LAYARA ALVES

O TEOREMA DE BORSUK-ULAM E APLICAÇÃO

LAVRAS - MG

2019

LAYARA ALVES

O TEOREMA DE BORSUK-ULAM E APLICAÇÃO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Graduação em Matemática para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Prof. Dr. Nelson Antonio Silva
Orientador

LAVRAS - MG
2019

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos

da Biblioteca Universitária da UFLA

Layara Alves
O Teorema de Borsuk-Ulam e Aplicação / Layara Alves. 1^a ed. rev., atual. e ampl. – Lavras : UFLA, 2019.
62 p. : il.

Monografia(graduação)–Universidade Federal de Lavras, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Silva.
Bibliografia.

2. Monografia. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-808.066

LAYARA ALVES

O TEOREMA DE BORSUK-ULAM E APLICAÇÃO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Graduação em Matemática para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

APROVADA em 04 de Julho de 2019.

Prof. Dr. Mário Henrique Andrade Cláudio	UFLA
Prof. Dr. Antônio Marcos Ferreira da Silva	UFLA

Prof. Dr. Nelson Antonio Silva
Orientador

LAVRAS - MG
2019

AGRADECIMENTOS

Eu sou porque nós somos.

Agradeço primeiramente à todas que lutaram para que as mulheres conquistassem direito de estudar.

Ao Presidente Lula e ao ministro Fernando Haddad que, através do REUNI, possibilitaram a abertura de novos cursos na UFLA.

À Carolina, que se fez presente do primeiro ao último semestre da minha graduação, sendo que esse trabalho só foi concluído porque você se dispôs a me ajudar. Esta margem é demasiado estreita para escrever toda gratidão que tenho por você e pela nossa amizade.

Ao Eliézer, Luciano e João, que dividiram a casa e a vida comigo e juntos, compartilhando sorrisos e lágrimas, fizemos daqui o nosso lar.

Aos colegas e amigos que fiz durante o curso, em especial, Ana, Mariana, Manu, Marcela, Carlos, Sheila, Denise, Dani, Adrielly, Ivo, Sandra, Lorrayne, Ariel, Tássia.

Ao Guilherme, por sempre me ensinar e lutar comigo pelos nosso ideais.

Aos/às meninos/as da ProDoc, Leonice, Nathan, Matheus, Yuri, Lucas Ferreira e Lucas Figueiredo, por fazerem com que os dias de trabalho fossem mais leves e divertidos.

Aos colegas do movimento estudantil e do Levante Popular da Juventude.

Aos professores/as do DEX.

À professora Amanda, pela disposição de me ouvir e acolher sempre que precisei e também pela amizade construída.

Ao meu orientador Nelson, pela paciência e disposição em me ensinar e orientar.

À professora Ellen do DED por mostrar o poder que temos enquanto educadores.

Aos professores Mário e Antônio por aceitarem o convite para ser banca desse trabalho.

Me guio nas pegadas daquelas/es que vieram antes de mim.

"Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I. Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.

Satz II. Ist $f \in R^{n S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.

Satz III. Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=1}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht."

Karol Borsuk

RESUMO

A Topologia Algébrica é uma subarea da Topologia que conecta Topologia e a Álgebra. Essa relação é feita por meio de ferramentas denominadas invariantes topológicos ou functores. Os invariantes topológicos associam espaços homeomorfos à estruturas algébricas equivalentes. Neste trabalho apresentaremos um estuto inicial à topologia algébrica. Estudandaremos teoria de homotopia e espaços de recobrimento, construiremos o functor Grupo Fundamental e calcularemos o grupo fundamental de alguns espaços como a esfera S^1 e o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ com intuito de demonstrar o caso bidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam. E, como aplicação deste teorema, demonstraremos o Teorema do Sanduíche de Presunto.

Palavras-chave: Homotopia; Espaços de Recobrimento; Grupo Fundamental.

ABSTRACT

The algebraic topology is a subarea of the topology that connects the topology and algebra. This relation is made through tools called topological invariants or functors. Topological invariants associate spaces that homeomorphs with equivalent algebraic structures. In this paper we present an initial study of the algebraic topology. We will study homotopy theory and covering spaces, construct the Fundamental Group functor, and compute the fundamental group of some spaces such as the S^1 sphere and the projective space $\mathbb{RP}^n$ in order to demonstrate the two-dimensional case of Borsuk-Ulam's Theorem. And, as an application of this theorem, we will demonstrate the Ham Sandwich Theorem.

Keywords: Homotopy; Covering Spaces; Fundamental Group.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.

Suponha que o planeta Terra seja uma esfera e que os parâmetros pressão atmosférica e temperatura variam continuamente no tempo e espaço. Então, em cada instante de tempo, existem na superfície da terra pelo menos um par de pontos diametralmente opostos no qual pressão atmosférica e temperatura coincidem.

Este resultado é conhecido como Teorema do Tempo e é uma interpretação para o caso bidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam , um clássico e fundamental resultado da Topologia, mais precisamente da Topologia Algébrica. Foi conjecturado pelo matemático e físico S. Ulam e provado pelo matemático polonês Karol Borsuk em 1933. Um dos aspectos que caracterizam sua relevância na área é sua versatilidade, ou seja, possui diferentes demonstrações, generalizações e aplicações. De fato, até 1985 eram conhecidas mais de 400 generalizações do teorema[1]. Enunciaremos-o a seguir: **Teorema de Borsuk-Ulam**(BORSUK, 1933). Sejam S^n a esfera n-dimensional e $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano. Se $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

A Topologia Algébrica é uma subárea da topologia que " conecta" a Topologia e a Álgebra. Essa relação se dá por meio da associação dos espaços topológicos à estruturas algébricas (como grupos, anéis, espaços vetoriais) e das aplicações contínuas com as aplicações algébricas (homomorfismos e transformações lineares). Essa associação é feita através de ferramentas denominadas invariantes topológicos ou functores, onde os espaços que são homeomorfos serão associados a estruturas algébricas equivalentes. Um exemplo desse tipo de invariante é o Grupo Fundamental, que associa cada espaço topológico a uma estrutura algébrica de grupo. Uma das demonstrações para o caso bidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam é feita usando o Grupo Fundamental. Um importante resultado, é que o grupo fundamental da esfera unidimensional S^1 corresponde aos inteiros, de modo que cada $n \in \mathbb{Z}$ representa o resultado do número de voltas que o ponto móvel $\alpha(s)$ percorre em S^1 no sentido horário do caminho somado ao número de voltas que este mesmo ponto móvel percorre no sentido anti-horário deste caminho durante o intervalo de tempo 0 a 1, tendo como a base um ponto x_0. Esse resultado é essencial para a demonstração do Teorema de Borsuk- Ulam.

Uma consequência do Teorema de Borsuk-Ulam é conhecida como Ham Sandwich Theorem ou Teorema do Sanduíche de Presunto, enunciado a seguir:

[1] STEINLEIN, H. *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey.* Topological Methods in Nonlinear Analysis (A. Granas, ed.), Sém Mathematics Sup, v. 95, p. 166–235, 1985.

Teorema do Sanduíche de Presunto.(KOSNIOWSKI, 1980) Sejam A,B,C subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^3$. Então existe um plano contido em $\mathbb{R}^3$ que intercepta os subconjuntos A,B,C e divide seus respectivos volumes exatamente ao meio.

Este trabalho está dividido em sete capítulos. No capítulo 2 definiremos o que são os espaços topológicos e apresentaremos conceitos básicos da topologia geral que serão usados durante o desenvolvimento desse trabalho, tais como, continuidade de aplicações, espaços conexos, espaços compactos e etc. No capítulo 3 apresentaremos um conceito elementar para iniciar os estudos em topologia algébrica, que é a teoria de homotopia. No capítulo 4, um caso específico de homotopias, que são as homotopias de caminhos fechados, e com isso, construiremos um invariante topológico: o grupo fundamental e mostraremos como induzir um homomorfismo entre grupos fundamentais por meio de aplicações contínuas. No capítulo 5 estudaremos um tipo específico de espaços topológicos, que são os espaços de recobrimento ou, simplesmente, recobrimentos e apresentaremos alguns recobrimentos importantes, como o recobrimento da esfera S^1, do espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ e em seguida calcularemos o respectivo grupo fundamental desses espaços. E pra finalizar esse capítulo, mostraremos alguns resultados algébricos envolvendo grupo fundamental, como a relação do número de folhas de um recobrimento com o índice do grupo fundamental. No capítulo 6 apresentaremos o clássico teorema de Borsuk-Ulam, mostraremos uma equivalência do teorema e em seguida faremos a demonstração para o caso uni e bidimensional. Pra finalizar faremos uma aplicação do teorema de Borsuk-Ulam que é a demonstração do Teorema de Stoney-Tukey, conhecido como Teorema do Sanduíche de presunto. O último capítulo consiste na conclusão do trabalho.

2 CONCEITOS ELEMENTARES.

Os objetos de estudo da Topologia são espaços topológicos, por exemplo objetos geométricos, e as aplicações contínuas entre eles. Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos da topologia tais como, aplicações contínuas, espaços de Hausdorff, topologia quociente, compacidade, conexidade, que são de grandes relevância e bastante utilizados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Espaços Topológicos e Aplicações Contínuas.

2.1.1 Espaços Topológicos.

Um espaço topológico é um conjunto que possue uma estrutura de topologia. Uma topologia é uma coleção de conjuntos que satisfazem certos axiomas. Esse tipo de estrutura permite, por exemplo, formalizar conceitos como continuidade e conexidade.

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto. Uma topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e X pertencem a τ;*
2. *Se $A_1,\ldots,A_n \in \tau$ então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$;*
3. *Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ com $A_\lambda \in \tau$, para cada $\lambda \in L$ tem-se*

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \in \tau.$$

Assim, um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X.

Um conjunto X qualquer assume pelo menos duas topologia: a topologia discreta e a topologia caótica. Enquanto na topologia discreta tomamos os abertos como todas as partes do conjunto X, na caótica apenas o $\varnothing$ e X serão nossos abertos. Se X for finito, a cardinalidade da uma topologia sobre X será sempre menor que a cardinalidade da topologia discreta.

Exemplo 2.1.1. *Seja E um conjunto infinito. A coleção $\tau = \{\varnothing\} \cup \{G \subset E;\ G^c \text{é finito}\}$ é uma topologia sobre E.*

Demonstração. (1) Note que $\varnothing \in \tau$ e $E^c = \varnothing$. Logo $E \in \tau$.

(2) Tome $G_1,...,G_n \in \tau$. Então $(G_1 \cap ... \cap G_n)^c = (G_1^c \cup ... \cup G_n^c)$ que é finito. Então $G_1 \cap ... \cap G_n \in \tau$.

(3) Sejam $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma familia arbitrária de abertos de τ. Então $(\cup_{\lambda \in L} G_\lambda)^c = \cap_{\lambda \in L}(G_\lambda^c)$ que também é finito. Então $\cup_{\lambda \in L} G_\lambda \in \tau$.

Logo, τ é uma topologia sobre E e a nomeamos como **Topologia Cofinita.** ■

Exemplo 2.1.2. *Sejam (E_1, τ_1) e (E_2, τ_2) espaços topológicos, $E = E_1 \times E_2$ e $\beta = \{G \times H; G \in \tau_1$ e $H \in \tau_2\}$. O conjunto B formando por reuniões de elementos de β formam uma topologia sobre E.*

Observe que $\varnothing, E \in \beta$. Agora, dados $B_1 = G_1 \times H_1$, $B_2 = G_2 \times H_2$, ... , $B_n = G_n \times H_n$ elementos de β. Então $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = (G_1 \times H_1) \cap (G_2 \times H_2) \cap ... \cap (G_n \times H_n) = (G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n) \times (H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) \in \beta$ pois $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n \in \tau_1$ e $H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n \in \tau_2$. Então interseções finitas de elementos de B, estão em B. Como uniões quaisquer de B estão em B, por definição, segue que B é uma topologia.

A seguir definiremos uma classe importante de espaços topológicos conhecidos como espaços métricos.

Definição 2.1.2. *Considere M um conjunto. Uma **métrica** sobre o conjunto M é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par ordenado $(a,b) \in M \times M$ a um número real, chamado de distância, e satisfaz as seguintes condições:*
Dados $x, y, z \in M$

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(desigualdade triangular).*

Assim, um espaço métrico é um par (M,d) onde M é um conjunto e d uma métrica sobre M.

