UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

MATHEUS HENRIQUE VALENTINI

EQUAÇÕES DAS ÓRBITAS DOS PLANETAS

LAVRAS – MG

2019

MATHEUS HENRIQUE VALENTINI

EQUAÇÕES DAS ÓRBITAS DOS PLANETAS

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática

Orientador
Prof. Marcio Fialho Chaves

LAVRAS – MG
2019

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a minha família, por sempre ter me apoiado nos estudos. Agradeço ao Prof. Marcio Fialho Chaves pelo apoio e dedicação durante todo o processo de pesquisa e escrita deste trabalho. Agradeço a todos aqueles presentes na minha vida escolar que contribuiram de algum modo para a minha formação.

RESUMO

No presente trabalho, nosso objetivo será mostrar a importância das equações diferenciais ordinárias na modelagem de problemas. Para isso, faremos uma breve revisão de alguns conceitos físicos no Capítulo 2 que serão essenciais para o andamento do trabalho. No Capítulo 3, analisaremos alguns problemas tradicionais no ensino de física utilizando equações diferenciais: movimento de queda livre, movimento de projéteis e velocidade de escape. No capítulo 4, o foco será a Fórmula de Binet, que descreve o movimento de uma partícula de massa m e velocidade v_0 sob a ação de um campo de força central e a demosntração das três leis de Kepler.

Palavras-Chave: Campos Centrais; Equações Diferenciais Ordinárias; Fórmula de Binet; Leis de Kepler.

SUMÁRIO

1 Introdução 5

2 Conceitos Básicos de Física 7

2.1 Conceitos básicos de Cinemática 7

2.2 Leis de Newton 7

2.2.1 Primeira Lei de Newton 8

2.2.2 Segunda Lei de Newton 8

2.2.3 Terceira Lei de Newton 9

2.3 Lei da Gravitação Universal de Newton 9

3 Aplicações 11

3.1 Movimento de Queda Livre 11

3.2 Movimento de Queda Considerando a Resistência do Ar 12

3.3 Movimento de Projéteis 17

3.4 Velocidade de Escape 19

4 Campos Centrais 23

4.1 Lei da Conservação do Momento Angular no Movimento Central . . . 27

4.2 Coordenadas Polares 28

4.3 Cônicas em Coordenadas Polares 32

4.4 Fórmula de Binet 33

5 Leis de Kepler 37

5.1 Primeira lei 37

5.2 Segunda lei 38

5.3 Terceira lei 40

6 Apêndice 43

Referências Bibliográicas 45

1 INTRODUÇÃO

De acordo com [1], o estudo de equações diferenciais iniciou-se com o surgimento do cálculo diferencial e integral com Newton e Leibniz no século XVII. Inicialmente, a pesquisa nesse campo visava responder a algumas questões originadas do campo da Mecânica, posteriormente passou a ser aplicada a outros campos como, por exemplo, biologia, química, economia e engenharia. Com o desenvolvimento, houve uma onda de otimismo no poder das equações diferencias para modelagem de problemas. Com o tempo, percebeu-se que grande parte das equações diferencias não tinha solução analítica. Com isso, começou-se a procurar outros métodos, como os métodos numéricos, que permitem obter soluções aproximadas. A pesquisa por métodos numéricos vem crescendo muito, principalmente com avanço da computação.

A ideia deste trabalho é aplicar a teoria das equações diferenciais na descrição das órbitas dos planetas, com foco nas leis de Kepler. De acordo com [2] e [3], Johannes Kepler nasceu na atual Alemanha em 1571. Kepler era uma pessoa muito religiosa e mística. Inspirado nas ideias da escola pitagórica, Kepler acreditava no poder da matemática em descrever as leis do universo. Com base nas observações do astrônomo Tycho Brahe, Kepler formulou três leis acerca do movimento dos planetas do nosso sistema solar. De acordo com sua primeira lei, os planetas movem-se em órbitas elípticas, o que contrariava a crença da época que defendia que o movimento dos planetas era circular. Sua segunda lei implica que os planetas movem-se com velocidade variável. Já a terceira lei de Kepler, também conhecida como a lei dos períodos, indica que o quadrado do período de revolução de cada planeta é proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita. Por isso, quanto mais distante o planeta estiver do sol, mais tempo levará para completar a translação.

Na parte final deste trabalho, iremos nos aprofundar mais nas três leis de Kepler e apresentar algumas aplicações bem simples desses resultados.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE FÍSICA

2.1 Conceitos básicos de Cinemática

Nessa seção, introduziremos algumas grandezas que são essenciais na descrição do movimento de uma partícula, que são: posição, velocidade e aceleração. Considere uma partícula de massa m se movendo no $\mathbb{R}^3$, denotaremos o vetor posição por:

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

O vetor velocidade e o vetor aceleração da partícula são definidos como a derivada primeira e a derivada segunda de $X(t)$, respectivamente, ou seja

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

e

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \left(\frac{dx^2(t)}{dt^2}, \frac{dy^2(t)}{dt^2}, \frac{dz^2(t)}{dt^2}\right).$$

2.2 Leis de Newton

No nosso dia a dia encontramos objetos que se movem e outros que permanecem em repouso. À primeira vista, parece que um corpo está em repouso quando não existem forças atuando nele, e inicia o movimento quando uma força começa a atuar sobre si.

As formas pelas quais os objetos interagem uns com os outros são muito variadas. A interação das asas de um pássaro com o ar, que permite o vôo, por exemplo, é diferente da interação entre uma raquete e uma bolinha de pingue-pongue, da interação entre uma lixa e uma parede ou entre um ímã e um alfinete.

Isaac Newton, o famoso físico inglês do século XVIII, conseguiu elaborar leis que permitem lidar com toda essa variedade, descrevendo essas interações como forças que agem entre os objetos. Cada interação representa uma força diferente, que depende das diferentes condições em que os objetos interagem. Mas todas obedecem aos mesmos princípios elaborados por Newton, e que ficaram conhecidos como “Leis de Newton”.

2.2.1 Primeira Lei de Newton

Newton enunciou que: "Um corpo tende a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, quando a resultante das forças que atuam sobre si for nula ($\vec{F}_{res} = 0$)".

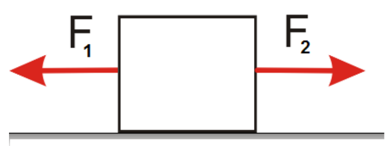

Figura 2.1: $F_1 + F_2 = 0$

2.2.2 Segunda Lei de Newton

A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração:

$$\vec{F}_{res} = m\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

ou, em uma forma mais geral:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d^2\left(mX(t)\right)}{dt^2}$$

onde se considera que massa varia com o tempo.

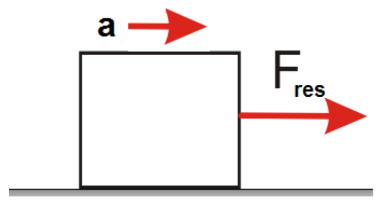

Figura 2.2: $F_{res} = ma$

2.2.3 Terceira Lei de Newton

Uma força é apenas um aspecto da interação mútua entre dois corpos. Verifica-se experimentalmente que quando um corpo exerce uma força sobre outro, o segundo sempre exerce uma força no primeiro.

Newton enunciou que: "Quando um corpo exerce uma força num segundo corpo, este último reagirá sobre o primeiro com uma força de mesma intensidade e sentido contrário".

