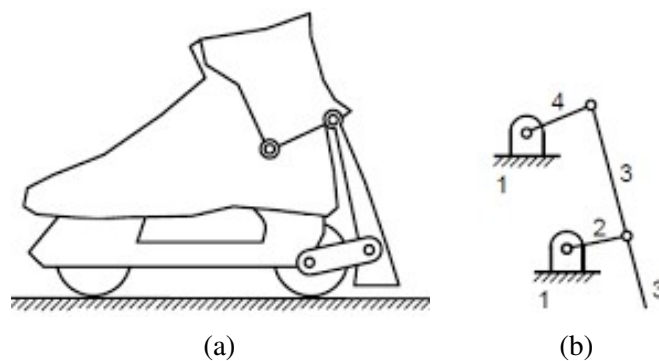
Fonte: (ERTHAL, 2013)

Figura 2.10 – a) Alicate de pressão; e b) Mecanismo de quatro barras utilizado no sistema mecânico do alicate.



Fonte: (ERTHAL, 2013)

Figura 2.11 – a) Patins; e b) Mecanismo de quatro barras utilizado no sistema de freios dos patins.



Fonte: (ERTHAL, 2013)

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo será apresentada a modelagem cinemática para um mecanismo de quatro barras genérico, sendo essa modelagem aplicada a qualquer outro mecanismo de quatro barras.

Dessa forma, foram feitas para esse mecanismo a análise cinemática (posição, velocidade e aceleração) e dinâmica (reações dinâmicas - força e torque) completa com a manivela acionada por motor elétrico.

Seguidamente, os modelos foram totalmente parametrizados, para serem facilmente alterados fisicamente e na simulação computacional, cumprindo assim com o objetivo de construir os modelos matemáticos do mecanismo para serem validados experimentalmente na bancada a ser construída, em um projeto futuro.

Também foi pesquisado em catálogos de fabricantes de bancadas didáticas para mecânica dos sólidos, como as bancadas são montadas, quais os tipos de materiais mais empregados, como são os meios de acionamento e fixação, para uma melhor qualidade de simulação.

Por fim, esboçou-se o modelo construtivo da bancada por meio de sua implementação geométrica, utilizando o software SOLIDWORKS, que auxiliou na validação do modelo implementado de maneira analítica.

3.1 Modelagem matemática

A modelagem matemática foi feita considerando os vínculos, método descrito por (DOUGHTY, 1988), tendo em vista a parte cinemática, e pelo método de Newton-Euler, descrito por (SANTOS, 2001), desenvolvendo tanto a cinemática quanto a dinâmica.

3.1.1 Grau de Liberdade

O conhecimento do número de graus de liberdade (GDL) ou mobilidade de um mecanismo é uma propriedade importante na análise e síntese cinemática do sistema. Pelo critério de Gruebler definido anteriormente, temos pela Equação 3.1:

$$GDL = 3(n - 1) - H - 2L \quad (3.1)$$

Sendo $n = 4$, $H = 0$ e $L = 4$, o número de graus de liberdade do mecanismo de quatro barras é:

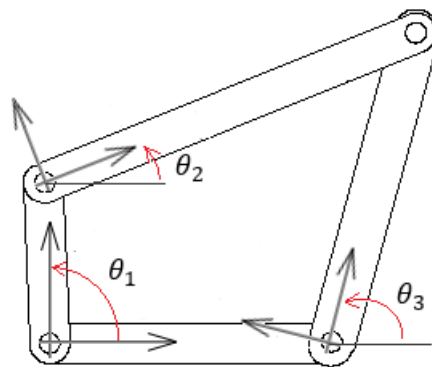
$$GDL = 3(4 - 1) - 2 \times 4 \quad (3.2)$$

$$GDL = 1 \quad (3.3)$$

Para um grau de liberdade, a coordenada generalizada, que é capaz de descrever a configuração desse sistema, é a coordenada primária (independente), que nesse caso é θ_1 , que corresponde a posição angular da barra 1. Já as coordenadas secundárias (dependentes) são θ_2 e θ_3 , que correspondem as posições angulares das barras 2 e 3, respectivamente.

Essas coordenadas podem ser identificadas na Figura 3.1, na qual são representados os ângulos de rotação das barras que compoem o mecanismo.

Figura 3.1 – Representação dos ângulos de rotação do mecanismo de quatro barras.

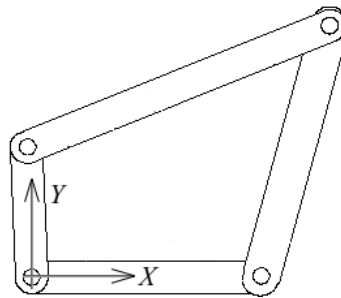


Fonte: Do autor.

3.1.2 Sistema inercial de referência

Para descrever o movimento de cada corpo rígido de um mecanismo, inicialmente é preciso definir um sistema de referência, onde os vetores de posição, velocidade e aceleração, bem como os de força e de momento, possam ser representados (VINOGRADOV, 2000). Toda interpretação dos movimentos foi, então, realizada nesse referencial inercial escolhido, conforme ilustra a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Base inercial do mecanismo de quatro barras.



Fonte: Do autor.

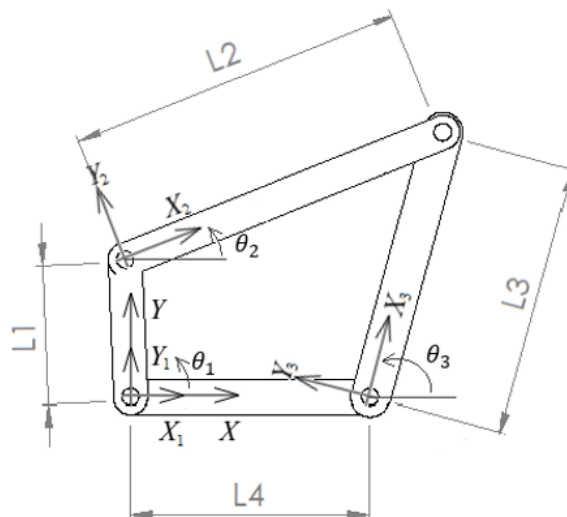
3.1.3 Sistema móvel de referência

A utilização de sistemas móveis de referência na cinemática tem por objetivo facilitar a representação de determinados movimentos complexos, subdividindo-os em vários movimentos mais simples que compõem o movimento absoluto do mecanismo.

Assim, depois de definido o sistema inercial de referência, é necessário estabelecer uma relação entre os cursores desse sistema inercial e do sistema móvel, para que seja possível passar as coordenadas de um vetor de um sistema de referência para outro. Tal relação pode ser feita com o auxílio das matrizes de transformação de coordenadas ou pelas transpostas delas.

No mecanismo estudado foram adicionadas três bases locais, correspondendo a cada uma das barras móveis. Todas essas bases, T_{θ_1} , T_{θ_2} e T_{θ_3} , giram em torno do eixo Z no sentido horário, conforme ilustra a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Bases móveis do mecanismo de quatro barras.



Fonte: Do autor.

Assim sendo, a matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para uma base móvel foi a mesma para todas as bases utilizadas no sistema. Desta maneira, temos:

Matriz de transformação de coordenadas da base móvel B1, a qual gira solidária à barra 1 (manivela) é dada por:

$$\mathbf{T}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Matriz de transformação de coordenadas da base móvel B2, a qual gira solidária à barra 2 (acopladora) é dada por:

$$\mathbf{T}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Matriz de transformação de coordenadas da base móvel B3, a qual gira solidária à barra 3 (seguidora) é dada por:

$$\mathbf{T}_{\theta_3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.1.4 Análise cinemática considerando os vínculos

Na análise cinemática de um mecanismo, são usualmente desenvolvidas as equações que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração para qualquer ponto de interesse no mecanismo. Nesta seção, as mesmas serão obtidas pelo método descrito por Doughty (1988) através do desmembramento das equações de *loop* do mecanismo de quatro barras, e suas devidas projeções nas coordenadas cartesianas X e Y, em termos do movimento de entrada da manivela.

3.1.4.1 Análise de posição

Especificadas as dimensões das barras do mecanismo e o ângulo de entrada da manivela θ_1 , as variáveis cinemáticas incógnitas são as posições angulares do acoplador θ_2 e do seguidor θ_3 , as quais podem ser obtidas através da equação vetorial de *loop* descrita pelo vetor de vínculos, apresentado pela Equação 3.7:

$$\vec{f}(\theta_2, \theta_3) = {}_I \vec{r}_{AB} + {}_I \vec{r}_{BC} - {}_I \vec{r}_{AD} - {}_I \vec{r}_{DC} = \vec{0} \quad (3.7)$$

Os vetores de posição das barras são descritos por:

$${}^I\vec{r}_{OA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_1}\vec{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_2}\vec{r}_{BC} = \begin{Bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_3}\vec{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^I\vec{r}_{AO} = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Assim, as equações de posição de loop do mecanismo podem ser escritas como:

$$\vec{f}_1(\theta_2, \theta_3) = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 - x_D - L_3 \cos \theta_3 = 0 \quad (3.9)$$

$$\vec{f}_2(\theta_2, \theta_3) = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - y_D - L_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (3.10)$$

Diferenciando parcialmente as equações de posição definidas em 3.9 e 3.10, com relação aos ângulos θ_2 e θ_3 , obtém-se a matriz jacobiana para este sistema, dada por:

$$[J] = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \sin \theta_2 & L_3 \sin \theta_3 \\ -L_2 \cos \theta_2 & L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.1.4.2 Análise de velocidade

A partir da diferenciação das equações de posição definidas em 3.9 e 3.10, determinam-se as equações de velocidade.

$$L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - L_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (3.12)$$

$$L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - L_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0 \quad (3.13)$$

Colocando as mesmas na forma matricial, observa-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -L_2 \sin \theta_2 & L_3 \sin \theta_3 \\ -L_2 \cos \theta_2 & L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \sin \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \quad (3.14)$$

O lado esquerdo da equação 3.14 corresponde à matriz jacobiana [J] obtida anteriormente pela derivação parcial que pré-multiplica o vetor de velocidades secundárias. E o lado direito consiste na matriz de coeficientes [B] que pré-multiplica o vetor de velocidade primária.

Para dados valores de θ_1 e $\dot{\theta}_1$, pode-se solucionar o sistema de equações para obtenção das velocidades angulares θ_2 e θ_3 . Os coeficientes de velocidade K_2 e K_3 possibilitam expressar

as velocidades secundárias em função das velocidades primárias, e são determinados dividindo ambos os lados da equação por $\dot{\theta}_1$ e pré-multiplicando por J^{-1} .

$$\begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} \\ \frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_1} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} L_1 \text{sen} \theta_1 \\ L_1 \text{cos} \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Com isso, é possível obter a seguinte relação:

$$[K] = [J]^{-1}[B] \quad (3.16)$$

3.1.4.3 Análise de aceleração

Do mesmo modo, diferenciando-se as equações de velocidade com relação ao tempo, obtêm-se as equações de aceleração 3.17 e 3.18.

$$L_1 \ddot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1 + L_1 \dot{\theta}_1^2 \text{cos} \theta_1 + L_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen} \theta_2 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos} \theta_2 - L_3 \ddot{\theta}_3 \text{sen} \theta_3 - L_3 \dot{\theta}_3^2 \text{cos} \theta_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$L_1 \ddot{\theta}_1 \text{cos} \theta_1 - L_1 \dot{\theta}_1^2 \text{sen} \theta_1 + L_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos} \theta_2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen} \theta_2 - L_3 \ddot{\theta}_3 \text{cos} \theta_3 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \text{sen} \theta_3 = 0 \quad (3.18)$$

Após rearranjar as equações na forma matricial, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} L_2 \text{sen} \theta_2 & -L_3 \text{cos} \theta_3 \\ L_2 \text{cos} \theta_2 & -L_3 \text{sen} \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \ddot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{sen} \theta_1 \\ -L_1 \text{cos} \theta_1 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_1^2 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{cos} \theta_1 \\ L_1 \text{sen} \theta_1 \end{Bmatrix} \\ + \dot{\theta}_2^2 \begin{Bmatrix} -L_2 \text{cos} \theta_2 \\ L_2 \text{sen} \theta_2 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_3^2 \begin{Bmatrix} L_3 \text{cos} \theta_3 \\ -L_3 \text{sen} \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Substituindo a matriz jacobiana, tem-se:

$$[J] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_2^2 \begin{Bmatrix} -L_2 \text{cos} \theta_2 \\ L_2 \text{sen} \theta_2 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_3^2 \begin{Bmatrix} L_3 \text{cos} \theta_3 \\ -L_3 \text{sen} \theta_3 \end{Bmatrix} \\ = \ddot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{sen} \theta_1 \\ -L_1 \text{cos} \theta_1 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_1^2 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{cos} \theta_1 \\ L_1 \text{sen} \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Substituindo os termos dos coeficientes de velocidade na equação, é possível simplificar o sistema de equações que representa a aceleração, representado na equação 3.21.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \left(\ddot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{sen}\theta_1 \\ -L_1 \text{cos}\theta_1 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_1^2 \begin{Bmatrix} -L_1 \text{cos}\theta_1 + K_2^2 L_2 \text{cos}\theta_2 - K_3^2 L_3 \text{cos}\theta_3 \\ L_1 \text{sen}\theta_1 - K_2^2 L_2 \text{sen}\theta_2 + K_3^2 L_3 \text{sen}\theta_3 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.21)$$

A multiplicação inversa da matriz jacobiana e o coeficiente de $\ddot{\theta}_1$ resulta nos coeficientes cinemáticos de velocidade, K_2 e K_3 . O sistema de equações 3.22 representa a aceleração do mecanismo, em que os coeficientes de velocidade pré-multiplicam as acelerações primárias e os coeficientes de aceleração L_2 e L_3 , obtidos pela derivada dos coeficientes de velocidade, pré-multiplicam as velocidades primárias quadráticas.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \ddot{\theta}_1 \begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_1^2 \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

3.1.5 Análise cinemática dos pontos de interesse: articulações e centro de massa

Toda a análise cinemática pelo método de Newton-Euler foi feita a partir do vetor posição de cada barra. Em outras palavras, as posições, as velocidades lineares e angulares e as acelerações lineares e angulares de cada corpo foram descritas em função das relações geométricas do movimento do mecanismo de quatro barras proposto.