A noção de bola, que será definida a seguir, é fundamental no estudo dos espaços métricos. Neste trabalho será um conceito chave para construção da topologia a partir de uma métrica.

Definição 2.1.3. *Dado um número real $r > 0$, uma **bola aberta** de centro a e raio r em um espaço métrico Mé um conjunto $B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}$. Um subconjunto $X \subset M$ é dito **aberto** se, para todo $a \in X$ existe $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, tal que $x \in B(a,r) \subset X$.*

A partir desses conceitos mostraremos de fato que todo espaço métrico é topológico, com a topologia induzida pela métrica.

Exemplo 2.1.3. *Sejam (M,d) um espaço métrico e τ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de M definidos a partir da métrica d. Então (M,τ) é um espaço topológico.*

De fato, considere $\tau = \{X \subset M; X \text{ é aberto}\}$.

- $\varnothing, M \in \tau$.
- *Sejam $X_1,...,X_n \in \tau$. Tome $x \in X_1 \cap ... \cap X_n$. Então existem números positivos $r_1,...,r_n \in \mathbb{R}$ tais que $X_i \subset B(x,r_i)$, para $1 \leq i \leq n$. Considere $r = min\{r_i\}_{i=1}^{n}$, então $B(x,r) \subset B(x,r_i)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Logo $B(x,r) \subset X_1 \cap ... \cap X_n$.*
- *Agora considere uma família arbitrária $\{A_i\}_{i\in\lambda}$ de abertos de M. Tome $x \in \cup_{i\in\lambda} A_i$. Então existe um índice t tal que $x \in A_t$ e como A_t é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A_t$. Logo, $B(x,r) \subset \cup_{i\in\lambda} A_i$*

  Portanto, o conjunto (M,τ) é um espaço topológico.

Exemplo 2.1.4. *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a métrica $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $d(x,y) = |x-y|$ é um espaço métrico.*

Demonstração. (i) $d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$.

(ii) $d(x,y) = |x-y| <=> |-1|d(x,y) = |-1||(-y+x)| = |-1(-y+x)| = |y-x| = d(y,x)$.

(iii) $d(x,y) = |x-y| \leq |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y)$.

Logo, $(\mathbb{R},d)$ é um espaço métrico. ■

Podemos definir uma métrica no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ a partir da norma de cada vetor.

Exemplo 2.1.5. *((DOMINGUES, 1982), Capítulo 2, Exemplo 3) Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano. A função $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ define uma métrica sobre $\mathbb{R}^n$. Dizemos neste caso que d é a métrica canônica definida pela norma de cada vetor em $\mathbb{R}^n$. Esta métrica também é conhecida como a métrica usual.*

É possível mostrar que a função $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $d(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$ também define uma métrica em $\mathbb{R}^n$, conhecida como a métrica da soma.

Dado um subconjunto de um espaço topológico, é possível definir uma estrutura de topologia neste subconjunto a fim de que este também seja um espaço topológico.

Exemplo 2.1.6. *Sejam (E,τ) um espaço topológico, $X \subset E$ e $\varnothing \neq X$. A coleção $\tau_X = \{G \cap X; G \in \tau\}$ define uma topologia sobre X. Note que,*

(1) $\varnothing \in \tau$. Então $\varnothing \cap X = \varnothing \in \tau_X$. E mais, $E \in \tau \Rightarrow E \cap X = X \in \tau_X$.

(2) Tome $(G_1 \cap X), ..., (G_n \cap X) \in \tau_X$. Então $(G_1 \cap X) \cap ... \cap (G_n \cap X) = X \cap (G_1 \cap ... \cap G_n) \in \tau_X$.

(3) Dado uma família arbitrária $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} = \{G_\lambda \cap X; \lambda \in L\}$. A união $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L}(G_\lambda \cap X) = X \cap (\bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda) \in \tau_X$.

Como verificamos, τ_X é uma topologia sobre o conjunto X chamada de ***topologia induzida*** *por τ sobre X. E o par (X,τ_X) é um chamado de* ***subespaço topológico*** *de (E,τ).*

Exemplo 2.1.7. ***a)*** *A esfera n-dimensional $S^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço topológico de $(\mathbb{R}^n, \tau)$ cuja topologia é induzida pela métrica do $\mathbb{R}^n$.*

b) *O intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ é um subespaço topológico de $\mathbb{R}$ cuja topologia é induzida pela métrica de $\mathbb{R}$.*

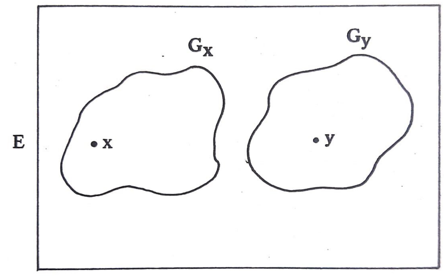
A esfera n-dimensional, em particular, a S^1 e o intervalo $[0,1]$ serão os principais espaços topológicos estudados nesse trabalho.

Um tipo de espaço topológico bastante estudado são os espaços topológicos de Hausdorff caracterizados da seguinte forma:

Definição 2.1.4. *Seja (E,τ) um espaço topológico. Dizemos que E é um* ***espaço de Hausdorff*** *se, para todo $x,y \in E$, existem abertos $G_x, G_y \in \tau$ no qual $x \in G_x$ e $y \in G_y$ de modo que $G_x \cap G_y = \varnothing$.*

Exemplo 2.1.8. *Todo espaço métrico (M,d) é um espaço de Hausdorff.*
Sejam $x,y \in M$ tal que $d(x,y) = \varepsilon$. Então $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$. Logo, $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1, S^1 \subset \mathbb{R}^2, [a,b] \subset \mathbb{R}$ são espaços Hausdorff.

Figura 2.1 – Representação de um espaço de Hausdorff.



Pra finalizar essa seção definiremos o interior e o fecho de subconjuntos de espaços topológicos.

Definição 2.1.5. *Seja (E,τ) um espaço topológico. O **interior** de um subconjunto $A \subset E$, denotado por IntA, consiste na união de todos os abertos inteiramento contidos em A. Assim, dizemos que $p \in intA$ se, e somente se, existe $G \in \tau$ tal que $p \in G \subset A$. Um subconjunto $A \subset E$ é dito **fechado** no espaço topológico E, se $A^c \in \tau$, ou seja, seu complementar é aberto. E com isso, definimos o **fecho** de A, denotado por $\overline{A}$, como a interseção de todos os fechados que contém A.*

2.1.2 Aplicações Contínuas.

A questão da continuidade é central nos estudos da topologia, visto que a ferramenta utilizada para classificar os espaços topológicos como equivalentes é construída a partir das aplicações contínuas.

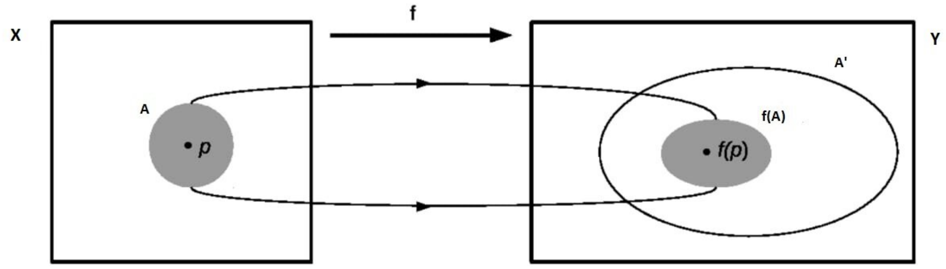
Definição 2.1.6. *Sejam X,Y espaços topológicos. Uma uma aplicação $f : X \to Y$ diz **contínua** em um ponto $p \in X$ se, dado um aberto $A' \in Y$ com $f(p) \in A'$, existe um aberto $A \in X$ tal que $p \in A$ e $f(A) \subset A'$. Se f é contínua em todos os pontos $p \in X$, então f se diz, simplesmente, contínua.*

A seguinte proposição nos permite entender continuidade de um modo equivalente à definição anterior.

Proposição 2.1.1. *((LIMA 2015), Capítulo 3, Proposição 3.) Sejam M e N espaços topológicos. A fim de que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M*

Exemplo 2.1.9. ***a)*** *A aplicação inclusão $i: E \to E$ com $i(x) = x$ é contínua.*

Figura 2.2 – Representação de uma aplicação contínua entre espaços topológicos.



b) *A função $p\colon [0,1] \to (a,b)$ com $p(t) = (1-t)a + tb$ é contínua.*

c) *A aplicação $\psi\colon [0,1] \to S^1$ tal que $\psi(t) = e^{2\pi it}$ é contínua.*

Agora iremos mostrar que a composição de aplicações contínuas em espaços topológicos ainda é contínua.

Proposição 2.1.2. *Sejam M, N, P espaços topológicos, $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ aplicações contínuas. Então a composição $g \circ f\colon M \to N$ é contínua.*

Demonstração. Tome um aberto $G \subset P$. Note que $g^{-1}(G) = L \subset N$, no qual L é um aberto pois a aplicação g é contínua e, $f^{-1}(L) = H \subset M$ também é aberto pela continuidade de f. Observe que $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1} \circ g^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G) = f^{-1}(L) = H$. Portanto, a composição é contínua.

■

Corolário 2.1.1. *A restrição de aplicação contínua em espaços topológicos é contínua.*

Demonstração. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação contínua, $X \subset M$ e $i\colon X \to M$ a aplicação inclusão. Note que a aplicação $f|X \circ i\colon X \to N$ é tal que $f|X \circ i(x) = f|X(i(x)) = f|X(x)$. Logo, a restrição de f a X é contínua. ■

A próxima proposição é um importante resultado, pois permitirá justificar a continuidade de aplicações que são determinadas pela união de aplicações contínuas.

Proposição 2.1.3 (Lema da Colagem). *Sejam $X = A \cup B$ tal que A, B são fechados em X, $f\colon A \to Y$ e $g\colon B \to Y$ aplicações contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para $x \in A \cap B$ então a aplicação $h\colon X \to Y$ definida por: $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in A \\ g(x) \text{ se } x \in B \end{cases}$ é contínua.*

Demonstração. Tome $V \subset Y$ um conjunto fechado em Y. Temos então

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$$

Logo $f^{-1}(V)$ e $g^{-1}(V)$ são fechados pois, por hipótese, as aplicações f, g são contínuas. Assim, $f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$ é fechado e portanto h é contínua. ■

Com as aplicações contínuas, construiremos os homeomorfismos, que são aplicações bijetivas contínuas cuja inversa também é contínua, ou seja, uma relação que associa cada ponto de um espaço X a um único ponto de um espaço Y. Dizer que os espaços topológicos X, Y são homeomorfos, será o mesmo que deformar de forma contínua o espaço X no espaço Y. E assim, X e Y serão "iguais", a menos de homeomorfismo.

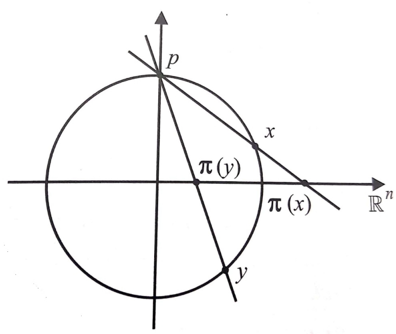
Definição 2.1.7. *Um* ***homeomorfismo*** *de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação bijetora contínua $f : X \to Y$, tal que a aplicação inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Dizemos então que os espaços X e Y são homeomorfos.*

A partir dos homeomorfismos podemos separar os espaços topológicos em classes de equivalência de modo que os espaços homeomorfos irão pertencer a uma mesma classe.

Exemplo 2.1.10. ***a)*** *((LIMA, 2015) Capítulo 2, Exemplo 15a) Todo intervalo aberto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo ao $\mathbb{R}$.*

b) *((LIMA, 2015) Capítulo 2, Exemplo 15b) Sejam $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum x_i^2 = 1\}$ a esfera n-dimensional e $p = (0, ..., 0, 1) \in S^n$. A* ***projeção estereográfica*** *$\pi : S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ com $\pi(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$ estabelece um homeomorfismo entre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e esfera $S^n - \{p\}$*

Figura 2.3 – Representação da projeção estereográfica.