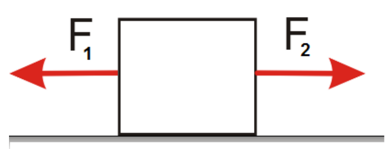

Figura 2.3: $P + N = 0$

2.3 Lei da Gravitação Universal de Newton

A Lei da Gravitação Universal de Newton estabelece que duas partículas de massas m_1 e m_2 colocadas a uma distância d se atraem mutuamente, e as forças de atração têm intensidade

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde G é a constante de gravitação universal e pode ser obtida experimentalmente, e seu valor no SI é:

$$G = 6,673.10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}.$$

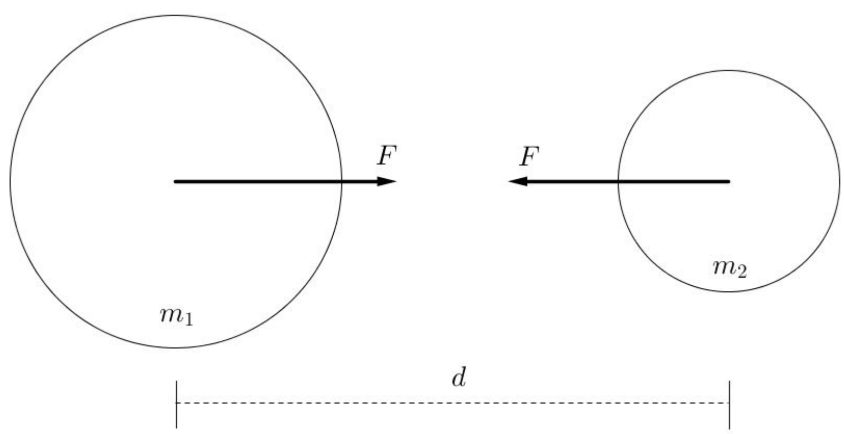

Figura 2.4: $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$

3 APLICAÇÕES

3.1 Movimento de Queda Livre

Considere um partícula de massa m se movendo sobre um eixo x, perpendicular ao solo e orientado para cima, sob a ação somente da força da gravidade. Seja $x(t)$ a posição da partícula no instante t.

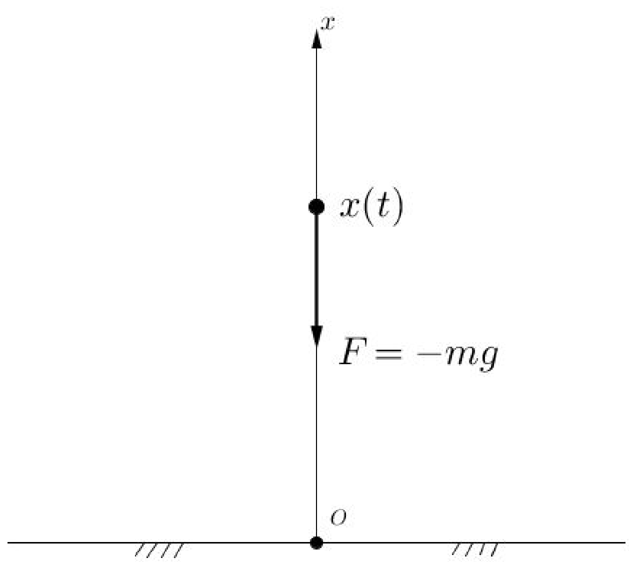

Figura 3.1:

Pela 2ª lei de Newton temos:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg.$$

Dividindo ambos os lados por m

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g. \tag{3.1}$$

Integrando (3.1) obtemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = -gt + C_1 \tag{3.2}$$

onde C_1 é a velociade inicial (v_0). Substituindo, temos

$$\frac{dx(t)}{dt} = -gt + v_0. \tag{3.3}$$

Integrando mais uma vez, obtemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + C_2 \tag{3.4}$$

onde a constante C_2 pode ser determinada fazendo-se $t = 0$. Denotando a posição inicial da partícula por x_0 e substituindo temos:

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0 \tag{3.5}$$

Assim, obtemos a equação (3.5) que descreve a posição X da partícula em função do tempo t.

3.2 Movimento de Queda Considerando a Resistência do Ar

Vamos analisar o problema anterior considerando a resistência do ar. De acordo com Djairo Guedes [2], a força resistiva que atua em um corpo, em geral, depende de sua velocidade de uma forma bem complexa. Para baixas velocidades (alguns centímetros por segundo), a experiência mostra que a força resistiva é proporcional à velocidade do corpo. Para velocidades maiores (entre 1 e 20 m/s) a velocidade é proporcional ao quadrado da velocidade. Supondo que o corpo se move a uma velocidade baixa, dividiremos o problema em dois casos:

1ª Caso: A força resistiva (R) é proporcional à velocidade;

2ª Caso: A força resistiva (R) depende quadraticamente da velocidade.

Vamos mostrar o 1ª Caso. Pela segunda lei de Newton temos

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg - k\frac{dx(t)}{dt}. \tag{3.6}$$

Perceba que a equação anterior é válida tanto para o movimento de subida quanto para o movimento de descida. Tomando $\frac{dx}{dt} = v(t)$, podemos reescrever (3.6) como

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - kv(t). \tag{3.7}$$

Dividindo ambos os termos por m, temos:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = -g \tag{3.8}$$

que é uma equação diferencial linear, cuja solução pode ser obtida usando o método dos fatores integrantes. Para encontar a solução de (3.8), primeiramente, vamos multiplicar ambos os seus termos pela função $u(t)$ (fator integrante), ainda a determinar:

$$u(t)\frac{dv(t)}{dt} + u(t)\frac{k}{m}v(t) = -gu(t). \tag{3.9}$$

Agora, precisamos determinar $u(t)$ de forma que a deriva de $u(t)v(t)$ seja igual ao primeiro termo de (3.9)

$$\frac{d\big(u(t)v(t)\big)}{dt} = u(t)\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}u(t)v(t). \tag{3.10}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (3.10) e simplificando, temos

$$u(t)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{du(t)}{dt}v(t)=u(t)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{k}{m}u(t)v(t). \tag{3.11}$$

Para que a igualdade (3.11) seja válida, $u(t)$ tem que satisfazer a seguinte expressão:

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{k}{m}u(t). \tag{3.12}$$

Uma possível solução de (3.12) é $u(t)=e^{\frac{kt}{m}}$, substituindo em (3.9), temos

$$e^{\frac{kt}{m}}\frac{dv}{dt}+e^{\frac{kt}{m}}\frac{k}{m}v(t)=-ge^{\frac{kt}{m}}. \tag{3.13}$$

Reescrevendo o lado esquerdo de (3.13) como a derivada de $e^{\frac{kt}{m}}v(t)$, obtemos

$$\frac{d\left(e^{\frac{kt}{m}}v(t)\right)}{dt}=-ge^{\frac{kt}{m}} \tag{3.14}$$

integrando ambos os lados com relação a t, temos

$$e^{\frac{kt}{m}}v(t)=-\frac{gm}{k}e^{\frac{kt}{m}}+C_1. \tag{3.15}$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$v(t)=-\frac{gm}{k}+C_1e^{\frac{-kt}{m}} \tag{3.16}$$

denotando $v(0)$ por v_0 e substituindo na expressão anterior, obtemos a constante C_1

$$C_1=v_0+\frac{gm}{k} \tag{3.17}$$

substituindo C_1 em (3.16) obtemos a seguinte expressão

$$v(t)=v_0e^{\frac{-kt}{m}}-\frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right) \tag{3.18}$$

Pela expressão anterior, podemos perceber que quando $t \to \infty$, temos que $v(t)$ tende para uma velocidade limite $v(t) \to -\frac{mg}{k}$. Denotando o valor absoluto da velocidade limite por v_∞, podemos reescrever (3.18) como

$$v(t) = (v_0 + v_\infty)e^{\frac{-kt}{m}} - v_\infty \tag{3.19}$$

No 2ª Caso, a força resistiva é proporcional ao quadrado da velocidade. Devido ao termo quadrático, temos que analisar separadamente o movimento de subida e o movimento de descida. Para o movimento de subida, a segunda lei de Newton fornece