3.1.5.1 Análise de posição

Os vetores de posição linear dos acoplamentos são dados por:

$${}^I\vec{r}_{OA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_1}\vec{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_2}\vec{r}_{BC} = \begin{Bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_3}\vec{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^I\vec{r}_{AC} = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$${}^{B_1}\vec{r}_{ACm_1} = \begin{Bmatrix} x_{Cm_1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_2}\vec{r}_{BCm_2} = \begin{Bmatrix} x_{Cm_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}^{B_3}\vec{r}_{DCm_3} = \begin{Bmatrix} x_{Cm_3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Para o centro de massa dos corpos, temos as seguintes posições lineares absolutas:

$${}^I\vec{r}_{OCm_1} = {}^I\vec{r}_{OA} + [T_{\theta_1}^T]_{B_1}\vec{r}_{ACm_1} \quad (3.25)$$

$${}^I\vec{r}_{OCm_2} = {}^I\vec{r}_{OA} + {}^I\vec{r}_{AB} + [T_{\theta_2}^T]_{B_2}\vec{r}_{BCm_2} \quad (3.26)$$

$${}^I\vec{r}_{OCm_3} = {}^I\vec{r}_{OD} + [T_{\theta_3}^T]_{B_3}\vec{r}_{DCm_3} \quad (3.27)$$

3.1.5.2 Análise de velocidade

Os vetores que descrevem a velocidade angular dos corpos são dados por:

$${}^I\vec{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}^I\vec{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad {}^I\vec{\omega}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A velocidade linear absoluta dos acoplamentos dos corpos é determinada baseando-se nas relações geométricas dos movimentos executados pelos mesmos. Utilizando os conceitos de sistema móvel de referência, pode-se escrever de forma geral, este vetor, pela equação 3.29:

$${}^I\vec{v}_i = {}^I\vec{v}_O + {}^I\vec{\omega}_i \times {}^I\vec{r}_i + {}^I\vec{v}_{irel} \quad (3.29)$$

Onde:

${}^I\vec{v}_i$ = velocidade linear no ponto "i";

${}^I\vec{v}_p$ = vetor velocidade linear absoluta de um ponto "O", onde a origem do sistema móvel está posicionada;

${}^I\vec{\omega}_i$ = velocidade angular da barra "i", obtida por meio do loop vetorial feito na seção 3.1.4;

${}^I\vec{r}_i$ = vetor posição do ponto da barra onde a origem do sistema móvel está posicionada até o ponto "i";

${}^I\vec{v}_{irel}$ = velocidade do ponto i relativa ao ponto O.

Para os pontos de acoplamento dos corpos, temos as seguintes velocidades lineares absolutas:

$${}^I\vec{v}_O = \vec{0} \quad (3.30)$$

$${}^I\vec{v}_A = {}^I\vec{v}_O + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{OA} + {}^I\vec{v}_{relA/O} \quad (3.31)$$

$${}^I\vec{v}_B = {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{AB} + {}^I\vec{v}_{relB/A} \quad (3.32)$$

$${}^I\vec{v}_C = {}^I\vec{v}_B + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BC} + {}^I\vec{v}_{relC/B} \quad (3.33)$$

$${}^I\vec{v}_D = {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}_3 \times {}^I\vec{r}_{AD} + {}^I\vec{v}_{relD/A} \quad (3.34)$$

Para o centro de massa dos corpos, temos as seguintes velocidades lineares absolutas:

$${}^I\vec{v}_{Cm_1} = {}^I\vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{ACm_1} + {}^I\vec{v}_{relCm_1/A} \quad (3.35)$$

$${}^I\vec{v}_{Cm_2} = {}^I\vec{v}_B + {}^I\vec{\omega}_2 \times {}^I\vec{r}_{BCm_2} + {}^I\vec{v}_{relCm_2/B} \quad (3.36)$$

$${}^I\vec{v}_{Cm_3} = {}^I\vec{v}_D + {}^I\vec{\omega}_3 \times {}^I\vec{r}_{DCm_3} + {}^I\vec{v}_{relCm_3/D} \quad (3.37)$$

3.1.5.3 Análise de aceleração

A aceleração linear absoluta dos acoplamentos dos corpos é determinada baseando-se nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos. Utilizando os conceitos de sistema móvel de referência, pode-se escrever de forma geral, este vetor, pela equação 3.38:

$${}^I\vec{a}_i = {}^I\vec{a}_O + {}^I\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^I\vec{r}_i + {}^I\vec{\omega}_i \times ({}^I\vec{\omega}_i \times {}^I\vec{r}_i) + 2{}^I\vec{\omega}_i \times {}^I\vec{v}_{rel} + {}^I\vec{a}_{rel} \quad (3.38)$$

Onde:

${}^I\vec{a}_i$ = aceleração linear no ponto "i";

${}^I\vec{a}_O$ = vetor aceleração linear absoluta de um ponto "O", onde a origem do sistema móvel está posicionada;

${}^I\dot{\vec{\omega}}_i$ = aceleração angular da barra "i", obtida na seção 3.1.4;

${}^I\vec{r}_i$ = vetor posição do ponto da barra onde a origem do sistema móvel está posicionada até o ponto "i";

${}^I\vec{\omega}_i$ = velocidade angular da barra "i";

${}^I\vec{v}_{rel}$ = velocidade do ponto i relativa ao ponto O;

${}^I\vec{a}_{rel}$ = aceleração do ponto i relativa ao ponto O.

Para os pontos de acoplamento dos corpos, temos as seguintes acelerações lineares absolutas:

$${}^I\vec{a}_O = \vec{0} \quad (3.39)$$

$${}^I\vec{a}_A = {}^I\vec{a}_O + {}^I\dot{\vec{\omega}}_1 \times {}^I\vec{r}_{OA} + {}^I\vec{\omega}_1 \times ({}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{r}_{OA}) + 2{}^I\vec{\omega}_1 \times {}^I\vec{v}_{relA/O} + {}^I\vec{a}_{relA/O} \quad (3.40)$$

$${}^I\vec{a}_B = {}^I\vec{a}_A + I\dot{\vec{\omega}}_1 \times I\vec{r}_{AB} + I\vec{\omega}_1 \times (I\vec{\omega}_1 \times I\vec{r}_{AB}) + 2I\vec{\omega}_1 \times I\vec{v}_{relB/A} + I\vec{a}_{relB/A} \quad (3.41)$$

$${}^I\vec{a}_C = {}^I\vec{a}_B + I\dot{\vec{\omega}}_2 \times I\vec{r}_{BC} + I\vec{\omega}_2 \times (I\vec{\omega}_2 \times I\vec{r}_{BC}) + 2I\vec{\omega}_2 \times I\vec{v}_{relC/B} + I\vec{a}_{relC/B} \quad (3.42)$$

$${}^I\vec{a}_D = {}^I\vec{a}_A + I\dot{\vec{\omega}}_3 \times I\vec{r}_{AD} + I\vec{\omega}_3 \times (I\vec{\omega}_3 \times I\vec{r}_{AD}) + 2I\vec{\omega}_3 \times I\vec{v}_{relD/A} + I\vec{a}_{relD/A} \quad (3.43)$$

Para o centro de massa dos corpos, temos os seguintes vetores de aceleração linear absoluta:

$${}^I\vec{a}_{Cm_1} = {}^I\vec{a}_A + I\dot{\vec{\omega}}_1 \times I\vec{r}_{ACm_1} + I\vec{\omega}_1 \times (I\vec{\omega}_1 \times I\vec{r}_{ACm_1}) + 2I\vec{\omega}_1 \times I\vec{v}_{relCm_1/A} + I\vec{a}_{relCm_1/A} \quad (3.44)$$

$${}^I\vec{a}_{Cm_2} = {}^I\vec{a}_B + I\dot{\vec{\omega}}_2 \times I\vec{r}_{BCm_2} + I\vec{\omega}_2 \times (I\vec{\omega}_2 \times I\vec{r}_{BCm_2}) + 2I\vec{\omega}_2 \times I\vec{v}_{relCm_2/B} + I\vec{a}_{relCm_2/B} \quad (3.45)$$

$${}^I\vec{a}_{Cm_3} = {}^I\vec{a}_D + I\dot{\vec{\omega}}_3 \times I\vec{r}_{DCm_3} + I\vec{\omega}_3 \times (I\vec{\omega}_3 \times I\vec{r}_{DCm_3}) + 2I\vec{\omega}_3 \times I\vec{v}_{relCm_3/D} + I\vec{a}_{relCm_3/D} \quad (3.46)$$

Substituindo os termos das equações acima, tem-se as expressões:

$${}^I\vec{a}_{Cm_1} = \begin{Bmatrix} a_{xCm_1} \\ a_{yCm_1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_{Cm_1} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \ddot{\theta}_1 x_{Cm_1} \sin \theta_1 \\ -x_{Cm_1} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_1 x_{Cm_1} \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$${}^I\vec{a}_{Cm_2} = \begin{Bmatrix} a_{xCm_2} \\ a_{yCm_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - x_{Cm_2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - \ddot{\theta}_2 x_{Cm_2} \sin \theta_2 + L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - x_{Cm_2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \ddot{\theta}_2 x_{Cm_2} \cos \theta_2 - L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$${}^I\vec{a}_{Cm_3} = \begin{Bmatrix} a_{xCm_3} \\ a_{yCm_3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_{Cm_3} \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 - \ddot{\theta}_3 x_{Cm_3} \sin \theta_3 \\ -x_{Cm_3} \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + \ddot{\theta}_3 x_{Cm_3} \cos \theta_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Ao final da modelagem matemática pela análise cinemática do sistema mecânico, serão obtidas as velocidades e acelerações angulares e as velocidades e acelerações lineares dos centros de massa das barras. Como já visto anteriormente, a obtenção destas variáveis é fundamental para se escrever a equação de movimento que governa o mecanismo proposto.

3.1.6 Análise dinâmica

As equações de equilíbrio dinâmico, baseadas nas leis de Newton-Euler, conforme (SANTOS, 2001), foram escritas para cada uma das barras usando o diagrama de corpo livre. A parte dinâmica do método baseia-se fundamentalmente nas equações 3.50 e 3.51.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_{CM_i} \quad (3.50)$$

$$\sum_{i=1}^N {}_{Bn} \mathbf{M}_i = {}_{Bn} \mathbf{I}_i {}_{Bn} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}_{Bn} \boldsymbol{\omega}_i \times ({}_{Bn} \mathbf{I}_i {}_{Bn} \boldsymbol{\omega}_i) + m_i ({}_{Bn} \mathbf{r}_{CM_i} \times {}_{Bn} \mathbf{a}_i) \quad (3.51)$$

Onde:

\mathbf{F}_i = resultante das forças que agem sobre cada barra "i";

m_i = massa da barra "i";

\mathbf{a}_{CM} = aceleração do centro de massa da barra "i";

\mathbf{M}_i = momentos externos em relação a origem da base local posicionada na barra "i";

\mathbf{I}_i = momento polar de inércia de cada barra "i";

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ = aceleração angular de cada barra "i";

$\boldsymbol{\omega}_i$ = velocidade angular de cada barra "i";

\mathbf{r}_{CM_i} = posição do centro de massa da barra "i" em relação à origem do sistema de coordenadas local;

\mathbf{a}_i = aceleração na origem da base em que está a barra "i".

O momento de inércia de massa de cada barra e a localização do centro de gravidade foram expressos em função da geometria e da massa respectiva de cada barra.

$${}^1 \mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} {}^1 \mathbf{I}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1 \mathbf{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}^1 \mathbf{I}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_1 e_1^2 + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 (e_1^2 + b_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_1 b_1^2 + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$${}^2 \mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} {}^2 \mathbf{I}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}^2 \mathbf{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}^2 \mathbf{I}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_2 e_2^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_2 (e_2^2 + b_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_2 b_2^2 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$${}^3\mathbf{I}_D = \begin{bmatrix} {}^3\mathbf{I}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}^3\mathbf{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}^3\mathbf{I}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_3e_3^2 + \frac{1}{3}m_3L_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m_3(e_3^2 + b_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_3b_3^2 + \frac{1}{3}m_3L_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Onde:

${}^1\mathbf{I}_A$: tensor de inércia da barra 1 relativo à base local b_1 posicionada no ponto A;

${}^2\mathbf{I}_B$: tensor de inércia da barra 2 relativo à base local b_2 posicionada no ponto B;

${}^3\mathbf{I}_D$: tensor de inércia da barra 3 relativo à base local b_3 posicionada no ponto D;

m_i : massa da barra "i";

L_i : comprimento da barra "i";

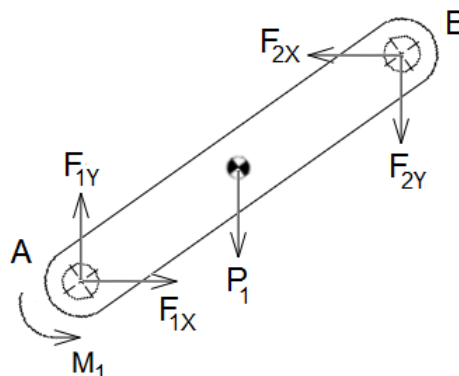
b_i : largura da barra "i";

e_i : espessura da barra "i".

Através do diagrama de corpo livre de cada uma das barras, pode-se escrever suas respectivas equações de equilíbrio dinâmico.

Para a barra acionadora ou manivela, cujo comprimento é dado por L_1 e o diagrama de corpo livre é ilustrado na Figura 3.4, temos:

Figura 3.4 – Diagrama de corpo livre da barra manivela.



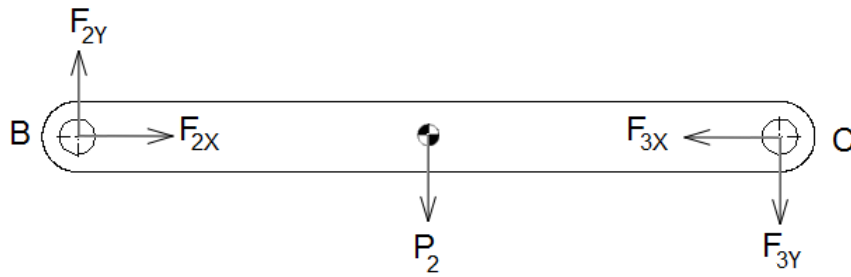
Fonte: Do autor.

$${}^1\vec{F}_1 + {}^1\vec{P}_1 - {}^1\vec{F}_2 = m_1 {}^1\vec{a}_{Cm1} \quad (3.55)$$

$${}_{B_1}\vec{M}_1 + {}_{B_1}\vec{r}_{ACm_1} \times {}_{B_1}\vec{P}_1 + {}_{B_1}\vec{r}_{AB} \times -{}_{B_1}\vec{F}_2 = {}_{B_1}I_{AB_1}\dot{\vec{\omega}}_1 + {}_{B_1}\vec{\omega}_1 \times ({}_{B_1}I_{AB_1}\vec{\omega}_1) + m_1{}_{B_1}\vec{r}_{ACm_1} \times {}_{B_1}\vec{a}_A \quad (3.56)$$

Para a barra acopladora, cujo comprimento é dado por L_2 e o diagrama de corpo livre é ilustrado na Figura 3.5, temos:

Figura 3.5 – Diagrama de corpo livre da barra acopladora.