2.2 Compacidade e Conexidade de Espaços topológicos.

Um dos objetos de estudo da topologia são propriedades dos espaços que se preservam pelos homeomorfismos, conhecidas como propriedades topológicas. Estudar essas propriedades é essencial, visto que é uma forma imediata para separar espaços que não são homeomorfos. Nesta sessão apresentaremos duas propriedades topológicas, conexidade e compacidade.

2.2.1 Compactos

A compacidade nos diz um pouco sobre a finitude e limitação de conjuntos. Afirmar que um conjunto X é compacto constitui basicamente em, para qualquer família de abertos dada, tal que a união desses abertos contém X, é possível conseguir um número finito de abertos dessa família de modo que X ainda é subconjunto dessa união. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, se um conjunto é fechado e limitado então esse conjunto é compacto. Mostrar que $I = [0,1]$ e S^1 são compactos são resultados importantes nesse trabalho.

Definição 2.2.1. *Dados um espaço topológico (E, τ) e um subconjunto $A \subset E$. Uma* ***cobertura aberta*** *de A é uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos abertos de E tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Dizemos que essa cobertura é* ***finita*** *se $L = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, ou seja, L é um conjunto finito.*
Com isso, definimos que A é ***compacto*** *quando, dada qualquer cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de A, é possível extrair um número finito de abertos de A_λ de modo que a união desses abertos seja uma cobertura finita de A.*

Exemplo 2.2.1. *O conjunto $\mathbb{R}$ com a métrica usual não é compacto.*

Demonstração. Considere $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_n = (-n, n)$. Então $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$. Seja λ um número natural. Então $\bigcup_{n \leq \lambda} A_n = A_\lambda = (-\lambda, \lambda)$. Como $\mathbb{R} \not\subseteq A_\lambda$, segue que $\mathbb{R}$ não é compacto. ■

Exemplo 2.2.2 (Teorema de Borel-Lebesgue,((LIMA,2015), Capítulo 8, Teorema 3)). *Seja $[a,b] \subset \bigcup_{x \in L} A_\lambda$, onde $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos abertos da reta. Então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ tais que $[a,b] \subset A_{\lambda 1} \cup ... \cup A_{\lambda n}$.*
A partir do teorema de Borel-Lebesgue podemos concluir que todo subconjunto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ fechado é compacto. E mais, existe uma generalização do teorema de Borel-Lebegue mostrando que todo subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$ é compacto.

Agora mostraremos que imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua ainda é compacta. Com este resultado podemos construir outros exemplos de espaços compactos.

Proposição 2.2.1. *Sejam X um espaço topológico compacto, $f: X \to Y$ uma aplicação contínua. Então $f(X)$ também é compacto.*

Demonstração. Seja $\{V_i\}_{i\in L}$ uma cobertura aberta de Y. Então $f^{-1}(V_i)$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe um conjunto finito $J \subset L$ tal que $X = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(V_i)$. Como a aplicação $f: X \to f(X)$ é sobrejetiva, segue que $f(X) = \bigcup_{i\in J} V_i$, ou seja, $\bigcup_{i\in J} V_i$ é uma cobertura aberta finita de $f(X)$. Portanto, $f(X)$ é compacto. ■

Exemplo 2.2.3. *A esfera S^1 é compacta.*

Demonstração. Considere a aplicação $\psi: [0,1] \to S^1$ tal que $\psi(t) = e^{2\pi it}$. Note que ψ é contínua e o intervalo $[0,1]$ é compacto. Assim, pela Proposição 2.2.1temos que S^1 é compacta ■

A compacidade nos fornece alguns resultados associados a conjuntos fechados que serão ferramentas úteis para resultados posteriores desse trabalho. Enunciaremos alguns desses resultados a seguir:

Proposição 2.2.2. *Sejam E um espaço compacto e $A \subset E$ um subconjunto fechado. Então A é compacto.*

Demonstração. Seja $(A_i)_{i\in\lambda}$ uma cobertura aberta de A. Então $(A_i)_{i\in\lambda} \cup A^c$ é um cobertura aberta de E, que é um espaço compacto. Assim existe uma subcobertura aberta finita de E, ou seja, $E = A \cup A^c = (A_{i_1} \cup A^c) \cup \ldots \cup (A_{i_n}) \cup A^c$, então $G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n} \supset A$. E portanto, A é compacto. ■

Proposição 2.2.3. *Seja E uma espaço Hausdorff e $A \subset E$ um subconjunto compacto. Então A é fechado.*

Demonstração. Tome $p \in A^c$. Para cada ponto $x \in A$, existem abertos G_x e H_x tal que $G_x \cap H_x = \varnothing$ de modo que $x \in G_x$ e $p \in H_x$, pois E é Hausdorff. Tome $(G_x)_{x\in A}$ uma cobertura aberta de A. Considere $G = G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n} \supset A$, então $H = H_{x_1} \cap \ldots \cap H_{x_n}$ é um aberto que contém p. Note que $H \subset A^c$. De fato, suponha por absurdo que $H \not\subseteq A^c$. Então existe $x \in H = H_{x_1} \cap \ldots \cap H_{x_n}$ tal que $x \notin A^c$. Logo $x \in A \subset G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}$. Absurdo, pois $G_x \cap H_x = \varnothing$, para todo $x \in A$. Logo, A^c é aberto e portanto A é fechado. ■

2.2.2 Conexos.

De certo modo, podemos interpretar conexidade como um espaço de uma única parte, ou seja, não vão existir outros quaisquer conjuntos com certa característica (abertos e disjuntos) tal que a união resultará no espaço inicial. Aqui, iremos apresentar o que é uma desconexão pu cisão, e com isso definiremos espaços conexos.

Para entender o conceito de conexidade precisamos entender o que é cisão.

Definição 2.2.2. *Uma cisão de um espaço topológico (E,τ) é um par de abertos G e H não vazios tal que $G\cap H=\varnothing$ e $G\cup H=E$. Dizemos que a cisão é trivial se $G=\varnothing$ e $H=E$.*

Todo espaço admite a cisão trivial. Se, além disso, admitir outra cisão qualquer, dizemos que é desconexo. Se não, (E,τ) é **conexo**.

Definição 2.2.3. *Um espaço topológico (E,τ) é* ***conexo*** *se admitir apenas a cisão trivial.*

Exemplo 2.2.4. *Considere $\mathbb{R}$ o espaço topológico munido da topologia induzida pela norma de $\mathbb{R}$. Considere também o subespaço topológico $\mathbb{R}-\{a\}$, para algum $a\in\mathbb{R}$. Então os abertos $(-\infty,a)\cup(a,\infty)$ formam uma cisão de $\mathbb{R}-\{a\}$.*

Exemplo 2.2.5. *Se A é um espaço topológico discreto então todo subconjunto de A determina uma cisão.*
De fato, observe que todo ponto $a\in A$ define um aberto, então, para qualquer $B\subset A$, temos $A=B\cup(A-B)$.

Exemplo 2.2.6. *Sejam $\mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais e $\Phi=1{,}618...$ o número de ouro. Tome $A=\{x\in\mathbb{Q};x<\Phi\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Q};x>\Phi\}$. Assim, $\mathbb{Q}=A\cup B$ formam uma cisão dos racionais.*

Se $B\cup C=A$ é uma cisão do espaço topológico (A,τ), então os conjuntos B e C são abertos por definição. E ainda, $A=B\cup\{A-B\}$ ou seja, o conjunto C é complementar de B, então B é fechado. E de modo análogo temos que C também é fechado. Desse modo, conseguimos uma caracterização equivalente para espaços conexos.

Proposição 2.2.4. *Um espaço topológico (E,τ) é conexo se, e somente se, E e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de E abertos e fechados ao mesmo tempo.*

Exemplo 2.2.7. *O espaço topológico $\mathbb{R}$ munido da topologia co-finita é conexo.*

Demonstração. Considere os abertos $G=\mathbb{R}-\{a_1,...,a_n\}$ e $H=\mathbb{R}-\{b_1,...,b_m\}$. Observe que $G\cap H=\mathbb{R}-\{a_1,...,a_n,b_1,...,b_m\}\neq\varnothing$. Portanto, $\mathbb{R}$ é conexo. ∎

Exemplo 2.2.8. *((LIMA,2015), Capítulo 4, exemplo 4) O espaço topológico* $\mathbb{R}$ *munido da topologia usual é conexo.*

A proposição abaixo é uma ferramenta para concluirmos que a conexidade é um invariante topológico.

Proposição 2.2.5. *Um espaço topológico* E *é desconexo se, e somente se, existe uma função* $f\colon E \to \{0,1\}$ *contínua e sobrejetiva.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Considere $E = A \cup B$ uma cisão e defina $f\colon E \to \{0,1\}$ como $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$. Como A e B são diferentes do vazio, então f é sobrejetiva. Agora observe que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$ e $f^{-1}(\{0,1\}) = E$. Portanto, f é contínua.

($\Leftarrow$) Como $f\colon E \to \{0,1\}$ é contínua e sobrejetiva, os abertos $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$ não são vazios. Ainda, $f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ e $f^{-1}(\{0,1\}) = E$, então $A \cup B = E$ formam uma cisão não trivial de E. ∎

Proposição 2.2.6. *Se* M *é conexo e* $f\colon M \to N$ *é contínua, então o conjunto* $f(M) \subset N$ *é conexo.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $f(M)$ é desconexo. Então existe uma função $g\colon f(M) \to \{0,1\}$ contínua e sobrejetiva. Considere $f_1\colon M \to f(M)$ tal que $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in M$. Assim, f_1 é sobrejetiva e é contínua, afinal f é contínua. Portanto, a função $g \circ f_1\colon M \to \{0,1\}$ é contínua e sobrejetiva. Absurdo, pois M é conexo. ∎

É facil ver que conexidade é preservada por homeomorfismo, basta observar o seguinte: se M é conexo e $h\colon M \to N$ é um homeomorfismo, segue direto da proposição anterior que N é conexo.

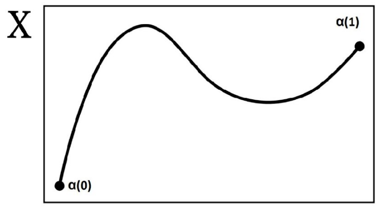
Exemplo 2.2.9. *Todo aberto* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *é conexo. Como vimos no Exemplo 2.2.8, temos que* $\mathbb{R}$ *é um espaço conexo e, pelo Exemplo 2.1.10, sabemos que todo intervalo aberto* $(a,b) \in \mathbb{R}$ *é homeomorfo ao* $\mathbb{R}$. *Logo,* (a,b) *é imagem do conexo* $\mathbb{R}$ *pelo homeomorfismo. Portanto, é conexo.*

Exemplo 2.2.10. *A esfera* S^1 *é conexa pois, como vimos no exemplo 2.1.9, a aplicação* $\psi\colon \mathbb{R} \to S^1$ *tal que* $\psi(t) = e^{2\pi i t}$ *é contínua e pelo Exemplo 2.2.8, o espaço* $\mathbb{R}$ *é conexo.*

Agora, iremos apresentar um caso específico de conexidade de um modo um pouco mais intuitivo usando aplicações contínuas. Entenderemos que um conjunto é conexo por caminhos se conseguirmos "ligar" quaisquer dois pontos desse espaço de forma contínua. Isso nos levará ao conceito de conexos por caminhos.

Neste trabalho, definiremos um caminho como uma aplicação contínua $\alpha\colon I \to X$ onde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e X é um espaço topológico qualquer. Dizemos que $\alpha(0) = a \in X$ é o ponto inicial e $\alpha(1) = b$ o ponto final do caminho que "liga" a até b. E, se $a = b$ dizemos então que o caminho é fechado.

Figura 2.4 – Representação de um caminho em um espaço topológico.



Definição 2.2.4. *Dizemos que um espaço topológico E é conexo por caminhos se, para quaisquer $a,b \in E$ existe um caminho $\alpha\colon I \to E$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$.*

Proposição 2.2.7. *Se um espaço topológico E é conexo por caminhos, então E é conexo.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $M = A \cup B$ é uma cisão não trivial para o espaço topológico E. Tome $a \in A$ e $b \in B$, por hipótese, existe um caminho $\alpha\colon [0,1] \to M$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$. Então $[0,1] = \alpha^{-1}(M) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$ com $0 \in \alpha^{-1}(a)$ e $1 = \alpha^{-1}(b)$ defini uma cisão do intervalo $[0,1]$. Absurdo, pois $[0,1]$ é conexo. Portanto, E é conexo. ■

A imagem de um conjunto conexo por caminhos por uma aplicação contínua é conexa por caminhos.