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg - k\frac{dx(t)}{dt}^2 \tag{3.20}$$

no movimento de descida, temos

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg + k\frac{dx(t)}{dt}^2 \tag{3.21}$$

onde k é uma constante positiva. Tomando $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$, em (3.20) e (3.21), e dividindo tudo por m, obtemos

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{3.22}$$

e

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g + \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{3.23}$$

que são equações separáveis. Assim, as soluções de (3.22) e (3.23) são, respectivamente:

$$\int \frac{-m}{mg + kv(t)^2}dv = \int dt \tag{3.24}$$

e

$$\int \frac{m}{-mg + kv(t)^2}dv = \int dt. \tag{3.25}$$

Resolvendo as integrais, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{-m}{mg+kv(t)^2}dv &= \frac{-m}{k}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)^2+v(t)^2}dv \\ &= \frac{-m}{k}\int \frac{1}{a^2+v(t)^2}dv \\ &= \frac{-m}{ka}arctg\left(\frac{v(t)}{a}\right)\end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned}\int \frac{m}{-mg+kv(t)^2}dv &= \frac{-m}{k}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)^2-v(t)^2}dv \\ &= \frac{-m}{2ka}\ln\left|\frac{a+v(t)}{a-v(t)}\right| \\ &= \frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{v(t)-a}{v(t)+a}\right|\end{aligned} \tag{3.27}$$

em que $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Substituindo (3.26) em (3.24) e (3.27) em (3.25), obtemos

$$\frac{-m}{ka}arctg\left(\frac{v(t)}{a}\right)=t+C_1 \tag{3.28}$$

e

$$\frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{v(t)-a}{v(t)+a}\right|=t+C_2. \tag{3.29}$$

Para calcularmos as constantes C_1 e C_2, vamos considerar $v(0)=v_0$

$$C_1=\frac{-m}{ka}arctg\left(\frac{v_0}{a}\right) \tag{3.30}$$

e

$$C_2=\frac{m}{2ka}\ln\left|\frac{v_0-a}{v_0+a}\right|. \tag{3.31}$$

Substituindo as constantes C_1 e C_2 em (3.28) e (3.29), obtemos, respectivamente, as soluções de (3.22) e (3.23)

$$v(t)=a.tg\left(arctag\left(\frac{v_0}{a}\right)-\frac{kat}{m}\right) \tag{3.32}$$

e

$$\ln\left|\frac{v(t)-a}{v(t)+a}\right| = \frac{2kat}{m} + \ln\left|\frac{v_0-a}{v_0+a}\right|. \tag{3.33}$$

3.3 Movimento de Projéteis

Considere o movimento de uma partícula de massa m num plano (x,y) perpendicular ao solo. Suponha que no instante $t=0$ ela sai da origem com uma velocidade linear v_0, formando um ângulo α com a horizontal.

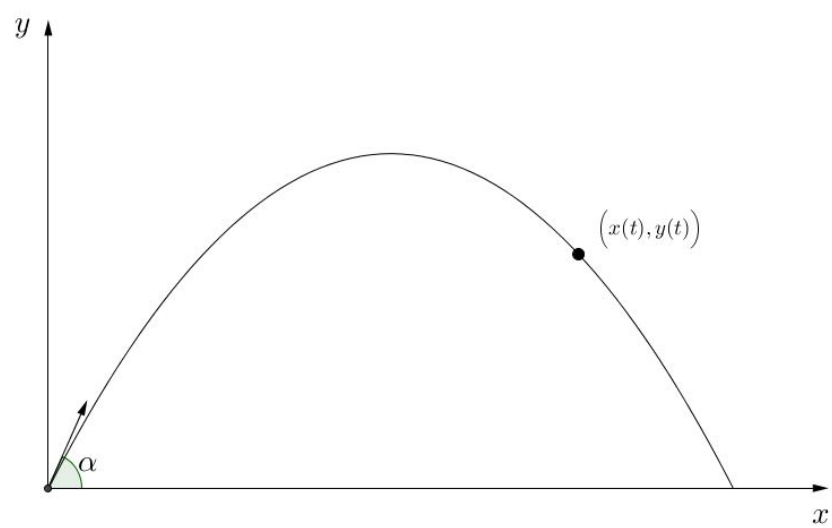

Figura 3.2:

Vamos supor que a única força que atua sobre a partícula é a força da gravidade. Seja $(x(t),y(t))$ o vetor posição, de acordo com a 2ª lei de Newton, temos:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \qquad e \qquad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg \tag{3.34}$$

Integrando (3.34) obtemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_1 \qquad e \qquad \frac{dy(t)}{dt} = -gt + C_2 \tag{3.35}$$

em que as constantes C_1, C_2 são as componentes x, y, respectivamente, do vetor velocidade inicial:

$$v_0 = (v_0 \cos(\alpha), v_0 sen(\alpha)). \tag{3.36}$$

Reescrevendo (3.35), temos

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos(\alpha) \qquad e \qquad \frac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0 sen(\alpha). \tag{3.37}$$

Integrando (3.37) e usando o fato que a posição inicial da partícula é $(0,0)$, obtemos

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \qquad e \qquad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 sen(\alpha) t. \tag{3.38}$$

De (3.38) podemos tirar uma série de informações sobre o problema:

i) A trajetória da partícula é uma parábola:

Isolando t na expressão $x(t)$ de (3.38), obtemos

$$t = \frac{x}{v_0 cos(\alpha)}, \tag{3.39}$$

substituindo (3.39) na expressão $y(t)$ de (3.38), temos

$$y = tg(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 cos(\alpha)^2} x^2 \tag{3.40}$$

que é a equação de uma parábola.

ii) Distância horizontal máxima (D_{max}) percorrida pela partícula:

Para determinar D_{max} basta resolver a seguinte equação do 2º grau

$$0 = tg(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 cos(\alpha)^2}x^2 \tag{3.41}$$

em que uma das soluções é $x = 0$ que é a posição inicial da partícula; a outra solução é a coordenada x do ponto de chegada, que é o D_{max}. Resolvendo (3.41), temos que:

$$D_{max} = \frac{2v_0^2 sen(\alpha)cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2}{g}sen(2\alpha) \tag{3.42}$$

iii) Altura máxima (h_{max}).

Para calcular h_{max} basta tomar $x = \frac{D_{max}}{2}$ em (3.40)

$$\begin{aligned} h_{max} &= tg(\alpha)\frac{v_0^2}{2g}sen(2\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 cos(\alpha)^2}\left(\frac{v_0^2}{2g}sen(2\alpha)\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 sen(\alpha)^2}{2g}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

iv) Duração do trajeto da partícula até colidir com o solo:

Basta tomar $x = D_{max}$ em (3.39)

$$T = \frac{D_{max}}{v_0 cos(\alpha)} = \frac{2v_0 sen(\alpha)}{g}. \tag{3.44}$$

3.4 Velocidade de Escape

Uma partícula de massa m é lançada da superfície da terra, com velocidade inicial v_0. Pela lei da gravitação universal de Newton, temos que:

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{-GMm}{X(t)^2}. \tag{3.45}$$

