



CARLOS HENRIQUE DE OLIVEIRA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS ELÍPTICAS E PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO**

LAVRAS - MG

2019

CARLOS HENRIQUE DE OLIVEIRA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS E
PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO**

Monografia apresentada à Universidade Federal
de Lavras, como parte das exigências do Curso
de Matemática, para a obtenção do título de
Licenciado.

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero
Orientador

LAVRAS - MG

2019

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Oliveira, Carlos Henrique de
Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais
Elípticas e Problemas de Equilíbrio / Carlos Henrique de
Oliveira. – Lavras : UFLA, 2019.
67 p. : il.

Monografia (graduação)–Universidade Federal de Lavras,
2019.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero.
Bibliografia.

1.Equações Diferenciais Parciais. 2.Métodos Numéricos.
3.Método das Diferenças Finitas. 4.Discretização. 5. Matemática. I.Título.

CARLOS HENRIQUE DE OLIVEIRA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS E
PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado.

APROVADA em 29 de Novembro de 2019.

Profa. Dra. Evelise Roman Corbalan Góis Freire UFLA
Profa. Dra. Juliana Galvani Gregghi UFLA

Prof. Dr. Gustavo Cipolat Colvero
Orientador

**LAVRAS - MG
2019**

*Às pessoas que plantam o bem todos os dias,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho marca o fechamento de um ciclo e, por isso, agradeço aqui à aqueles que participaram positivamente nesta jornada.

Aos meus pais e familiares, pelo apoio e ajuda incomensurável durante minha graduação e em todos os momentos da minha vida.

Aos meus amigos, que tenho a honra de tê-los em quantidade e qualidade, que partilham de lutas e glórias, risadas e momentos que deixam marcas e que me tornam uma pessoa cada vez melhor.

Aos moradores do apartamento 211 e vizinhos do "Brejão" que proporcionaram mais que momentos, mas uma família na cidade de Lavras. Longe de ser uma balbúrdia de estudantes este espaço é palco de discussões e incontáveis conversas nas quais aprendi com pessoas de todos os cantos deste imenso Brasil graças a esta universalidade presente aqui.

À Universidade Federal de Lavras que foi minha casa, meu quintal, minha escola por mais de 5 anos e me possibilitou experimentar, criar e aprender tantas coisas além da fabulosa matemática. Me possibilitou ainda conhecer um punhado de pessoas incríveis que tenho o prazer de conviver hoje e, se Deus quiser, para toda vida.

Por aqui passei mais, muito mais, do que as quase 3 mil horas aulas impressas no histórico escolar. Por isso agradeço aos grupos de estudos, e aos projetos de extensão existentes nesta universidade por todo o conhecimento e experiências partilhadas.

Agradeço aos professores que me ensinaram tanto o que fazer, quanto ao que não fazer dentro de sala de aula, que me ajudaram e estenderam a mão, me orientaram e auxiliaram e, de alguma forma contribuíram grandemente para que eu chegasse até aqui. Em especial ao meu ex-orientador de iniciação científica por toda ajuda, e ao meu atual orientador por ser um grande parceiro durante a longa escrita deste trabalho.

Hoje fico feliz em ter uma profissão que me motiva acordar todos os dias e, por isso, agradeço ao corpo docente e aos alunos da Escola Cooperativa Galha Azul por me proporcionarem muito mais do que um maravilhoso local de trabalho, mas a melhor experiência profissional e humana que já tive.

*"Eu nunca tive problema grande
Graças a Aldo Sena e Edson Wânder"
(Figueroas)*

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar os métodos numéricos, em especial, o método das diferenças finitas. Buscou-se solucionar numericamente alguns problemas de valores de contorno com condições de contorno de Dirichlet e Neumann, associados a equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, adequadamente escolhidos, através de uma rotina computacional programada na linguagem Fortran. Primeiramente fez-se uma introdução às equações diferenciais parciais no intuito de exemplificar os termos mais utilizados no presente trabalho, como o fato da equação ser elíptica fazendo uma análise de seu discriminante, a sua relação com problemas de equilíbrio, suas soluções fundamentais, o laplaciano e os problemas de valores de contorno. Após, discute-se sobre o método analítico utilizado, o de separação de variáveis, e o método numérico no qual pretendeu-se exemplificar, passo a passo, a chamada discretização de um problema de valor de contorno de forma a evidenciar como este processo foi implementado computacionalmente. Por fim, resolve-se três problemas distintos com as condições mencionadas com o objetivo de verificar a robustez tanto do método quanto da rotina desenvolvida.

Palavras-chave: Método das Diferenças Finitas. Discretização. Laplace. Dirichlet. Problemas de Valores de Contorno.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curvas cônicas	17
Figura 2.2 – Problema de Dirichlet	26
Figura 2.3 – Problema de Neumann	27
Figura 2.4 – Problema Misto	27
Figura 3.1 – Região contínua e discretizada.	36
Figura 3.2 – Malha unidimensional	37
Figura 3.3 – Malha unidimensional com pontos intermediários.	39
Figura 3.4 – Coordenadas da bússola e os respectivos índices de posição	41
Figura 3.5 – Malha identificada com o índice l	42
Figura 3.6 – Malha discretizada	43
Figura 3.7 – Problema de Neumann no retângulo	47
Figura 3.8 – Malha discretizada com condição de Neumann	48
Figura 4.1 – Problema de Dirichlet em um retângulo.	53
Figura 4.2 – Superfícies calculadas com pontos de uma malha 150X150	55
Figura 4.3 – $E_r(x, y) = 100 \frac{ u - \bar{u} }{ u }$	55
Figura 4.4 – Erros calculados no último ponto imediatamente antes da fronteira numa malha 150X150.	56
Figura 4.5 – Gráfico da superfície $z = x \cos(2x) \sin(4y)$	57
Figura 4.6 – Gráfico da solução numérica obtida com malha de dimensões 170×170	58
Figura 4.7 – Erro relativo percentual na solução numérica obtida com malha de dimensões 170×170	59
Figura 4.8 – Erro relativo percentual na solução obtida com malhas de diferentes dimensões para diferentes valores da coordenada x	59
Figura 4.9 – Malha discretizada com condições de Dirichlet	60
Figura 4.10 – Superfície gerada por $\bar{u}(x, y)$	61
Figura 4.11 – Erro absoluto $ \bar{u} - u(x_i, y_j) $	62
Figura 4.12 – Diferença entre o valor médio de u sobre o quadrado pelo valor de u no centro	63
Figura 4.13 – Superfície gerada por $\bar{u}(x, y)$	64
Figura 4.14 – Derivada parcial $u_x(\pi, y)$. Aqui comparamos a aproximação numérica com o valor exato analítico.	65

Figura 4.15 – Diferença absoluta entre a aproximação numérica $\bar{u}_x(\pi, y)$ e o valor exato

$h(y)$ 65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	REFERÊNCIAL TEÓRICO	13
2.1	Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem	13
2.1.1	Definições formais	14
2.1.2	Classificação das EDPs lineares de 2ª ordem	15
2.1.3	Lema do Discriminante	17
2.2	Equações Elípticas	20
2.2.1	O Laplaciano ∇^2	22
2.2.2	Soluções Fundamentais	23
2.3	Problemas de Valores de Contorno	25
3	METODOLOGIA	28
3.1	Métodos Analíticos	28
3.1.1	Método de Fourier ou o Método de Separação de Variáveis	28
3.2	Métodos Numéricos	35
3.2.1	Método das Diferenças Finitas (MDF)	36
3.2.1.1	Discretização do PVC	36
3.2.1.2	Aproximação para primeira derivada	37
3.2.1.3	Aproximação para segunda derivada	39
3.2.1.4	Ampliando os horizontes	40
3.2.1.5	Um notação importante	41
3.2.1.6	Discretizando um PVC com condições de Dirichlet	42
3.2.1.7	Discretizando um PVC com condições de Neumann	46
3.3	Análise da Solução Numérica	49
4	DISCUSSÃO E RESULTADOS	52
4.1	Primeiro Problema	53
4.1.1	Solução Analítica	54
4.1.2	Solução Numérica	54
4.2	Um segundo problema	60
4.3	O terceiro problema	63
5	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67

INTRODUÇÃO

Nos chamados problemas de equilíbrio, queremos encontrar uma determinada função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um domínio fechado $D \subset \mathbb{R}^n$, delimitado por uma fronteira ∂D . No interior de D , f deve satisfazer uma determinada equação diferencial parcial. Além disso, f deve ser uma função que satisfaça certas condições que são impostas sobre o que acontece na fronteira, ou contorno, ∂D de D . Tais **condições de contorno** (ou **de fronteira**) são prescrições para valor numérico de f ou de suas derivadas (ou uma combinação de ambos) nessa região de seu domínio. Em termos de equações diferenciais, isto se traduz em um **problema de valores de contorno** e, por um motivo a ser explicado a seguir, as equações diferenciais parciais associadas são ditas **elípticas**.

Situações deste tipo surgem espontaneamente em diversas áreas de aplicação. Em particular, em diversas áreas da física. Um caso específico é o de um fluido ideal (no sentido de que não apresenta viscosidade e não troca calor) incompressível que escoar através de um obstáculo sem apresentar vorticidade (ou, informalmente, redemoinhos). Neste caso, o vetor velocidade de cada **elemento de fluido** pode ser obtido como o gradiente de uma determinada função $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de **potencial de velocidades**. Deste modo, dizemos que esta situação representa um **escoamento potencial**. O fato de que o fluido escoar através de um obstáculo é expresso por meio de condições impostas sobre a velocidade de seus elementos na região fisicamente delimitada pelo contorno de tal obstáculo. Por outro lado, podemos mudar a situação física para que esta corresponda a um fluido escoando parcialmente para dentro de um sumidouro, e parcialmente através dele, meramente via prescrição de novas condições de contorno. Em qualquer caso, temos a mesma equação diferencial parcial e apenas condições auxiliares distintas.

Todavia, com exceção de casos muito particulares, encontrar a solução de tais problemas de valores de contorno (ou seja, encontrar a função desejada) é uma tarefa extremamente difícil, ou mesmo provavelmente impossível, de se realizar analiticamente. Deste modo, é importante dispormos de métodos de obtenção de soluções aproximadas. Tais aproximações podem ser obtidas tanto por via analítica quanto por via numérica. Entretanto, métodos de aproximação analítica podem não estar definidos para um determinado problema que se deseja resolver. Sendo assim, muito frequentemente, usamos métodos de aproximação numérica para a solução de problemas de valores de contorno.

Nas abordagens numéricas, substituímos a equação diferencial parcial, juntamente com

as condições auxiliares, por um sistema de equações algébricas, ou algébrico-diferenciais. O procedimento por meio do qual obtemos um sistema de equações algébricas a partir de uma equação diferencial e suas condições auxiliares, válidas em determinados pontos que constituem um subconjunto finito do domínio original, chamamos de **discretização** e, dentre os diferentes métodos de discretização, o chamado método das diferenças finitas se destaca por sua simplicidade conceitual e de uso. No método das diferenças finitas, substituímos as derivadas presentes na equação diferencial por diferenças finitas e todas as taxas de variação instantâneas passam a ser taxas de variação média. Evidentemente, a formalização do procedimento envolve uma definição de **consistência**, no sentido de que tais diferenças finitas devem aproximar de forma quantificável as respectivas derivadas e a diferença entre ambas deve tender à zero no limite apropriado.

Embora o método das diferenças finitas para discretização de equações diferenciais seja talvez o historicamente mais antigo, e também pedagogicamente adequado para um primeiro estudo sobre discretização, este permanece relevante atualmente e o domínio de tal técnica tem propósito muito além do pedagógico. Como um exemplo da relevância da técnica, podemos citar o ramo da física computacional designado por relatividade numérica. Na relatividade numérica, o método das diferenças finitas é amplamente utilizado e, como exemplo de sucesso da técnica em pesquisa moderna, podemos citar sua utilização em simulações computacionais de ondas gravitacionais, estudos estes que colaboraram na constatação experimental da existência deste fenômeno.

Dada a contínua relevância do método das diferenças finitas, temos também ativa pesquisa teórica sobre seus fundamentos e sobre possíveis melhorias. Como um exemplo, podemos citar os métodos de solução de sistemas de equações algébricas designados por procedimentos fortemente implícitos, como o de Stone, que resolvem tais sistemas com a precisão desejada mais rapidamente e são adequados exclusivamente para sistemas de equações algébricas provenientes da discretização de equações diferenciais parciais. A obtenção de procedimentos como estes constituem hoje uma oportunidade de pesquisa relevante e requisitada. Sendo assim, o presente trabalho de conclusão de curso visa não apenas o domínio de uma técnica altamente relevante para a aplicação de matemática em uma vasta gama de cenários atualmente relevantes, como também o contato com uma linha de pesquisa que envolve contribuições teóricas originais.

Diversos são os métodos numéricos existentes, e cada um deles possui uma especifici-

dade que atende um determinado problema. Estes métodos numéricos tem papel importante na dinâmica dos fluidos computacional (DFC) a qual, como lembra Fortuna (2000), "é a área da computação científica que estuda métodos computacionais para a simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor".

Um exemplo desse movimento de fluido é o escoamento do ar na fuselagem de um avião. A análise de uma possível modificação na aerodinâmica de uma asa implica fundamentalmente em duas coisas: 1) pode não ser possível reproduzir esta situação em laboratório, mesmo em escala reduzida e; 2) o custo da montagem de vários modelos de asa para testes pode ser impraticável. Desta forma a DFC ganha espaço quando, com o advento dos computadores, começou a ser possível a obtenção de soluções para problemas de escoamento, como o citado, através de soluções numéricas das equações que os modelam.

O objetivo deste trabalho foi estudar o método das diferenças finitas. Para isto escolhemos, adequadamente, três problemas de valores de contorno nos quais exploramos as soluções analíticas, e a consistência das soluções numéricas. Para a obtenção das soluções numéricas, escrevemos, em linguagem Fortran, rotinas que discretizam os problemas de valores de contorno estudados. Como veremos, os sistemas de equações lineares que obtemos da discretização tem como matriz dos coeficientes matrizes esparsas altamente regulares. Entretanto, por restrição de tempo, fizemos uso de uma biblioteca numérica externa de propósito geral para a solução de tais sistemas, a saber, a GNU Scientific Library (GSL). O benefício trazido pelo uso da GSL foi o de não termos que nos preocupar com a programação de nenhum solucionador de sistema. Por outro lado, por ser uma biblioteca de propósito geral, a GSL evidentemente não faz uso das regularidades do tipo de sistemas lineares específicos que encontramos. O resultado disso é a maior limitação do tamanho dos sistemas que podemos resolver utilizando tal biblioteca em um determinado hardware computacional em comparação ao que poderíamos alcançar utilizando métodos mais dedicados.