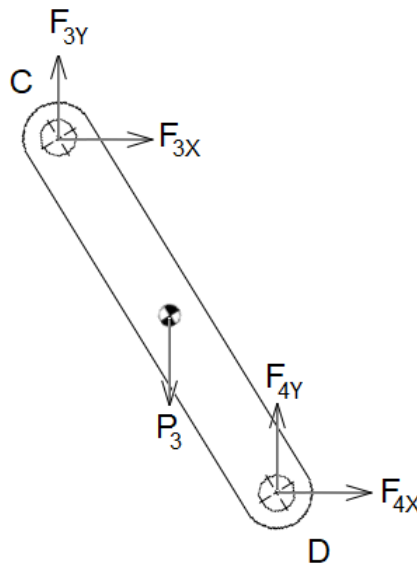
Fonte: Do autor.

$${}_I\vec{F}_2 + {}_I\vec{P}_2 - {}_I\vec{F}_3 = m_2{}_I\vec{a}_{Cm_2} \quad (3.57)$$

$${}_{B_2}\vec{r}_{BCm_2} \times {}_{B_2}\vec{P}_2 + {}_{B_2}\vec{r}_{BC} \times -{}_{B_2}\vec{F}_3 = {}_{B_2}I_{BC_2}\dot{\vec{\omega}}_2 + {}_{B_2}\vec{\omega}_2 \times ({}_{B_2}I_{BC_2}\vec{\omega}_2) + m_2{}_{B_2}\vec{r}_{BCm_2} \times {}_{B_2}\vec{a}_B \quad (3.58)$$

Para a barra seguidora, cujo comprimento é dado por L_3 e o diagrama de corpo livre é ilustrado na Figura 3.6, temos:

Figura 3.6 – Diagrama de corpo livre da barra seguidora.



Fonte: Do autor.

$${}_I\vec{F}_3 + {}_I\vec{P}_3 + {}_I\vec{F}_4 = m_3{}_I\vec{a}_{Cm3} \quad (3.59)$$

$${}_{B_3}\vec{r}_{DCm_3} \times {}_{B_3}\vec{P}_3 + {}_{B_3}\vec{r}_{DB} \times {}_{B_3}\vec{F}_3 = {}_{B_3}I_{DB_3}\dot{\vec{\omega}}_3 + {}_{B_3}\vec{\omega}_3 \times ({}_{B_3}I_{DB_3}\vec{\omega}_3) + m_3{}_{B_3}\vec{r}_{DCm_3} \times {}_{B_3}\vec{a}_D \quad (3.60)$$

Sendo o vetor Momento da manivela e os vetores Peso dados por:

$${}_I\vec{M}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{P}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{P}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{P}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_3g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

E os vetores Força dados por:

$${}_I\vec{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{F}_3 = \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_I\vec{F}_4 = \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Como produto final do método, obtém-se um sistema com nove equações algébricas lineares, cujas incógnitas são as reações dinâmicas nos apoios ($F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, F_{3x}, F_{3y}, F_{4x}, F_{4y}$) e o momento de acionamento requerido (M_1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta_1 & L_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta_2 & L_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta_3 & -L_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \\ L \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Onde:

$$E = m_1 a_{xcm_1} \quad (3.64)$$

$$F = m_1 a_{y_{cm_1}} + m_1 g \quad (3.65)$$

$$G = {}_1 I_{zz} \ddot{\theta}_1 + m_1 g x_{cm_1} \cos \theta_1 \quad (3.66)$$

$$H = m_2 a_{x_{cm_2}} \quad (3.67)$$

$$I = m_2 a_{y_{cm_2}} + m_2 g \quad (3.68)$$

$$J = m_2 g x_{cm_2} + {}_2 I_{zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - m_2 x_{cm_2} L_1 (\cos \theta_2 (\sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1) \\ + \sin \theta_1 (\cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1)) \quad (3.69)$$

$$K = m_3 a_{x_{cm_3}} \quad (3.70)$$

$$L = m_3 a_{y_{cm_3}} + m_3 g \quad (3.71)$$

$$M = m_3 g x_{cm_3} (\cos \theta_3^2 - \sin \theta_3^2) + {}_3 I_{zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\ + m_3 x_{cm_3} (\cos \theta_3 (L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - L_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ + \sin \theta_3 (L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + L_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + L_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2)) \quad (3.72)$$

3.2 Implementação computacional

O modelo desenvolvido do mecanismo de quatro barras foi simulado para a análise e comparação de resultados. Através da técnica de implementação computacional, a validação do modelo matemático pode ser feita comparando os resultados das simulações nos softwares SOLIDWORKS e MATLAB.

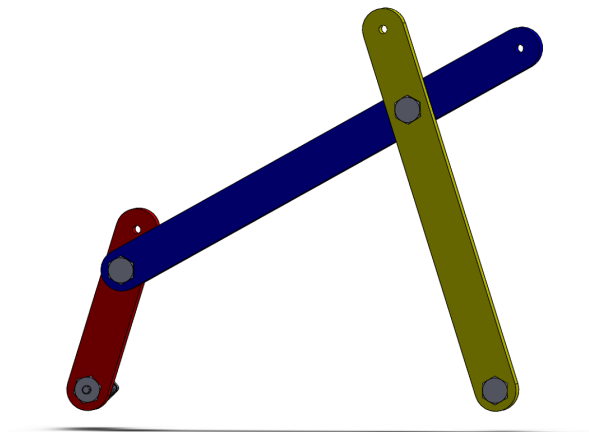
As considerações iniciais de projeto, os dados geométricos utilizados com as respectivas dimensões do mecanismo, bem como as propriedades do material escolhido são fornecidos para que, a partir desses dados, o mecanismo possa ser implementado computacionalmente.

O mecanismo projetado foi implementado geometricamente no SOLIDWORKS, conforme ilustra a Figura 3.7(a). Para este caso, o estudo do movimento foi feito através da análise dinâmica direta, na qual a equação diferencial que rege o movimento do mecanismo é determinada em função dos carregamentos aplicados. Com o SOLIDWORKS também foi possível esboçar o projeto inicial da bancada experimental.

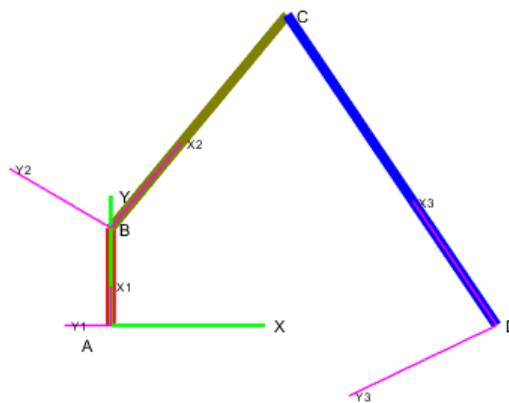
Posteriormente, teve seu modelo analítico implementado no programa computacional científico MATLAB, utilizando a análise de dinâmica inversa, na qual se determinam as for-

ças e momentos que atuam no sistema a partir da cinemática e das propriedades inerciais dos corpos envolvidos (FLORES; CLARO, 2007). Com o MATLAB também foi possível simular graficamente o mecanismo, conforme ilustra a Figura 3.7(b).

Figura 3.7 – Mecanismo de quatro barras



(a) (SOLIDWORKS, 2017).



(b) (MATLAB, 2016).

3.2.1 Considerações iniciais

Dentre os parâmetros necessários para a construção da bancada experimental, o material escolhido para a fabricação das barras e da estrutura da bancada foi o alumínio em função de seu peso reduzido e bom custo-benefício, além de ser o tipo de material mais utilizado em bancadas didáticas presentes atualmente no mercado, como observado nas marcas (FESTO, 2017), (SOMA, 2019), (ASTRAL, 2019) e (LABTRIX, 2018).

Adotou-se uma velocidade angular de entrada da barra manivela de $\omega_1 = 30rpm$ constante, cujo acionamento é feito por um motor. Os demais parâmetros gerais necessários para

simulação computacional do mecanismo de quatro barras que será instalado na bancada experimental estão representados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Parâmetros Gerais de Simulação

Descrição	Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Largura das barras	b	50	mm
Espessura das barras	e	20	mm
Densidade do material	ρ	2710	kg/m ³
Aceleração da gravidade	g	9.81	m/s ²

Fonte: Do autor.

Para obter um movimento contínuo do mecanismo, o projeto das barras foi feito obedecendo o princípio da Lei de Grashof. A Lei de Grashof é uma fórmula utilizada para analisar o tipo de movimento que fará o mecanismo de quatro barras: para que exista um movimento contínuo entre as barras, a soma da barra mais curta e a barra mais longa não pode ser maior que a soma das barras restantes.

Segundo (MYSZKA, 2011), sendo S e L, respectivamente, os comprimentos da barra menor e da maior, P e Q, os comprimentos das demais barras.

$$S + L \leq P + Q \quad (3.73)$$

Se a condição descrita for atendida, o mecanismo será do tipo Grashof, e a menor das barras, ao funcionar, poderão girar 360° em relação ao plano fixo do sistema.

Fixando-se as peças diferentes em sequência, ou seja, invertendo a base, pode-se criar uma variedade de mecanismos com diferentes características de transmissão. A técnica é útil para o desenvolvimento de mecanismos novos ou solução de problemas da síntese e análise cinemática.

Dentre as muitas formas de fixação possíveis, quatro configurações foram escolhidas para simulação e análise, das quais duas formam mecanismos de movimento contínuo, em que pelo menos uma das barras gira 360°, e duas formam mecanismos de movimento não contínuo ou oscilatório. As configurações são as que seguem:

- Dupla Manivela: quando a barra mais curta é a fixa, as duas barras que lhe são adjacentes podem rodar continuamente.
- Manivela Balancim: quando a barra de menor comprimento for a manivela (volta completa) e qualquer uma das barras adjacentes a barra de menor comprimento for fixa.

- Duplo seguidor: quando nenhuma das barras é capaz de girar 360° , ou seja, a manivela e a barra seguidora tem movimento oscilatório. Essa configuração possibilita alcançar amplitudes maiores ou menores a depender da necessidade da aplicação. Para demonstrar essa particularidade, essa configuração foi simulada com 2 composições diferentes de barras.

As dimensões escolhidas para simulação do modelo, que respeitam a Lei de Grashof estão contidas nas Tabelas 3.2 e 3.3. O Parâmetro L_1 representa o comprimento da Manivela, L_2 representa o comprimento do Acoplador, L_3 representa o comprimento do Seguidor e L_4 representa o comprimento da barra fixa.

Tabela 3.2 – Dimensões dos Mecanismos de Quatro Barras de Movimento Contínuo

Parâmetro	Dupla Manivela	Manivela Balancim
Comprimento da Manivela (L_1)	450 mm	150 mm
Comprimento do Acoplador (L_2)	350 mm	400 mm
Comprimento do Seguidor (L_3)	550 mm	300 mm
Comprimento da barra fixa (L_4)	200 mm	500 mm

Fonte: Do autor.

Tabela 3.3 – Dimensões dos Mecanismos de Quatro Barras de Movimento Oscilatório

Parâmetro	Duplo Balancim (Caso 1)	Duplo Balancim (Caso 2)
Comprimento da Manivela (L_1)	450 mm	450 mm
Comprimento do Acoplador (L_2)	200 mm	250 mm
Comprimento do Seguidor (L_3)	550 mm	550 mm
Comprimento da barra fixa (L_4)	350 mm	600 mm

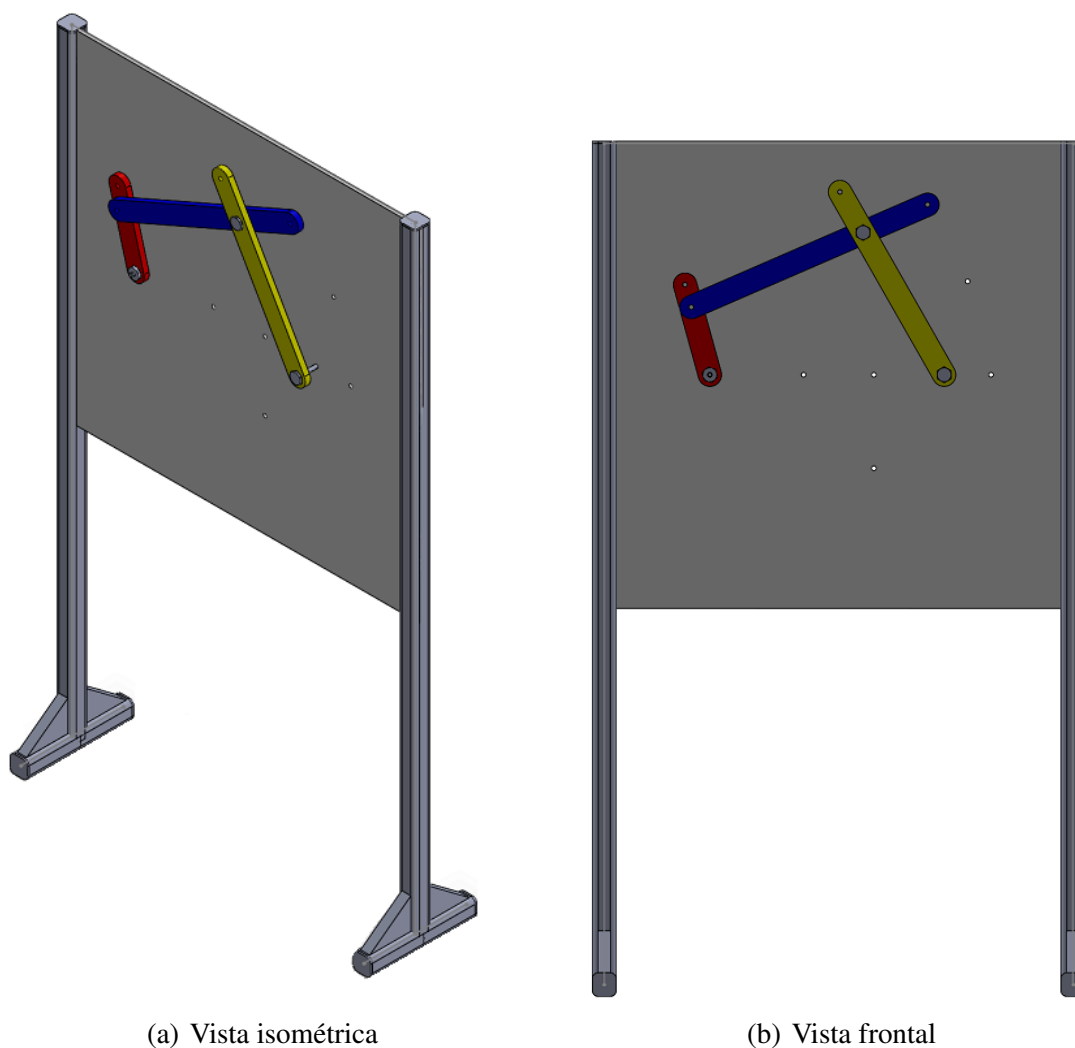
Fonte: Do autor.

3.2.1.1 Projeto conceitual da bancada didática

Foi esboçado um desenho da bancada didática no software SOLIDWORKS para servir de referência para um modelo a ser construído, conforme ilustra as Figuras 3.8(a) e 3.8(b). A bancada projetada é constituída de três partes principais: a lateral composta pelos pés de apoio, a placa de suporte e o mecanismo acoplado nesta.