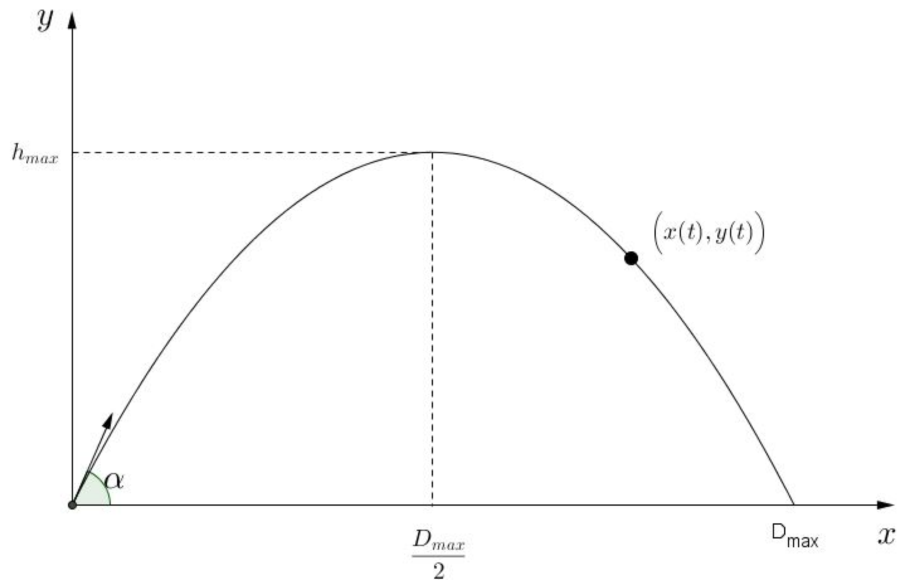

Figura 3.3:

Quando $X = R$, a aceleração da partícula é $-g$, e portanto

$$-mg = \frac{-GMm}{R^2} \Rightarrow GM = \frac{mgR^2}{m}. \tag{3.46}$$

substituindo (3.46) em (3.45) e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{-gR^2}{X(t)^2} \tag{3.47}$$

chamando $v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$, obtemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{-gR^2}{X(t)^2}. \tag{3.48}$$

Usando a regra da cadeia, podemos reescrever $\frac{dV(t)}{dt}$ da seguinte forma

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}V(t). \tag{3.49}$$

Substituindo (3.49) em (3.48), obtemos

$$V(t)\frac{dV}{dx} = \frac{-gR^2}{X(t)^2} \tag{3.50}$$

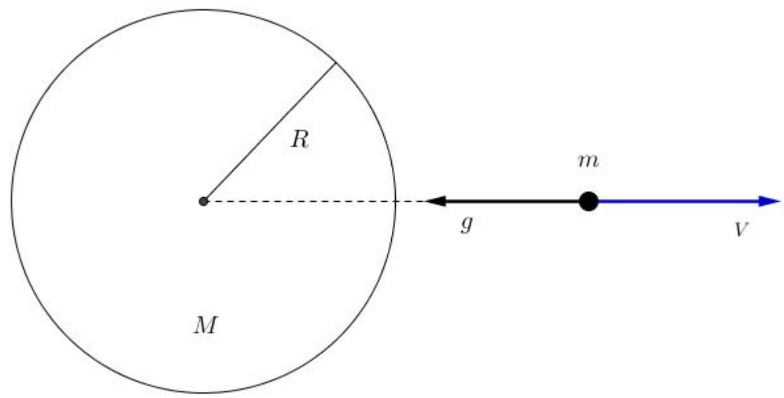

Figura 3.4:

que é uma equação separável. Como (3.50) é separável, sua solução é da forma

$$F(y) = G(x) + C \tag{3.51}$$

em que

$$F(y) = \int V dv = \frac{V^2}{2}, \;\; G(x) = \int \frac{-gR^2}{X(t)^2} dx = \frac{gR^2}{X}$$

e C uma constante qualquer. Portanto, a solução final fica

$$\frac{V^2}{2} = \frac{gR^2}{X} + C \tag{3.52}$$

Para obtermos a constante C, vamos considerar que para $X = R$ temos $V = v_0$, ficando

$$C = \frac{v_0^2 - 2gR}{2} \tag{3.53}$$

Substituindo a expressão anterior em (3.52) e simplificando, obtemos

$$V(x) = \sqrt{v_0^2 + 2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right)}. \tag{3.54}$$

Observe que $2gR\left(\frac{R}{x}-1\right) \to -2gR$ quando $x \to \infty$, ou seja, a velocidade do corpo decresce com a altura. Tomando a velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, que é chamada de velocidade de escape, a velocidade do corpo nunca se anula.

4 CAMPOS CENTRAIS

Um campo de forças $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^3$, é central, se em cada ponto $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ onde ele está definido, F aponta para um ponto fixo, chamado o centro do movimento. Escolhendo a origem $(0,0,0)$ para centro do movimento, um campo central pode ser escrito como

$$F(X) = f(X)X \tag{4.1}$$

onde f é uma função escalar definida nos mesmos pontos X de campo de definição de F.

Exemplo: O campo elétrico de uma carga elétrica negativa q isolada é um campo central.

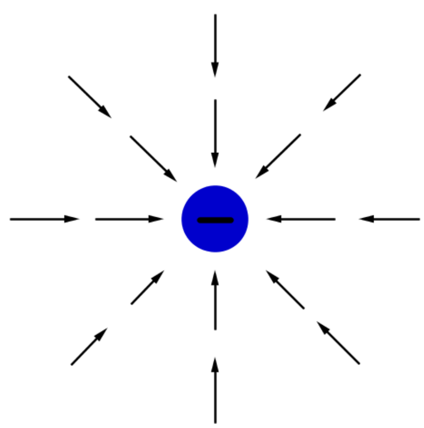

Figura 4.1: $E = K_e \frac{q}{|X|^2} X$.

Proposição 4.0.1 *Seja F um campo conservativo, e $V : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^3$, um potencial de F. Então F é central se e somente se, V depende apenas de*

$$|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

E neste caso, existe uma função real de variável real, g, tal que

$$F(X) = g(|X|)X. \tag{4.2}$$

Demonstração:

(i) Suponha que F é central. Queremos provar que V é constante sobre as esferas $|X| = r_0$. Seja $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, um caminho com $|\alpha(t)| = r_0$. Então

$$\begin{aligned} \frac{dV\big(\alpha(t)\big)}{dt} &= \frac{dV\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ &= \Big\langle \nabla V\big(\alpha(t)\big), \dot{\alpha}(t) \Big\rangle \\ &= \Big\langle F\big(\alpha(t)\big), \dot{\alpha}(t) \Big\rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como F é central, F pode ser escrito na forma

$$F\big(\alpha(t)\big) = f\big(\alpha(t)\big)\alpha(t). \tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.3), temos

$$\begin{aligned}
\frac{dV\big(\alpha(t)\big)}{dt} &= \Big\langle f\big(\alpha(t)\big)\alpha(t), \dot{\alpha}(t)\Big\rangle \\
&= f\big(\alpha(t)\big)\Big\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\Big\rangle \\
&= f\big(\alpha(t)\big)\Big[\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)\Big(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\Big)\Big] \\
&= f\big(\alpha(t)\big)\Big[x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} + z(t)\frac{dz}{dt}\Big] \\
&= \frac{f\big(\alpha(t)\big)}{2}\Big[2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} + 2z(t)\frac{dz}{dt}\Big] \\
&= \frac{f\big(\alpha(t)\big)}{2}\Big[\frac{dx(t)^2}{dt} + \frac{dy(t)^2}{dt} + \frac{dz(t)^2}{dt}\Big] \\
&= \frac{f\big(\alpha(t)\big)}{2}\Big[\frac{d(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)}{dt}\Big] \\
&= \frac{f\big(\alpha(t)\big)}{2}\frac{d|\alpha(t)|^2}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $|\alpha(t)| = r_0$. Logo $V(X)$ é constante quando $|x| = r_0$.