A escolha da linguagem de programação Fortran para a realização deste trabalho deveu-se a vários fatores. Evidentemente, a mesma tarefa poderia ser realizada por meio do uso de muitas outras linguagens. Entretanto, a tradição do Fortran no cálculo numérico, de mais de sessenta anos, certamente desempenha um papel na escolha. Obviamente a escolha não se deu somente por tradição. Em especial, esta linguagem em particular tem uma sintaxe que lembra em diversos aspectos a escrita de lousa e a sintaxe matemática da álgebra linear, o que a torna particularmente conveniente. Além do mais, Fortran é praticamente ubíquo no mundo

do cálculo numérico, e o fato de ser uma linguagem atualmente modernizada, contando mesmo com recursos de paralelização à nível de especificação e sintaxe, torna-a uma escolha natural.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

2.1 Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem

Ao longo dos séculos o homem busca entender, de forma sistemática, os fenômenos da natureza e, no desejo de os dominar, colocou-se naturalmente na posição de observador e estudioso em que buscou, e ainda busca, descobrir suas causas e suas conexões. No livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Caraça (1989, p. 107) explica que: "os resultados desse estudo, lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo o que, no decurso dos séculos da vida consciente da Humanidade, se pode designar pelo nome de Ciência".

Muitos desses fenômenos envolvem relações entre quantidades que variam de maneira interdependente. Podemos tomar o exemplo de uma árvore que cresce no campo sem a intervenção do homem. Seu crescimento varia, de maneira dependente, de acordo com várias outras variáveis independentes como tempo, disponibilidade hídrica, tempo de exposição solar entre outras. Daí, como a taxa de variação é representada, na matemática, por derivadas, expressamos estas relações em equações que as envolvem ao que damos o nome de equações diferenciais. Dessa forma é possível perceber que muitas outras relações podem ser expressas, de alguma forma, por equações diferenciais como: o desenvolvimento de uma espécie, ou sua extinção; as variações da bolsa de valores; o escoamento de um fluido por uma superfície, entre tantas outras que vão desde os fenômenos naturais e físicos até as ciências biológicas, agrárias, florestais, sociais, dentre outras.

Uma equação diferencial parcial, a qual denotaremos simplesmente como EDP, é uma equação que envolve uma ou mais derivadas parciais de uma função incógnita de duas ou mais variáveis, enquanto a equação diferencial ordinária, EDO, possui derivadas de uma função incógnita de apenas uma variável.

As equações diferenciais parciais são o coração da grande maioria das simulações computacionais de sistemas físicos contínuos, tais como fluidos, campos eletromagnéticos, o corpo humano, e assim por diante (PRESS et al., 2007).

Como exemplos de equações diferenciais temos:

$$u_x = x + y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_x = 0$$

$$u_{xxx} + 2yu_{xxx} + xu_xu_y + (u_x)^2 = \text{sen}(xy)$$

$$\ln(x)y'(x) + \text{sen}(x)y(x) = e^x$$

$$\text{senh}(x)y''(x) + \frac{1}{x^2}y'(x) + x^3y(x) = \cos(x)$$

Definimos a **ordem** de uma EDP com a derivada de mais alta ordem que aparece na equação. Nos exemplos anteriores temos a primeira equação como de 1ª ordem, a segunda e terceira como equações de 2ª ordem e a quarta como uma equação de 3ª ordem. Já a quinta e a sexta equações são exemplos de equações diferenciais ordinárias de 1º e 2º ordem, respectivamente.

As EDPs são também classificadas em termos de sua linearidade podendo ser:

Lineares: quando os coeficientes da função incógnita e de suas derivadas são funções somente das variáveis independentes;

Quase-lineares: quando a EDP é linear nas derivadas de maior ordem e não-linear nas demais;

Não-lineares: basicamente quando elas não são lineares.

Neste trabalho nos restringiremos à trabalhar com equações lineares de 2ª ordem em duas variáveis.

2.1.1 Definições formais

Seja $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, uma sequência de números inteiros positivos que designamos por multi-índice e definamos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

como sendo a **ordem** do multi-índice α (EVANS, 1998). Fazendo-se uso destas notações, podemos definir

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

e, ainda, dado um inteiro positivo k

$$D^k = \left\{ D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k \right\},$$

denota o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k . Para o caso especial $k = 1$, temos

$$Du(x) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^n,$$

representando o vetor gradiente.

Deste modo, dado $k \geq 1$, uma expressão tal como

$$F \left(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x \right) = 0,$$

para $x \in U$ é designada uma equação diferencial parcial de ordem k . Aqui, F é um dado funcional da forma

$$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

e $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que nos é incógnita (EVANS, 1998).

Uma EDP é dita linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_{(s)} D^{(s)} u = f(x), \quad (2.1)$$

em que todas as $a_{(s)}$ e f são funções dadas. Se $f = 0$, esta EDP linear é dita homogênea. No caso particular em que $U \subset \mathbb{R}^2$ a equação (2.1) pode ser escrita na forma especial

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad (2.2)$$

em que todos os coeficientes a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$; b_i , $i = 1, \dots, n$; c e f são funções dadas (GILBARG; TRUDINGER, 2001).

2.1.2 Classificação das EDPs lineares de 2ª ordem

Em analogia com a equação (2.2), uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis pode sempre ser expressa da seguinte forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \quad (2.3)$$

na qual os coeficientes A, B, C, D, E, F , e G são funções reais das variáveis x e y .

E estas EDPs podem ser classificadas em três tipos: hiperbólicas, parabólicas e elípticas, em que cada classe está associada a uma categoria diferente de fenômenos físicos. Esta nomenclatura é tratada neste trabalho como uma analogia às curvas cônicas, através da análise da condição do discriminante (2.5).

Dada esta associação, tome a equação geral das cônicas expressando-a assim:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.4)$$

com A, B, C, D, E e F coeficientes constantes reais. Se tomarmos $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, pois caso contrário teremos uma reta, então poderemos classificar as curvas em um dos três tipos mencionados acima dependendo do valor do discriminante

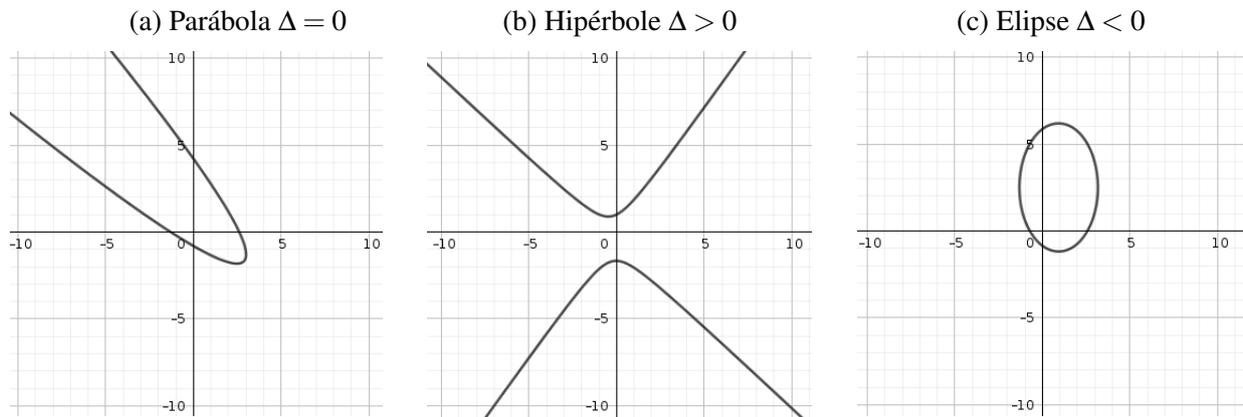
$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (2.5)$$

Logo teremos uma

Parábola	se	$\Delta = B^2 - 4AC = 0$	(2.6)
Hiperbole	se	$\Delta = B^2 - 4AC > 0$	
Elipse	se	$\Delta = B^2 - 4AC < 0$	

Ilustrando:

Figura 2.1 – Curvas cônicas



Fonte: Do autor (2019).

Podemos agora analisar as EDPs lineares de segunda ordem analogamente, sendo tais que tomando

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) + C^2(x,y) \neq 0 \quad (2.7)$$

nos permite calcular o discriminante

$$\Delta = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) \quad (2.8)$$

o qual classificará a EDP em

Parábolica	se	$\Delta = B^2 - 4AC = 0$	(2.9)
Hipérbolica	se	$\Delta = B^2 - 4AC > 0$	
Elíptica	se	$\Delta = B^2 - 4AC < 0$	

2.1.3 Lema do Discriminante

Considere uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis com a forma geral (2.12) e uma transformação de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Nas novas coordenadas, a EDP (2.12) assume a forma

$$A_1 u_{\xi\xi} + B_1 u_{\xi\eta} + C_1 u_{\eta\eta} + D_1 u_{\xi} + E_1 u_{\eta} + F_1 u + G_1 = 0.$$

Dizemos então, que a EDP (2.12) é **invariante**, ou que tem sua forma inalterada, frente à transformações de coordenadas da forma (2.10). Nestas coordenadas o discriminante Δ_1 é dado por

$$\Delta_1 = B_1^2 - 4A_1C_1. \quad (2.11)$$

Lema 1. Δ_1 e Δ tem o mesmo sinal.

Uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis tem seu caráter quanto a ser elíptica, parabólica ou hiperbólica inalterado frente à mudanças de variáveis da forma (2.10).

Demonstração. Considere a equação

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.12)$$

e tome a seguinte mudança de coordenadas

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y \quad \text{e} \quad (2.13)$$

$$\eta = \alpha_2 x + \beta_2 y \quad (2.14)$$

na qual os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são constantes reais quaisquer.

Desenvolvendo os termos temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_2 \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Reescrevendo a equação (2.12) temos:

$$\begin{aligned} & A \left(\alpha_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ & + B \left(\alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_2 \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ & + C \left(\beta_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ & + D \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ & + E \left(\beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ & + Fu + G = 0 \end{aligned}$$

e re-arranjando os termos evidenciando as derivadas parciais

$$\begin{aligned} & (A\alpha_1^2 + B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (A\alpha_2^2 + B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (2A\alpha_1\alpha_2 + B\alpha_1\beta_2 + B\alpha_2\beta_1 + \\ & + 2C\beta_1\beta_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (D\alpha_1 + E\beta_1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (D\alpha_2 + E\beta_2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu + G = 0 \end{aligned}$$

Observe as quantidades entre parênteses que multiplicam as derivadas de segunda ordem em relação a ξ , o termo misto e a η , respectivamente, e considere:

$$A_1 = A\alpha_1^2 + B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2$$

$$B_1 = 2A\alpha_1\alpha_2 + B(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2C\beta_1\beta_2$$

$$C_1 = A\alpha_2^2 + B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2$$

Obtemos aqui uma equação semelhante à (2.3). Daí, o discriminante (2.8) fica assim:

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1, \quad (2.15)$$

e com um pouco de manipulação algébrica temos, portanto,

$$\Delta = (B^2 - 4AC)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2. \quad (2.16)$$

■

2.2 Equações Elípticas

O foco deste trabalho é nas equações elípticas. Estas equações modelam fenômenos físicos que estão relacionados aos problemas de equilíbrio. Os fenômenos físicos que aparecem na natureza podem ser divididos em dois tipos básicos: os que evoluem no tempo (transientes) e os que não evoluem no tempo (estacionários). Podemos até mesmo notar os dois processos acontecendo juntos. Observe, por exemplo, quando em um dia frio você pretende tomar uma sopa quente para aquecer seu corpo. Assim que você serve a sopa bem quente em seu prato ela começa a esfriar ao passo em que você aproveita o momento. Este é um fenômeno **transiente**, pois a temperatura da sopa diminui enquanto o tempo passa. Então você comete o erro de apreciar demasiadamente devagar e a sopa esfria até a temperatura se equilibrar com o ambiente. Neste momento a temperatura não se alterará mais e este é o que chamamos de estado **estacionário**.

Os problemas de equilíbrio são os chamados problemas de valores de contorno em domínios fechados, nos quais as informações conhecidas, valores de contorno, são especificadas em dois valores diferentes da variável independente, ou seja, os limites do domínio da solução. Os problemas de equilíbrio são governados por equações diferenciais ordinárias com condições de contorno (HOFFMAN, 1992).

Algumas destas equações elípticas têm certo destaque como a equação de **Poisson** que é dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (2.17)$$

em que u é a variável dependente e f é uma função real.

No caso particular em que $f = 0$ temos a chamada equação de **Laplace**

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.18)$$

em que u é a variável dependente e $\nabla^2 u$ é o laplaciano de u .

Soluções não-triviais da Equação de Laplace cujas derivadas primeira e segunda são contínuas, são chamadas de **funções harmônicas**.

Para verificarmos que são equações elípticas devemos analisar a condição (2.7) e o discriminante (2.8). Note que, por (2.3) os coeficientes das equações de Poisson e de Laplace valem $A = C = 1$, e $B = 0$, daí

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) \\ &= -4 \end{aligned}$$

e, portanto, o discriminante é menor que zero o que, por (2.9), implica na EDP ser elíptica.

A equação (2.18) possui infinitas soluções. Para encontrarmos uma solução em particular precisamos fornecer condições adicionais. Na maioria das vezes a função incógnita que procuramos, e que deve satisfazer uma equação elíptica como a (2.18), é uma função definida em um domínio fechado. Neste caso, uma classe de condições adicionais que naturalmente surge são as designadas condições de fronteira, que correspondem a informarmos o valor da função solução, ou das suas derivadas, na fronteira do domínio onde está definida. Sabidamente, condições adicionais deste tipo nos fornecerão soluções únicas (AMES, 1977).

O problema de procurarmos soluções de uma equação diferencial que satisfaçam determinadas condições de fronteira chamamos de Problemas de Valores de Contorno (PVC).

Mais a frente, apresentaremos alguns PVCs e os resolveremos analiticamente utilizando o **Método de Fourier** e numericamente, ambas com as chamadas condições de fronteira de **Dirichlet**. Exploraremos também uma solução numérica utilizando as chamadas condições de **Neumann**.

2.2.1 O Laplaciano ∇^2

O operador diferencial ∇^2 presente na equação de Laplace é chamado de operador laplaciano. Já o mencionamos anteriormente e agora o exploraremos mais a fundo.