Inicialmente, foram dimensionadas as barras necessárias para atender a simulação das diferentes configurações aqui previstas para o mecanismo de quatro barras, que são: o mecanismo de dupla manivela, manivela balancim, duas configurações diferentes do duplo seguidor e de duas aplicações escolhidas (limpador de para-brisas e abertura do compartimento do motor do carro).

Figura 3.8 – Esboço da bancada experimental de um mecanismo de quatro barras (SOLIDWORKS).

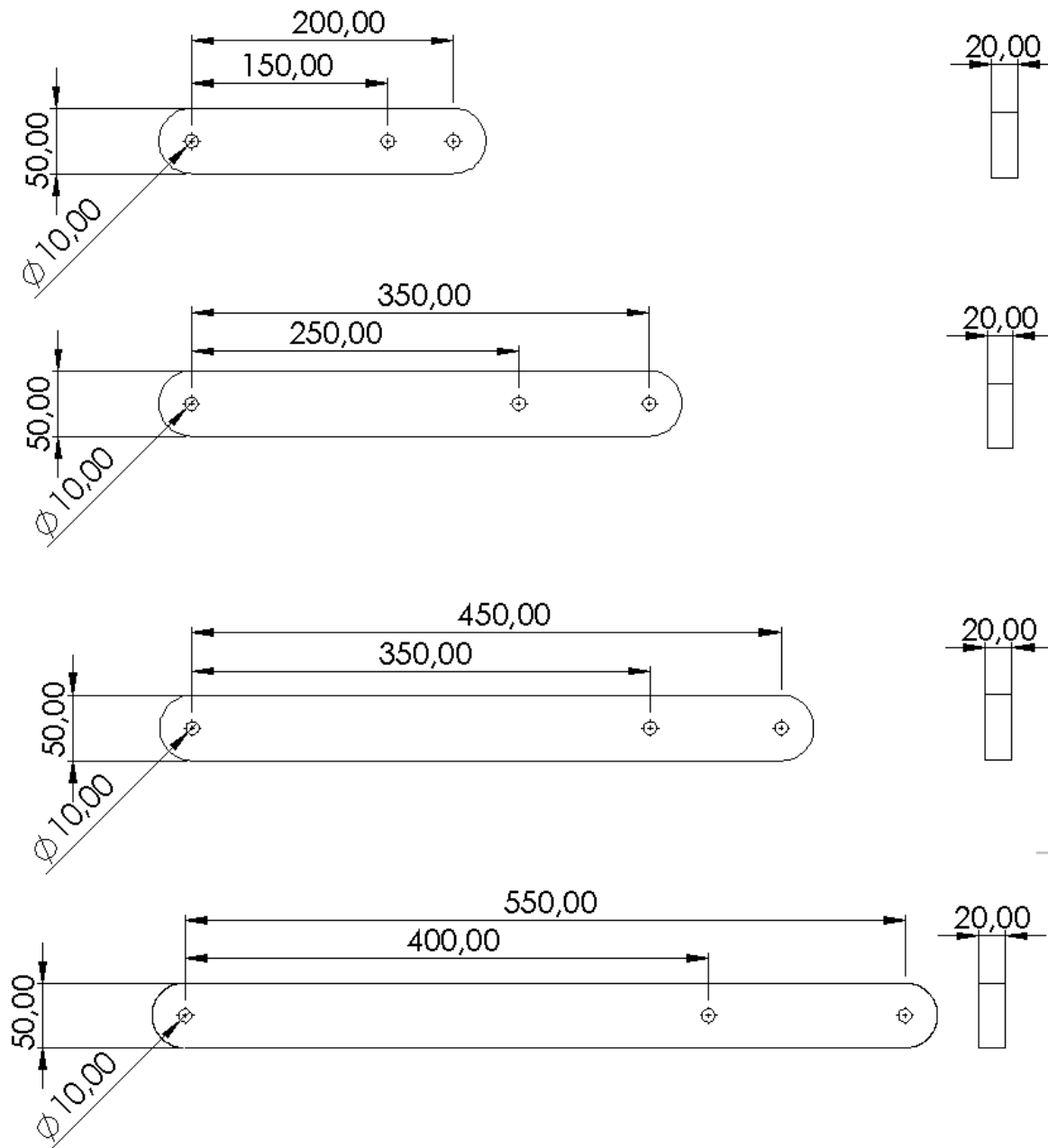


Para maior otimização da quantidade de material necessário para a construção das barras e na praticidade da bancada, as barras foram perfuradas em diferentes pontos, de modo que ao modificar apenas a posição das articulações, as diversas configurações de mecanismos citados acima podem ser construídas. Estas estão representadas com suas dimensões pela Figura 3.9.

Após estabelecer a dimensão das barras, foi feito o projeto da placa de suporte do mecanismo com os pontos necessários para acoplar as barras nos diferentes tipos de configuração de mecanismos. A placa está representada na Figura 3.10(a) e suas dimensões na Figura 3.10(b).

Quando necessária rotação completa da barra manivela, um motor elétrico estará disposto no ponto de acionamento representado abaixo na Figura 3.11, fixado na placa suporte por 4 parafusos M5.

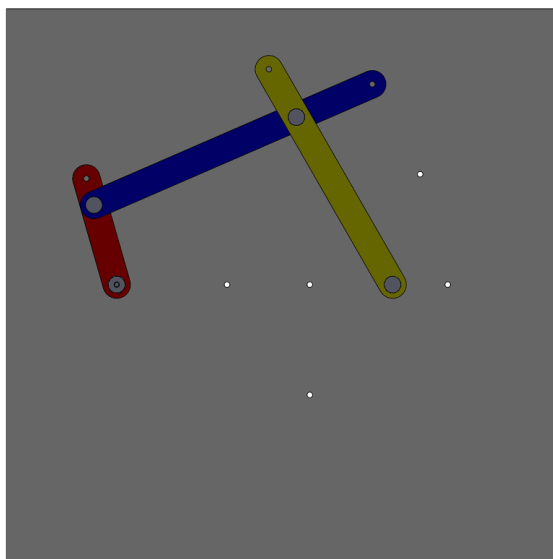
Figura 3.9 – Dimensão das barras [mm]



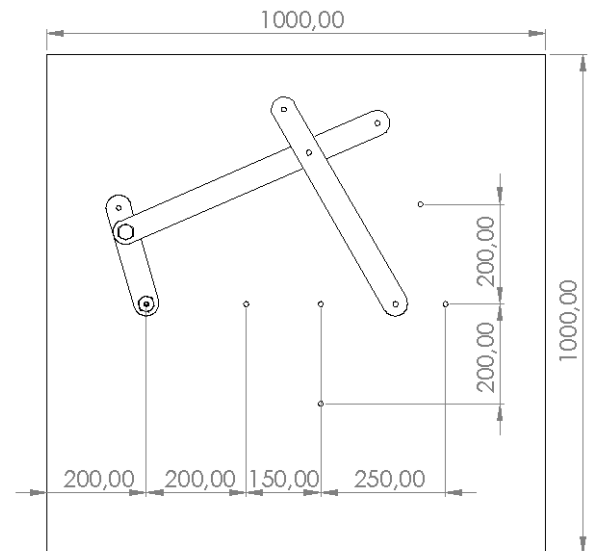
Fonte: Do autor.

A conexão entre o motor e a barra manivela será feita através de uma porca junto ao eixo roscado do motor, que por pressão, possibilitará a transmissão do movimento de rotação à manivela, como ilustrado nas Figuras 3.12(a) e 3.12(b).

Figura 3.10 – Placa de suporte do mecanismo da bancada experimental.

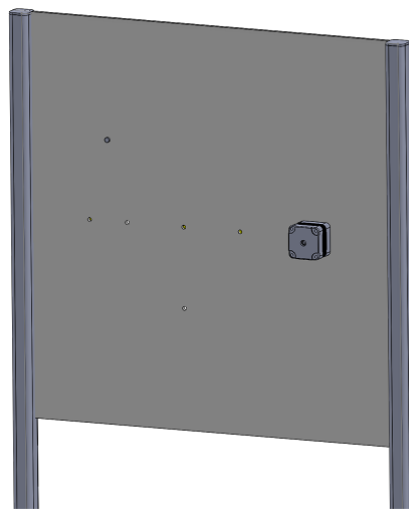


(a) Placa suporte do mecanismo

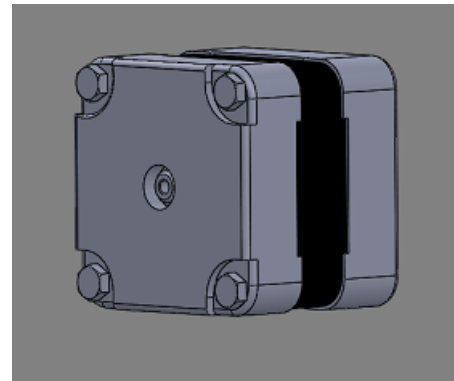


(b) Dimensões da placa suporte do mecanismo

Figura 3.11 – Esquema representando a fixação do motor de acionamento da manivela.



(a) Vista posterior da bancada



(b) Detalhe fixação do motor

Para a conexão entre as barras, evitando o movimento relativo entre elas, será utilizado um parafuso de união que está representado nas Figuras 3.13(a) e 3.13(b).

Por fim, foram esboçadas as laterais de apoio de maneira a facilitar o uso da bancada didaticamente, como apresentada na Figura 3.14 com suas dimensões sugeridas.

Figura 3.12 – Esquema representando a fixação do motor de acionamento da manivela.

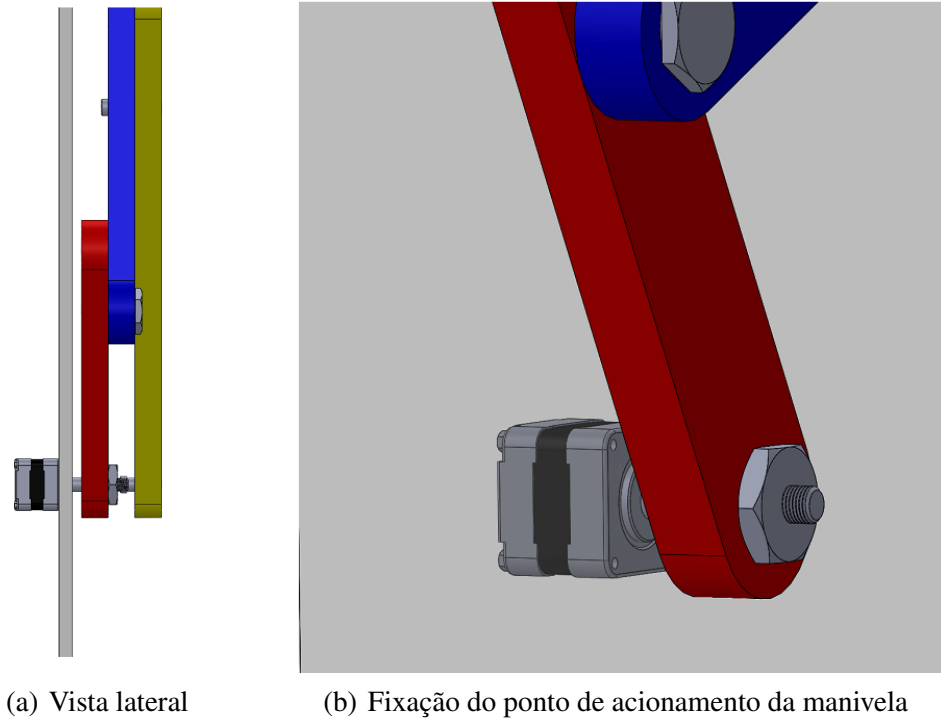


Figura 3.13 – Representação da conexão entre as barras .

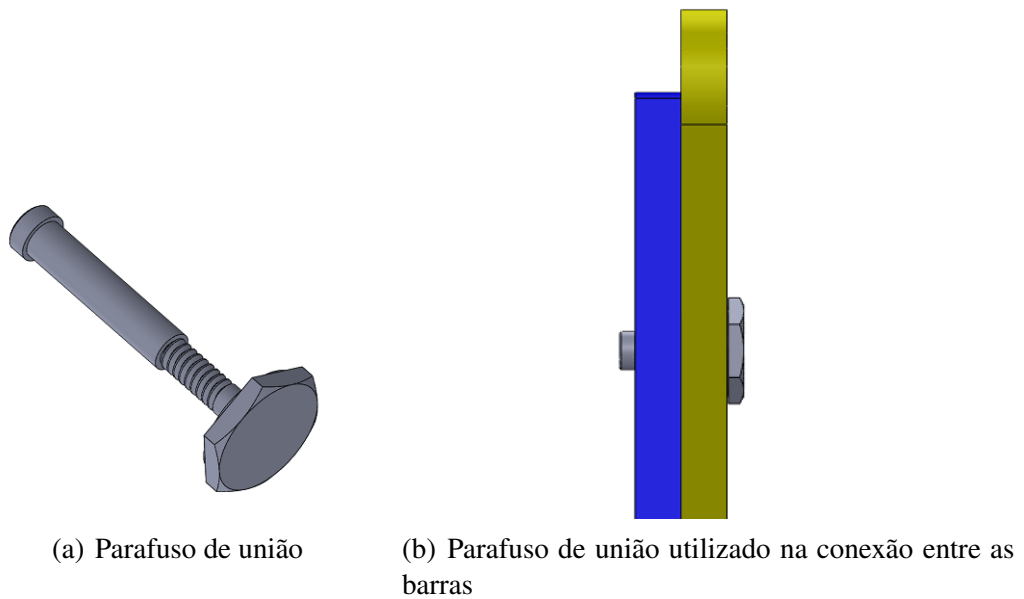
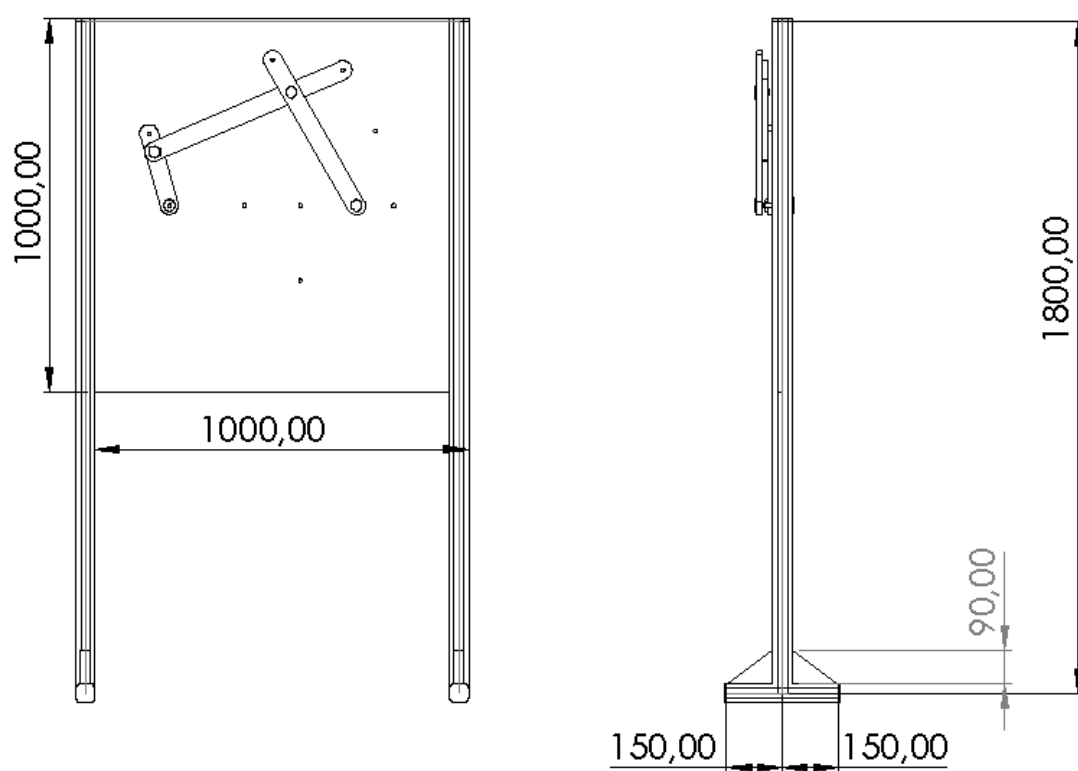