(ii) V depende apenas de $r = |X| \Longrightarrow F$ é central

$$F(x) = \nabla V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}i + \frac{\partial V}{\partial y}j + \frac{\partial V}{\partial z}k = \frac{dV}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}i + \frac{\partial r}{\partial y}j + \frac{\partial r}{\partial z}k\right)$$

$$= \frac{dV}{dr}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)i + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)j + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)k\right)$$

$$= \frac{dV}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}j + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}k\right)$$

$$= \frac{dV}{dr}\left(\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{dV}{dr}\frac{X}{|X|}$$

Assim, temos

$$F(x) = \frac{dV}{dr}\frac{X}{|X|} \tag{4.5}$$

Como (4.5) está na forma de (4.1), podemos concluir que F é um campo central.

(iii) Para provar (4.2) basta considerar a função obtida anteriormente

$$g(r) = \frac{dV}{dr}\frac{1}{|X|}.$$

Proposição 4.0.2 *Suponha que uma partícula de massa m esteja em movimento sob ação de um campo central F. Então, sua órbita está contida num plano.*

Demonstração: A 2ª lei de Newton nos diz que

$$m\ddot{X} = F = f(X)X. \tag{4.6}$$

Tomando o produto vetorial dessa equação por X obtemos

$$m\ddot{X} \times X = f(X)X \times X = f(X)\big(X \times X\big) = 0 \tag{4.7}$$

pois $X \times X = 0$. A expressão (4.7) pode ser escrita como

$$\frac{d(\dot{X} \times X)}{dt} = 0 \Longrightarrow \dot{X} \times X = \mathbf{C}. \tag{4.8}$$

Finalmente, tomando o produto escalar da segunda equação em (4.8) com X obtemos $\langle X, \mathbf{C}\rangle = \mathbf{0}$ pois $\langle X, \dot{X} \times X\rangle = 0$. Logo

$$c_1x(t) + c_2y(t) + c_3z(t) = 0$$

onde $\mathbf{C} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3})$ e $X(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$.

Portanto $X(t)$, para todo t, está num plano passando pela origem e perpendicular ao vetor $\mathbf{C}$, caso $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$.

Caso: $\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

Fazendo $r = |X|$ temos $r\dot{r} = \langle X, \dot{X} \rangle$. Logo, para $r \neq 0$ temos

$$\frac{d}{dt}\frac{X}{r} = \frac{r\dot{X} - \dot{r}X}{r^2} = \frac{\langle X, X \rangle \dot{X} - \langle X, \dot{X} \rangle X}{r^3}$$

e usando a identidade vetorial

$$\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X = (X \times Y) \times Z$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{X}{r} = \frac{(X \times \dot{X}) \times X}{r^3} = \frac{C \times X}{r^3} = 0$$

Portanto X/r é constante, ou seja, $X(t)$ está sobre uma reta.

Em virtude da proposição anterior, passamos a considerar as forças e o movimento no plano (x, y).

4.1 Lei da Conservação do Momento Angular no Movimento Central

Definição: considere uma partícula de massa m se deslocando no plano sob a ação de um campo F. Seja $X(t) = (x(t), y(t))$ o vetor posição da partícula no instante t. Define-se o momento angular com relação à origem pela expressão

$$\check{h} = m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \tag{4.9}$$

Proposição 4.1.1 *(Lei da Conservação do Momento Angular no Movimento Central) Suponha que uma partícula de massa m está em movimento sob a ação de um campo de forças* $F = (f_1, f_2)$. *Então, o momento angular* $\check{h}$ *é constante se e só se o campo for central.*

Demonstração: Derivando a expressão do momento angular $\check{h}$ com relação a t, obtemos

$$\frac{d\check{h}}{dt} = m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

que implica, através da 2ª lei de Newton, a expressão

$$\frac{d\check{h}}{dt} = xf_2 - yf_1.$$

a qual é zero se e só se $F = (f_1, f_2)$ for paralelo ao vetor $X = (x, y)$, isto é, se o campo F for central.

4.2 Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas polares em um plano consiste em um ponto O fixo, chamado de polo e de um raio que parte do polo, chamado eixo polar. Em tal sistema de coordenadas, podemos associar a cada ponto P no plano um par de coordenadas polares (r, θ), onde r é a distância de P ao polo e θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio OP.

A relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares é dada por

$$x = r\cos(\theta) \quad e \quad y = rsen(\theta). \tag{4.10}$$

A órbita $\Big(x(t), y(t)\Big)$ de uma partícula se deslocando no plano sob a ação de um campo F é então determinada por $\Big(r(t), \theta(t)\Big)$.

Temos as seguintes relações, onde $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$.

Derivando os dois lados de $x = r\cos(\theta)$ com relação a t:

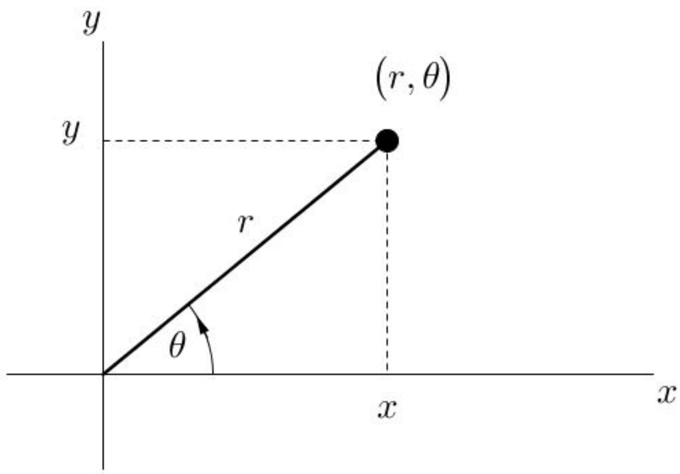

Figura 4.2:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\big(r\cos(\theta)\big)}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos(\theta) + r\frac{d\cos(\theta)}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos(\theta) + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\cos(\theta)}{d\theta}.$$
$$= \frac{dr}{dt}\cos(\theta) - r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)$$

Então

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos(\theta) - r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta). \tag{4.11}$$

Derivando, novamente, os dois lados de (4.11) com relação a t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\cos(\theta)-r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\cos(\theta)\right)}{dt}-\frac{d\left(r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)\right)}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)cos(\theta)+\frac{dr}{dt}\frac{dcos(\theta)}{d\theta}-\left[\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)+r\frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)\right)}{dt}\right]$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)-\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)-\left[\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)+r\left(\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)+\frac{d\theta}{dt}\frac{dsen(\theta)}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)-\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)-\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)-r\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta)+\frac{d\theta}{dt}\frac{dsen(\theta)}{d\theta}\right]$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)-r\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta)-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos(\theta).$$

Logo

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)-r\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta)-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos(\theta) \qquad (4.12)$$

Fazendo o mesmo processo para $y=rsen(\theta)$ obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}sen(\theta)+r\frac{d\theta}{dt}cos(\theta) \qquad (4.13)$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}sen(\theta)+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)+r\frac{d^2\theta}{dt^2}cos(\theta)-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2sen(\theta). \qquad (4.14)$$

Substituindo dx/dt e dy/dt na expressão de v^2 temos:

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\cos(\theta)-r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}sen(\theta)+r\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)\right)^2$$

$$=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos(\theta)^2-2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)sen(\theta)+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2sen(\theta)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2sen(\theta)^2$$

$$+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)sen(\theta)+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2cos(\theta)^2$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cos(\theta)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 sen(\theta)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sen(\theta)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 cos(\theta)^2$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(cos(\theta)^2 + sen(\theta)^2\right) + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left(sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2\right)$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ou seja

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4.15}$$

A seguinte relação será importante para o nosso trabalho

$$\frac{d^2x}{dt^2}cos(\theta) + \frac{d^2y}{dt^2}sen(\theta) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4.16}$$