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. A série de Taylor de f centrada no ponto $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & + f_{xx}(a, b)\frac{(x - a)^2}{2} + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - a) + f_{yy}(a, b)\frac{(y - b)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considere um quadrado de lado $2l$ com centro em (a, b) e considere ainda a integral

$$\begin{aligned} \int_{a-l}^{a+l} \int_{b-l}^{b+l} f(x, y) dx dy = & \int_{a-l}^{a+l} \int_{b-l}^{b+l} \left(f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \right. \\ & \left. + f_{xx}(a, b)\frac{(x - a)^2}{2} + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - a) + f_{yy}(a, b)\frac{(y - b)^2}{2} + \dots \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Integrando diretamente obtemos

$$\int_{a-l}^{a+l} \int_{b-l}^{b+l} f(x, y) dx dy = 4l^2 f(a, b) + \frac{2l^4}{3} f_{xx}(a, b) + \frac{2l^4}{3} f_{yy}(a, b) + \dots \quad (2.21)$$

Deste modo, o valor médio \bar{f} de f sobre o quadrado, definido por

$$\bar{f} = \frac{1}{4l^2} \int_{a-l}^{a+l} \int_{b-l}^{b+l} f(x, y) dx dy, \quad (2.22)$$

resulta em

$$\bar{f} = f(a, b) + \frac{l^2}{6} [f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b)] + \dots \quad (2.23)$$

Isto nos mostra que a diferença entre o valor médio de f sobre o quadrado e o valor de f no centro deste é dado por

$$\bar{f} - f(a, b) = \frac{l^2}{6} [f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b)] + \dots \quad (2.24)$$

em que a quantidade entre colchetes é o laplaciano de f avaliado no ponto (a, b) . Se por acaso

$$\nabla f = 0 \quad (2.25)$$

em todos os pontos no interior do referido quadrado, teremos que todas as derivadas parciais de ordens mais altas também se anularão nesta mesma região. Neste caso teremos

$$\bar{f} - f(a, b) = 0, \quad (2.26)$$

ou seja, o valor médio de f sobre toda a região será igual ao seu valor no centro desta. Assim, dizemos que f está equilibrada e que os problemas de ordem prática associados à equação $\nabla f = 0$, ou, de forma mais geral, $\nabla f = g$, são problemas de equilíbrio.

2.2.2 Soluções Fundamentais

Dado que a Equação de Laplace é invariante frente à rotações, faz sentido buscarmos por soluções que tenham simetria radial, ou seja, funções da forma

$$u(x) = v(r) \quad (2.27)$$

em que u é uma função real definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $r := |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Observe que v é solução da equação de **Laplace** se $\nabla^2 v(r) = 0$.

Como o laplaciano de u é definido como sendo

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x), \quad (2.28)$$

com

$$u_{x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.29)$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r}, \quad (2.30)$$

obtendo com isso

$$u_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{x_i}{r} = v'(r) \frac{x_i}{r}$$

$$u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

de modo que a equação (2.28) fica assim:

$$\nabla^2 u(x) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n-1}{r} \right) = 0. \quad (2.31)$$

Observe que

$$\frac{d}{dr} \ln |v'(r)| = \frac{v''(r)}{v'(r)}, \quad (2.32)$$

se $v'(r) \neq 0$. E reescrevendo novamente a equação acima temos

$$\frac{d}{dr} \ln |v'(r)| = \frac{1-n}{r}, \quad (2.33)$$

a qual podemos obter a solução integrando diretamente ambos os lados resultando

$$v'(r) = \frac{k}{r^{(n-1)}}, \quad (2.34)$$

em que k é uma constante de integração. Repetindo o processo de integração em relação a r obtemos

$$v(r) = \begin{cases} b \ln(r) + c & \text{se } n = 2 \\ \frac{k}{r^{(n-2)}} + c & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (2.35)$$

com b e c constantes. Motivados por essa construção definimos:

Definição 1. A função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, por

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-1)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{(n-2)}}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (2.36)$$

em que $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$, que denota o volume de uma hipersfera unitária em \mathbb{R}^n , é chamada de *solução fundamental para a Equação de Laplace*.

2.3 Problemas de Valores de Contorno

Podemos escrever a equação

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu - G = 0, \quad (2.37)$$

de maneira compacta como sendo

$$\mathcal{L}(u) = G \quad (2.38)$$

em que

$$\mathcal{L}(u) = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu. \quad (2.39)$$

Seja então uma função u definida em um domínio fechado Ω delimitado por uma fronteira $\partial\Omega$. Por um problema de valores de contorno (PVC) queremos dizer um problema definido por

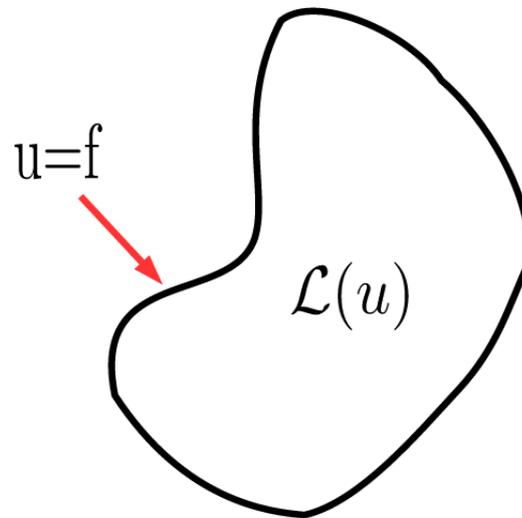
$$\mathcal{L}(u) = G \quad \text{em } \Omega \quad (2.40)$$

$$u = f \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2.41)$$

em que f é uma função dada.

Também nos referimos a este tipo de problema por **Problema de Dirichlet** e à equação (2.41) por **condição de Dirichlet**. A condição de contorno de Dirichlet é nomeada em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), um matemático alemão.

Figura 2.2 – Problema de Dirichlet



Fonte: Do autor (2019).

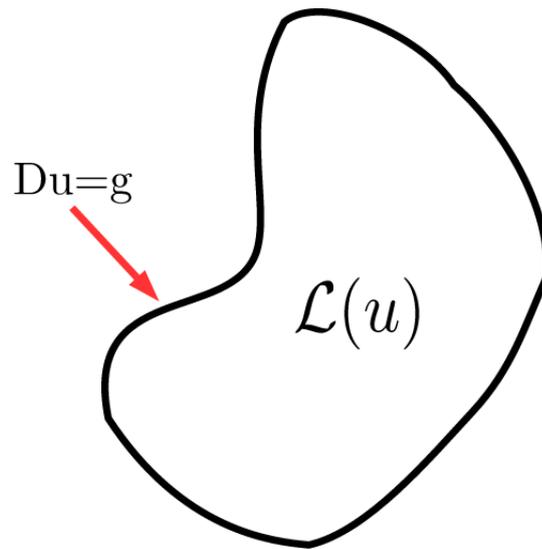
Alternativamente podemos definir um PVC na forma

$$\mathcal{L}(u) = G \quad \text{em } \Omega \quad (2.42)$$

$$Du = g \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2.43)$$

em que Du é a derivada normal de u . Neste caso falamos em **Problema de Neumann** e à equação (2.43) nos referimos por **Condição de Neumann**. A condição de contorno de Neumann (ou de segundo tipo) é nomeada devido a Carl Neumann (1832-1925), outro matemático alemão.

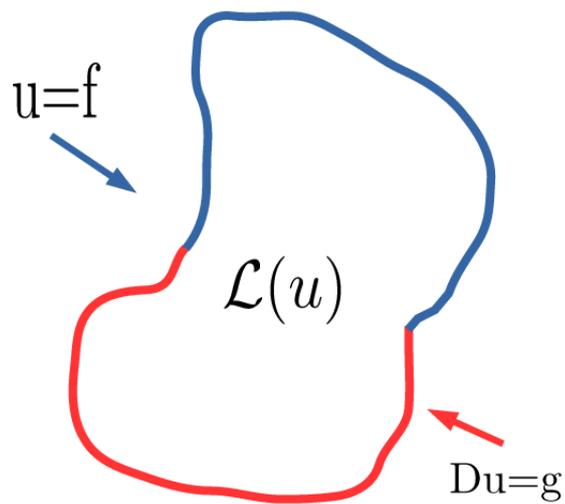
Figura 2.3 – Problema de Neumann



Fonte: Do autor (2019).

Podemos ainda ter um PVC que apresente as duas condições, juntas. Neste caso falamos em **Problemas Mistos**.

Figura 2.4 – Problema Misto



Fonte: Do autor (2019).

METODOLOGIA

3.1 Métodos Analíticos

3.1.1 Método de Fourier ou o Método de Separação de Variáveis

O Método de Fourier se utiliza da separação de variáveis e das Séries de Fourier. Tal método consiste em substituímos a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Com isso encontramos uma família de soluções que satisfazem as condições de fronteiras propostas. Depois, utilizamos essas famílias de soluções para montarmos uma série de senos e cossenos, na qual os termos são produtos dessas soluções por coeficientes escolhidos adequadamente. O nome de Fourier está atrelado a este método pois, Joseph B. Fourier (1768-1830) foi o primeiro a estudar sistematicamente o problema de condução de calor (IÓRIO, 2016).

Vamos considerar um **Problema de Dirichlet em um retângulo** e procurar encontrar uma função u que satisfaça a Equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

em um retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, com as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, & \quad u(x, b) = 0, & \quad 0 < x < a, \\ u(0, y) = 0, & \quad u(a, y) = f(y), & \quad 0 \leq y \leq b. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uma demonstração com mais detalhes desta resolução por Separação de Variáveis pode ser encontrada no Capítulo 10 de Boyce e DiPrima (2006) e também no Capítulo 6 de Iório (2016).

O objetivo é resolver o problema de valor de contorno dado por (3.1) com as condições de contorno (3.2). Para isso vamos supor que $u(x, y)$ seja da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (3.3)$$

em que X é função apenas de x e Y função apenas de y , por isso o nome separação de variáveis.

Resolveremos este problema em 5 passos para melhor organização e entendimento do processo.

Passo 1: Substituindo (3.3) na EDP (3.1) temos

- $u_{xx} = X''(x)Y(y)$

- $u_{yy} = X(x)Y''(y)$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (3.4)$$

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

na qual obtemos duas EDOs

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno (3.2) em (3.3) obtemos

- $u(x, 0) = 0$ $X(x)Y(0) = 0$

Se considerássemos $X(x)$ como sendo zero para todo x teríamos que $u(x, y)$ seria zero para todo x e y , e já excluimos esta possibilidade. Portanto a equação deve ser satisfeita impondo a condição

$$Y(0) = 0 \quad (3.5)$$

A análise é análoga para as duas equações abaixo.

- $u(x, b) = 0$ $X(x)Y(b) = 0$ (3.6)

$$Y(b) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad u(0, y) = 0 & \qquad X(0)Y(y) = 0 & (3.7) \\
 & \qquad X(0) = 0
 \end{aligned}$$

Passo 2: Vamos considerar $Y(y)$ sujeita as condições (3.5) e (3.6)

$$\begin{cases}
 Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\
 Y(0) = 0 \\
 Y(b) = 0
 \end{cases}$$

Tomamos a equação característica $r^2 + \lambda = 0$ e analisamos 3 casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$.

Caso 1: $\lambda = 0$

Resolvendo a equação característica temos $r^2 + 0 = 0 \Rightarrow r = 0$.

Como as raízes da equação característica são iguais, a solução geral da EDO é dada por

$$\begin{aligned}
 Y(y) &= c_1 e^{ry} + c_2 y e^{ry} \\
 &= c_1 + c_2 y
 \end{aligned}$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias que devem ser calculadas a partir das condições de contorno.

Dada a condição $Y(0) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 \cdot 0 &= 0 \\
 c_1 &= 0,
 \end{aligned}$$

e ainda a condição $Y(b) = 0$ implica em

$$\begin{aligned}
 c_2 \cdot b &= 0 \\
 c_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

$\therefore Y(y) = 0$. Trivial.

Caso 2: $\lambda < 0$. Tome $\lambda = -u^2, u > 0$

Da equação característica temos: $r^2 + (-u^2) = 0 \Rightarrow r = \pm u$

Aqui as raízes da equação característica são diferentes, então temos a seguinte solução geral

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 e^{r_1 y} + c_2 e^{r_2 y} \\ &= c_1 e^{uy} + c_2 e^{-uy} \end{aligned}$$

Então, impondo-se a condição de contorno $Y(0) = 0$ temos

$$\begin{aligned} c_1 e^{u0} + c_2 e^{-u0} &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 &= -c_2 \end{aligned}$$

e impondo-se após a condição $Y(b) = 0$

$$\begin{aligned} c_2 e^{-ub} - c_2 e^{ub} &= 0 \\ c_2 (e^{-ub} - e^{ub}) &= 0, \end{aligned}$$

mas como $(e^{-ub} - e^{ub}) \neq 0$, temos $c_2 = 0$ o que implica em $c_1 = 0$.

$\therefore Y(y) = 0$. Trivial.

Caso 3: $\lambda > 0$. Tome $\lambda = u^2, u > 0$

Da equação característica temos: $r^2 + u^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -u^2 \Rightarrow r = \pm iu$

Neste caso as raízes da equação característica são complexas, portanto a solução geral é da forma

$$Y(y) = c_1 \cos(uy) + c_2 \operatorname{sen}(uy)$$

Então impondo-se a condição $Y(0) = 0$ temos

$$\begin{aligned} c_1 \cos(u0) + c_2 \operatorname{sen}(u0) &= 0 \\ c_1 &= 0, \end{aligned}$$

e impondo-se ainda a condição $Y(b) = 0$

$$c_2 \operatorname{sen}(ub) = 0.$$

Se $c_2 = 0$ então teremos uma solução trivial. Tomamos então $c_2 \neq 0$ e $\operatorname{sen}(ub) = 0$, daí

$\operatorname{sen}(ub) = 0$ implica em $ub = n\pi$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, o que implica, por sua vez, em $u = \frac{n\pi}{b}$.

Logo

$$Y_n(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

com

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.9)$$

Passo 3: Para determinar $X(x)$ utilizamos a condição (3.7) e a quantidade (3.9)

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Consideramos aqui apenas o Caso 3 ($\lambda > 0$) tratado no **Passo 2**, pois foi a única solução que apresentou um resultado não-trivial.