Figura 3.14 – Laterais de apoio da bancada didática

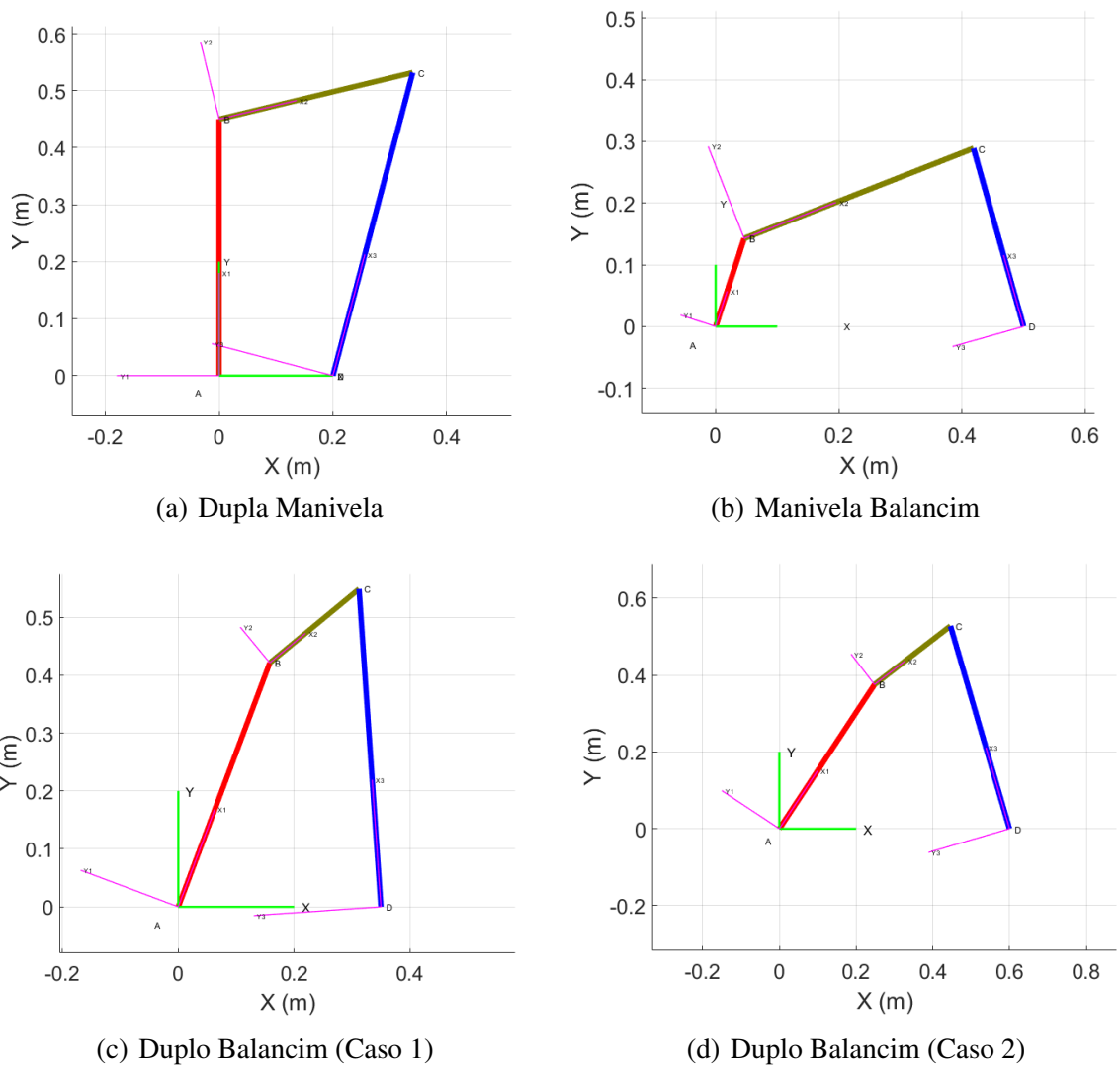


Fonte: Do autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram feitas diversas análises computacionais do modelo teórico com diferentes configurações para o mecanismo de quatro barras. Inicialmente, quatro configurações diferentes foram empregadas, dupla manivela (Figura 4.1(a)), manivela balancim (Figura 4.1(b)) e dois casos de Duplo Balancim (Figuras 4.1(c) e 4.1(d)) para a análise que possibilita identificar as magnitudes de parâmetros cinemáticos e dinâmicos. Além de possibilitar a análise do comportamento dos esforços atuantes no mecanismo para dimensionamento dos componentes visando que a bancada possa servir de aplicação a simulação de uma grande variedade de mecanismos diferentes.

Figura 4.1 – Simulação Gráfica dos Mecanismos: a) Dupla Manivela, b) Manivela Balancim, c) Duplo Balancim (Caso 1) e d) Duplo Balancim (Caso 2).



4.1 Comparação Cinemática: MATLAB vs SOLIDWORKS

Os gráficos 4.2 a 4.10 correspondem às posições, velocidades e acelerações das barras manivela, acopladora e seguidora obtidos da simulação do mecanismo Dupla Manivela no software MATLAB e no SOLIDWORKS, respectivamente.

Figura 4.2 – Gráficos de posição angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS.

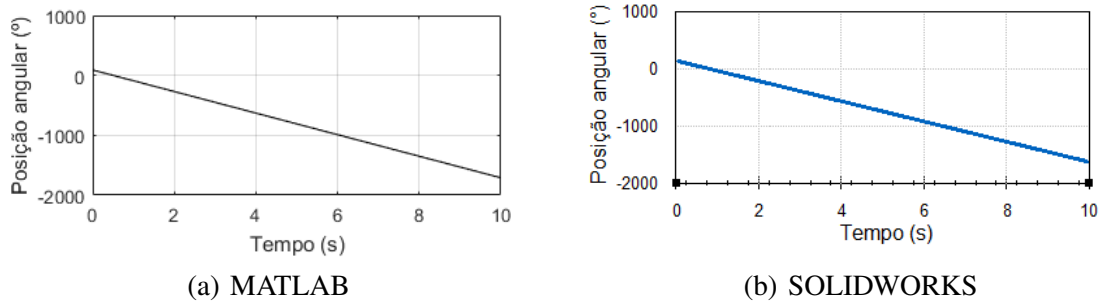


Figura 4.3 – Gráficos de Velocidade angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

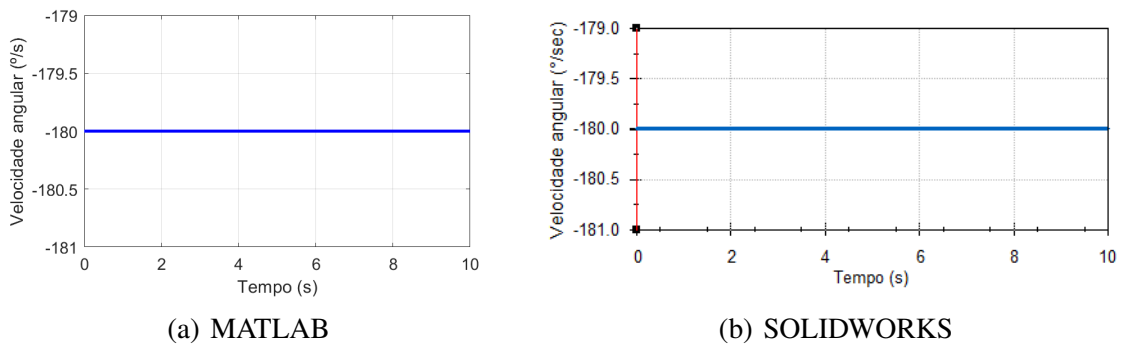
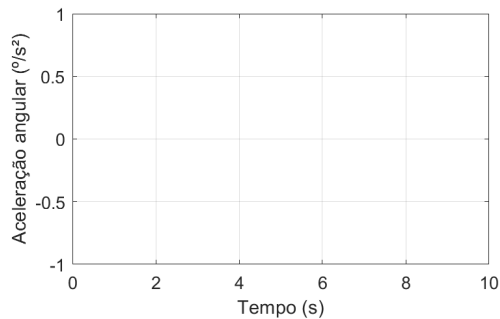
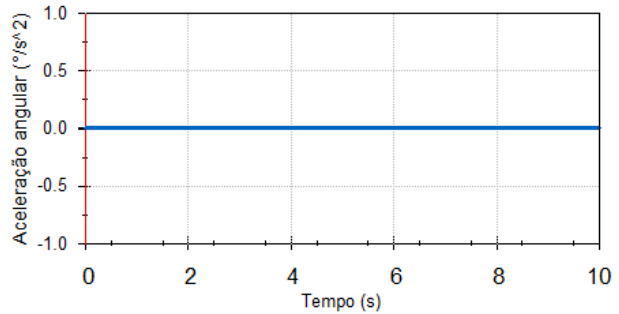


Figura 4.4 – Gráficos de aceleração angular da barra 1 (manivela) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

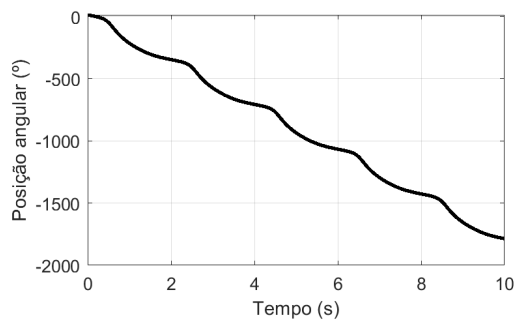


(a) MATLAB

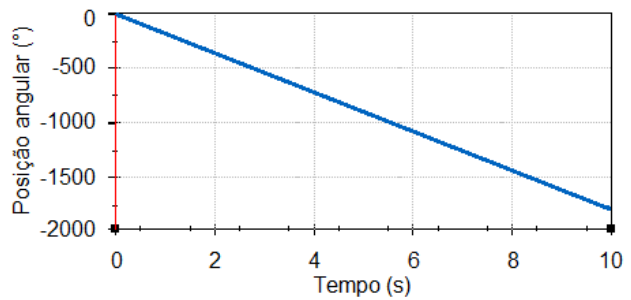


(b) SOLIDWORKS

Figura 4.5 – Gráficos de posição angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

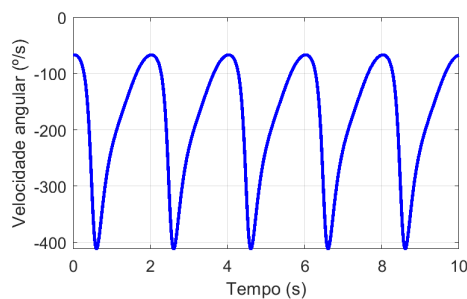


(a) MATLAB

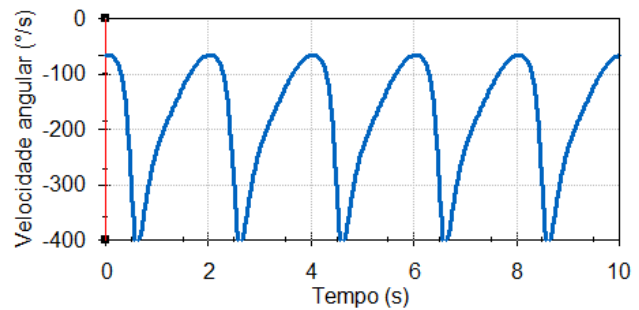


(b) SOLIDWORKS

Figura 4.6 – Gráficos de Velocidade angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .



(a) MATLAB



(b) SOLIDWORKS

Figura 4.7 – Gráficos de aceleração angular da barra 2 (acopladora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

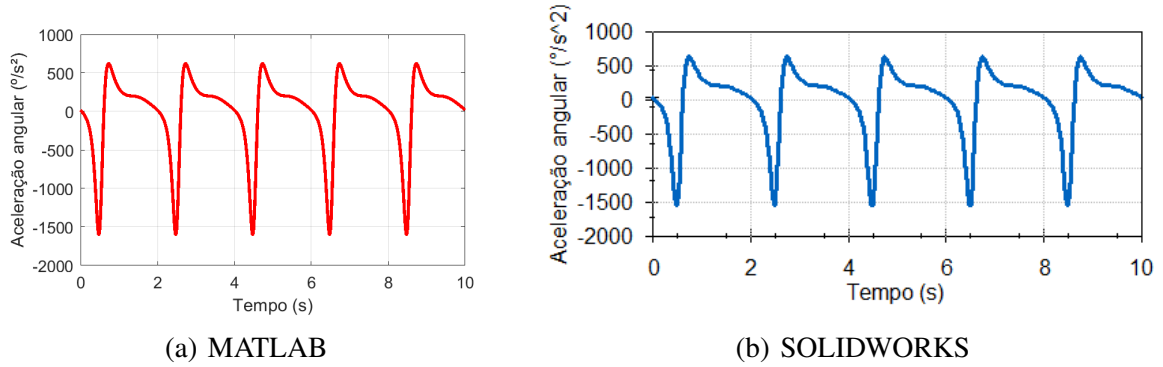


Figura 4.8 – Gráficos de posição angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

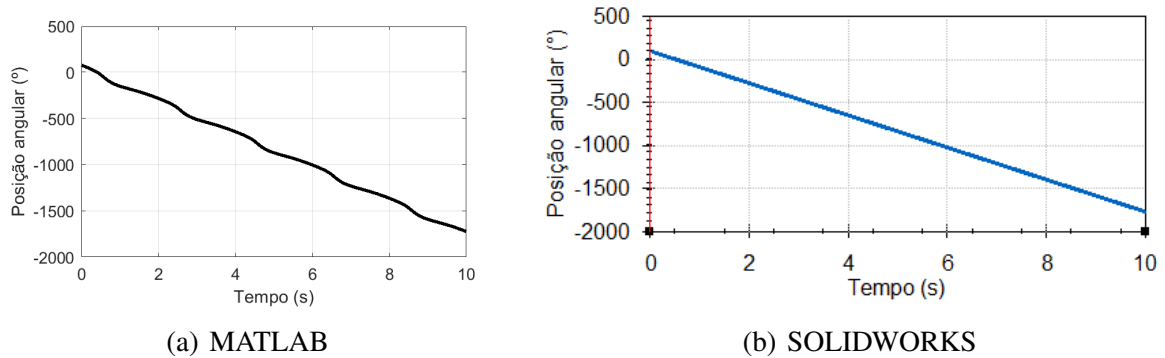


Figura 4.9 – Gráficos de velocidade angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .

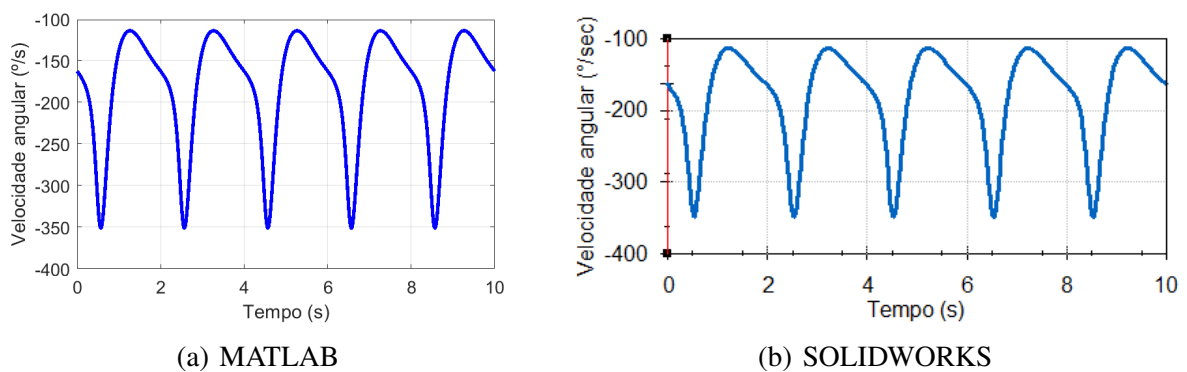
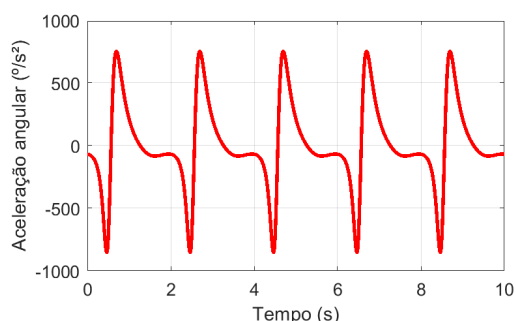
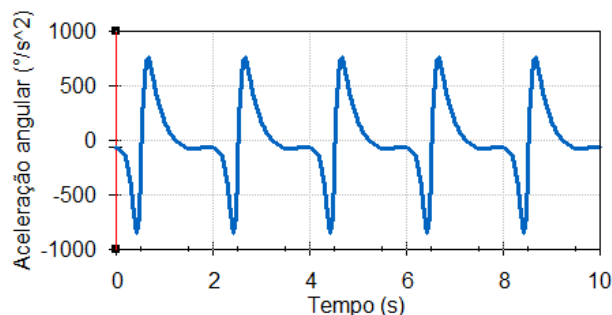


Figura 4.10 – Gráficos de aceleração angular da barra 3 (seguidora) do Mecanismo Dupla Manivela simulados nos softwares: a) MATLAB e b) SOLIDWORKS .



(a) MATLAB



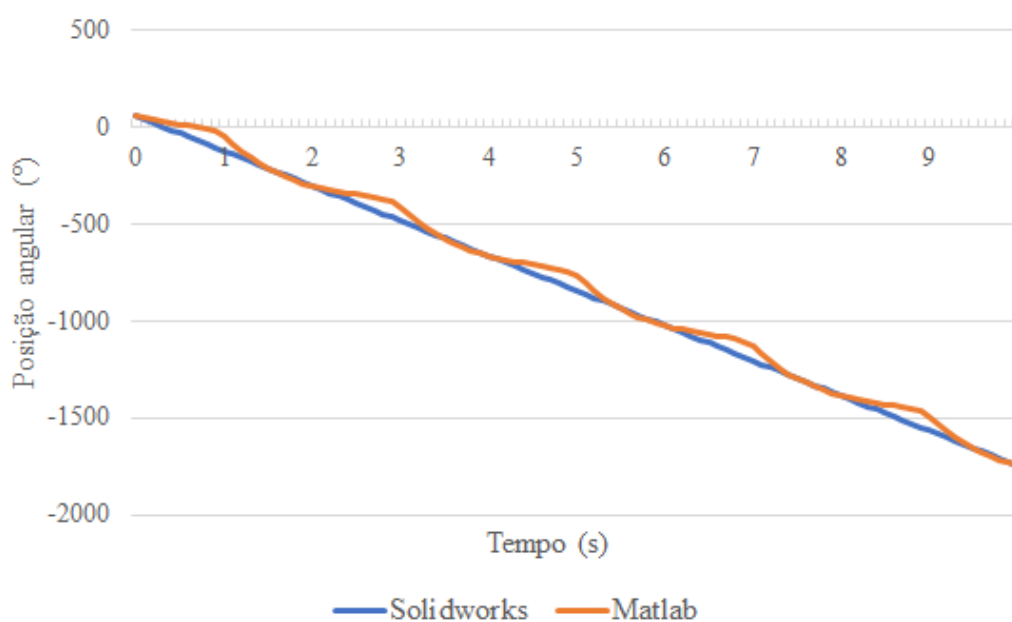
(b) SOLIDWORKS

Pela plotagem dos gráficos em igual escala para o Mecanismo de Dupla Manivela, pode-se observar que o modelo desenvolvido é válido, uma vez que as posições, velocidades e acelerações implementadas de forma analítica e geométrica geraram resultados semelhantes.

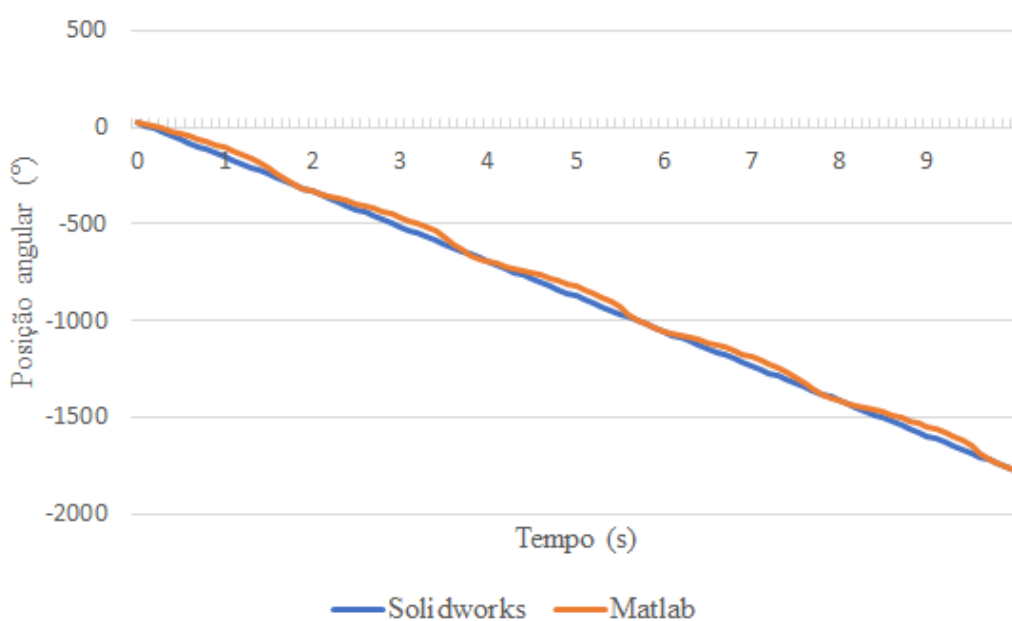
Os gráficos de posição das barras acopladora (Figura 4.5) e seguidora (Figura 4.8) simulados no MATLAB e SOLIDWORKS apresentam certa diferença. Na simulação gráfica, as posições angulares secundárias θ_2 e θ_3 , são obtidas no MATLAB pelo método numérico de Newton-Raphson, que estima essas posições num dado instante de tempo a partir da estimativa inicial da posição angular dessas barras. Assim, o resultado gráfico dessas posições gerado no MATLAB apresenta sensibilidade ao método numérico e às estimativas, motivando a dessemelhança. Já no SOLIDWORKS, a análise por dinâmica direta possibilita a obtenção dessas posições de forma mais acertiva.

Para quantificar essa diferença, foi calculado a média das distâncias percentuais entre as curvas a partir dos pontos coletados, os quais estão listados no Apêndice A. Para a barra acopladora, os resultados foram semelhantes em 72% e para a barra seguidora obteve-se uma semelhança de 74 %.

As velocidades e acelerações angulares plotadas em função da variação do ângulo de entrada da manivela ilustra o caráter periódico, mas não harmônico, do movimento para os ciclos da manivela.



(a) Gráfico comparativo entre posições obtidas pelos softwares Matlab e Solidworks da barra aclopadora

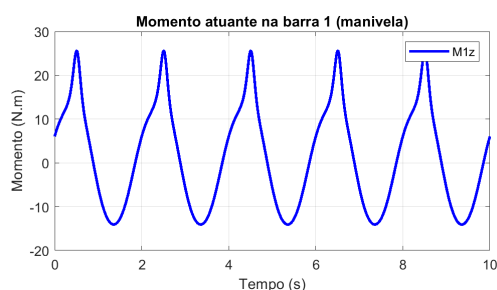


(b) Gráfico comparativo entre posições obtidas pelos softwares Matlab e Solidworks da barra seguidora

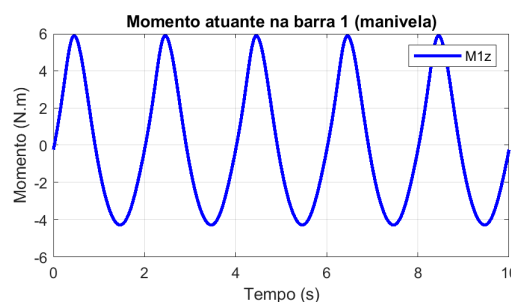
4.2 Diferenças Dinâmicas

Em face da dinâmica dos mecanismos, as simulações permitem extrair as reações dinâmicas geradas com o movimento. Os gráficos 4.11(c) e 4.11(d) representam o momento atuante na manivela dos Mecanismos Dupla Manivela e Manivela Balancim.

Figura 4.11 – Gráficos do Momento atuante na manivela dos Mecanismos: a) Dupla Manivela e b) Manivela Balancim.



(c) Dupla Manivela



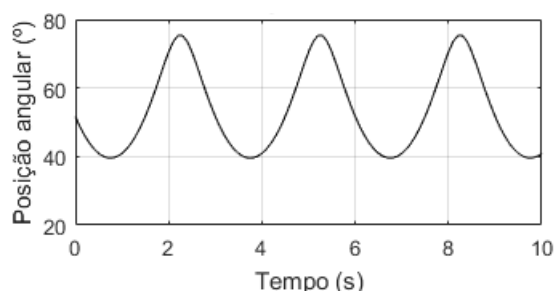
(d) Manivela Balancim

Ao analisar as reações dinâmicas de dois mecanismos diferentes, observa-se que no mecanismo Dupla Manivela, em que a manivela apresenta comprimento maior ($L_1 = 450\text{mm}$) que na configuração do mecanismo Manivela Balancim ($L_1 = 150\text{mm}$), o momento necessário para acionar a barra manivela é maior, assim como o esperado.

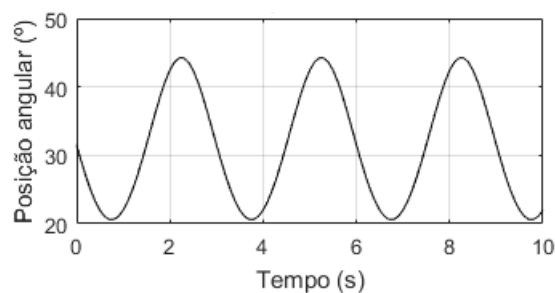
4.3 Geração de Trajetórias

Além da cinética e dinâmica, as trajetórias que percorrem os mecanismos devem ser consideradas ao escolher a configuração ideal para atender as necessidades de uma aplicação. Foram simuladas duas composições diferentes para o mecanismo Duplo Balancim, e com a trajetória gerada para cada um deles em um ponto específico, no caso o ponto B, nota-se a diferença de alcance de cada um deles (Figura 4.12). O Caso 1 de Duplo Balancim atinge uma maior amplitude de movimento, identificada pelos pontos 1 a 1', quando comparado ao Caso 2, no qual o movimento dessa junta é mais limitado.

Figura 4.12 – Gráficos da posição angular da barra acopladora dos Mecanismos: a) Duplo Balancim (Caso 1) e b) Duplo Balancim (Caso 2).

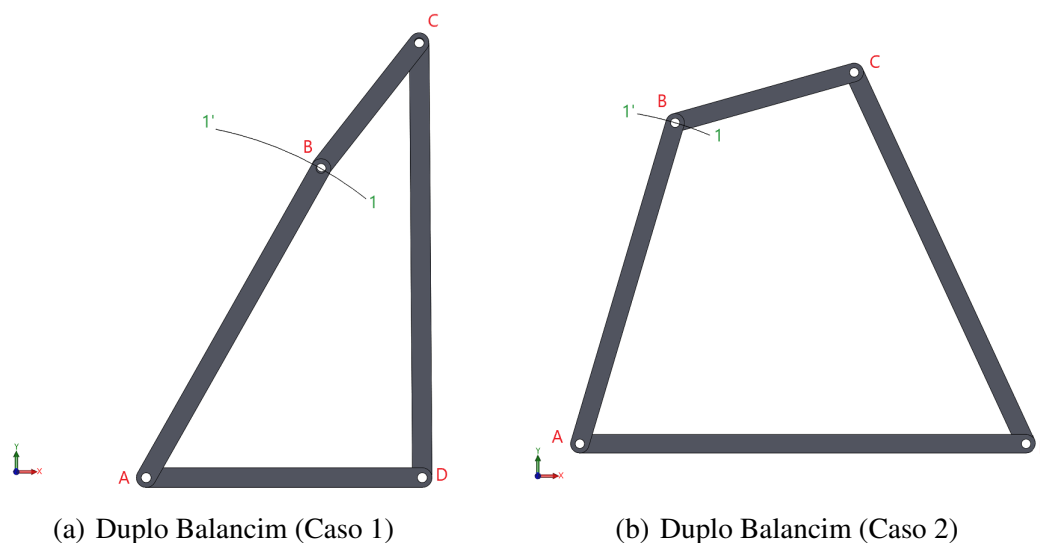


(a) Duplo Balancim (Caso 1)



(b) Duplo Balancim (Caso 2)

Figura 4.13 – Trajetória do ponto B entre a manivela e a barra acopladora dos Mecanismos: a) Duplo Balancim (Caso 1) e b) Duplo Balancim (Caso 2).