Demonstração: Substituindo (4.12) e (4.14) em (4.16) temos

$$\frac{d^2x}{dt^2}cos(\theta) + \frac{d^2y}{dt^2}sen(\theta) =$$

$$= cos(\theta)\left[\frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta) - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta) - r\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos(\theta)\right]$$

$$+ sen(\theta)\left[\frac{d^2r}{dt^2}sen(\theta) + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}cos(\theta) + r\frac{d^2\theta}{dt^2}cos(\theta) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sen(\theta)\right]$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)^2 - 2\frac{dr}{dt}\frac{\theta}{dt}sen(\theta)cos(\theta) - r\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta)cos(\theta) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 cos(\theta)^2$$

$$+ \frac{d^2r}{dt^2}sen(\theta)^2 + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)cos(\theta) + r\frac{d^2\theta}{dt^2}sen(\theta)cos(\theta) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sen(\theta)^2$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}cos(\theta)^2 + \frac{d^2r}{dt^2}sen(\theta)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 cos(\theta)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 sen(\theta)^2$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\left[sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2\right] - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2\right]$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Usando (4.11) e (4.13) podemos reescrever o momento angular da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\check{h} &= m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = mx\frac{dy}{dt} + my\frac{dx}{dt} \\
&= mrcos(\theta)\left(\frac{dr}{dt}sen(\theta) + r\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)\right) - mrsen(\theta)\left(\frac{dr}{dt}\cos(\theta) - r\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)\right) \\
&= mr\frac{dr}{dt}sen(\theta)cos(\theta) + mr^2\frac{d\theta}{dt}cos(\theta)^2 - mr\frac{dr}{dt}sen(\theta)cos(\theta) + mr^2\frac{d\theta}{dt}sen(\theta)^2 \\
&= mr^2\frac{d\theta}{dt}\left(sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2\right) \\
&= mr^2\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

Logo

$$\check{h} = mr^2\frac{d\theta}{dt} \tag{4.17}$$

Assim, pela conservação do momento angular, temos que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = constante \equiv h \tag{4.18}$$

Supondo $h \neq 0$, a expressão (4.18) nos diz que a função $\frac{d\theta}{dt}$ tem um sinal definido, ou seja, $\theta(t)$ é uma função estritamente monotônica. O caso em $h = 0$ não é interessante pois a trajetória da partícula é uma reta passando pelo polo.

4.3 Cônicas em Coordenadas Polares

Proposição 4.3.1 *A equação seguinte representa uma cônica com foco na origem:*

$$r = \frac{\ell}{1 + e.\cos(\theta)}, \quad \ell > 0, \quad e \geq 0, \tag{4.19}$$

em que "e" é a excentricidade e 2ℓ o comprimento da corda focal. Para $e < 1$, (4.19) representa uma elípse, para $e = 1$ uma parábola e para $e > 1$ uma hipérbole.

4.4 Fórmula de Binet

Considere uma partícula de massa m submetida a um campo central gerado por uma partícula de massa M. Usando a Lei da Gravitação Universal, temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMm}{x^2+y^2}cos(\theta)$$

e

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GMm}{x^2+y^2}sen(\theta).$$

Dividindo ambas as equações acima por m, obtemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{x^2+y^2}cos(\theta) \qquad e \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{x^2+y^2}sen(\theta). \tag{4.20}$$

Substituindo (4.20) na relação (4.16), temos

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}cos(\theta) + \frac{d^2y}{dt^2}sen(\theta) &= -\frac{GM}{x^2+y^2}cos(\theta)^2 - \frac{GM}{x^2+y^2}sen(\theta)^2 \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{x^2+y^2}. \tag{4.21}$$

Reescrevento (4.21) em coordenadas polares, temos

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}. \tag{4.22}$$

Como já observamos em (4.18), $\theta(t)$ é estritamente monotônica. Dessa forma podemos obter t como função de θ, consequentemente r como função de θ, $r = r\big(t(\theta)\big)$. Assim, faz sentido calcular as seguintes derivadas

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

como $\theta(t)$ e $t(\theta)$ são funções inversas, segue do Teorema da Função Inversa [4] que $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}$. Substituindo na expressão anterior, fica

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \\
&= -\frac{\frac{dr}{dt}}{r^2\frac{d\theta}{dt}} \\
&= -\frac{\frac{dr}{dt}}{h} \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

onde h é a constante da proposição $(4.1.1)$. Derivando a equação acima novamente temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\frac{dr}{dt}}{h}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\frac{dr}{dt}}{h}\right)\frac{dt}{d\theta} \\
&= -\frac{\frac{d^2r}{dt^2}}{h}\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \\
&= -\frac{\frac{d^2r}{dt^2}}{h\frac{d\theta}{dt}}. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Isolando $\frac{d^2r}{dt^2}$ em (4.24), obtemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.22), temos

$$-h\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}.$$

Dividindo ambos os lados por $-h\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{h} = \frac{GM}{hr^2\frac{d\theta}{dt}}.$$

Substituindo $\frac{r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{h} = \frac{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{hr}$ na expressão anterior, temos

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{hr}=\frac{GM}{hr^2\frac{d\theta}{dt}}.$$

Substituindo $r^2\frac{d\theta}{dt}$ por h, obtemos a equação de Binet, onde suas soluções são todas as órbitas $r = r(\theta)$ de uma partícula de massa m num campo central $F = \left(-\frac{GMm}{r^2}\cos(\theta), -\frac{GMm}{r^2}sen(\theta)\right)$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}. \tag{4.26}$$

Para resolvermos (4.26) primeiramente vamos chamar $\frac{1}{r}$ de u, assim

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2} \tag{4.27}$$

obtendo, assim, uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea. Sua solução geral é da forma

$$u=\frac{GM}{h^2}+Asen(\theta)+B\cos(\theta) \tag{4.28}$$

onde $u = \frac{GM}{h^2}$ é uma solução particular de (4.27) e $u = Asen(\theta) + B\cos(\theta)$ é a solução geral da *EDO* homogênea associada a (4.27) (Veja Apêndice). Substituindo u por $\frac{1}{r}$ em (4.28), obtemos

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}+Asen(\theta)+B\cos(\theta). \tag{4.29}$$

Para calcularmos as constantes A e B vamos considerar as seguintes condições iniciais em $t = 0$

$$r(0)=r_0\neq 0, \qquad \theta(0)=0, \qquad \frac{dr}{dt}\Big|_{t=0}=v_r.$$

Considerando $\theta = 0$ em (4.29), temos

$$B=\frac{h^2-GMr_0}{r_0h^2}$$

Derivando (4.29) e substituindo as condições iniciais, obtemos

$$A = -\frac{v_r}{h}.$$

Substituindo A e B em (4.29), temos

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + \left(-\frac{v_r}{h}\right) sen(\theta) + \left(\frac{h^2 - GMr_0}{r_0 h^2}\right) cos(\theta). \tag{4.30}$$

Seja

$$\lambda sen(\theta_0) = -\frac{v_r}{h} \quad e \quad \lambda cos(\theta_0) = \frac{h^2 - GMr_0}{r_0 h^2}. \tag{4.31}$$

Observe que elevando as duas igualdades acima ao quadrado temos que

$$\lambda = \sqrt{\left(-\frac{v_r}{h}\right)^2 + \left(\frac{h^2 - GMr_0}{r_0 h^2}\right)^2},$$

e dividindo a primeira pela segunda é fácil verificar que

$$\theta_0 = tg^{-1}\left(-\frac{v_r r_0 h}{h^2 - GMr_0}\right).$$

Substituindo (4.31) em (4.30), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{GM}{h^2} + \lambda sen(\theta_0) sen(\theta) + \lambda cos(\theta_0) cos(\theta) \\ \frac{1}{r} &= \frac{GM}{h^2} + \lambda cos(\theta - \theta_0) \\ \frac{1}{r} &= \frac{1 + \lambda\left(\frac{h^2}{GM}\right) cos(\theta - \theta_0)}{\left(\frac{h^2}{GM}\right)}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$r = \frac{\left(\frac{h^2}{GM}\right)}{1 + \lambda\left(\frac{h^2}{GM}\right) cos(\theta - \theta_0)}. \tag{4.32}$$

Pela proposição (4.19), a igualdade (4.32) é a equação em coordenadas polares de uma cônica com foco na origem, excentricidade $e = \lambda \frac{h^2}{GM}$ e corda focal

$$2\ell = \frac{2h^2}{GM}. \tag{4.33}$$

5 LEIS DE KEPLER

5.1 Primeira lei

• Lei das Órbitas: Cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um foco.