Logo a equação característica fica assim:

$$r^2 - \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad r = \pm \frac{n\pi}{b}$$

Substituímos r na solução geral da EDO

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &= c_1 e^{\frac{n\pi x}{b}} + c_2 e^{-\frac{n\pi x}{b}} \end{aligned}$$

e impondo $X_n(0) = 0$

$$\begin{aligned} c_1 e^{\frac{n\pi 0}{b}} + c_2 e^{-\frac{n\pi 0}{b}} &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 &= -c_2 \end{aligned}$$

Depois retornamos substituindo a constante c_1 na solução geral

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_2 e^{-\frac{n\pi x}{b}} - c_2 e^{\frac{n\pi x}{b}} \\ &= c_2 \left(e^{-\frac{n\pi x}{b}} - e^{\frac{n\pi x}{b}} \right) \end{aligned}$$

Esta solução ainda pode ser escrita na forma de funções trigonométricas hiperbólicas, a saber:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Por meio destas, podemos escrever a solução

$$X_n = c_2 \left(e^{-\frac{n\pi x}{b}} - e^{\frac{n\pi x}{b}} \right)$$

na forma

$$X_n = c_2 2 \sinh(x)$$

de modo que obtemos as soluções fundamentais

$$X_n(x) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

Passo 4: Neste passo unimos as soluções encontradas anteriormente para Y_n e X_n e substituímos em (3.3). Temos então que as equações

$$u_n(x, y) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

satisfazem a EDP (3.1) e as condições de contorno (3.2), para n inteiro positivo.

Passo 5: Agora resta apenas determinarmos a condição

$$u(a, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b \quad (3.12)$$

Nesta etapa queremos montar uma combinação linear das equações (3.11) e escolher convenientemente os coeficientes que satisfaçam (3.12). Mas existe uma infinidade de funções (3.11) de modo que uma combinação linear delas gere uma série infinita. Suponha então que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.13)$$

na qual os coeficientes C_n ainda precisam ser determinados. Suponha que a série infinita (3.13) converge e satisfaz (3.1) e (3.2). Para satisfazermos a condição (3.12) temos que ter

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y) \quad (3.14)$$

Considere agora que $C_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = A_n$, daí

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.15)$$

Note que $A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ nos lembra a série de Fourier em senos, então tomando $A_n = b_n$ temos:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy, & \text{no qual } L = b \\ &= \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, & \text{ou seja,} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \quad (3.17)$$

e que por fim

$$C_n = \frac{2}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy. \quad (3.18)$$

Portanto a solução do PVC (3.1) com condições de contorno (3.2) é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.19)$$

com os coeficientes calculados por (3.18).

■

3.2 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos são aplicações de algoritmos que buscam resolver problemas matemáticos complexos em termos de operações numéricas mais simples. Um algoritmo, por sua vez, é um grupo finito de operações ordenadas e organizadas que nos permitem resolver um certo problema.

A análise numérica é o estudo dos algoritmos que visam projetar e analisar técnicas para encontrar soluções aproximadas para problemas complexos nas mais diferentes áreas da ciência. Estas soluções, apesar de aproximadas, podem ser, e geralmente são, muito precisas (FORTUNA, 2000). Vários são os métodos numéricos existentes e a aplicação de cada um é definida de acordo com a particularidade do problema analisado como suas simetrias, tipos de condição de contorno, geometria do domínio, etc. Citamos aqui algum deles: Método dos Elementos Finitos (MEF); Método dos Elementos Discretos (MED); Método dos Volumes Finitos (MVF); Método dos Elementos de Contorno (MEC); Método das Diferenças Finitas (MDF).

Dos métodos acima citados faremos, neste trabalho, o uso do Método das Diferenças Finitas. Embora este método seja talvez o historicamente mais antigo, é também o pedagogicamente mais adequado para um primeiro estudo sobre discretização e, além de se destacar por sua simplicidade conceitual e de uso, permanece relevante atualmente (BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010).

Apesar dos métodos numéricos serem atualmente muito confiáveis não significa que po-

demos descartar os métodos analíticos e os ensaios experimentais. A solução mais adequada que podemos obter vem da analítica e, por isso, a queremos em primeiro lugar. Dependendo da magnitude do projeto e de sua complexidade pode ser necessário utilizar das três técnicas durante o processo de modo que elas se complementem.

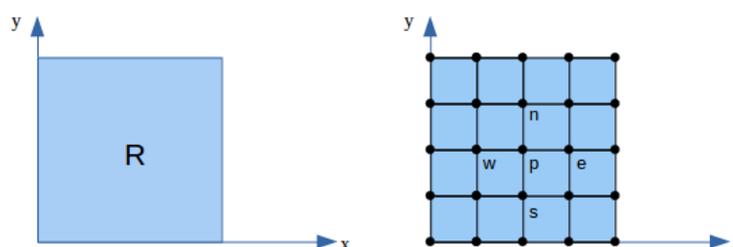
3.2.1 Método das Diferenças Finitas (MDF)

3.2.1.1 Discretização do PVC

A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. Este processo consiste em tomar a região do domínio que queremos tratar e transformá-la numa região possível de ser enumerada por um computador. Veja que não é possível expressarmos o contínuo utilizando uma máquina porque temos infinitos pontos. Conseguimos sim enumerar muitíssimos pontos e com isso delimitar o que chamamos de malha, ou grade. A malha, por sua vez, é esse conjunto de pontos enumerados que tornam uma região contínua em discreta. Somente nesses pontos é que as soluções serão obtidas. Tornar um problema contínuo em discreto, é o que chamamos de discretização. A ideia geral do MDF, (FDM - Finite Difference Method, em inglês), é discretizar o domínio e substituir as derivadas presentes na equação diferencial por aproximações que envolvem somente valores numéricos da função nos pontos da malha.

A imagem abaixo ilustra esta ideia:

Figura 3.1 – Região contínua e discretizada.



Fonte: Do autor (2019).

A notação contida na figura faz referência à uma bússola (n=norte, s=sul, e=leste, w=oeste) na qual as siglas das coordenadas estão em inglês e fazem referência ao ponto p .

A malha pode ter várias configurações dependendo do problema analisado e da complexidade da região que queremos discretizar. Na região que trabalhamos, um retângulo, é suficiente dispor a malha com linhas paralelas aos eixos coordenados. O espaçamento das li-

nhas também pode variar e ser uniforme ou não.

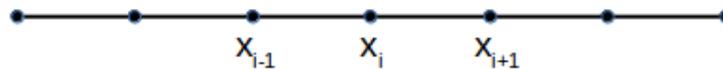
Logo, no cruzamento das linhas definimos os pontos da malha, ou nós, e os classificamos em pontos internos e pontos de fronteira. Cada ponto é único e é identificado com as coordenadas (i, j) com i na direção x e j na direção y , quando em duas dimensões. Para malhas unidimensionais utilizamos apenas a coordenada i na direção x .

Sobre o espaçamento das linhas dizemos que $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ em que x_{i+1} significa o ponto seguinte. O mesmo se dá para Δy .

A figura abaixo exemplifica como os pontos vizinhos são definidos de acordo com essas coordenadas. Além de utilizarmos uma dimensão, para fins de exemplo, diferenciamos a notação trocando o ponto p por x_i , w por x_{i-1} e e por x_{i+1} . Dessa maneira o leitor poderá acompanhar o desenvolvimento do método sem problemas, uma vez que as duas notações para o ponto podem se misturar no decorrer do trabalho.

Nos pontos dessa malha serão calculadas aproximações para a função $\phi(x_i)$.

Figura 3.2 – Malha unidimensional



Fonte: Do autor (2019).

3.2.1.2 Aproximação para primeira derivada

Para aproximarmos as derivadas utilizaremos a série de Taylor. Para fins didáticos mostraremos inicialmente para uma dimensão e depois estenderemos a ideia.

A série de Taylor de uma função real de uma variável real é definida por:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \quad (3.20)$$

ou

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + \phi''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \phi'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + R(x)$$

em que $R(x)$ significa os termos de maior ordem.

Se tomarmos $a = x_i$ temos as seguintes equações

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + \phi'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \phi''(x_i)\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + R(x_{i+1}) \quad (3.21)$$

$$\phi(x_{i-1}) = \phi(x_i) + \phi'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \phi''(x_i)\frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + R(x_{i-1}) \quad (3.22)$$

Na equação (3.21) calculamos a aproximação em x_{i+1} , ou seja, no ponto seguinte a x_i , e na equação (3.22) a aproximação em x_{i-1} , ou seja, no ponto anterior a x_i .

Subtraindo (3.21) de (3.22) obtemos a fórmula centrada em x_i , ou seja, a **diferença centrada** (CDS):

$$\phi'(x_i) = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{\phi''(x_i)(x_{i+1} + x_{i-1}) - 2x_i}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} + \frac{R(x_{i+1}) - R(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (3.23)$$

Truncando (3.21) e isolando $\phi'(x)$ temos a **diferença avançada** (FDS). Analogamente, se truncarmos a equação (3.22) e isolarmos $\phi'(x)$ temos a chamada **diferença atrasada** (BDS).

As siglas vêm do inglês, CDS-*Central-Difference Schemes*, FDS-*Foward-Differece Schemes* e BDS-*Backward-Difference Schemes*.

Se considerarmos ainda que o espaçamento da malha é uniforme temos que $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta$, para todo i , daí

$$\phi'(x_i) = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2\Delta} + \frac{\phi^{(3)}(x_i)\Delta^2}{2 \cdot 3!} + \frac{\phi^{(5)}(x_i)\Delta^4}{2 \cdot 4!} + \dots \quad (3.24)$$

Se as derivadas de ordem superiores a 2 forem limitadas a maior contribuição para o resto virá do primeiro termo, $\frac{\phi^{(3)}(x_i)\Delta^2}{2 \cdot 3!}$. Assim consideramos que

$$\phi'(x_i) \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2\Delta} \quad (3.25)$$

é uma aproximação com erro quadrático em Δ .

3.2.1.3 Aproximação para segunda derivada

Para calcularmos a segunda derivada no ponto podemos usar a aproximação para a primeira derivada duas vezes, assim:

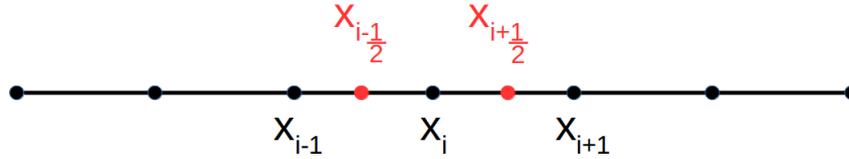
$$\phi''(x_i) \approx \frac{\phi'(x_{i+1}) - \phi'(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.26)$$

Nesta equação utilizamos FDS, mas também podemos utilizar a BDS, obtendo:

$$\phi''(x_i) = \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2(x_i - x_{i-1})}. \quad (3.27)$$

Dessa forma uma aproximação para CDS deve ser calculada nos pontos x_{i-1} e x_{i+1} . Mas podemos melhorar essa aproximação calculando as derivadas nos pontos intermediários entre x_{i-1} e x_i e x_i e x_{i+1} . Para entendermos melhor este procedimento observe a figura a seguir.

Figura 3.3 – Malha unidimensional com pontos intermediários.



Fonte: Do autor (2019).

Para obtermos os pontos médios destacados basta calcularmos da seguinte maneira:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad \text{e} \quad x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}. \quad (3.28)$$

Note que a distância entre $x_{i-\frac{1}{2}}$ e $x_{i+\frac{1}{2}}$ é igual a distância entre x_i e x_{i+1} . Então podemos prosseguir calculando uma CDS nestes pontos médios obtendo

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{e} \quad \phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (3.29)$$

Por fim o resultado para a segunda derivada fica da seguinte forma:

$$\phi''(x_i) = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (3.30)$$

$$= \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}. \quad (3.31)$$

E se considerarmos uma malha com espaçamento equidistante temos

$$\phi''(x_i) = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2}. \quad (3.32)$$

3.2.1.4 Ampliando os horizontes

As equações que acabamos de trabalhar usam um índice para malhas unidimensionais. Então para malhas bidimensionais a equação (3.32) ficará assim:

$$\phi_{xx}(x_i, y_j) = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.33)$$

Ao passo que também podemos considerar

$$\phi_{yy}(x_i, y_j) = \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta y)^2}, \quad (3.34)$$

e somando (3.33) e (3.34) temos a aproximação via diferenças finitas para a equação de Laplace

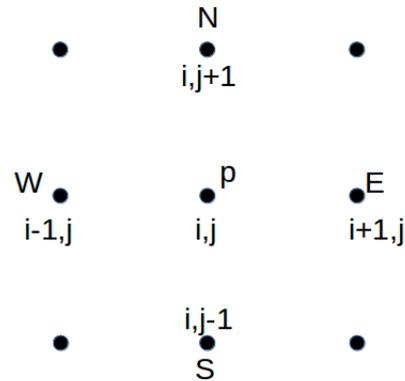
$$\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (3.35)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por Δx^2 , e denotando $\eta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$ temos

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \eta\phi_{i,j+1} + \eta\phi_{i,j-1} - 2\eta\phi_{i,j} = 0. \quad (3.36)$$

Observe na figura abaixo a relação que as coordenadas (i, j) tem com os pontos da bússola:

Figura 3.4 – Coordenadas da bússola e os respectivos índices de posição



Fonte: Do autor (2019).

Assim podemos finalmente reescrever (3.36)

$$\begin{aligned}\phi_E + \phi_W - 2\phi_p + \eta\phi_N + \eta\phi_S - 2\eta\phi_p &= 0 \\ \eta\phi_S + \phi_W - 2(1 + \eta)\phi_p + \phi_E + \eta\phi_N &= 0\end{aligned}\quad (3.37)$$

3.2.1.5 Um notação importante

Queremos enumerar sequencialmente todos os nós da malha por meio de um único rótulo. Os pontos da malha são únicos e tem coordenadas (x_i, y_j) com $0 < i < nx$ e $0 < j < ny$ em que nx e ny são as quantidades máximas de pontos definidas nas direções x e y , respectivamente. Apresentamos a seguinte notação:

$$l = x_i + (1 + y_j)nx$$

Exemplo: o ponto de coordenadas $x = 3$ e $y = 4$ em uma malha 4X4, com $nx = 4$ e $ny = 4$, fica assim:

$$l = x_i + (1 + y_j)nx$$

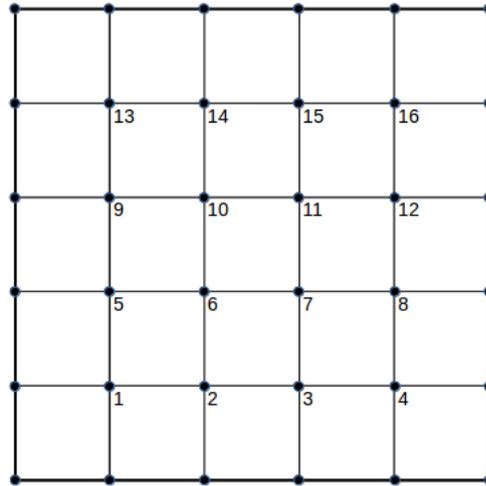
$$l = 3 + (4 - 1)4$$

$$l = 7.$$

A partir de agora quando falarmos, por exemplo, do ponto 6, queremos dizer que é o ponto $l = 6$. Isto nos será útil ao tratarmos as equações das diferenças finitas baseada na posi-

ção dos pontos vizinhos.