4.4 Mecanismo de Quatro Barras aplicado ao Limpador de Para-Brisas

O limpador de para-brisas é um dispositivo mecânico, com ampla aplicação na engenharia de mobilidade. É responsável por manter a visibilidade do condutor do veículo, retirando o excesso de água que cai no para-brisas. Para realizar o movimento oscilatório do limpador de para-brisa é utilizado um mecanismo simples de quatro barras, dimensionado segundo a Lei de Grashof, para que exista um movimento contínuo entre as barras (BONELLI, 2013).

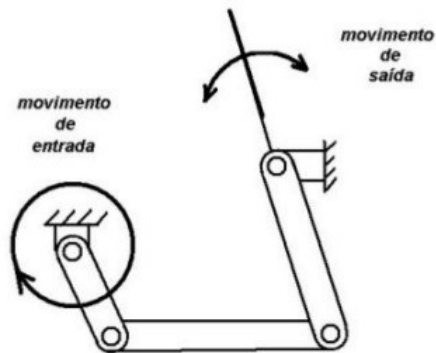
Para simular o funcionamento desse mecanismo e sua geração de trajetória utilizamos as barras já construídas, de forma que a configuração final da composição dessas barras seja proporcional ao Mecanismo ilustrado na Figura 4.14. Assim, a barra manivela (L_1) tem dimensão de 250 mm, a barra acopladora (L_2) mede 550 mm e a seguidora (L_3) mede 450 mm. Os mancais que correspondem a barra fixa não se encontram alinhados horizontalmente, sendo que o mancal A está situado na origem dos eixos e o mancal D se encontra a 550 mm no eixo x (x_D) e a 200 mm no eixo y (y_D).

Em um limpador de para brisa, o movimento de rotação continua da manivela é convertido em um movimento de oscilação da palheta (barra seguidora).

Ao analisar os resultados gráficos de posição da manivela e do seguidor, é possível perceber essa conversão do movimento rotatório em oscilatório com amplitude de aproximadamente 75° , como ilustrado na simulação gráficas da Figura 4.15

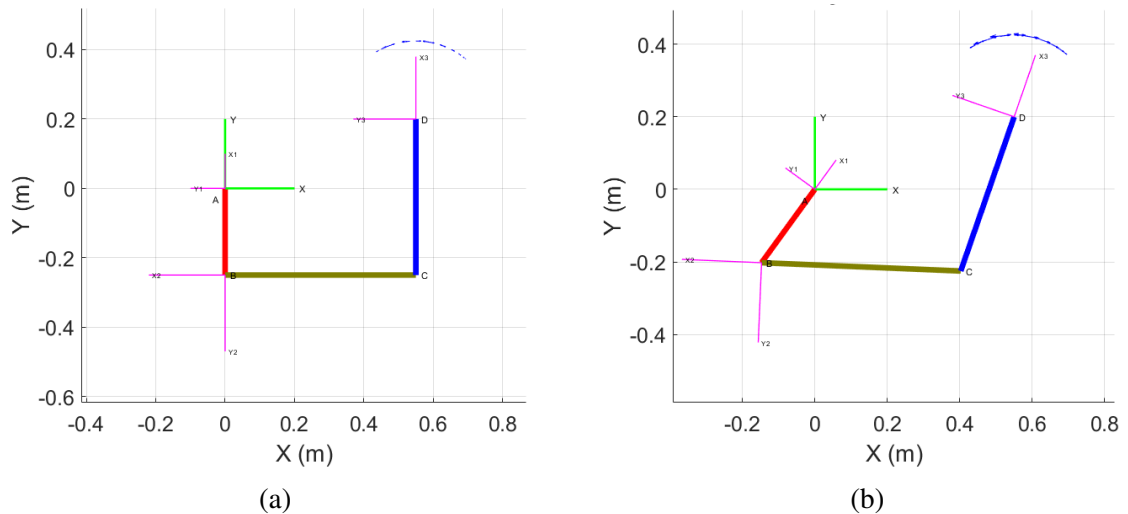
Os resultados gráficos de velocidade angular da barra manivela e da barra seguidora nos permite observar que para uma velocidade constante de entrada pode-se gerar uma velocidade

Figura 4.14 – Mecanismo de Quatro Barras do Limpador de Para-Brisa.



Fonte: (OLIVEIRA; COELHO; COUTINHO, 2019)

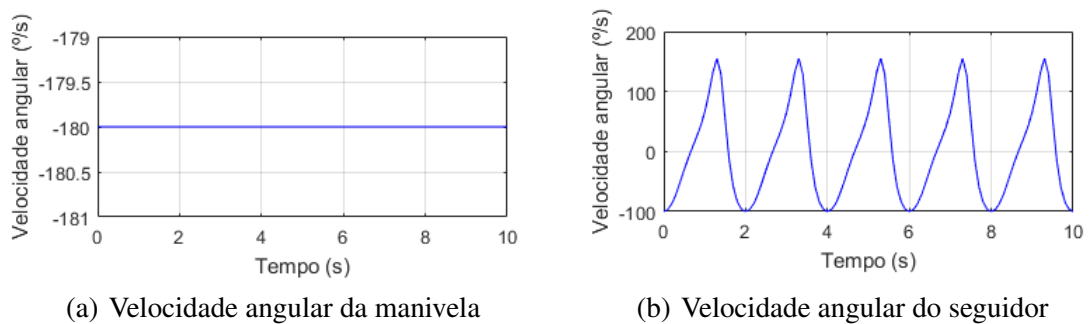
Figura 4.15 – Simulação no MATLAB do Mecanismo de Quatro Barras do Limpador de Para-Brisa.



Fonte: Do autor.

de saída com perfil diferente e com inversão de sentido, como ilustrado nos gráficos 4.16(a) e 4.16(b).

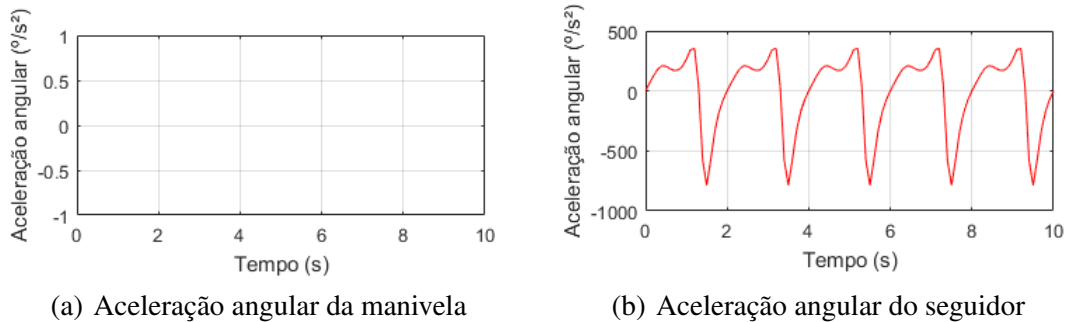
Figura 4.16 – Resultados de velocidade angular.



Fonte: Do autor.

Conseqüentemente, ao analisar os resultados gráficos de aceleração angular da barra manivela e da barra seguidora é possível perceber que um movimento de entrada sem aceleração é capaz de gerar uma aceleração de saída com perfil cíclico e que respeita a configuração do mecanismo, como ilustrado nos gráficos 4.17(a) e 4.17(b).

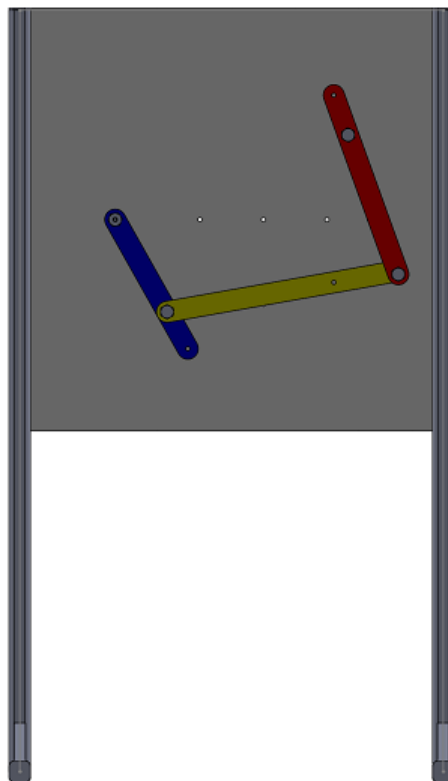
Figura 4.17 – Resultados de aceleração angular.



Fonte: Do autor.

A Figura 4.18 ilustra como esse mecanismo pode ser simulado na bancada didática projetada.

Figura 4.18 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro simulado na bancada projetada



Fonte: Do autor.

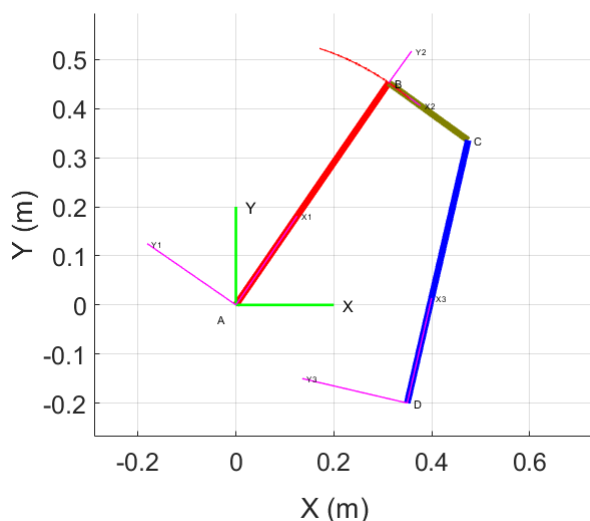
4.5 Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro

O sistema mecânico que tem a função de elevar o compartimento do motor do carro pode ser composto por um mecanismo de quatro barras do tipo duplo balancim.

Para simular o funcionamento desse mecanismo e sua geração de trajetória utilizamos as barras já construídas, de forma que a configuração final da composição dessas barras seja proporcional ao Mecanismo ilustrado na Figura 2.7(b). Assim, a barra manivela (L_1) tem dimensão de 550 mm, a barra acopladora (L_2) mede 150 mm e a seguidora (L_3) mede 550 mm. Os mancais que correspondem a barra fixa não se encontram alinhados horizontalmente, sendo que o mancal A está situado na origem dos eixos e o mancal D se encontra a 350 mm no eixo x (x_D) e a 200 mm negativos no eixo y (y_D).

Esse mecanismo obedece à Lei de Grashof, sendo que ele opera em movimento não contínuo, como mostra a trajetória do ponto B representada em vermelho na Figura 4.19.

Figura 4.19 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro



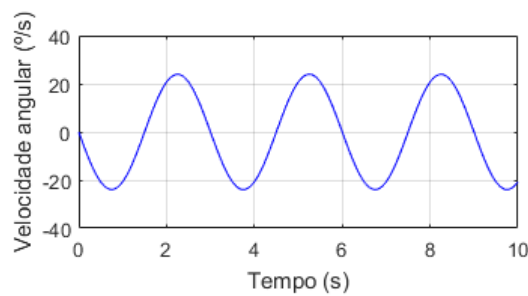
Fonte: Do autor.

Ao acionada, a manivela faz com que a barra acopladora gire cerca de 45° , ponto em que atinge a rotação máxima, sendo que a manivela não rotaciona a volta completa. Essa inclinação do acoplador caracteriza o movimento de abertura do compartimento.

Para o fechamento, a manivela faz a inversão do movimento, girando até que o acoplador chegue ao seu ponto inicial em que o compartimento está completamente fechado.

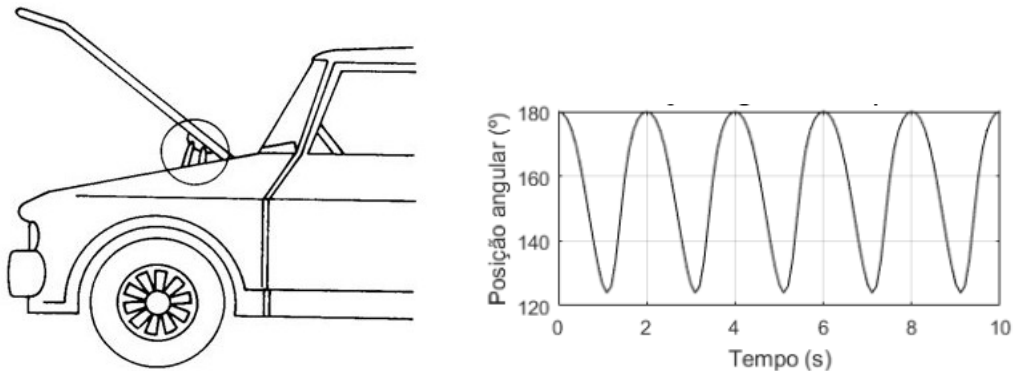
Quando a manivela é acionada continuamente temos um movimento oscilatório que é ilustrado no gráfico 4.20 pelos vários ciclos da manivela.

Figura 4.20 – Velocidade angular da manivela



Fonte: Do autor.

Figura 4.21 – Comparação resultado real e simulado.



(a) Representação do ângulo de abertura do compartimento do motor do carro

(b) Resultado gráfico da posição angular da barra acopladora

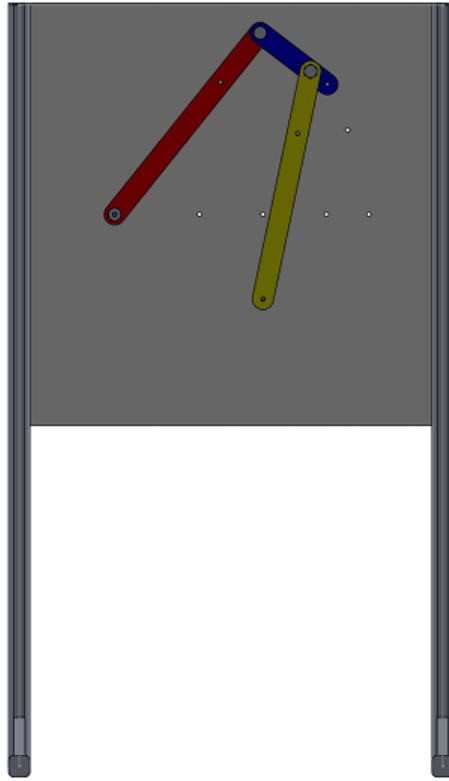
Comparando a representação do ângulo de abertura com a variação da posição angular da barra acopladora, representado pela Figura 4.21(b), nota-se o resultado simulado consistente com o mecanismo real, uma vez que o ângulo de abertura do compartimento é de aproximadamente 45° , como é ilustrado na Figura 4.21(a).