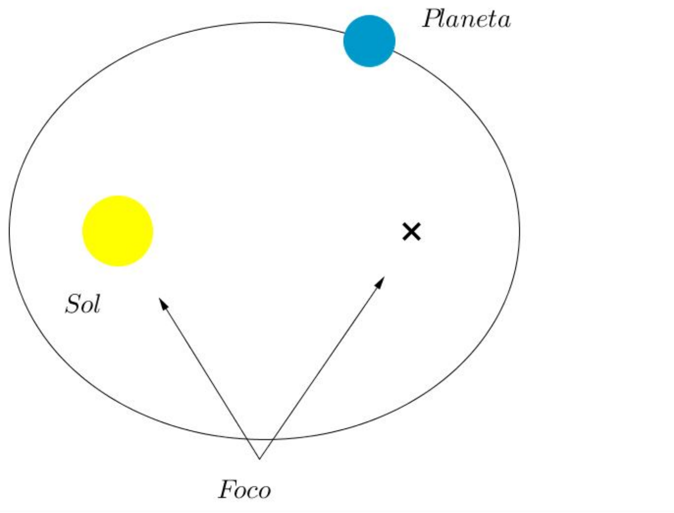

Figura 5.1:

A primeira lei decorre do fato da órbita do planeta ser uma cônica com foco na origem (4.32). Como o movimento do planeta é periódico, a única órbita possível é a órbita eliptíca. Observação: Podemos assumir que $0 < e < 1$, Pois M e G s ao constantes “grandes“ e h é uma constante pequena, pois representa a velocidade do planeta, assim

$$r = \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Sem perda de generalidade podemos fazer a seguinte mudança de coordenada $x = r\cos(\theta - \theta_0)$ e $y = rsen(\theta - \theta_0)$, que mudará apenas o ângulo considerado iniciamente. Assim

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{1+\frac{ex}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+ex = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\lambda} - ex \Rightarrow$$

$$x^2+y^2 = e^2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}x + x^2\right) \Rightarrow$$

$$(1-e^2)x^2 + \frac{2e^2}{\lambda}x + y^2 = \frac{e^2}{\lambda^2}.$$

Completando quadrado temos

$$\frac{\left(x+\frac{e^2}{\lambda(1-e^2)}\right)^2}{\frac{e^2}{\lambda^2(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2}{\lambda^2(1-e^2)}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(x+\frac{e^2}{\lambda(1-e^2)}\right)^2}{\left(\frac{e}{\lambda(1-e^2)}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e}{\lambda\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1.$$

Que é uma elipse de centro em

$$\left(\frac{e^2}{\lambda(1-e^2)}, 0\right)$$

e vértices em

$$\left(\frac{e^2}{\lambda(1-e^2)}, \pm\frac{e}{\lambda\sqrt{1-e^2}}\right)$$

e

$$\left(\frac{e^2 \pm e}{\lambda(1-e^2)}, 0\right).$$

5.2 Segunda lei

• Lei das Áreas: A reta radial que sai do centro do Sol e vai ao centro de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

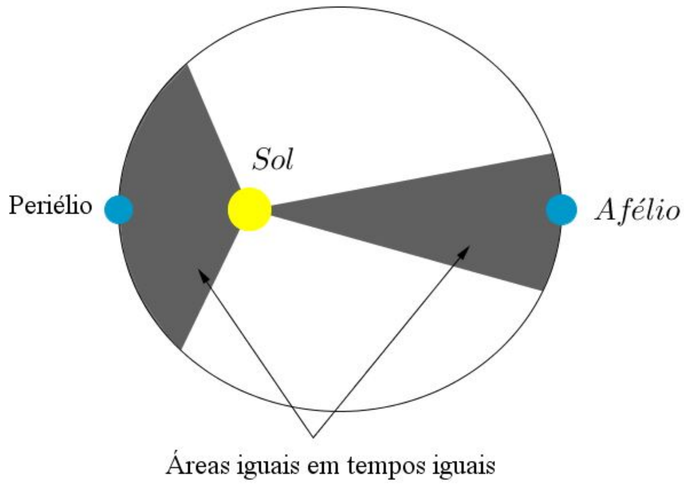

Figura 5.2:

Segunda lei: A área entre a curva e dois raios partindo da origem para os pontos $X_0 = \big(r(t_0), \theta(t_0)\big)$ e $X = \big(r(t), \theta(t)\big)$ é dada por

$$A(t) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 d\theta \tag{5.1}$$

Derivando (5.1) e usando (4.18), temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = c \tag{5.2}$$

onde c é uma constante. Integrando (5.2) temos

$$A(t) = \frac{h}{2} t + A_0.$$

Sejam $I = (t_i, t_j)$ e $J = (t_k, t_l)$ dois intervalos de tempo de mesmo tamanho ou seja $|t_i - t_j| = |t_k - t_l|$. Substituindo na equaça ao acima temos

$$\begin{aligned}
\Delta A_1 = A(t_j) - A(t_i) &= \frac{h}{2}t_j + A_0 - \frac{h}{2}t_i + A_0 \\
&= \frac{h}{2}(t_j - t_i) \\
&= \frac{h}{2}(t_l - t_k) \\
&= \frac{h}{2}t_l + A_0 - \left(\frac{h}{2}t_k + A_0\right) \\
&= A(t_l) - A(t_k) = \Delta A_2.
\end{aligned}$$

o que implica que áreas iguais são varridas em intervalos de tempo iguais. A expressão (5.2) é chamada de velocidade areolar.

5.3 Terceira lei

• Lei dos Períodos: O quadrado do período de um planeta (o tempo que o planeta completa uma órbita em torno do Sol) é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

Conhecendo a velocidade areolar, definida em (5.1), podemos calcular o período do planeta (T) da seguinte maneira:

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{5.3}$$

em que πab é a área de uma elípse de semieixos a e b, e $\frac{1}{2}h$ é a velocidade areolar. Observe que (c, ℓ) é um ponto da elípse, então