Figura 3.5 – Malha identificada com o índice l



Fonte: Do autor (2019).

A equação (3.37) pode ser reescrita substituindo as coordenadas da bússola pelo índice l . Isso nos possibilita percorrer toda a malha com apenas um índice.

Veja um exemplo: tomando como referência o ponto $l = 6$ seu vizinho do lado oeste é o ponto 5, ou seja, $l - 1$ e seu vizinho leste o ponto 7, $l + 1$. Da mesma forma seu vizinho do lado sul é o ponto 2, ou seja, $l - nx$ e seu vizinho do lado norte o ponto 10, $l + nx$. Assim obtemos

$$\eta \phi_{l-nx} + \phi_{l-1} - 2\phi_l(1 + \eta) + \phi_{l+1} + \eta \phi_{l+nx} = 0. \quad (3.38)$$

3.2.1.6 Discretizando um PVC com condições de Dirichlet

Para mostrar como esta discretização é feita na prática consideremos a equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (3.39)$$

definida no retângulo $R = \{(x, y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ com condição de **Dirichlet**:

$$u(0, y) = f, \quad u(\pi, y) = D_2, \quad u(x, 0) = D_1, \quad u(x, \pi) = g$$

na qual $f = f(y)$, $g = g(x)$ e D_1 e D_2 são constantes.

Cobrimos então a região com uma malha, como vimos anteriormente, tendo internamente 16 pontos e atribuímos às fronteiras seus respectivos valores. Assim temos $nx = 4$ e $ny = 4$.

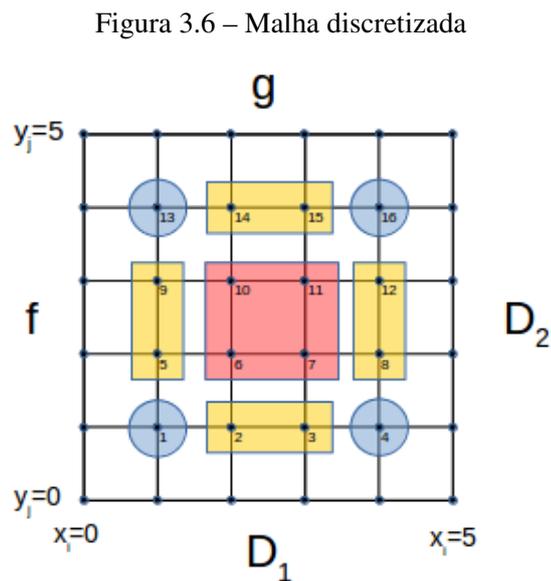
Denotamos por R_p os pontos da malha interiores a R , assim:

$$R_p = \{l \mid l = x_i + (1 + y_j)nx, 0 < i < nx, 0 < j < ny\},$$

e por ∂R_p os pontos da malha que ficam na fronteira, assim,

$$\partial R_p = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, nx, 0 \leq j \leq ny\} \cup \{(x_i, y_j) \mid j = 0, ny, 0 \leq i \leq nx\}.$$

Depois de todo esse processo de discretização da malha a ilustramos abaixo:



Fonte: Do autor (2019).

As cores internas do retângulo identificam alguns pontos importantes, a saber: os pontos em vermelho chamamos de miolo; os pontos em amarelo chamamos de segmentos norte, sul, leste e oeste (relativos a nossa bússola); e os pontos em azul chamamos de cantos nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste. Destacamos desta forma pois, na implementação da rotina de programação, cada pedaço tem uma característica diferente que devemos considerar, e isto será mais evidente adiante, quando calcularmos o valor nos pontos.

Podemos agora aproximar as derivadas segunda da equação (3.39) por (3.33) e (3.34),

considerando a notação da bússola, obtendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned} u_{xx} &\simeq \frac{\phi_W + \phi_E - 2\phi_P}{\Delta x^2} \\ u_{yy} &\simeq \frac{\phi_S + \phi_N - 2\phi_P}{\Delta y^2}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

em que ϕ é uma função desconhecida e Δx^2 e Δy^2 é o espaçamento entre os pontos da malha. No caso de uma malha com espaçamento uniforme podemos considerar $\Delta x^2 = \Delta y^2$.

Assim, reescrevendo (3.39) utilizando (3.38), temos:

$$\frac{\phi_W + \phi_E - 2\phi_P}{\Delta x^2} + \frac{\phi_S + \phi_N - 2\phi_P}{\Delta y^2} = 0, \quad (3.41)$$

e manipulando e tomando $\eta = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$ obtemos

$$\eta\phi_S + \phi_W - 2\phi_P(1 + \eta) + \phi_E + \eta\phi_N = 0 \quad (3.42)$$

na qual finalmente

$$\eta\phi_{l-nx} + \phi_{l-1} - 2\phi_l(1 + \eta) + \phi_{l+1} + \eta\phi_{l+nx} = 0. \quad (3.43)$$

Em seguida calculamos em cada ponto a equação (3.43), no qual obteremos um sistema com 16 equações algébricas. Veja um exemplo: vamos calcular o valor da equação no ponto 1 usando como referência a figura 3.6. Daí,

$$\begin{aligned} l = 1 \Rightarrow \quad \eta D_1 + f_1 - 2\phi_1(1 + \eta) + \phi_2 + \eta\phi_5 &= 0 \\ -2\phi_1(1 + \eta) + \phi_2 + \eta\phi_5 &= -(\eta D_1 + f_1) \end{aligned}$$

Repetimos este passo para os 16 pontos internos obtidos com essa malha fazendo uma observação importante: no caso de $l = 1$, o ponto sul e o ponto oeste não possuem todos os vizinhos como os pontos do miolo. Note que seu vizinho do lado sul é um ponto da fronteira que tem um valor definido e por isso recebe o seu valor, D_1 . O mesmo acontece para o vizinho do lado oeste que recebe o valor definido na fronteira que é a função f . Note ainda que atribuímos o índice f_1 , pois definimos $f_j = f(y_j)$ e $g_i = g(x_i)$. O mesmo fato acontecerá nos demais cantos. Por sua vez o segmento sul não tem vizinhos do lado sul sendo, portanto, atribuído a

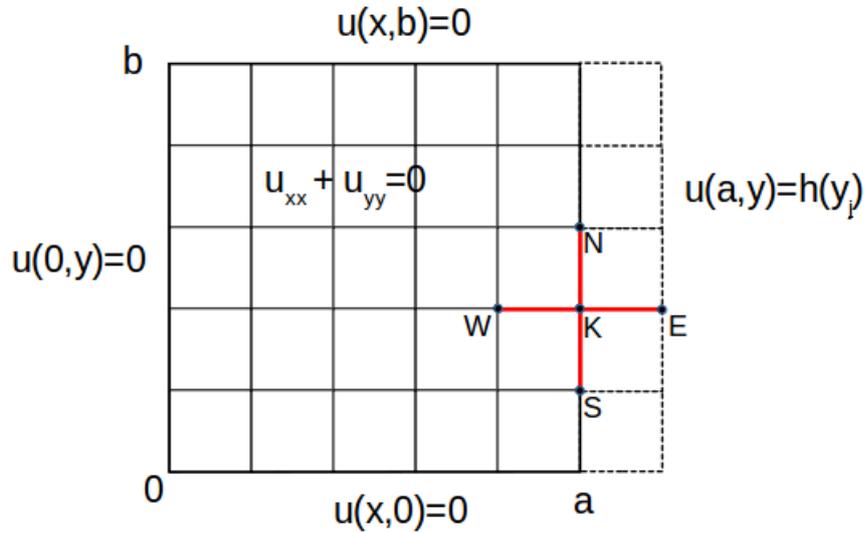
$\phi_S = \phi_{l-nx} = D_1$. E o segmento norte não tem vizinhos do lado norte, assim como os segmentos leste e oeste não tem os vizinhos dos lados leste e oeste, respectivamente.

Feitas as considerações obtemos as seguintes equações algébricas em que passamos para o lado direito da equação os valores conhecidos:

$$\begin{aligned}
-2\phi_1(1 + \eta) + \phi_2 + \eta\phi_5 &= -(\eta D_1 + f_1) \\
\phi_1 - 2\phi_2(1 + \eta) + \phi_3 + \eta\phi_6 &= -\eta D_1 \\
\phi_2 - 2\phi_3(1 + \eta) + \phi_4 + \eta\phi_7 &= -\eta D_1 \\
\phi_3 - 2\phi_4(1 + \eta) + \eta\phi_8 &= -(\eta D_1 + D_2) \\
\eta\phi_1 - 2\phi_5(1 + \eta) + \phi_6 + \eta\phi_9 &= -f_2 \\
\eta\phi_2 + \phi_5 - 2\phi_6(1 + \eta) + \phi_7 + \eta\phi_{10} &= 0 \\
\eta\phi_3 + \phi_6 - 2\phi_7(1 + \eta) + \phi_8 + \eta\phi_{11} &= 0 \\
\eta\phi_4 + \phi_7 - 2\phi_8(1 + \eta) + \eta\phi_{12} &= -D_2 \\
\eta\phi_5 - 2\phi_9(1 + \eta) + \phi_{10} + \eta\phi_{13} &= -f_3 \\
\eta\phi_6 + \phi_9 - 2\phi_{10}(1 + \eta) + \phi_{11} + \eta\phi_{14} &= 0 \\
\eta\phi_7 + \phi_{10} - 2\phi_{11}(1 + \eta) + \phi_{12} + \eta\phi_{15} &= 0 \\
\eta\phi_8 + \phi_{11} - 2\phi_{12}(1 + \eta) + \eta\phi_{16} &= -D_2 \\
\eta\phi_9 - 2\phi_{13}(1 + \eta) + \phi_{14} &= -(f_4 + \eta g_5) \\
\eta\phi_{10} + \phi_{13} - 2\phi_{14}(1 + \eta) + \phi_{15} &= -\eta g_5 \\
\eta\phi_{11} + \phi_{14} - 2\phi_{15}(1 + \eta) + \phi_{16} &= -\eta g_5 \\
\eta\phi_{12} + \phi_{15} - 2\phi_{16}(1 + \eta) &= -(D_2 + \eta g_5)
\end{aligned}$$

E tomando $k = (1 + \eta)$ as escrevemos na forma matricial obtendo:

Figura 3.7 – Problema de Neumann no retângulo



Fonte: Do autor (2019).

Como a equação de diferença finita usa os pontos vizinhos tanto na direção i quanto na direção j , precisamos considerar o que chamamos de **pontos fantasmas**. A linha tracejada da figura acima ilustra os pontos fantasmas que devemos considerar para os pontos da fronteira do lado direito.

Defina o ponto fantasma como F_j e o substitua por ϕ_E , pois o vizinho fantasma fica do lado leste. Assim, a equação de Laplace (ver (3.42)) discretizada no ponto K fica:

$$\eta\phi_S + \phi_W - 2\phi_P(1 + \eta) + F_j + \eta\phi_N = 0 \quad (3.45)$$

Observe que a equação acima é praticamente a mesma de (3.42) mudando apenas por conta do vizinho fantasma. E como este é um ponto fantasma, precisamos eliminá-lo.

Aproximamos a condição de fronteira por diferenças centrais no ponto K e obtemos:

$$\frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} = h(y_j), \quad (3.46)$$

ou seja,

$$\frac{F_j - \phi_W}{2\Delta x} = h(y_j),$$

implicando em

$$F_j = \phi_W + 2\Delta x h(y_j). \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.45) obtemos:

$$\eta \phi_S + \phi_W - 2\phi_P(1 + \eta) + (\phi_W + 2\Delta x h(y_j)) + \eta \phi_N = 0,$$

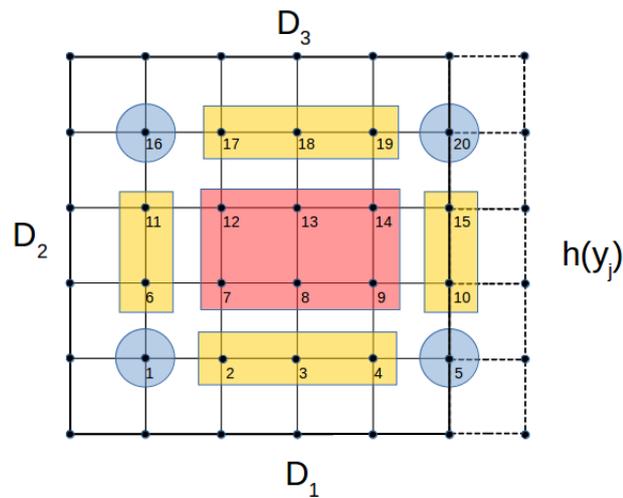
e passando os termos conhecidos para o segundo membro obtemos por fim:

$$\eta \phi_S + 2\phi_W - 2\phi_P(1 + \eta) + \eta \phi_N = -2\Delta x h(y_j). \quad (3.48)$$

Atuamos de forma semelhante caso as condições de contorno sejam aplicadas em outros lados do retângulo.

Então nossa malha discretizada fica assim:

Figura 3.8 – Malha discretizada com condição de Neumann



Fonte: Do autor (2019).

Note que as condições aplicadas na região acima são mistas, pois temos 3 lados do retângulo com condições de Dirichlet e o lado direito com a condição de Neumann em que $h(y_j)$ representa a derivada da função nos pontos da fronteira.

Calculando as equações de diferenças finitas em todos os pontos desta malha obteremos 20 equações algébricas, e tomando $k = -2(1 + \eta)$, podemos escrevê-las na forma matricial como segue:

pressão “aproximação numérica” implica que temos completo entendimento de o quanto nossa solução numérica deve diferir de uma solução exata.