Proposição 2.2.8. *Sejam M um conjunto conexo por caminhos e $f\colon M \to N$ uma aplicação contínua. Então $f(M) = N \subset Y$ é conexa por caminhos.*

Demonstração. $\alpha\colon I \to X$ um caminho em M. Considere $a' = f^{-1}(a) \in N$ e $b' = f^{-1}(b) \in N$. Como a composição de aplicações contínuas ainda é contínua, temos que $f \circ \alpha\colon I \to N$ é um caminho em N. Portanto, N é conexo por caminhos. ■

Exemplo 2.2.11. *Todo intervalo $(a,b) \in \mathbb{R}$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Para quaisquer $x, y \in (a,b)$, basta tomar o caminho que representa o segmento de reta do ponto x até y, ou seja, $p\colon I \to (a,b)$ tal que $p(t) = (1-t)(x) + ty$. ■

Analogamente, conseguimos mostrar que qualquer intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ também é conexo por caminhos.

Exemplo 2.2.12. *A esfera S^1 é conexa por caminhos. De fato, pois I é conexo por caminhos e $\psi\colon I \to S^1$ com $\psi(t) = e^{it}$ é contínua.*

Desse modo concluímos que a reta $\mathbb{R}$ é conexa por caminhos, visto que, pelo Exemplo 2.2.10, $\mathbb{R}$ é homeomorfo a qualquer intervalo $(a,b) \in \mathbb{R}$.

Assim como a compacidade, a conexidade de conjuntos também é uma ferramenta para separação de espaços não homeomorfos. Se considerarmos M e N espaços topológicos tal que M é conexo e N desconexo, é trivial mostrar que esses espaços não são homeomorfos. Para além, como mostrar que dois espaços conexos não são homeomorfos ? Por exemplo, será que o intervalo (a,b) é homeomorfo a $[c,d)$? Ambos são conexos, entretanto $[c,d) - \{c\}$ ainda é conexo. Se existir o homeomorfismo $h : [c,d) \to (a,b)$ entre esses conjuntos, h induz um homeomorfismo entre (c,d) e o espaço $(a,b) - h(c) = (a,h(c)) \cup (h(c),b)$ que é desconexo, caracterizando um absurdo. Ainda com essa técnica, podemos mostrar que nenhum intervalo da reta é homeomorfo a S^1, visto que sempre é possível tornar um intervalo desconexo, basta retirar um ponto p de forma conveniente. Entretanto, retirando um ponto qualquer da S^1 ainda temos um conjunto conexo.

2.2.3 Topologia Quociente e o Espaço Projetivo $\mathbb{RP}^n$.

Para construir o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ precisamos definir um tipo de topologia construída a partir de uma aplicação sobrejetiva, a **topologia quociente**.

Proposição 2.2.9. *Suponha que (X,τ) é um espaço topológico, Y um espaço qualquer e $f\colon X \to Y$ é uma aplicação sobrejetiva. Podemos definir uma topologia τ_f em Y por meio da aplicação f da seguinte forma:*

$$\tau_f = \{V \subset Y; f^{-1}(V) \in \tau\}.$$

Demonstração. É evidente que os conjuntos $\varnothing, Y \in \tau$. Agora tome $V_1,...,V_n \in \tau_f$. Então $f^{-1}(V_1 \cap ... \cap V_n) = f^{-1}(V_1) \cap ... \cap f^{-1}(V_n) \in \tau$ pois a interseção finita de abertos de τ ainda pertence a τ, assim $V_1 \cap ... \cap V_n \in \tau_f$ Também, se $\bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ é uma reunião arbitrária de elementos de τ_f, temos $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(V_\lambda) \in \tau$ pois a união de abertos de τ ainda pertencem a τ. ■

Definição 2.2.5. *A topologia τ_f é uma topologia sobre Y a qual chamamos de **Topologia quociente induzida por** f.*

Observação: Se Y possui a topologia quociente induzida pela aplicação f então, necessariamente, f é contínua.

Agora vamos definir o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ por meio de uma relação de equivalência na esfera S^n.

Considere S^n a esfera n-dimensional e defina a relação "$\sim$" da seguinte forma: dados $x, y \in S^n$, temos que $x \sim y \Longleftrightarrow x = -y$.

É possível mostrar que a relação " $\sim''$ define uma relação de equivalência. Assim, o conjunto quociente $\frac{S^n}{\sim} = \{\{x, -x\} = [x]; x \in S^n\}$ é denominado **espaço projetivo**, cuja notação é $\mathbb{RP}^n$. Além disso, podemos atribuir ao espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ uma topologia quociente induzida por uma aplicação contínua, e com isso, obtemos um espaço topológico, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2.13. *O espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ munido pela topologia quociente induzida pela aplicação sobrejetiva $\pi\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ tal que $\pi(x) = \{x, -x\}$ é um espaço topológico.*

Note que o $\mathbb{RP}^n$ possui as propriedades de conexidade e compacidade, visto que é imagem por uma aplicação contínua da esfera S^n e esta é conexa e compacta.

Teorema 2.2.1 ((Kosniowski, 1980), Capítulo 5, Teorema 5.2)**.** *Seja $\pi\colon X \to Y$ uma aplicação sobrejetora e suponha que Y tenha a topologia quociente com respeito a π. Uma aplicação $\tilde{g}\colon Y \to Z$ de Y para o espaço topológico Z é contínua se, e somente se, $\tilde{g} \circ \pi$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{g}\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

O resultado acima é conhecido como propriedade universal das aplicações quocientes.

Exemplo 2.2.14. *O espaço projetivo $\mathbb{RP}^1$ é homeomorfo a S^1.*

De fato, considere a aplicação $f\colon S^1 \to S^1$, definida por $f(z) = z^2$.

i) A aplicação f é sobrejetora, pois dado $w = e^{i\theta} \in S^1$, tome $z = e^{i\frac{\theta}{2}}$ e teremos $f(z) = z^2 = w$.

ii) Temos $f(z) = f(z')$ se, e somente se, $z = z'$ ou $z = -z'$. Com efeito, se $z = e^{i\theta}$ e $z' = e^{i\alpha}$, teremos $z^2 = (z')^2$ se, e somente se, $2\theta = 2\alpha + 2\pi n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $\theta = \alpha + \pi n$. Logo $z = e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\pi n)} = e^{i\pi n}z'$, onde $e^{i\pi n} = 1$ ou -1.

Defina $\tilde{f}\colon \mathbb{RP}^1 \to S^1$*, como* $\tilde{f}([z]) = f(z)$*. A aplicação* $\tilde{f}$*, está bem definida e é injetora. Isto segue de ii), pois* $f(z) = f(z')$ *quando* $z' = z$ *ou* $z' = -z$*, em outra palavras,* $\tilde{f}([z]) = \tilde{f}([z'])$ *se, e somente se,* $[z] = [z']$*.*

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} ,$$

onde $q\colon S^1 \to \mathbb{RP}^1$ *é a projeção canônica* $q(z) = [z]$*. O diagrama é comutativo, isto é,* $\tilde{f} \circ q = f$*. Segue do Teorema (2.2.1) que* $\tilde{f}$ *é contínua, pois* f *é contínua.*

Como f *é sobrejetora, segue que* $\tilde{f}$ *é sobrejetora. Assim* $\tilde{f}$ *é uma bijeção contínua, onde* $\mathbb{RP}^1$ *é um espaço compacto e* S^1 *é um espaço Hausdorff, logo* $\tilde{f}$ *é um homeomorfismo.*

3 HOMOTOPIA.

A principal ideia do conceito de homotopia pode ser entendida como uma aplicação que descreve a ação de deformar um espaço topológico em um outro de maneira contínua, sendo que em cada instante de tempo entre essa transformação, teremos estágios parciais dessa deformação. Esse conceito é extremamente importante pois nos permitirá construir o Grupo Fundamental de uma espaço topológico no capítulo 4.
Afirmar que espaços topológicos são homotópicamente equivalentes é uma forma mais geral de classificar os espaços, ou seja, neste caso, espaços homeomorfos serão homotópicos mas, espaços não homeomorfos podem ser homotópicamente equivalentes.

3.1 Aplicações Homotópicas.

Sejam X,Y espaços topológicos e $f,g\colon X\to Y$ aplicações contínuas. Dizemos que a aplicação f é homotópica a g se existir uma aplicação contínua $H\colon X\times I\to Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x), \\ H(x,1) &= g(x), \end{aligned}$$

para todo $x\in X$. Denominamos a aplicação H por **homotopia** entre f e g cuja notação será $H\colon f\simeq g$ ou simplesmente $f\simeq g$.

Dar a homotopia H é o mesmo que a definir uma "família contínua a um parâmetro" de aplicações de X em Y, $(H_t)_{t\in I}$, onde $H_t(x) := H(x,t)$, para todo $(x,t)\in X\times I$. A "continuidade da família" significa, neste caso que, para cada t dado, $(x,t)\longmapsto H_t(x)$ é contínua.

Exemplo 3.1.1. *Duas aplicações contantes $f,g\colon X\to Y$ tal que $f(x)=p$ e $g(x)=q$ para todo $x\in X$ são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos.*

De fato, observe que se p e q pertencem a mesma componente conexa, tome o caminho $\alpha\colon I\to Y$ começando em p e terminando em q. Defina $H: X\times I\to Y$ tal que $H(x,t)=\alpha(t)$ para todo $(x,t)\in X\times I$. Logo, H é uma homotopia. Agora, suponhamos que H seja uma homotopia entre as aplicações f e g e fixe um ponto arbitrário $x_0\in X$. Considere $\alpha\colon I\to Y$ tal que $\alpha(t)=H(x_0,t)$. Assim, $\alpha(0)=H(x_0,0)=p=f(x_0)$ e $\alpha(1)=H(x_0,1)=q=g(x_0)$ é um caminho que liga o ponto p ao ponto q.

Exemplo 3.1.2. *Sejam Y um subconjunto de um espaço vetorial normado e $f,g\colon X \to Y$ aplicações contínuas no qual X é um espaço topológico qualquer. Suponha que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x),g(x)] = \{(1-t)(f(x))+t(g(x));\ t \in [0,1]\}$ está contido em Y. Então, as aplicações f e g são homotópicas.*
De fato, defina $H\colon X \times I \to Y$ tal que $H(x,t) = (1-t)(f(x))+t(g(x))$. Note que $(H_t)_{t\in I}$ é contínua (Exemplo 10), $H(x,0) = (1-0)(f(x))+0.(g(x)) = f(x)$ e $H(x,1) = (1-1)(f(x))+1(g(x)) = g(x)$. Logo f e g são aplicações homotópicas.
Esse tipo de homotopia é conhecido como homotopia linear. Fixar um ponto $x \in X$ e variar t no intervalo $[0,1]$ significa que o ponto $H(x,t)$ percorre o segmento de reta que liga o ponto $f(x)$ à $g(x)$ e a velocidade é constante.

Exemplo 3.1.3. *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária e X um espaço topológico. Dadas $f,g\colon X \to S^n$ aplicações contínuas. Se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$então f é homotópica a g.*
Observe que $(1-t)(f(x))+tg(x) \neq 0$, para todo $x \in X$ e $t \in I$, pois as aplicações não são antípodas, isto é, não existe $x \in X$ tal que $f(x) = -g(x)$. Assim, a aplicação $H\colon X \times I \to S^n$ com $H(x,t) = \frac{(1-t)(f(x))+t(g(x))}{|(1-t)(f(x))+t(g(x))|}$ define uma homotopia entre f e g. Para t variando no intervalo $[0,1]$ faz com que $H(x,t)$ defina o arco de círculo entre $f(x)$ e $g(x)$.

A partir das homotopias, conseguiremos separar todas as aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço Y em um conjunto de classes de equivalência de modo que aplicações homotópicas pertencerão a mesma classe.