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \\
&\ell^2 = b^2 - \frac{c^2 b^2}{a^2}
\end{aligned}$$

ou seja

$$\ell = \frac{b^2}{a}.$$

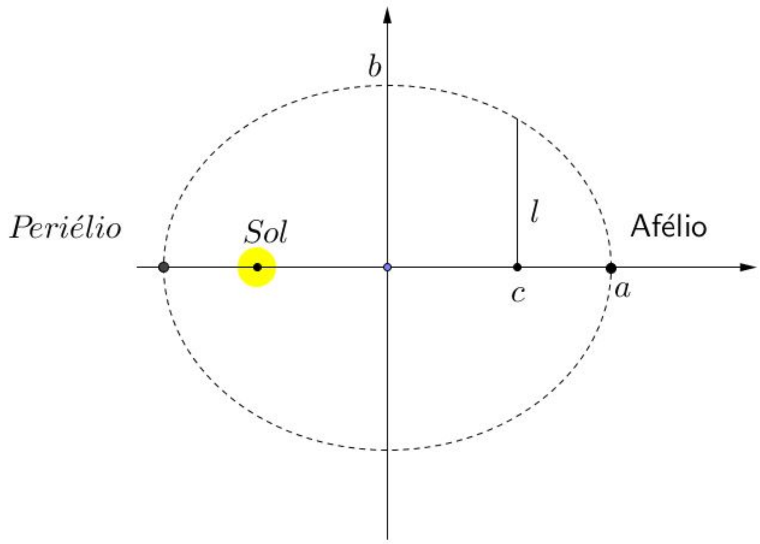

Figura 5.3: $a^2 - b^2 = c^2$

Usando a igualdade acima e (4.33) temos

$$2\ell = \frac{2h^2}{GM} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow h = b\sqrt{\frac{GM}{a}} \tag{5.4}$$

Substituindo (5.4) em (5.3) temos

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi ab}{b\sqrt{\frac{GM}{a}}} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$$

elevando ambos os membros ao quadrado, fica

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM}$$

simplificando

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{5.5}$$

o que demonstra o resultado.

• Uma aplicação dessa lei é o o cálculo do tempo em que a terra leva para girar em torno do Sol.

De (5.5) temos que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

ou seja

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}.$$

Considerando valores aproximados para a distância média entre a Terra e o Sol e a massa do sol de 149.600.000 km e $1,989 \times 10^{30} kg$, podemos calcular um valor aproximado para T.

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \\
&\cong 2\pi \sqrt{\frac{(149,6 \times 10^9)^3}{6,67408 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}} \\
&\cong 2\pi \times 10^4 \sqrt{\frac{(149,6)^3}{6,67408 \times 1,989}} \\
&\cong 1,044 \times 10^7 \pi \\
&\cong 3,2797 \times 10^7 s
\end{aligned}$$

Aqui usamos que $G = 6,67408 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$.

Sabemos que tempo necessário para que o planeta Terra completar uma volta ao redor do Sol é de 365 dias, 5 horas e cerca de 48 minutos, convertendo para segundos daria algo em torno de 31.556.880 s. Que é um valor bem próximo ao encontrado acima com as aproximações feitas.

6 CONCLUSÃO

De acordo com [3], os gregos foram pioneiros no estudo dos fenômenos físicos. Uma contribuição importante dos pensadores gregos para a ciência foi a ideia de que a realidade poderia ser apreendida pelo uso da razão. Os gregos também deram grandes contribuições para a matemática. Duas contribuições foram importantes. A primeira é a introdução do conceito de demontração dos resultados matemáticos. Na sua obra, Os Elementos, Euclides compila de forma sistemática todos os resultados matemáticos de geometria e aritmética conhecidos na época. Euclides, a partir de algumas afirmações simples, intuitivas, os teoremas, deduz todas as proposições posteriores. A segunda contribuição dos gregos, originada na escola de pitágoras, é a ideia de que a matemática poderia representar, descrever modelar os fenômenos da realidade. Os pitagóricos perceberam que existia um padrão matemático entre o comprimento de um corda esticada e o som que ela produz: o som é mais agudo a medida em que o comprimento se reduz, e aumenta uma oitava se o comprimento da corda for reduzido à metade. Dessa forma, existia uma relação de proporção numérica e os sons musicais. Esse fato os levou a suspeitar que a realidade poderia ser descrita por proporções matemáticas, criando assim uma visão de mundo baseada no conceito de número. Galileu Galilei(1564-1642), conhecido como o pai do método experimental, também percerbeu o poder da matemática em descrever a realidade, ele dizia que "A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo". O nosso objetivo nesse trabalho foi o de dar uma ideia, utilizando equações diferenciais, do poder da matemática em modelar problemas reais. Nosso foco foi em problemas físicos, mas, como já foi dito, podemos aplicar a teoria de equações diferenciais a outros ramos: biologia, química, engenharia, economia entre outros. Ao final desse trabalho, concluímos que a matemática, além de sua importância teórica, constitui-se como uma grande ferramenta de auxílio na busca do ser humano para compreender realidade.

7 APÊNDICE

Mostre que

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + Asen(\theta) + B\cos(\theta) \tag{7.1}$$

é uma solução geral para

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}. \tag{7.2}$$

Para resolvermos (6.2) primeiramente vamos chamar $\frac{1}{r}$ de u, assim

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}, \tag{7.3}$$

obtendo, assim, uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea.

Observe que $r^2 + 1 = 0$ é a equação característica da equação homogênea associada a (6.3), assim $u_1 = e^0\cos(\theta)$ e $u_2 = e^0 sen(\theta)$ formam um par de soluções fundamentais. Consequentemente

$$u_h = Asen(\theta) + B\cos(\theta)$$

é a solução geral da *EDO* homogênea.

Para a determinar a solução particular para a equação (6.2), podemos usar o método dde variação dos parâmetros procurando uma solução particular do tipo

$$u_p = v_1(\theta)\cos(\theta) + v_2(\theta)sen(\theta)$$

com as seguintes condições:

$$u_p' = -v_1(\theta)sen(\theta) + v_2(\theta)\cos(\theta)$$

e

$$v_1'(\theta)\cos(\theta) + v_2'(\theta)sen(\theta) = 0.$$

Derivando u_p' obtemos

$$u_p'' = -v_1'(\theta)sen(\theta) - v_1(\theta)\cos(\theta) - v_2(\theta)sen(\theta) + v_2'(\theta)\cos(\theta).$$

Substituindo u_p'' e u_p em (6.3), obtemos

$$(-v_1'(\theta)sen(\theta)-v_1(\theta)\cos(\theta)-v_2(\theta)sen(\theta)+v_2'(\theta)\cos(\theta))+v_1(\theta)\cos(\theta)+v_2(\theta)sen(\theta)=\frac{GM}{h^2}$$

simplificando temos

$$-v_1'(\theta)sen(\theta)+v_2'(\theta)\cos(\theta)=\frac{GM}{h^2}.$$

Assim obtemos o seguinte sistema de equações lineares para v_1' e v_2'

$$\begin{cases} v_1'(\theta)\cos(\theta)+v_2'(\theta)sen(\theta)=0 \\ -v_1'(\theta)sen(\theta)+v_2'(\theta)\cos(\theta)=\frac{GM}{h^2}. \end{cases}$$

Que é equivalente à

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{GM}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

concluímos que

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{GM}{h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen(\theta)\frac{GM}{h^2} \\ \cos(\theta)\frac{GM}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Integrando obtemos

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\frac{GM}{h^2} \\ sen(\theta)\frac{GM}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Substituindo as funções encontradas temos que a solulção particular é

$$u_p=\cos(\theta)\frac{GM}{h^2}(\theta)\cos(\theta)+sen(\theta)\frac{GM}{h^2}(\theta)sen(\theta)=\frac{GM}{h^2}$$

Assim a solução geral para (6.3) é

$$u=\frac{GM}{h^2}+Asen(\theta)+B\cos(\theta) \tag{7.4}$$

Substituindo u por $\frac{1}{r}$ em (6.4), obtemos (6.1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. C. D. William E. Boyce, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 10 ed., 2015.

[2] A. F. N. Djairo Guedes, *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 3 ed., 2007.

[3] Y. Ben-Dov, *Convite à Física*. Rio de Janeiro: LTC, 1 ed., 1996.

[4] E. L. Lima, *Curso de Analise Volume 1*. Rio de Janeiro: LTC, 1 ed., 1997.