Embora este não possa ser o único critério adotado, a comparação direta entre as soluções analítica e numérica para um mesmo problema é conceitualmente simples de se entender e fácil de ser realizada. Obviamente, tal comparação só pode ser realizada quando dispomos de uma solução analítica. Além disso, quando dizemos solução analítica, estamos tacitamente assumindo que esta é exata e, portanto, o perfeito marco de referência com o qual comparar uma solução numérica. A comparação mais simples que podemos realizar diretamente entre duas soluções é a diferença absoluta entre ambas, isto é, o valor absoluto da diferença. Como estamos assumindo que uma delas é exata, dizemos que tal comparação é a medida do **erro absoluto**, E_a . Denotando-se por u a solução exata e por \bar{u} a aproximada, temos

$$E_a = |u - \bar{u}| \quad (\text{erro absoluto}).$$

Em muitas situações, é mais conveniente, e prudente, termos uma medida da razão entre o erro absoluto e o valor exato de referência. Neste caso, faremos uso do **erro relativo percentual**, E_r , definido por

$$E_r = 100 \times \frac{|u - \bar{u}|}{|u|} \quad (\text{erro relativo percentual}).$$

Evidentemente, o erro relativo só faz sentido se $u \neq 0$.

Entretanto, além de a compararmos diretamente com a solução exata, devemos ainda verificar se nossa solução numérica é **consistente**, no sentido de que um aumento no refinamento da malha deve ocasionar uma melhora na solução que seja compatível com o erro de truncamento nas equações (3.24) e (3.27), por exemplo. Utilizando-se espaçamento constante, isto implica no fato de que a solução não deve apenas melhorar conforme refinamos a malha, mas deve fazê-lo de forma proporcional ao quadrado do espaçamento. Somente deste modo podemos atestar que no hipotético limite em que o espaçamento tende à zero, nossas aproximações para a derivada tendem ao seu valor exato. Por outro lado, devemos sempre ter em mente que não é possível aumentarmos o refinamento de maneira indiscriminada, dado que conforme o espaçamento entre os nós da malha diminui, estaremos mais e mais adicionando erros de arredondamento ao cálculo. Tal erro de arredondamento se manifesta em todas as operações

aritméticas, mas tende a ser mais impactante justamente em diferenças divididas da forma

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i}$$

por ocasionar o assim chamado cancelamento catastrófico de algarismos significativos.

Nos casos em que não dispomos da solução exata para comparação direta, podemos averiguar com que nível de precisão nossa solução numérica satisfaz determinados critérios. Como trabalhamos particularmente com a equação de Laplace, vamos analisar se as propriedades de valor médio são verificadas (EVANS, 1998). Além disso, como mencionamos, verificaremos se tais propriedades são verificadas de forma consistente.

Nos casos em que temos problemas mistos, envolvendo condições de Neumann, podemos novamente fazer uma comparação direta entre a solução exata e a solução numérica dado que, nestes casos, a derivada normal da função solução é dada em determinados pontos da fronteira do domínio. Observemos, todavia, que aqui não podemos usar a aproximação com diferenças centradas para a derivada dada na equação (3.24). Neste caso, usamos uma aproximação de ordem dois para a derivada obtida via interpolação polinomial (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

DISCUSSÃO E RESULTADOS

Com base na teoria vista até agora, o objetivo deste capítulo é mostrar como aplicamos os métodos discutidos anteriormente utilizando os meios computacionais. Para isto, desenvolvemos uma rotina programada na linguagem Fortran em que definimos as condições de contorno de um PVC e o tamanho da malha que queremos analisar. Então, a rotina calcula em todos os nós da malha as equações de diferenças finitas e salva os resultados em um arquivo de texto. A lógica para escrita desta rotina segue exatamente os passos que usamos nos problemas anteriormente descritos. Para solucionarmos o sistema linear gerado pela discretização, a rotina chama uma biblioteca externa chamada GSL¹ *GNU Scientific Library* que é uma biblioteca numérica para programadores. De posse dos valores numéricos calculados nos pontos podemos organizar o que quisermos e, em especial, podemos gerar gráficos, que são um ótimo recurso para termos ideia do que acontece em nosso problema além de verificar o quão próximo nossa aproximação está acerca da solução analítica. Os problemas a seguir mostrarão as possibilidades da rotina que resolve tanto os PVCs com condições de contorno de Dirichlet quanto os de Neumann.

No primeiro problema utilizamos as condições de contorno de Dirichlet e resolvemos tanto analítica quanto numericamente. De posse dos dois resultados podemos fazer uma comparação na qual, através do erro calculado pelo módulo da diferença das duas soluções, verificamos o quão próxima a solução numérica se aproxima da analítica.

No segundo problema utilizamos a mesma ideia do primeiro e mostramos como podemos inserir novas condições de contorno nas fronteiras do retângulo evidenciando assim as possibilidades da rotina. Aqui não faremos a comparação com a solução analítica.

Já no terceiro problema utilizaremos as condições de contorno de Neumann na qual especificamos não o valor da função na fronteira, mas sim o valor de sua derivada. Verificamos com que precisão a condição sobre a derivada foi satisfeita através de uma aproximação de ordem dois para a derivada numérica obtida via interpolação polinomial. E de posse desses resultados fizemos análise semelhante à do primeiro problema calculando o módulo da diferença e verificando a eficiência da rotina.

Para os problemas a seguir utilizamos uma malha de, aproximadamente, 150X150 pontos. Este tamanho não foi escolhido ao acaso, mas sim por conta do hardware disponível, visto que malhas com mais de 160X160 pontos alocam uma memória RAM maior do que a disponível na máquina utilizada, que tem configuração de 6GB de memória RAM e um processador

¹ Disponível em <<https://www.gnu.org/software/gsl/>>

P6200 Dual-Core de 2.13GHz. Grandes centros de pesquisa possuem supercomputadores para realizar as tarefas pesadas dos cálculos numéricos que necessitam de, além de malhas mais refinadas, muitas iterações em seus cálculos. Para efeitos de comparação a malha que utilizamos possui em média 22.000 nós enquanto, por exemplo, podemos citar um certo problema turbulento, (MAIA, 2014), em 3 dimensões que possui cerca de 170.000 nós. Muito embora em tal trabalho um método de discretização diferente seja usado, este refinamento de malha ainda implica no fato de que um sistema de equações desta ordem precise ser solucionado. Situações mais complexas e com exigências mais rigorosas podem facilmente ter valores ainda maiores que estes.

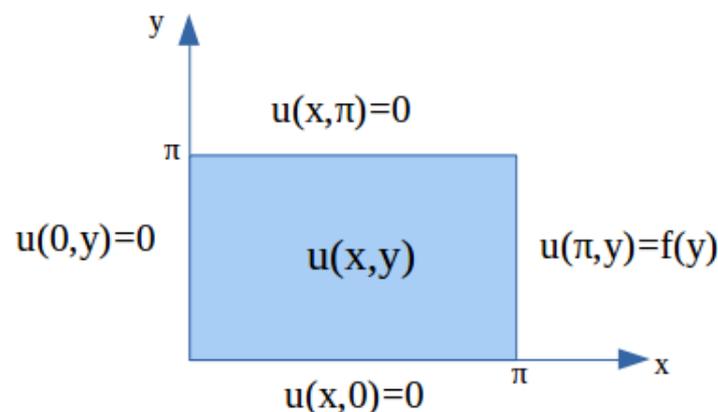
4.1 Primeiro Problema

Utilizando separação de variáveis resolveremos o seguinte problema de Dirichlet em um retângulo:

$$\nabla^2(u) = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.1)$$

com condições de contorno $u(0,y) = u(x,0) = u(x,\pi) = 0$ e $u(\pi,y) = f(y)$, com $f(y) = y(\pi - y) \cos(y)$.

Figura 4.1 – Problema de Dirichlet em um retângulo.



Fonte: Do autor (2019).

4.1.1 Solução Analítica

Seguindo os mesmos passos da subsecção anterior 3.1.1 obtemos do **Passo 2**: $Y_n(y) = \text{sen}(ny)$, e do **Passo 3**: $X_n(x) = \text{senh}(nx)$, com $n = 1, 2, 3, \dots$.

Logo a solução analítica é dada pela equação

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{senh}(nx) \text{sen}(ny) \quad (4.2)$$

com os coeficientes calculados por

$$C_n = \frac{8n(n^2 + 3)}{\pi \text{senh}(n\pi)(n^2 - 1)^3}, \quad n \text{ par.} \quad (4.3)$$

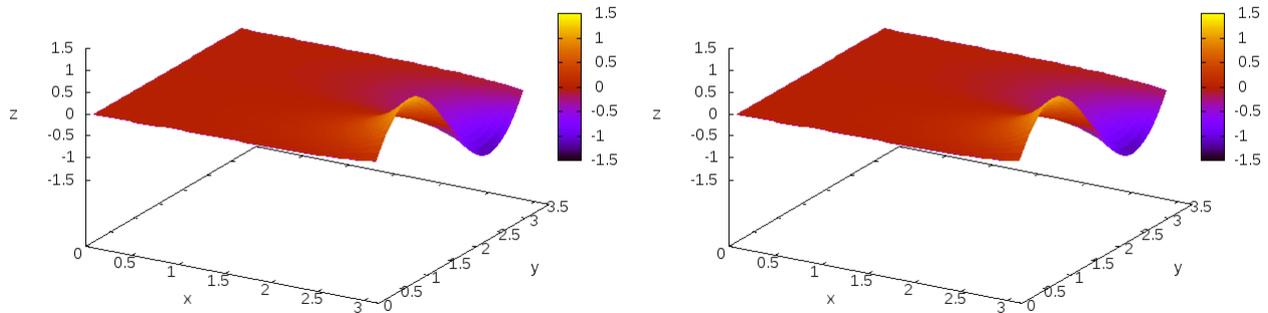
4.1.2 Solução Numérica

Vamos resolver o mesmo problema numericamente e, a seguir, calcular a diferença entre a solução analítica e a numérica a qual nos possibilitará compará-las. Para que esta comparação seja possível precisamos obter o valor de (4.3). Note que o valor de C_n é dado por uma soma com infinitos termos o que torna a soma impossível de ser realizada. Para resolver este problema definimos uma soma parcial dos 108 primeiros termos, ou seja, $2 \leq n \leq 108$, com n par, dentro da rotina. Este valor foi escolhido pois, a partir do 109º termo, a contribuição para a soma é de algo em torno de 10^{-6} que é um acréscimo pouco expressivo. É claro que esta avaliação é exclusivamente satisfatória para o estudo deste trabalho e, portanto, esta aproximação para (4.3) é suficiente com os 108 primeiros termos da soma.

De posse dos valores analíticos e numéricos a rotina grava um arquivo de texto com os seguintes itens: abscissa x ; ordenada y ; valor da solução numérica $\bar{u}(x, y)$; valor da solução analítica $u(x, y)$, erro absoluto (E_a); erro relativo (E_r). E a partir deste conjunto de dados podemos fazer as análises de comparação.

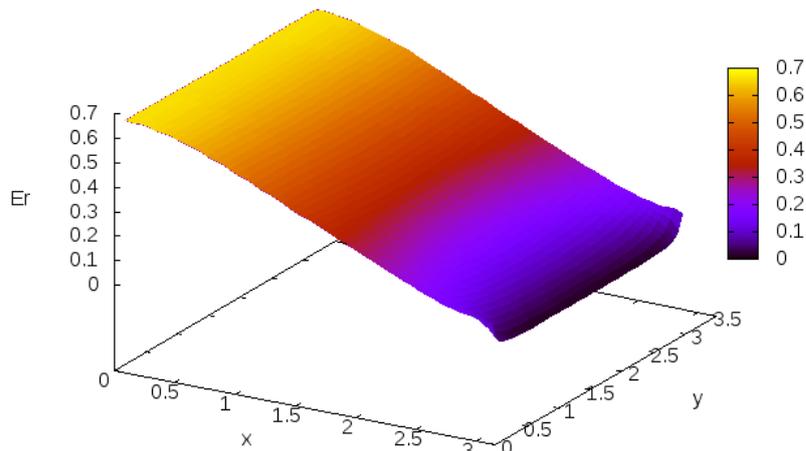
As figuras abaixo mostram as superfícies geradas tanto pela solução analítica $u(x, y)$ quanto pela numérica $\bar{u}(x, y)$.

Figura 4.2 – Superfícies calculadas com pontos de uma malha 150X150

(a) Superfície gerada por $u(x,y)$ (b) Superfície gerada por $\bar{u}(x,y)$ 

Fonte: Do autor (2019).

Observe que as superfícies geradas por ambas são muito parecidas, mas como método de comparação precisamos calcular a diferença entre elas, e figura a seguir mostra o erro relativo calculado da diferença da solução analítica 4.2a com a numérica 4.2b em toda superfície.

Figura 4.3 – $E_r(x,y) = 100 \frac{|u-\bar{u}|}{|u|}$ 

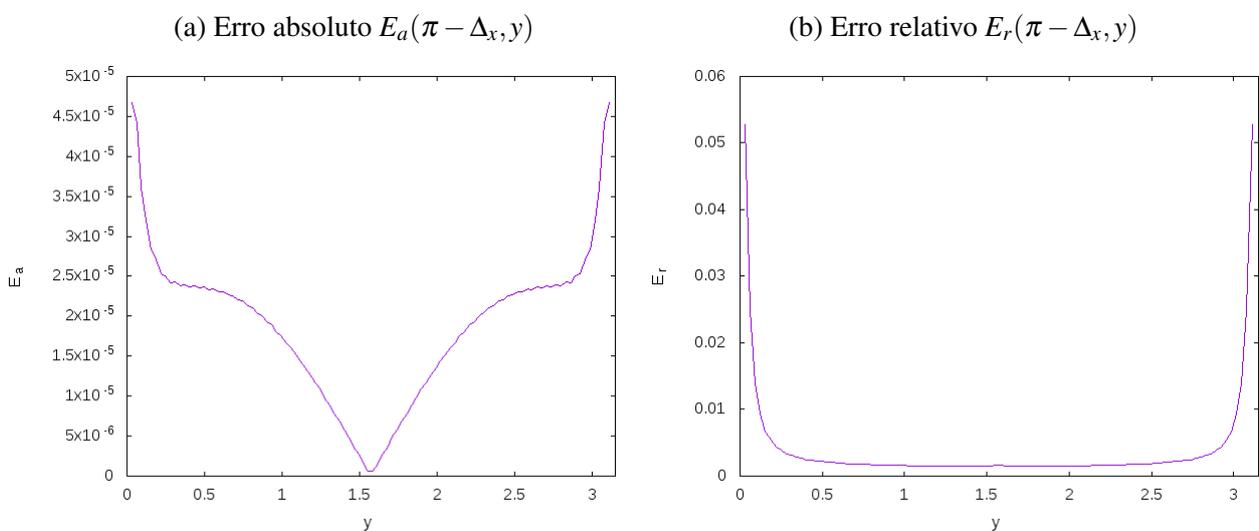
Fonte: Do autor (2019).