Proposição 3.1.1. *Sejam X,Y espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \simeq g$ define uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y.*

Demonstração. **Reflexiva**. Dada qualquer aplicação contínua $f\colon X \to Y$ a aplicação $H\colon X \times I \to Y$ tal que $H(x,t) = f(x)$ define uma homotopia de f em f. Portanto $f \simeq f$.

Simétrica. Tome $H\colon X \times I \to Y$ a homotopia entre f e g e defina a aplicação $K\colon X \times I \to Y$ por $K(x,t) = H(x,1-t)$. Observe que $K(x,0) = H(x,1) = g(x)$ e $K(x,1) = H(x,0) = f(x)$. Portanto K define a homotopia entre as aplicações g e f.

Transitiva. Considere as homotopias $H\colon\ f \simeq g$ e $K\colon\ g \simeq h$. Defina $L\colon X \times I \to Y$ com

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), \text{ se } \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x,2t-1), \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A continuidade de L é justificada pelo Lema da Colagem 2.1.3 e, além disso, $L(x,0) = H(x,0) = f(x)$ e $L(x,1) = K(x,1) = h(x)$. Portanto, as aplicações f e h são homotópicas. Com isso mostramos que, de fato, a relação de homotopia $f \simeq g$ é uma relação de equivalência. ■

As classes de equivalências formadas pela relação de homotopia são chamadas de **classes de homotopia** de uma aplicação $f\colon X \to Y$, e é denotada por $[f]$. A próxima proposição irá nos mostrar que, assim como a continuidade de funções é preservada pela composição, a composição de aplicações homotópicas também será homotópica.

Proposição 3.1.2. *Sejam $f, f'\colon X \to Y$ e $g, g'\colon Y \to Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Demonstração. Considere $H\colon X \times I \to Y$ a homotopia entre f e g e $K\colon Y \times I \to Z$ a homotopia entre g e h. Defina a aplicação $L\colon X \times I \to Z$ tal que $L(x,t) = K(H(x,t),t)$. Assim, $L(x,0) = K(H(x,0),0) = K(f(x),0) = g(f(x)) = g \circ f$ e, $L(x,1) = K(H(x,1),1) = K(f'(x),1) = g'(f'(x)) = g' \circ f'$. Portanto, L é uma homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f'$. ■

Também podemos classificar espaços topológicos a partir das homotopias. Essa classificação é uma forma mais generalizada que, por exemplo, a classe dos homeomorfismos, visto que espaços não homeomorfos poderão pertencer a mesma classe. Neste sentido, espaços serão homotópicamente equivalentes se possuírem o mesmo tipo de homotopia.

Definição 3.1.1. *Dizemos que uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ é uma **equivalência homotópica** se existe uma aplicação contínua $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq Id_x$ e $f \circ g \simeq Id_y$. Neste caso, g é dito inverso homotópico de f e que os espaços X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia e denotamos $X \equiv Y$.*

Evidentemente, todo homeomorfismo f é uma equivalência homotópica, cujo o inverso homotópico será a aplicação inversa f^{-1}. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.4. *Seja $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$. Então $D^2 - \{(0,0)\}$ possui o mesmo tipo de homotopia que a esfera S^1 De fato, considere as aplicações $f\colon D^2 - (0,0) \to S^1$, dada por $f(x) = \frac{x}{||x||}$, e $i\colon S^1 \to D^2 - \{(0,0)\}$ a inclusão natural. Por um lado, $f \circ i(x) = x = Id_{S^1}(x)$, para todo $x \in S^1$. Por outro, a homotopia $H\colon D^2 - \{(0,0)\} \times I \to D^2 - \{(0,0)\}$, definida por $H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{||x||}$, mostra que $i \circ f \simeq Id_{D^2 - \{(0,0)\}}(x)$.*

Vale ressaltar que os espaços citados não são homeomorfos. Isto significa que a classificação de espaços a partir de equivalências homotópicas é mais geral quando comparada à classificação por homeomorfismos.

3.2 Espaços Contráteis

Definição 3.2.1. *Um espaço topológico X é dito contrátil é homotopicamente equivalente a um ponto.*

Proposição 3.2.1. *Um espaço topológico X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade* $d\colon X \to X$ *com* $Id(x) = x$ *é homotópica a uma aplicação contante.*

Demonstração. Considere $f\colon X \to \{p\}$ uma equivalência homotópica e $g\colon \{p\} \to X$ é a inversa homotópica de f então $g \circ f \simeq Id_x$. Observe que $X \to \{p\} \to X$ é constante. Reciprocamente, se a aplicação Id é homotópica a uma constante, então $Id \circ p = Id_x$ e $p \circ Id = Id_p$, portanto, uma equivalência homotópica. ■

Proposição 3.2.2. *Se X ou Y é contrátil, então toda aplicação contínua* $f\colon X \to Y$ *é homotópica a uma aplicação constante.*

Demonstração. Se X é contrátil e $H\colon X \times I \to X$ uma homotopia entre a identidade Id_X e uma aplicação constante, então para qualquer aplicação contínua $f\colon X \to Y$, a aplicação $f \circ H\colon X \times I \to Y$ será uma homotopia entre a aplicação f e uma constante. Agora, se Y for contrátil e $K\colon Y \times I \to Y$ for uma homotopia entre a identidade Id_Y e uma aplicação constante, então a aplicação $L\colon X \times I \to Y$ com $L(x,t) = K(f(x),t)$ é uma homotopia entre $f\colon X \to Y$ e uma aplicação constante. De fato, considerando $p\colon X \to Y$ com $p(x) = y_0$, temos $L(x,0) = K(f(x),0) = f(x)$ e $L(x,1) = K(f(x),1) = p(x) = y_0$. ■

Corolário 3.2.1. *Se X é contrátil e Y é conexo por caminhos então quaisquer duas aplicações contínuas* $f,g\colon X \to Y$ *são homotópicas. Se Y é contrátil, independentemente de X,* $f,g\colon X \to Y$ *sempre serão homotópicas.*

3.3 Homotopia de Pares e Homotopia Relativa.

Dizemos que (X,A) é um par de espaços topológicos quando X é um espaço topológico e A é um subespaço topológico de X. Se considerarmos os pares de espaços topológicos (X,A) e

(Y,B), uma aplicação contínua $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ é uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ de modo que $f(A) \subset B$.

Definição 3.3.1. *Dadas as aplicações contínuas $f,g\colon (X,A) \to (Y,B)$. Uma homotopia de pares entre f e g é uma aplicação contínua $H\colon (X \times I, A \times I) \to (Y,B)$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$ e $H_t(A) \subset B$ para todo $t \in I$.*

Observação: Quando o subespaço B for contrátil, a aplicação $H_t(A)$ é sempre constante.

Além disso, podemos definir homotopias em relação a um subespaço topológico.

Definição 3.3.2. *Dadas as aplicações contínuas $f,g\colon X \to Y$, dizemos que f é homotópica a g relativamente a um subespaço $A \subset X$ quando existe uma homotopia $H\colon f \simeq g$ tal que $H(x,t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.*

O conceito de homotopia de pares e homotopia relativa será usado posteriormente quando formos definir os elementos do grupo fundamental.

4 O GRUPO FUNDAMENTAL.

Um dos primeiros exemplos de invariantes topológicos estudados é o Grupo Fundamental, que associa cada espaço topológico conexo por caminhos a uma estrutura algébrica de grupo.

Construímos o grupo fundamental de um espaço topológico a partir do conjunto das classes de homotopia de caminhos fechados nesse espaço. Uma das demonstrações para o caso bidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam, que apresentaremos no Capítulo 5, será feita usando o Grupo Fundamental.

Neste capítulo apresentaremos o que é homotopia de caminhos fechados e algumas propriedades. Em seguida mostraremos que o conjunto das classes de homotopia desses caminhos munido da operação justaposição constitui de fato uma estrutura algébrica de grupo.

4.1 Homotopia de Caminhos.

A partir de agora iremos considerar um caso particular de homotopia, que são as homotopias de caminhos. Intuitivamente, dois caminhos são homotópicos se conseguimos deformar um no outro.

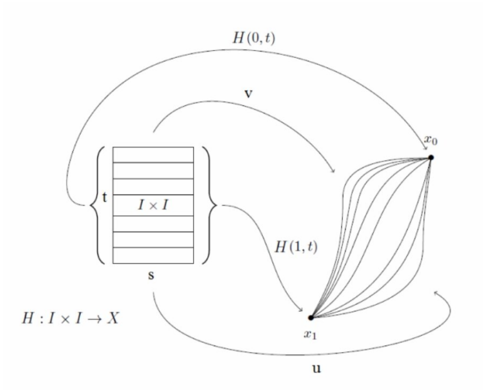
Definição 4.1.1. *Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos tais que $\alpha(1) = \beta(0)$ Uma homotopia entre os caminhos α, β é uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que*

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \alpha(s), \\ H(s,1) &= \beta(s), \\ H(0,t) &= \alpha(0) = \beta(0), \\ H(1,t) &= \alpha(1) = \beta(1), \end{aligned}$$

para quaisquer $s,t \in I$.

Podemos ainda, restringir esses caminhos aos caminhos fechados. Um caminho $\alpha : I \to X$ é dito **caminho fechado**, quando $\alpha(0) = \alpha(1) = x_1 \in X$, ou seja, o ponto inicial e final do caminho coincidem.

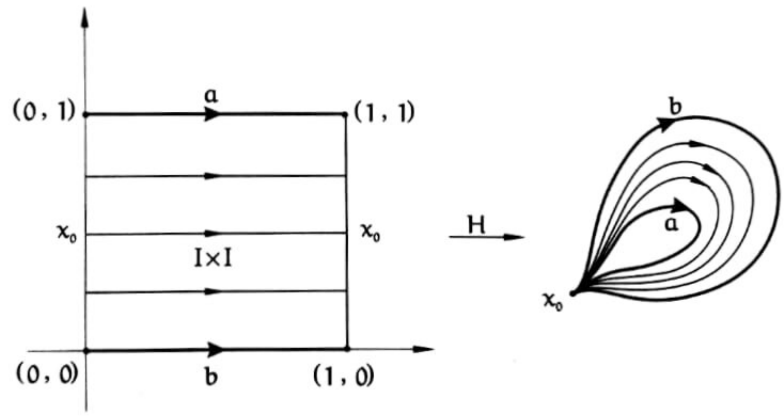
Figura 4.1 – Representação de uma homotopia de caminhos.



Definição 4.1.2. *Dizemos que caminhos fechados $\alpha, \beta : I \to X$ são homotópicos quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que*

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \alpha(s), \\ H(s,1) &= \beta(s), \\ H(0,t) &= H(1,t) = x_0, \text{ onde } x_0 = \alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) \in X. \end{aligned}$$

Figura 4.2 – Representação de uma homotopia de caminhos fechados.



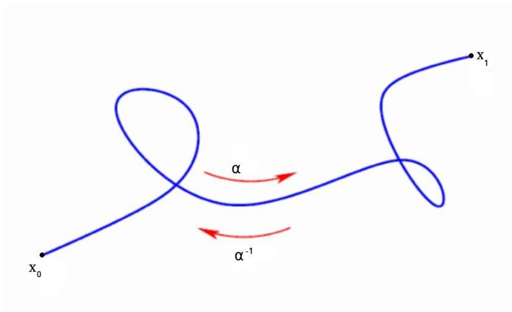
Note que, neste caso, a homotopia de caminhos fechados é uma homotopia relativo ao conjunto $\{0,1\} \subset I$, isto é, em cada estágio da homotopia os extremos dos caminhos permanecem fixados.

Como qualquer caminho é um caso específico de aplicação contínua, obviamente a relação de equivalência definida pelas homotopias se mantém, e neste caso, cada classe de homotopia de caminhos será denotado por $[\alpha]$ de forma que todos os caminhos que pertecem à classe $[\alpha]$ são homotópicos.

Duas classes de caminnhos que podemos ressaltar são os caminhos contantes e o caminho inverso. Basicamente, um caminho é constante quando sua imagem é apenas um ponto. Se α é um caminho que liga o ponto a ao b, então o caminho inverso de α ligara o ponto b ao a.

Definição 4.1.3. *Seja $\alpha : I \to X$ um caminho. Dizemos que $\alpha^{-1} : I \to X$ é o **caminho inverso** de α quando $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$ para todo $s \in I$. Agora, se $\alpha(s) = x_0 \in X$ para todo $s \in I$, então dizemos que α é um **caminho constante** em x_0.*

Figura 4.3 – Representação de um caminho inverso.