A Figura 4.22 representa como esse mecanismo consegue ser simulado na bancada didática projetada.

De forma geral, foi resumido o aprendizado do funcionamento de um mecanismo de quatro barras. Assim, pode-se demonstrar que mesmo para mecanismos simples como o mecanismo de quatro barras, faz-se necessário, durante a fase de projeto, desenvolver as equações de movimento do sistema e a partir delas obter, via simulação computacional, as trajetórias, os momentos e as forças atuantes nos componentes.

Através de aplicações como essas, essenciais ao ramo da mecânica veicular, é notada a importância de estudar os mecanismos e entender na prática como podem ser utilizados na re-

Figura 4.22 – Mecanismo de Quatro Barras aplicado na abertura do compartimento do motor do carro simulado na bancada projetada



Fonte: Do autor.

solução de problemas do cotidiano. Dessa forma, a bancada experimental seria uma ferramenta essencial para a motivação e o envolvimento dos alunos e simplificação do aprendizado.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado o projeto de uma bancada didática, com a finalidade de simular diferentes tipos de configurações e movimentos resultantes de um mecanismo de quatro barras. Foi possível realizar a análise cinemática e dinâmica do mecanismo, fazer a implementação computacional e animação gráfica com resultados satisfatórios.

A implementação geométrica no SOLIDWORKS possibilitou abranger especificações da proposta para construção futura da bancada experimental. Além disso, confrontando as simulações geométricas desse software com as simulações analíticas do MATLAB, notou-se a semelhança e precisão dos resultados, possibilitando a validação do modelo.

Pela síntese cinemática e o estudo de aplicações reais do mecanismo de quatro barras, foi possível simular o mecanismo limpador de Para-brisa e ilustrar como é gerada a oscilação das palhetas através do movimento rotativo da manivela. E simular também o mecanismo de abertura do compartimento do motor do carro, ilustrando que o mesmo atua de forma a oscilar, sem que a manivela gire 360° .

6 TRABALHOS FUTUROS

- Realizar o Projeto estrutural detalhado da Bancada Didática para que possa ser construída;
- Após sua construção realizar experimentos com instrumentos de medição, para comparar os resultados coletados experimentalmente com os gerados computacionalmente.

APÊNDICE A – Tabelas

Tabela comparativa entre posições obtidas pelos softwares Matlab e Solidworks da barra acopladora pelo tempo

Tempo (s)	Posição Solidworks (°)	Posição Matlab (°)	Δ
0	57,49	57,49	0,00
0,1	39,5	46,25	6,75
0,2	21,51	36,37	14,86
0,3	3,52	27,87	24,35
0,4	-14,47	20,39	34,86
0,5	-32,46	13,52	45,98
0,6	-50,45	6,802	57,25
0,7	-68,44	-0,4159	68,02
0,8	-86,43	-9,382	77,05
0,9	-104,42	-23,07	81,35
1	-122,41	-47,82	74,59
1,1	-140,4	-85,83	54,57
1,2	-158,39	-125,8	32,59
1,3	-176,38	-160,3	16,08
1,4	-194,37	-189,4	4,97
1,5	-212,36	-214,4	-2,04
1,6	-230,35	-236,4	-6,05
1,7	-248,34	-256	-7,66
1,8	-266,33	-273,4	-7,07
1,9	-284,32	-288,8	-4,48
2	-302,31	-302,2	0,11
2,1	-320,3	-313,8	6,50
2,2	-338,29	-323,6	14,69
2,3	-356,28	-332,1	24,18
2,4	-374,27	-339,6	34,67
2,5	-392,26	-346,5	45,76
2,6	-410,25	-353,2	57,05
2,7	-428,24	-360,4	67,84
2,8	-446,23	-369,4	76,83
2,9	-464,22	-383,1	81,12
3	-482,21	-407,8	74,41
3,1	-500,2	-445,8	54,40
3,2	-518,19	-485,8	32,39
3,3	-536,18	-520,3	15,88
3,4	-554,17	-549,4	4,77
3,5	-572,16	-574,4	-2,24
3,6	-590,15	-596,4	-6,25
3,7	-608,14	-616	-7,86

3,8	-626,13	-633,4	-7,27
3,9	-644,12	-648,8	-4,68
4	-662,11	-662,2	-0,09
4,1	-680,1	-673,8	6,30
4,2	-698,09	-683,6	14,49
4,3	-716,08	-692,1	23,98
4,4	-734,07	-699,6	34,47
4,5	-752,06	-706,5	45,56
4,6	-770,05	-713,2	56,85
4,7	-788,04	-720,4	67,64
4,8	-806,03	-729,4	76,63
4,9	-824,02	-743,1	80,92
5	-842,01	-767,8	74,21
5,1	-860	-805,8	54,20
5,2	-877,99	-845,8	32,19
5,3	-895,98	-880,3	15,68
5,4	-913,97	-909,4	4,57
5,5	-931,96	-934,4	-2,44
5,6	-949,95	-956,4	-6,45
5,7	-967,94	-976	-8,06
5,8	-985,93	-993,4	-7,47
5,9	-1003,92	-1009	-5,08
6	-1021,91	-1022	-0,09
6,1	-1039,9	-1034	5,90
6,2	-1057,89	-1040	17,89
6,3	-1075,88	-1052	23,88
6,4	-1093,87	-1060	33,87
6,5	-1111,86	-1066	45,86
6,6	-1129,85	-1073	56,85
6,7	-1147,84	-1080	67,84
6,8	-1165,83	-1089	76,83
6,9	-1183,82	-1103	80,82
7	-1201,81	-1128	73,81
7,1	-1219,8	-1166	53,80
7,2	-1237,79	-1206	31,79
7,3	-1255,78	-1240	15,78
7,4	-1273,77	-1269	4,77
7,5	-1291,76	-1294	-2,24
7,6	-1309,75	-1316	-6,25
7,7	-1327,74	-1336	-8,26
7,8	-1345,73	-1353	-7,27
7,9	-1363,72	-1369	-5,28
8	-1381,71	-1382	-0,29
8,1	-1399,7	-1394	5,70

8,2	-1417,69	-1404	13,69
8,3	-1435,68	-1412	23,68
8,4	-1453,67	-1420	33,67
8,5	-1471,66	-1426	45,66
8,6	-1489,65	-1433	56,65
8,7	-1507,64	-1440	67,64
8,8	-1525,63	-1449	76,63
8,9	-1543,62	-1463	80,62
9	-1561,61	-1488	73,61
9,1	-1579,6	-1526	53,60
9,2	-1597,59	-1566	31,59
9,3	-1615,58	-1600	15,58
9,4	-1633,57	-1629	4,57
9,5	-1651,56	-1654	-2,44
9,6	-1669,55	-1676	-6,45
9,7	-1687,54	-1696	-8,46
9,8	-1705,53	-1713	-7,47
9,9	-1723,52	-1729	-5,48
10	-1741,51	-1742	-0,49
Média das diferenças entre as posições entre os dois softwares			28

Tabela comparativa entre posições obtidas pelos softwares Matlab e Solidworks da barra seguidora pelo tempo

Tempo (s)	Posição Solidworks (°)	Posição Matlab (°)	Δ
0	27,3	27,3	0,00
0,1	9,3	14,37	5,07
0,2	-8,7	2,556	11,26
0,3	-26,7	-8,879	17,82
0,4	-44,7	-20,47	24,23
0,5	-62,7	-32,58	30,12
0,6	-80,7	-45,44	35,26
0,7	-98,7	-59,13	39,57
0,8	-116,7	-73,62	43,08
0,9	-134,7	-88,86	45,84
1	-152,7	-104,8	47,90
1,1	-170,7	-121,4	49,30
1,2	-188,7	-138,9	49,80
1,3	-206,7	-157,8	48,90
1,4	-224,7	-179,8	44,90
1,5	-242,7	-208,1	34,60
1,6	-260,7	-242,6	18,10
1,7	-278,7	-274,2	4,50
1,8	-296,7	-298,8	-2,10
1,9	-314,7	-317,6	-2,90
2	-332,7	-332,7	0,00
2,1	-350,7	-345,6	5,10
2,2	-368,7	-357,4	11,30
2,3	-386,7	-368,9	17,80
2,4	-404,7	-380,5	24,20
2,5	-422,7	-392,6	30,10
2,6	-440,7	-405,4	35,30
2,7	-458,7	-419,1	39,60
2,8	-476,7	-433,6	43,10
2,9	-494,7	-448,9	45,80
3	-512,7	-464,8	47,90
3,1	-530,7	-481,4	49,30
3,2	-548,7	-498,9	49,80
3,3	-566,7	-517,8	48,90
3,4	-584,7	-539,8	44,90
3,5	-602,7	-568,1	34,60
3,6	-620,7	-602,6	18,10
3,7	-638,7	-634,2	4,50
3,8	-656,7	-658,8	-2,10

3,9	-674,7	-677,6	-2,90
4	-692,7	-692,7	0,00
4,1	-710,7	-705,6	5,10
4,2	-728,7	-717,4	11,30
4,3	-746,7	-728,9	17,80
4,4	-764,7	-740,5	24,20
4,5	-782,7	-752,6	30,10
4,6	-800,7	-765,4	35,30
4,7	-818,7	-779,1	39,60
4,8	-836,7	-793,6	43,10
4,9	-854,7	-808,9	45,80
5	-872,7	-824,8	47,90
5,1	-890,7	-841,4	49,30
5,2	-908,7	-858,9	49,80
5,3	-926,7	-877,8	48,90
5,4	-944,7	-899,8	44,90
5,5	-962,7	-928,1	34,60
5,6	-980,7	-962,6	18,10
5,7	-998,7	-994,2	4,50
5,8	-1016,7	-1019	-2,30
5,9	-1034,7	-1038	-3,30
6	-1052,7	-1053	-0,30
6,1	-1070,7	-1066	4,70
6,2	-1088,7	-1077	11,70
6,3	-1106,7	-1089	17,70
6,4	-1124,7	-1100	24,70
6,5	-1142,7	-1113	29,70
6,6	-1160,7	-1125	35,70
6,7	-1178,7	-1139	39,70
6,8	-1196,7	-1154	42,70
6,9	-1214,7	-1169	45,70
7	-1232,7	-1185	47,70
7,1	-1250,7	-1201	49,70
7,2	-1268,7	-1219	49,70
7,3	-1286,7	-1238	48,70
7,4	-1304,7	-1260	44,70
7,5	-1322,7	-1288	34,70
7,6	-1340,7	-1323	17,70
7,7	-1358,7	-1354	4,70
7,8	-1376,7	-1379	-2,30
7,9	-1394,7	-1398	-3,30
8	-1412,7	-1413	-0,30
8,1	-1430,7	-1426	4,70
8,2	-1448,7	-1437	11,70

8,3	-1466,7	-1449	17,70
8,4	-1484,7	-1460	24,70
8,5	-1502,7	-1473	29,70
8,6	-1520,7	-1485	35,70
8,7	-1538,7	-1499	39,70
8,8	-1556,7	-1514	42,70
8,9	-1574,7	-1529	45,70
9	-1592,7	-1545	47,70
9,1	-1610,7	-1561	49,70
9,2	-1628,7	-1579	49,70
9,3	-1646,7	-1598	48,70
9,4	-1664,7	-1620	44,70
9,5	-1682,7	-1648	34,70
9,6	-1700,7	-1683	17,70
9,7	-1718,7	-1714	4,70
9,8	-1736,7	-1739	-2,30
9,9	-1754,7	-1758	-3,30
10	-1772,7	-1773	-0,30
Média das diferenças entre as posições entre os dois softwares			26%

REFERÊNCIAS

- ASTRAL. Equipamentos técnicos-didáticos. **Astral Científica**, 2019. Disponível em: <<http://edutec.astralcientifica.com.br/categorias-produtos/tec-did/>>.
- BONELLI, A. Projeto de mecanismo de limpador de para-brisa. Mobility Engineering Center, UFSC, 2013. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/262647248/Trabalho-Limpador-de-Para-Brisa>>.
- DOUGHTY, S. **Mechanics of machines**. New York: Wiley, 1988.
- ERDMAN, A. G.; SANDOR, G. N. **Mechanism design: analysis and synthesis**. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall International, 1997.
- ERTHAL, J. L. **Mecanismos**. 2013. Disponível em: <<https://slideplayer.com.br/slide/361283/>>.
- FESTO. Catálogo de produtos didactic 2017. **Festo do Brasil**, p. 76, jan. 2017. Disponível em: <https://https://www.festo-didactic.com/download.php?name=CatalagoProdutosDI2017.pdf&c_id=1100&file=catalagoprodutosdi2017.pdf>.
- FLORES, P.; CLARO, J. C. P. **Cinemática de Mecanismos**. Guimarães: Almedina, 2007.
- LABTRIX. Bancadas didáticas. **Labtrix Industria de Bancadas Técnicas**, 2018. Disponível em: <<http://www.labtrix.com.br/bancadas/>>.
- MABIE H. H.; REINHOLTZ, C. F. **Mechanisms and Dynamics of Machinery**. Virginia: John Wiley Sons, 1987.
- MATLAB. **version 8.10.604a. The MathWorks Inc.** [S.l.]: MathWorks Inc, 2016.
- MYSZKA, D. H. **Machines and Mechanisms: Applied Kinematic Analysis**. Upper Saddle River, N.J: Pearson Education, 2011.
- NORTON, R. L. **Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos**. 1. ed. São Paulo: New York, 2009.
- OLIVEIRA, J. M. de; COELHO, T. A. H.; COUTINHO, A. G. **Apostila de Mecanismos para Escola Avançada de Engenharia Mecatrônica**. 2019. Disponível em: <<https://www.docsity.com/pt/estacio-de-sa-santa-cruz/4995728/>>.
- SANTOS, I. **Dinâmica de sistemas mecânicos: modelagem, simulação, visualização, verificação**. São Paulo: Makron Books, 2001.
- SHIGLEY, J. **Theory of Machines and Mechanisms**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- SIMONI, R. Síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/91462>>.
- SOLIDWORKS. **Solidworks - software de CAD 3D**. [S.l.]: Dassault Systèmes, 2017.
- SOMA. Linha de bancadas didáticas para o ensino de transmissão mecânica de movimentos. **Soma - Bancadas e Projetos Especiais**, 2019. Disponível em: <<https://www.soma.eng.br/bancada/mecanica>>.

VINOGRADOV, O. **Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms**. Boca Raton: CRC Press, 2000.

ZHANG, Y.; FINGER, S.; BEHRENS, S. **Introduction to Mechanisms**. 2003. Disponible en: <<https://www.cs.cmu.edu/~rapidproto/mechanisms/chpt5.html>>.