Para interpretarmos o gráfico acima oriente-se pelo eixo E_r , que é o erro relativo dado em porcentagem, calculado por $E_r(x,y) = 100 \frac{|u-\bar{u}|}{|u|}$. Observe que o maior erro obtido é menor

do que 0,7% e, ainda, ao longo da superfície o valor do erro decresce na medida que x aumenta, o que indica que a solução numérica tem boa aproximação da solução analítica.

Como o valor da solução na fronteira é dado via condições de contorno, comparamos a solução numérica com a analítica no interior do retângulo. Visto que, tradicionalmente, a solução numérica tende a apresentar maior erro próximo a fronteira, olhamos o erro nesta região em detalhes nas figuras 4.4a e 4.4b.

Figura 4.4 – Erros calculados no último ponto imediatamente antes da fronteira numa malha 150X150.



Fonte: Do autor (2019).

Começando por 4.4a, em que E_a é o erro absoluto calculado por $E_a = |u(x, y) - \bar{u}(x, y)|$, observamos que a diferença varia no intervalo. Note ainda que o valor é bem pequeno, com algo em torno de 10^{-5} .

Mas o erro absoluto pode não ser suficiente para uma análise. Veja um exemplo: se na solução analítica o valor é 11,3 e a numérica 11,4 então o erro absoluto é de 0,1 e que é uma diferença pequena. Em contrapartida se a solução analítica for 0,2 e a numérica 0,3 o erro absoluto também será de 0,1. Note que o erro é o mesmo, mas enquanto no primeiro caso um décimo representa 0,8% da solução analítica no segundo caso um décimo representa 50% da solução analítica, portanto precisamos verificar o erro relativo.

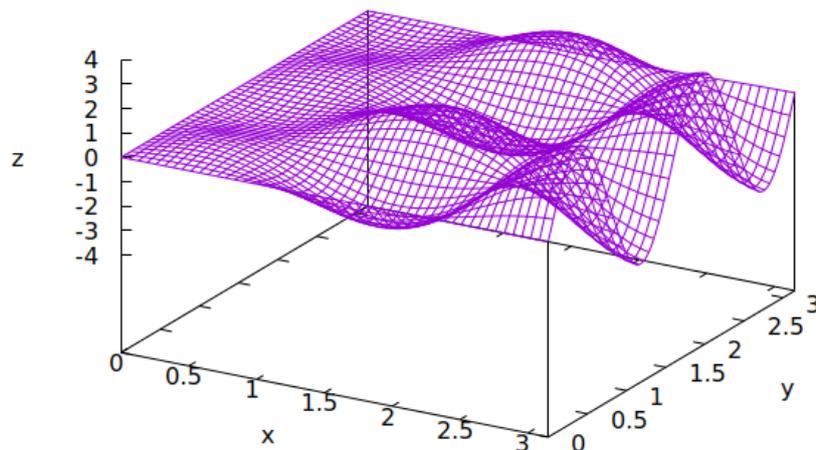
O erro relativo E_r é dado em porcentagem. Veja que na figura 4.4b temos uma melhor análise deste erro no qual a solução numérica chegou, no máximo, a ser aproximadamente 0,06% maior do que o valor da solução analítica nos cantos.

Para compararmos os resultados numéricos que obtemos com a nossa rotina com resultados analíticos que não estejam atrelados à uma série infinita, cuja soma parcial não representa um valor exato, vamos agora usar como função analítica de referência a função

$$u(x,y) = x \cos(2x) \sin(4y), \quad (4.4)$$

cujos gráficos vemos na figura 4.5. A razão da escolha desta função está no fato de que a superfície $z = u(x,y)$ não é demasiadamente suave, mas apresenta diversas oscilações, passando por zero diversas vezes, de modo que esta representa um bom teste para nossas rotinas numéricas.

Figura 4.5 – Gráfico da superfície $z = x \cos(2x) \sin(4y)$.



Fonte: Do autor (2019).

No interior do retângulo $R = \{(x,y) | 0 \leq x,y \leq \pi\}$, a função $u(x,y)$ dada na equação (4.4) satisfaz a equação de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = -4 \sin(2x) \sin(4y) - 20x \cos(2x) \sin(4y), \quad (4.5)$$

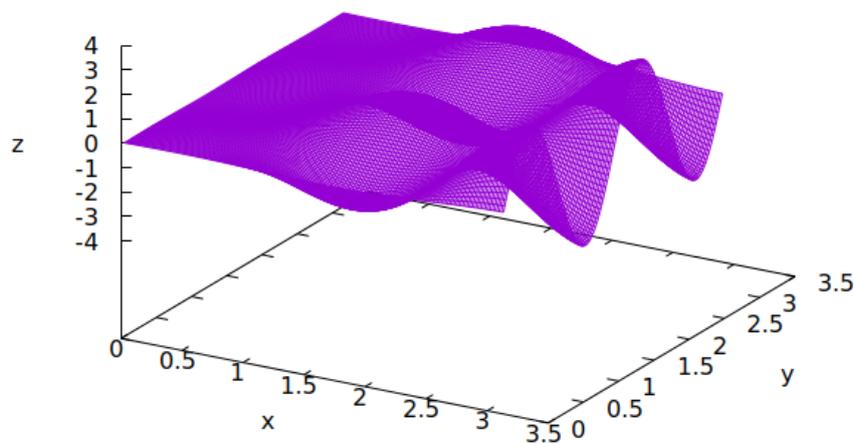
e na fronteira deste retângulo esta satisfaz as condições

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \pi \sin 4y. \quad (4.6)$$

As equações (4.5) e (4.6) podem ser entendidas como constituindo um PVC que determina a função $u(x,y)$, cuja solução já sabemos ser dada pela equação (4.4). Podemos então resolver este PVC numericamente e comparar a aproximação numérica obtida com a solução analítica exata.

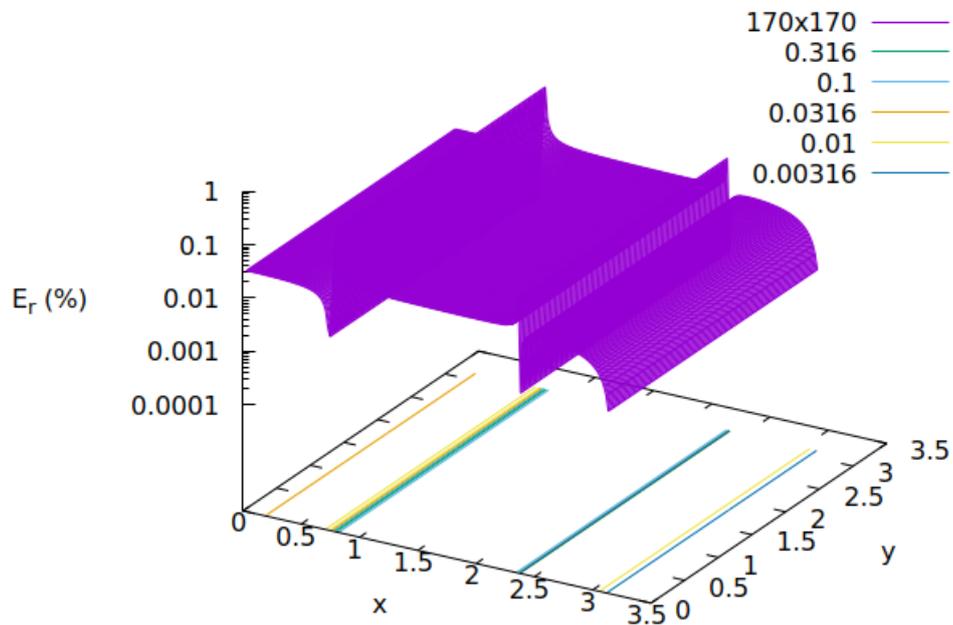
Na figura 4.6 vemos um gráfico da solução numérica obtida com uma malha de dimensões 170×170 . Esta figura deve ser comparada com a figura 4.5. Na figura 4.7 vemos o erro relativo percentual associado à aproximação numérica para a solução mostrada na figura 4.6, onde vemos que este é de no máximo 1%. Por fim, na figura 4.8, temos o erro relativo percentual na solução numérica para malhas de diferentes tamanhos. Observe que nesta figura, para cada valor da coordenada x , temos os valores do erro para todos os valores da coordenada y . O fato de que o gráfico aparenta ter apenas um ponto para cada valor de x é devido ao fato de que para cada valor de x , o erro relativo na solução praticamente não varia com y . Notoriamente, o erro relativo na solução numérica cai monotonamente com o aumento do refinamento da malha, como haveríamos de esperar. Esta análise de comparação da aproximação numérica com uma solução analítica exata, na qual constatamos um erro relativo de no máximo 1% nos indica a robustez tanto do método quanto das rotinas desenvolvidas.

Figura 4.6 – Gráfico da solução numérica obtida com malha de dimensões 170×170 .



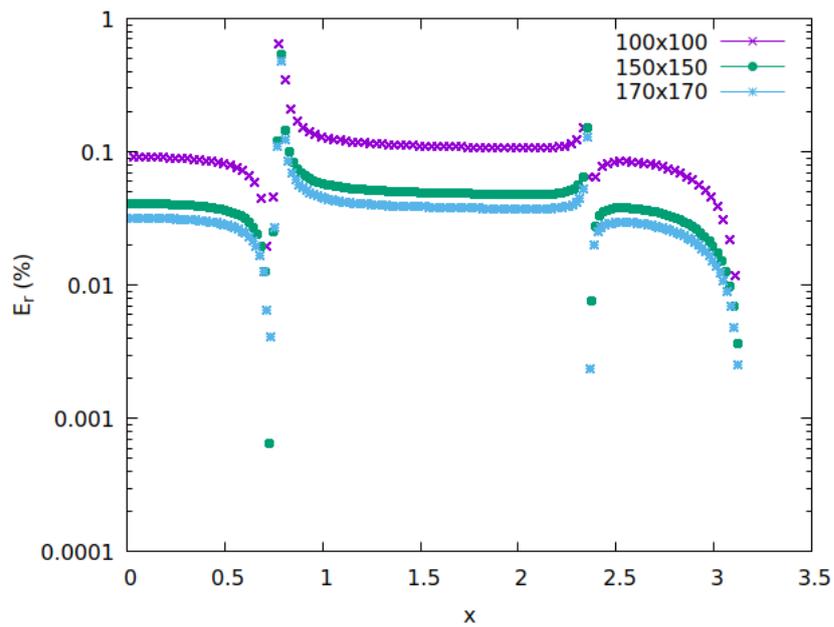
Fonte: Do autor (2019).

Figura 4.7 – Erro relativo percentual na solução numérica obtida com malha de dimensões 170×170 .



Fonte: Do autor (2019).

Figura 4.8 – Erro relativo percentual na solução obtida com malhas de diferentes dimensões para diferentes valores da coordenada x .



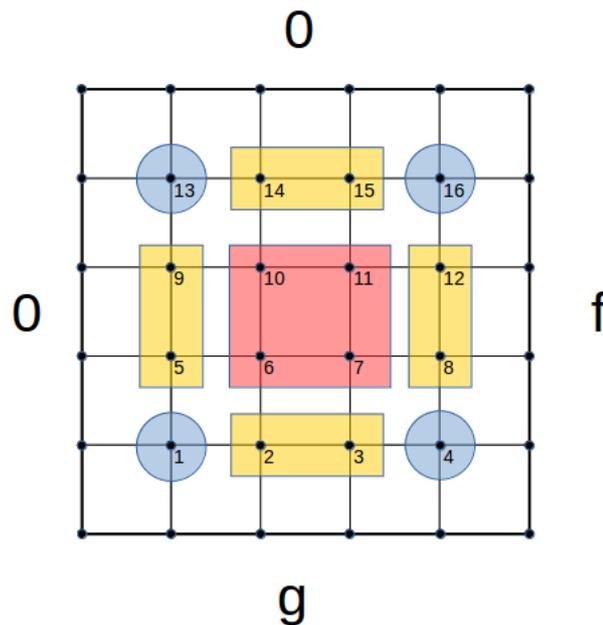
Fonte: Do autor (2019).

4.2 Um segundo problema

Com este problema queremos explorar as potencialidades do método. Retomando o pensamento discutido na seção 3.2.1.6, optamos por alterar o valor nas fronteiras para melhorar a visualização. Este problema é também semelhante ao anteriormente discutido diferindo apenas na troca de uma constante por uma função na fronteira sul do retângulo.

As condições de fronteira estão ilustradas abaixo:

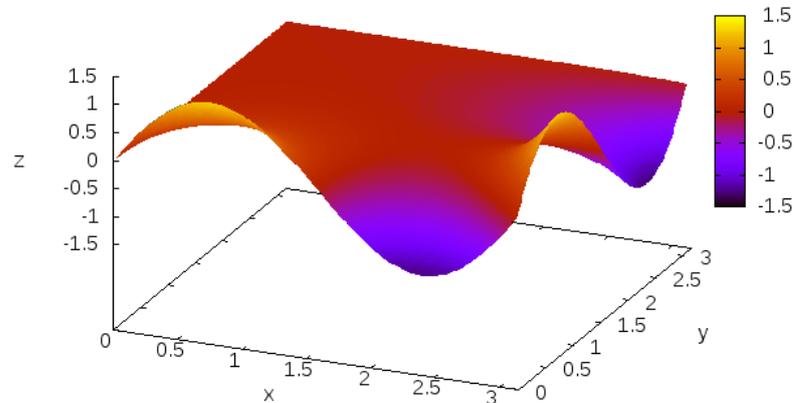
Figura 4.9 – Malha discretizada com condições de Dirichlet



Fonte: Do autor (2019).

e as definimos $u(0, y) = u(x, \pi) = 0$ e $u(\pi, y) = f(y)$, $u(x, 0) = g(x)$, com $f(y) = y(\pi - y) \cos(y)$ e $g(x) = x(\pi - x) \cos(x)$.

A superfície gerada por $\bar{u}(x, y)$ é mostrada abaixo

Figura 4.10 – Superfície gerada por $\bar{u}(x,y)$ 

Fonte: Do autor (2019).