Iremos denotar a classe dos caminhos contantes e a classe dos caminhos inversos como $[e_x]$ e $[\alpha^{-1}]$ respectivamente.

Podemos construir uma operação entre um tipo específico de caminhos em X . Operar dois caminhos significa "juntá-los" de forma que possa gerar um terceiro. Esta operação será denominada operação produto ou justaposição.

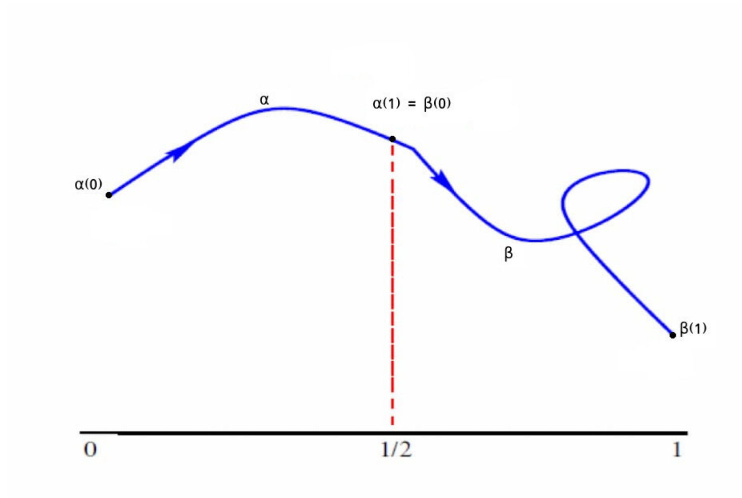
Definição 4.1.4. *Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos em um espaço topológico X de modo que o ponto final de α coincide com o ponto inicial de β. Definiremos a operação produto $\alpha * \beta$ como sendo a justaposição do caminho α com o caminho β. Assim, definimos $\alpha * \beta : I \to X$ tal que:*

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & se \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s-1), & se \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Podemos omitir o símbolo $*$ e denotar a justaposição do caminho α com o caminho β apenas por $\alpha\beta$. Vale ressaltar que dois caminhos só podem ser operados se o final de um coincidir com o início do outro.

As proposições 1, 2 e 3 mostradas a seguir são válidas para caminhos que coincidem no ponto final, ou seja, podem ser justapostos. A seguir, mostraremos algumas propriedades da operação justaposição.

Figura 4.4 – Representação de um caminho justaposto.



Proposição 4.1.1. *Sejam X um espaço topológico e $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \colon I \to X$ caminhos fechados em X. Se $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$, então $\alpha\beta \cong \alpha'\beta'$ e $\alpha^{-1} \cong (\alpha')^{-1}$.*

Demonstração. Considere $H, K \colon I \times I \to X$ as homotopias entre α e α' e β *e* β', respectivamente. Defina $L \colon I \times I \to X$ tal que $L(s,t) = \begin{cases} H(s,t) & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s-1,t) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$

Note que L está bem definida pois, $K(1,t) = K(0,t) = \alpha(1) = \beta(0)$ para todo $,t \in X$. Pelo Lema da Colagem 2.1.3, L é contínua, pois $L|([0, \frac{1}{2}] \times I)$ e $L|([\frac{1}{2}, 1] \times I)$ são aplicações contínuas. Portanto, mostramos que L define uma homotopia entre os caminhos $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. Como $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$, se construirmos a uma aplicação $G \colon I \times I \to X$ de modo que $G(s,t) = H(1-s,t)$ temos que G é uma homotopia entre os caminhos α^{-1} e $(\alpha')^{-1}$. ■

Proposição 4.1.2. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \colon I \to X$ caminhos tais que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0), e_x$ e e_y os caminhos constantes sobre x e y respectivamente. Temos então:*

a) $\alpha\alpha^{-1} \simeq e_x$ *e* $\alpha^{-1}\alpha \simeq e_y$.

b) $\alpha e_y \simeq \alpha \simeq e_x\alpha$.

c) $(\alpha\beta)\gamma \simeq \alpha(\beta\gamma)$

Demonstração. **a)**

Primeiro vamos mostrar que $\alpha\alpha^{-1} = e_x$. Para isso, defina a homotopia $H \colon I \times I \to X$ tal que:

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(2ts), & \text{s} \in [0,\frac{1}{2}]\\ \alpha(2t(1-s)), & \text{s} \in [\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Para $s=\frac{1}{2}$ temos $\alpha(2st)=\alpha(t)=\alpha(2t(1-s))$, logo H está bem definida e é contínua pelo Lema da Colagem 2.1.3. Além disso,

$H(s,0)=\alpha(0)=x=e_x(s)$

$H(s,1)=\begin{cases}\alpha(2s), & \text{s} \in [0,\frac{1}{2}],\\ \alpha(2(1-s))=\alpha^{-1}(2s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{2},1]\end{cases}$

$H(0,t)=H(1,t)=\alpha(0)=x$

Então $H(s,1)=\alpha\alpha^{-1}(s)$, para todo $s\in I$. Portanto, $e_x\simeq\alpha\alpha^{-1}$.

Agora considere a aplicação $H\colon I\times I\to X$ definida por:

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha^{-1}(2ts), & \text{s} \in [0,\frac{1}{2}]\\ \alpha^{-1}(2t(1-s)), & \text{s} \in [\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Para $s=\frac{1}{2}$ temos $\alpha^{-1}(2st)=\alpha^{-1}(t)=\alpha^{-1}(2t(1-s))$, logo H está bem definida e é contínua pelo Lema da Colagem. Além disso,

$H(s,0)=\alpha^{-1}(0)=y=e_y(s)$

$H(s,1)=\begin{cases}\alpha^{-1}(2s), & \text{s} \in [0,\frac{1}{2}],\\ \alpha^{-1}(2(1-s))=\alpha^{-1}(2s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{2},1]\end{cases}.$

Então $H(s,1)=(\alpha^{-1}\alpha)(s)$, para todo $s\in I$. Portanto, $e_y\simeq\alpha^{-1}\alpha$.

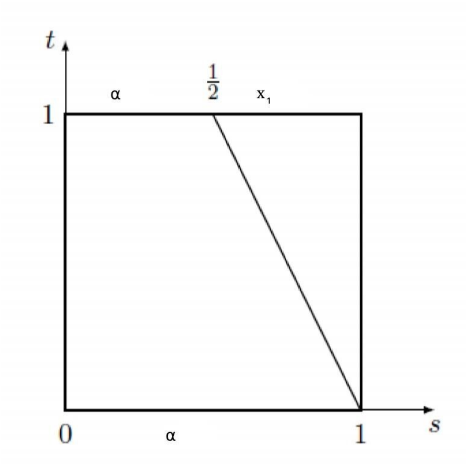
b)Vamos mostrar que $\alpha\simeq\alpha e_x$.

Considere $H\colon I\times I\to X$ definida por:

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(\frac{2s}{2-t}), & \text{s} \in [0,\frac{2-t}{2}]\\ x, & \text{s} \in [\frac{2-t}{2},1].\end{cases}$$

Note que, para $s=\frac{2-t}{2}$ temos $\alpha(\frac{2s}{2-t})=\alpha(1)=y$. Então, H está bem definida. E, pelo Lema da Colagem, H é contínua. Além disso,

Figura 4.5 – Representação da homotopia $H\colon\ \alpha \simeq \alpha e_x$.



$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{s} \in [0,1], \\ x, & \text{s} = 1, \end{cases} = \alpha(s), \text{ para todo } s \in I.$$

$$H(s,1) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{s} \in [0,1], \\ x_1, & \text{s} = 1, \end{cases}$$

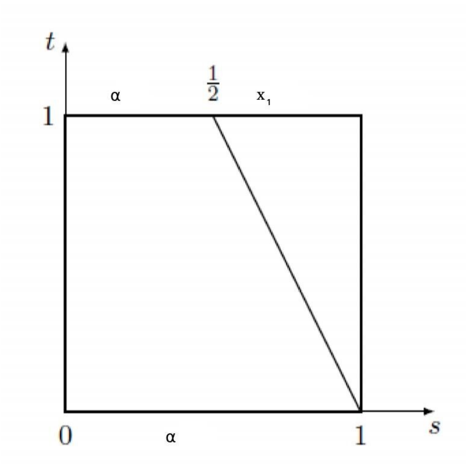
$$= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{s} \in [0,\frac{1}{2}], \\ e_x(2s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

Então $H(s,1) = \alpha e_x(s)$, para todo $s \in I$.

Portanto, $\alpha \simeq \alpha e_x$ ou seja, e_x é o elemento neutro à direita da operação justaposição.

De modo análogo, mostraremos que $\alpha \simeq e_y * \alpha$.

Figura 4.6 – Representação da homotopia $H\colon\ \alpha \simeq e_y\alpha$.



Considere a aplicação $H\colon I\times I\to X$ definida por:

$$H(s,t)=\begin{cases} y_0, & \text{s}\in[0,\frac{t}{2}],\\ \alpha(\frac{t-2s}{t-2}), & \text{s}\in[\frac{t}{2},1]\end{cases}$$

Para $s=\frac{t}{2}$, temos $y_1=\alpha(0)=\alpha\frac{t-2s}{t-2}$. Portanto H está bem definida e é contínua também pelo lema da colagem. Além disso,

$$H(s,0)=\begin{cases} y_1, & \text{s}=0,\\ \alpha(s) & \text{s}\in[0,1],\end{cases} \qquad =\alpha(s),\ \text{para todo } s\in I.$$

$$H(s,1)=\begin{cases} y_0, & \text{s}\in[0,\frac{1}{2}],\\ \alpha(2s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

$$=\begin{cases} e_{y_0}(2s), & \text{s}\in[0,\frac{1}{2}],\\ \alpha(2s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{2},1].\end{cases} \qquad \text{Então } H(s,0)=(e_{x_1}*\alpha)(s).$$

Logo $H(0,t)=y_0$ e $H(1,t)=\alpha(1)$. Portanto, $\alpha\simeq e_{y_0}\alpha$, ou seja, e_{y_0} é neutro à esquerda.

c) Inicialmente descreveremos o caminho $(\alpha(\beta\gamma))\colon I\to X$ como:

$$(\alpha(\beta\gamma))(s)=\begin{cases} \alpha(2s), & \text{s}\in[0,\frac{1}{2}]\\ (\beta\gamma)(2s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \alpha(2s), & \text{s}\in[0,\frac{1}{2}]\\ \beta(4s-2), & \text{s}\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\\ \gamma(4s-3), & \text{s}\in[\frac{3}{4},1].\end{cases}$$

E de modo análogo descreveremos $((\alpha\beta)\gamma)\colon I\to X$ como:

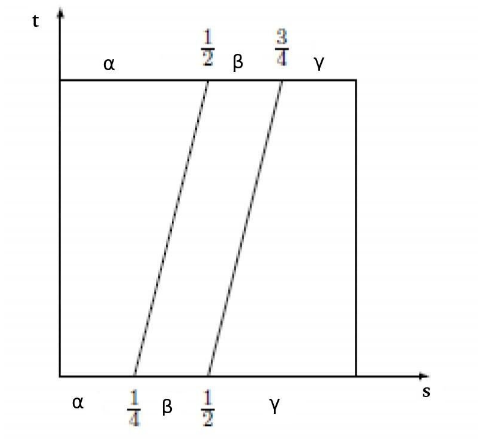
$$((\alpha\beta)\gamma)(s)=\begin{cases} \alpha\beta(2s), & \text{s}\in[0,\frac{1}{2}]\\ \gamma(2s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \alpha(4s), & \text{s}\in[0,\frac{1}{4}]\\ \beta(4s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\\ \gamma(2s-1), & \text{s}\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Assim, iremos determinar $H\colon I \times I \to X$ como a homotopia $H\colon ((\alpha\beta)\gamma) \simeq (\alpha(\beta\gamma))$ da seguinte forma:

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4s}{t+1}), & \text{s} \in [0, \frac{t+1}{4}], \\ \beta(4s-1-t), & \text{s} \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}], \\ \gamma(\frac{t-4s+2}{t-2}), & \text{s} \in [\frac{t+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Figura 4.7 – Representação da associação de caminhos homotópicos.



Observe que, para $s = \frac{t+1}{4}$ temos, $\alpha(\frac{4s}{t+1}) = \alpha(1) = x_1 = \beta(0) = \beta(4s-1-t)$.
E para $s = \frac{t+2}{4}$ temos, $\beta(4s-1-t) = \beta(1) = x_2 = \gamma(0)$.

Portanto, a aplicação H está bem definida e, pelo lema da cologem, é contínua. Ainda,

$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(4s), & \text{s} \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{1}, 1], \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\alpha\beta)(2s), & \text{s} \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s-1), & \text{s} \in [\frac{1}{1}, 1], \end{cases} \qquad = ((\alpha\beta)\gamma)(s), \text{ para todo } s \in I.$$

E também,

$$H(s,1) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{s} \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(4s-2), & \text{s} \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(4s-3), & \text{s} \in [\frac{3}{3}, 1], \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (\beta\gamma)(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\alpha(\beta\gamma)), \text{ para todo } s \in I$$

Além disso, $H(0,t) = \alpha(0)$ e $H(1,t) = \gamma(1)$.

Portanto, H define uma homotopia entre os caminhos $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$. ■

4.2 Grupo Fundamental

Nesta seção iremos definir o conceito de Grupo Fundamental de um espaço topológico. A Proposição 4.1.2 da seção anterior permite concluir que o conjunto das classes de homotopia dos caminhos (com extremos fixos) constitui o que chamamos de Grupóide Fundamental de X, isto é, nos permite definir uma operação bem definida, a de justaposição de caminhos, no conjunto das classes de homotopia.

A partir de agora, iremos considerar o par (X, x_0) no qual X é o espaço topológico e x_0 um ponto fixo de X que será chamado de ponto básico. Os caminhos fechados de (X, x_0) serão os caminhos fechados com ponto base em x_0 e neste caso, as homotopias serão relativas a $\{0,1\} \subset I$, isto é, em cada estágio da homotopia teremos caminhos fechados com extremos (ponto inicial e final) fixo em x_0. Com isso, no conjunto das classes de homotopia dos caminhos fechados em (X, x_0) definiremos uma estrutura algébrica de grupo.

De fato, dados $[\alpha], [\beta]$ classes de homotopia de caminhos fechado em (X, x_0), definimos a operação justaposição(multiplicação) de classes como:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta].$$

Note que $\alpha * \beta$ é ainda um caminho fechado em X com ponto base x_0. Segue da Proposição 4.1.1 que a operação está bem definida, isto é, não depende dos representantes das classes. Pela Proposição 4.1.2, vemos que esta operação verifica todos os axiomas para uma estrutura de grupo. Com efeito, o item a) da Proposição 4.1.2, mostra que a classe $[\alpha^{-1}]$ é o elemento inverso da classe $[\alpha]$. O item b) da Proposição 4.1.2, mostra que a classe $[e_{x_0}]$ será o elemento neutro da operação. Por fim, o item c) da Proposição 4.1.2, mostra que a operação justaposição de classes é associativa.

Definição 4.2.1. *Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto fixo em X. O conjunto das classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 munido da operação justaposição* *define uma estrutura algébrica de grupo. Esse grupo é nomeado como* ***grupo fundamental*** *de* X *cuja notação é* $\Pi_1(X,x_0)$ *no qual* x_0 *é dito o ponto básico de* X.

Veremos adiante que calcular o grupo fundamental dos espaços topológicos é mais uma forma de classificá-los pois, se dois espaços não são homeomorfos então seus respectivos grupos fundamentais não serão isomorfos.

O teorema a seguir, especificamente o corolário, nos dará um informação extramente importante: independente do ponto básico escolhido para construir as classes de caminhos fechados, sempre teremos a unicidade do grupo fundamental do espaço **a menos de isomorfismo.**

Teorema 4.2.1. *Se* x_0 *e* x_1 *pertencem a mesma componente conexa por caminhos de um espaço* X *então* $\Pi_1(X,x_1)$ *e* $\Pi_1(X,x_1)$ *são isomorfos. Mais precisamente, cada classe* $[\gamma]$ *de homotopia de caminho que ligam* x_0 *a* x_1 *induz um isomorfismo* $\overline{\gamma}\colon \Pi_1(X,x_1) \to \Pi_1(X,x_0)$ *dado por* $\gamma(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

Demonstração. Seja $[\gamma]$ uma classe de homotopia de caminhos que ligam o ponto x_0 a x_1. Se $[\alpha] \in \Pi_1(X,x_1)$ então $[\gamma][\alpha][\gamma]^{-1} \in \Pi_1(X,x_0)$. Considere a aplicação $\overline{\gamma}\colon \Pi_1(X,x_1) \to \Pi_1(X,x_0)$ definida por $\overline{\gamma}([\alpha]) = [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}$. Note que $[\gamma][(\alpha\beta)][\gamma]^{-1} = ([\gamma\alpha\gamma^{-1}])([\gamma\beta\gamma^{-1}])$. Portanto, $\overline{\gamma}$ é um homomorfismo. Tome $\overline{\gamma}(\alpha) = \overline{\gamma}(\beta)$. Então $[\gamma\alpha\gamma^{-1}] = [\gamma\beta\gamma^{-1}] \Rightarrow [\gamma^{-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}\gamma\beta\gamma^{-1}] \Rightarrow [\alpha\gamma^{-1}] = [\beta\gamma^{-1}] \Rightarrow [\alpha\gamma^{-1}\gamma\beta\gamma^{-1}\gamma] \Rightarrow [\alpha] = [\beta]$, ou seja, o homomorfismo é injetivo. Agora tome $[\alpha] \in \Pi_1(X,x_1)$, no contradomínio da aplicação $\bar{\gamma}$. Considere $[\gamma\alpha\gamma^{-1}]$. Note que $[\gamma\alpha\gamma^{-1}] = \overline{\gamma}(\alpha) \in \Pi_1(X,x_1)$. Portanto, $\overline{\gamma}$ é sobrejetora e consequentemente um isomorfismo. ■

Corolário 4.2.1. *Se* X *é um espaço topológico conexo por caminhos então , para quaisquer pontos básicos* $x_0, x_1 \in X$*, seus respectivos grupos fundamentais são isomorfos.*

4.3 Homomorfismo Induzido.

A partir de uma aplicação contínua $p\colon X \to Y$ entre dois espaços topológicos conexos por caminhos, podemos induzir um homomorfismo entre os grupos fundamentais de X e Y,

$$p_*\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0) \text{ com } p_*(y_0) = x_0$$

que é definido por $p_*([\alpha]) = [p \circ \alpha]$. Note que se $\alpha, \alpha' \in [\alpha]$ então $f \circ \alpha \cong f \circ \alpha'$, ou seja, a aplicação esta bem definida. Além disso, $p_*([\alpha\beta]) = [p \circ (\alpha\beta)] = [p \circ \alpha][p \circ \beta]$. Portanto, a aplicação p_* é um homomorfismo.

Se $Id\colon X \to X$ é a aplicação identidade, chamamos $Id_*\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(X,x_0)$ de homomorfismo identidade.

Além disso, dadas as aplicações contínuas $p\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ temos os homomorfismos induzidos $f_*\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0)$ e $g_*\colon \Pi_1(Y,y_0)\Pi_1(Z,z_0)$ conseguimos induzir o homomorfismo da composição $g \circ f$ sendo $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0)$.

Teorema 4.3.1. *((LIMA,2012), Capítulo 2, Corolário 3) Sejam $f,g\colon X \to Y$ aplicações contínuas homotópicas. Então os homomorfismos $f_*\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0)$ e $g_*\colon \Pi_1(X,x_1) \to \Pi_1(Y,y_1)$ com $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$ são relacionados por $f_* = \overline{\gamma} \circ g$ no qual $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo $\overline{\gamma}\colon \Pi_1(X,x_1) \to \Pi_1(X,x_0)$ definido por $\overline{\gamma} = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.*

Corolário 4.3.1. *Se dois espaços topológicos X,Y são conexos por caminhos e têm o mesmo tipo de homotopia então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

Demonstração. Considere as aplicações contínuas $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tais que $g \circ f \simeq Id_X$ e $f \circ g \simeq Id_Y$. Considere x_0 um ponto básico em $X, f(x_0) = y_0, x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Sejam $f_*^\circ\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0)$, $f_*^1\colon \Pi_1(X,x_1) \to \Pi_1(Y,y_1)$ e $g_*\colon \Pi_1(Y,y_0) \to \Pi_1(X,x_1)$ homomorfismos induzidos por f e g, respectivamente. Assim, pelo teorema anterior, podemos concluir que $g_* \circ f_*^\circ = \overline{\gamma}\colon \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(X,x_1)$ no qual $\overline{\gamma}$ é o isomorfismo a partir da classe de homotopia $[\gamma]$ de um caminho fechado em X que liga x_1 a x_0. De modo análogo, a partir da homotopia $f \circ g \simeq Id_y$ temos que a aplicação $\overline{\delta}\colon \Pi_1(Y,y_0) \to \Pi_1(X,x_0)$ é um isomorfismo de conjugação pela classe de homotopia $[\delta]$ de um caminho em Y que liga y_1 a y_0. A partir das relações anteriores podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*^\circ"] \arrow[d, "\overline{\gamma}"'] & \Pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\overline{\delta}"] \arrow[dl, "g_*"] \\
\Pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*^1"'] & \Pi_1(Y,y_1)
\end{tikzcd}$$

De $g_* \circ f_*^\circ = \overline{\gamma}$ podemos concluir que g_* é sobrejetivo. E mais, a partir e $f_*^1 \circ g_* = \overline{\delta}$ concluímos que g_* é injetivo. Logo, g_* é um isomorfismo e portanto f_*° e f_*^1 também são isomorfismo. Em particular, $\Pi_1(X,x_0) \approx \Pi_1(Y,y_0)$. ■

Com isso, ganhamos uma maneira particularmente interessante de saber se dois espaços (conexos por caminhos) são homeomorfos ou não: basta encontrar o grupo fundamental de cada um. Se eles não forem isomorfos, então garantimos que os espaços não são homeomorfos.

Corolário 4.3.2. *Seja X um espaço topológico contrátil. O grupo fundamental de X possui um único elemento.*

Demonstração. Como X é contrátil, existe $x_0 \in X$ e uma homotopia $H\colon X \times I \to X$, tal que $H(x,0) = x, H(x,1) = x_0$, para todo $x \in X$ e $H(x_0,s) = x_0$, para todo $s \in I$. Primeiro mostraremos que X é conexo por caminhos e depois que $\Pi_1(X, e_{x_0})$ é grupo trivial.
Sejam $y_1, y_2 \in X$ e $\alpha(t) = H(y_1,t)$ e um caminho que liga y_1 a x_0 e $\beta\colon I \to X$ tal que $\beta(t) = H(y_2,t)$ um caminho que liga y_2 a x_0. Logo, $\alpha * \beta^{-1}$ um caminho que liga y_1 a y_2, ou seja, X é conexo por caminhos. Agora, seja $[\alpha] \in \Pi_1(X,x_0)$, e considere as seguinte composição das aplicações $K\colon I \times I \to X \times I \to X$ com $(t,s) = H(\alpha(t),s)$. Observe que $K(t,0) = H(\alpha(t),0) = \alpha(t), K(t,1) = H(\alpha(t),1) = x_0$ e $K(0,s) = K(1,s) = x_0$ para todo $s \in I$. Como a composição de aplicações contínuas ainda é contínua, temos que a aplicação K define uma homotopia. Logo, todo caminho fechado de X com ponto básico em x_0 é homotópico ao caminho constante em x_0. Assim, $[\alpha] = [e_{x_0}]$ e portanto, $\Pi_1(X,x_0)$ é isomorfo ao $\Pi_1(X, e_{x_0})$. ■

Podemos mostrar também que o grupo fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y.