Este problema foi calculado utilizando uma malha 150X150 (22.500 nós) o que nos dá no intervalo calculado $[0, \pi]$, nos eixos x e y , um espaçamento $\Delta_x = \Delta_y$ de, aproximadamente, $2,08 \times 10^{-2}$.

Uma análise que podemos fazer em cima deste resultado é verificar numericamente a equação (2.24). Para tanto calculamos o valor médio \bar{u} sobre um quadrado centrado em um ponto escolhido arbitrariamente e de coordenadas (i, j) . Para calcular a integral (2.22) usamos a regra 1/3 de Simpson iteradamente em cada variável

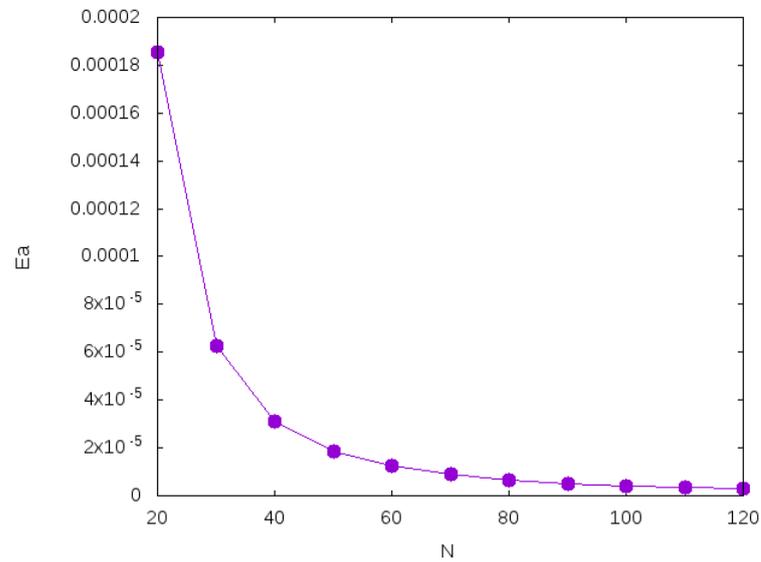
$$\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x,y) dx = \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left\{ [u(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1})] \right. \\ \left. + 4[u(x_{i-1}, y_j) + 4u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)] \right. \\ \left. + [u(x_{i-1}, y_{j+1}) + 4u(x_i, y_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1})] \right\}, \quad (4.7)$$

em que assumimos espaçamento h igual nas duas direções. Para esta análise selecionamos o ponto (2,2) por estar perto da fronteira, por ser um ponto próximo ao canto e por ser possível definí-lo como sendo o centro de um quadrado visto que possui pontos vizinhos em todas as direções.

O gráfico abaixo mostra como o erro $E_a = |\bar{u} - u(x_i, y_j)|$ se comporta ao passo em que o

tamanho N da malha aumenta.

Figura 4.11 – Erro absoluto $|\bar{u} - u(x_i, y_j)|$

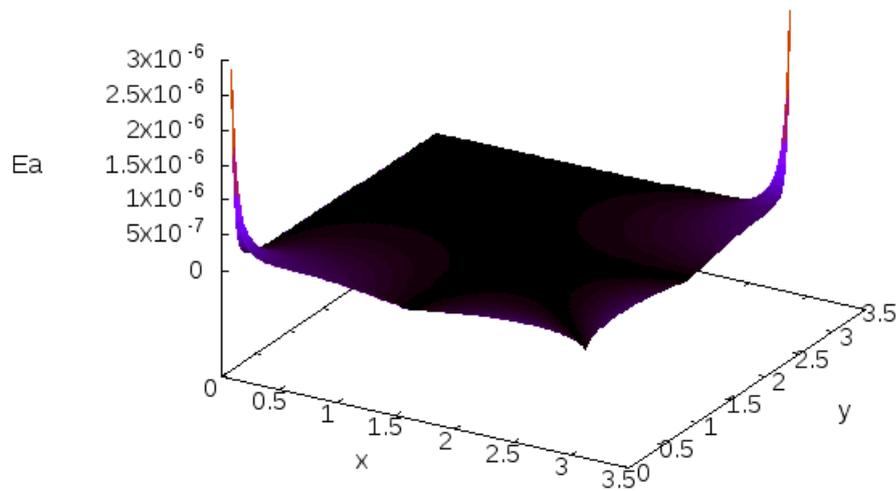


Fonte: Do autor (2019).

Note que conforme o número de pontos aumenta o erro tende a diminuir de forma monótona e, desta forma, esperamos que quanto mais refinada for a malha definida para este PVC menor seja o erro obtido.

Podemos ainda observar o quão próximo de zero a diferença (2.24) está, o que nos proporcionaria mostrar que o valor médio de u sobre toda região será igual o seu valor no centro desta.

Figura 4.12 – Diferença entre o valor médio de u sobre o quadrado pelo valor de u no centro



Fonte: Do autor (2019).

Como podemos observar na figura 4.12 a diferença analisada é extremamente próxima de zero apresentando em dois dos cantos um erro mais acentuado no qual, mesmo assim, são pequenos com um valor de ordem a 10^{-6} . Constatamos então que u está equilibrada mostrando o resultado discutido na seção 2.2.1.

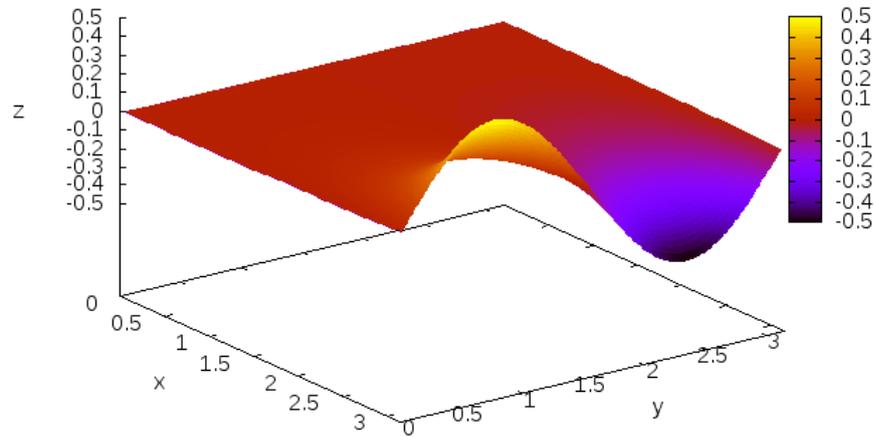
4.3 O terceiro problema

Na seção 3.2.1.7, página 46, mostramos como podemos proceder com a discretização de um PVC com condição de contorno de Neumann ilustrando o resultado deste processo na figura 3.8.

Utilizando a mesma configuração temos na fronteira leste a derivada da função $h(y)$. Nesta fronteira a derivada da função é dada por

$$h(y) = \text{sen}(2y). \quad (4.8)$$

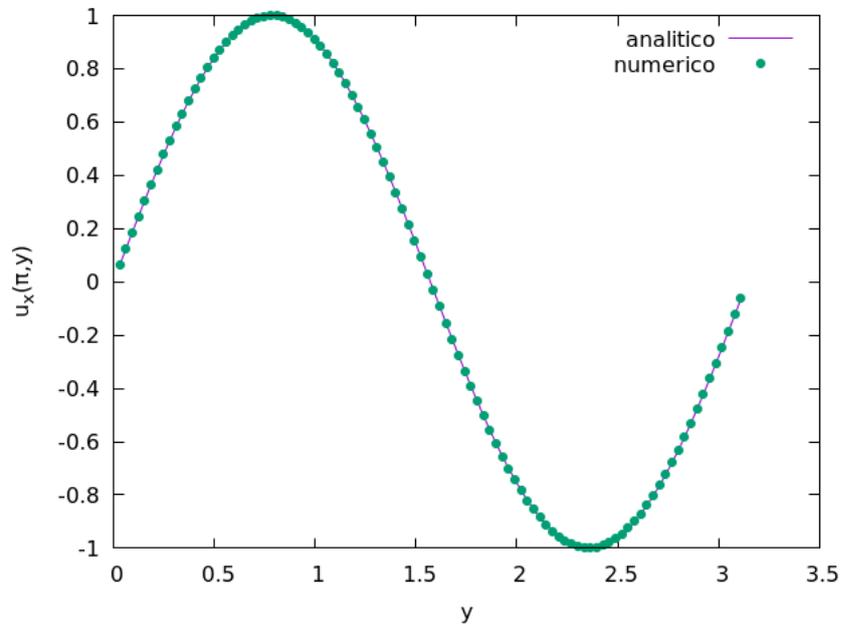
A superfície que representa a solução deste problema está ilustrada a seguir

Figura 4.13 – Superfície gerada por $\bar{u}(x,y)$ 

Fonte: Do autor (2019).

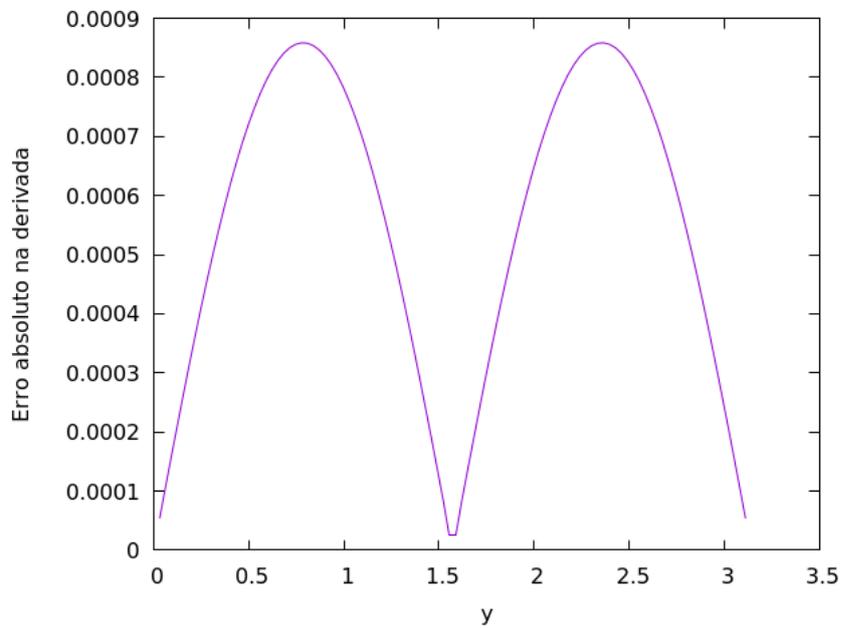
Vamos comparar agora o valor da derivada $u_x(\pi, y)$ calculado numericamente via aproximação de ordem 2 para derivada obtida através de interpolação polinomial com aquele dado pela condição de contorno (4.8). Na figura 4.15 vemos que o erro absoluto na aproximação numérica para derivada é de, no máximo, algo da ordem de 10^{-4} . Dado que o espaçamento Δ_x neste caso (150 pontos na direção x) é da ordem de 10^{-2} , temos que o erro máximo é da ordem de Δ_x^2 como esperaríamos.

Figura 4.14 – Derivada parcial $u_x(\pi, y)$. Aqui comparamos a aproximação numérica com o valor exato analítico.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 4.15 – Diferença absoluta entre a aproximação numérica $\bar{u}_x(\pi, y)$ e o valor exato $h(y)$.



Fonte: Do autor (2019).

CONCLUSÃO

A criação de uma rotina para solução dos PVCs foi a grande motivação para o desenvolvimento deste trabalho. Desta forma, podemos dizer que o objetivo proposto foi alcançado.

Os resultados e análises feitas no capítulo 4 mostraram que, apesar de uma implementação simples do método das diferenças finitas, obtivemos boas aproximações para os problemas propostos.

Vale ressaltar que a rotina foi criada com poucos algoritmos prontos, sendo utilizada apenas a biblioteca GSL, tornando-a original do ponto de vista da criação e que fez com que os processos executados por ela não sejam tão eficazes ao ponto de otimizar, por exemplo, o uso de memória RAM do computador e taxa de convergência. Assim destacamos que o próximo passo para este trabalho deve ser a otimização do código utilizando de propriedades conhecidas das soluções deste tipo de PVC, e a implementação da discretização com malhas irregulares.

Este trabalho de conclusão de curso contou com temas da matemática aplicada, física e da computação, e esta mistura satisfaz um objetivo acessório proposto inicialmente que é a aprendizagem da linguagem Fortran além do conhecimento matemático. Intrínseco a isto, temos o relacionamento interdependente das situações reais com a modelagem matemática descrita em linguagem de programação, que tornaram ainda mais rica a experiência de escrevê-lo.

REFERÊNCIAS

- AMES, W. F. **Numerical methods for partial differential equations**. 2nd. ed. Iowa City: Academic Press, 1977. 376 p. ISBN 0-12-056760-1; 0-17-771086-1.
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo, v.1**. 8th. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 680 p. ISBN 9788560031634.
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo, v.2**. 8th. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 672 p. ISBN 9788560031801.
- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. **Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer**. New York: Cambridge University Press, 2010. 720 p. ISBN 978-0521514071.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006. 434 p. ISBN 85-216-1499-3.
- CARAÇA, B. d. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9th. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989. 318 p.
- CUMINATO, J. A.; JUNIOR, M. M. **Discretização de equações diferenciais parciais: Técnica de Diferenças Finitas**. 2006. 260 p.
- EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998. 662 p.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3rd. ed. [S.l.: s.n.], 2002. 431 p. ISBN 3-540-42074-6.
- FORTUNA, A. d. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: EdUSP, 2000. 426 p. ISBN 8531405262.
- FSF. **GSL - GNU Scientific Library - GNU Project - Free Software Foundation**. 2019. Disponível em: <<https://www.gnu.org/software/gsl/>>.
- GILBARG, D.; TRUDINGER, N. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer Berlin Heidelberg, 2001. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540411604. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eoiGTf4cmhWC>>.
- HOFFMAN, J. D. **Numerical methods for engineers and scientists**. 2nd. ed. West Lafayette: McGraw-Hill, Inc., 1992. 825 p. ISBN 0-8247-0443-6.
- IÓRIO, V. **EDP: Um curso de Graduação**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 276 p.
- MAIA, A. A. G. **Cálculo do escoamento em grades de turbomáquinas utilizando a dinâmica dos fluidos computacional com o uso de pré-condicionadores**. 143 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.
- PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes The Art of Scientific Computing**. [S.l.: s.n.], 2007. 1256 p. ISBN 9780521880688.