Teorema 4.3.2. *Sejam $p\colon X \times Y \to X$ e $q\colon X \times Y \to Y$ as projeções naturais de X e Y. Então a aplicação $\Phi\colon \Pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \to \Pi_1(X,x_0) \times \Pi_1(Y,y_0)$, dado por $\Phi(\alpha) = (p_*(\alpha), q_*(\alpha))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Um caminho fechado $\omega\colon I \to X \times Y$, com base no ponto (x_0,y_0), é tal que $\omega(s) = (u(s),v(s))$, onde $u = p \circ \omega$ é um caminho fechado em X com base em x_0 e $v = q \circ \omega$ é um caminho fechado com base em $y_0 \in Y$. Dado, também $\omega'\colon I \to X \times Y$ tal que $\omega'(s) = (u'(s),v'(s))$. Então $\omega \simeq \omega'$ se, e somente se, $u \simeq u'$ e $v \simeq v'$. De fato, basta considerar uma homotopia de caminhos H entre w e w' da forma $H(s,t) = (F(s,t),G(s,t))$, onde F e G são as homotopias de caminhos entre u e u' , v e v', respectivamente. Vamos mostrar que Φ é um isomorfismo.
Defina $\Psi\colon \Pi_1(X,x_0) \times \Pi_1(Y,y_0) \to \Pi_1(X \times Y,(x_0,y_0))$ tal que $\Psi([\alpha],[\beta]) = [(\alpha,\beta)]$. A aplicação está bem definida pela discussão do parágrafo acima. Seja $[\omega] \in \Pi_1(X \times Y,(x_0,y_0))$. Então

$[\omega] = [(p \circ \omega),(q \circ \omega)]$. Temos $\Psi \circ \Phi([\omega]) = \Psi([p_*([\omega])],[q_*([\omega])]) = \Psi([p \circ \omega],[q_\circ \omega]) = [(p \circ \omega),(q \circ \omega)] = [\omega]$, isto é, $\Psi \circ \Phi = Id_{\Pi(X \times Y,(x_0,y_0))}$.
Analogamente, mostra-se que $\Phi \circ \Psi = Id_{\Pi(X,x_0) \times \Pi(Y,y_0)}$.
Daí, resulta a proposição. ■

4.4 Espaços Simplesmente Conexos.

Dizemos que um espaço topológico X é **simplesmente conexo** quando X, além de ser conexo por caminhos, seu grupo fundamental possui apenas o elemento neutro, ou seja, $\Pi_1(x,x_0) = \{0\}$, onde $\{0\}$ representa a classe $[e_{x_0}]$. Isto significa que qualquer caminho fechado $\alpha \colon I \to X$ com base em x_0 é homotópico ao caminho e_{x_0}.

Exemplo 4.4.1. ***a)*** *Todo espaço contrátil é simplesmente conexo, em particular, o $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.*

b) *Toda bola aberta $B(a;r) \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexa.*

Agora, queremos mostrar que a esfera n-dimensional, para $n > 1$ é simplesmente conexa. Para isso, usaremos os seguintes resultados.

Lema 4.4.1. *Seja $\alpha \colon I \to X$ um caminho tal que $\alpha(I) \neq S^n$. Então $\alpha \simeq e_{x_0}$, se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, e $\alpha \simeq c$, onde c é um caminho $c \colon I \to S^n$ injetivo, se $\alpha(0) \neq \alpha(1)$.*

Demonstração. Como $\alpha(I) \neq S^n$, existe $p \in S^n - \alpha(I)$. Seja $\Phi \colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica (Exemplo2.1.10). Como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, temos $\Phi \circ \alpha \colon I \to \mathbb{R}^n$ é homotópico (com extremos fixos) a uma constante ou a um segmento de reta (parametrizado injetivamente), conforme seja fechado ou não. O mesmo ocorre com $\alpha = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ \alpha)$. ■

Lema 4.4.2. *((LIMA, 2012), Capítulo 2, Lema 3): Todo caminho $\alpha \colon I \to S^n$ com extremos fixos, é homotópico a um caminho $b \colon I \to S^n$ tal que $b(I) \neq S^n$.*

Proposição 4.4.1. *Se $n > 1$ então a esfera S^n é simplesmente conexa.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4.2, temos que todo caminho fechado em S^n é homotópico a um caminho fechado, cuja imagem não é toda S^n. Este último caminho, pelo Lema 4.4.1, é homotópico a uma constante. Logo, S^n é simplesmente conexa. ■

5 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO E APLICAÇÕES.

O objetivo desse capítulo é estudar ferramentas para calcular o grupo fundamental da esfera unidimensional. A principal ideia para obter tal resultado será olhar para as homotopias em S^1 como homotopias em $\mathbb{R}$ e, a partir disso, obter algumas relações e resultados. Essa técnica pode ser aplicada para outros espaços topológicos, ou seja, estudar as homotopias de X em um outro espaço que satisfaz algumas propriedades. Esses espaços são conhecidos como espaços de recobrimento. Estudar grupo fundamental junto de a espaços de recobrimento nos permitirá descobrir resultados algébricos relacionado a problemas topológicos com aplicações contínuas.

Iniciaremos o capítulo caracterizando espaços de recobrimentos e levantamento de homotopias. Em seguida apresentaremos alguns resultados envolvendo levantamento de homotopias e calcularemos o grupo fundamental da S^1. Finalmente, apresentaremos alguns resultados algébricos envolvendo espaços de recobrimento e calcularemos o grupo fundamental do $\mathbb{RP}^n$. Esses resultados serão importantes para o estudo do Teorema de Borsuk-Ulam, que será apresentado no capítulo seguinte.

5.1 Espaços de Recobrimento.

O conceito de homeomorfismo local é importante para caracterizarmos os espaços de recobrimento. Um homeomorfismo local é uma aplicação contínua, tal que, para cada ponto em X existe uma vizinhança[1] desse ponto de modo que a restrição da aplicação à essa vizinha é um homeomorfismo.

Definição 5.1.1. *Sejam (X,τ) e (Y,τ') espaços topológicos e $f\colon (X,\tau)\to(Y,\tau')$ uma aplicação contínua. Dizemos que a aplicação f é um* ***homeomorfismo local*** *se:*
para cada $x\in X$, existe um aberto $\mathscr{U}\subset X$ com $x\in\mathscr{U}$ que satisfaz:
$(i) f(\mathscr{U})$ é aberto.
$(ii) f|\mathscr{U} : \mathscr{U}\to f(\mathscr{U})$ é um homeomorfismo.

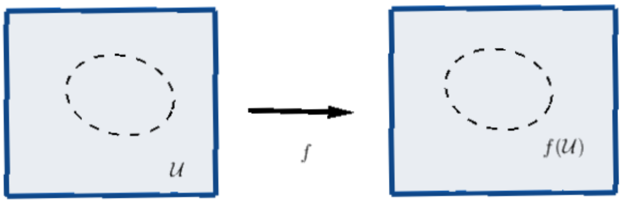
Exemplo 5.1.1. *Todo homeomorfismo global é um homeomorfismo local.*

Iremos mostrar que todo homeomorfismo local é uma aplicação aberta, isto é, uma aplicação cuja imagem de um aberto é aberta[2].

[1] Seja X um espaço topológico e $x\in X$. Dizemos que $V\subset X$ é uma vizinhança do ponto x se, V é aberto e $x\in V$.

[2] Dizemos que uma aplicação $f\colon X\to Y$ é aberta se,
dado uma aberto $A\subset X$ implica que $f(A)=B\subset Y$ também é aberto.

Figura 5.1 – Representação de um homeomorfismo local.



Proposição 5.1.1. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f\colon \to Y$ um homeomorfismo local, então f é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um aberto. Tome $y \in f(A)$. Então, existe um $a \in A$ tal que $y = f(a)$. Como f é homeomorfismo local, existe $\mathscr{U} \subset X$ aberto tal que $a \in \mathscr{U}$ e $f|\mathscr{U} : \mathscr{U} \to f(\mathscr{U})$ é homeomorfismo. Assim, como a imagem de conjunto aberto por um homeomorfismo é aberto, segue que $f(\mathscr{U}) \subset Y$ é aberto. Temos $y \in f(\mathscr{U}) \subset f(A)$ com $f(\mathscr{U})$ aberto. Portanto, como y foi escolhido arbitrariamente, segue $f(A)$ é aberto. ■

Exemplo 5.1.2. *A aplicação $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{ix} = (\cos x, \sin x)$ é uma aplicação aberta. Isto será uma consequência do Exemplo 5.*

Definição 5.1.2. *Sejam X, $\tilde{X}$ espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação $p\colon \tilde{X} \to X$ é uma **aplicação de recobrimento**, ou um* **recobrimento**, *se: para cada ponto $x \in X$ existe um aberto $V \ni x$ de forma que a imagem inversa de V é uma união de abertos de $\tilde{X}$, disjuntos dois a dois e, cada qual se aplica por p homeomorficamente em V, ou seja, $p^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j = \varnothing$ com $i, j \in \alpha$ e $p|\mathscr{U} : \mathscr{U} \to V$ é homeomorfismo.*

Observação: *O espaço $\tilde{X}$ é denominado espaço de recobrimento, X é o espaço base, V uma vizinhança distinguida uniformemente revestida por p de X, $\mathscr{U}$ uma folha sobre V e $p^{-1}(x)$ como a fibra de x. Nesta seção, dizer que a tripla (E, p, B) é um recobrimento significa dizer que E é o espaço de recobrimento, p a aplicação de recobrimento e B o espaço base.*

Exemplo 5.1.3. *Todo homeomorfismo $p\colon E \to B$ é um recobrimento.*

Imediato, dado $b \in B$, basta tomar $\mathscr{U} = B$. Segue então que $p^{-1}(B) = E$.

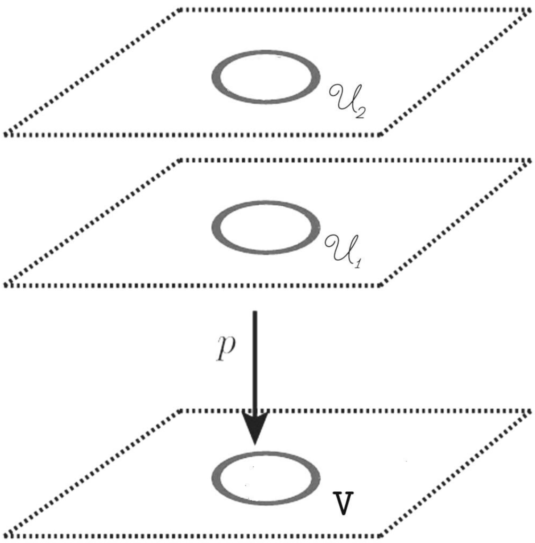
A próxima proposição mostrará algumas propriedades dos espaços de recobrimento.

Proposição 5.1.2. *Seja $p\colon E \to B$ uma aplicação de recobrimento. Então:*

1 *p é homeomorfismo local.*

2 *p é contínua, aberta e sobrejetiva e B tem a topologia quociente co-induzida por p.*

Figura 5.2 – Representação de um espaço de recobrimento.



3 *Se B é conexo, então todas as fibras $p^{-1}(b)$ possuem a mesma cardinalidade. A esta, denominamos como o número de folhas do recobrimento.*

Demonstração.

1 Dado $y \in E$, seja $b = p(y) \in B$. Existe um aberto $\mathscr{U} \subset B$ com $b \in \mathscr{U}$ e $p^{-1}(\mathscr{U}) = \bigcup_{\lambda \in J} V_\lambda$, isto é, $\mathscr{U}$ é uma vizinhança uniformemente revestida de p. Logo, como $y \in p^{-1}(\mathscr{U})$, existe um aberto V_{λ_0} para algum $\lambda_0 \in J$, no qual $y \in V_{\lambda_0}$ e $p|V_{\lambda_0} \colon V_{\lambda_0} \to \mathscr{U}$ é homeomorfismo. Portanto p é homeomorfismo local.

2 A aplicação p é contínua e sobrejetora por definição. Como p é homeomorfismo local, consequentemente é uma aplicação aberta (5.1.2). Então, $\mathscr{U}$ é um aberto de B se, e somente se, $p^{-1}(\mathscr{U})$ é um aberto de E, isto é, B tem a topologia co-induzida por p.

3 Considere $A_\lambda = \{b \in B; \#(p^{-1}(b)) = \lambda\}$ no qual $\#(p^{-1}(b))$ é a cardinalidade do conjunto imagem inversa de b. Vamos mostrar que A_λ é aberto em B.
Tome $b \in A_\lambda$, logo $\#p^{-1}(b) = \lambda$. Note que, se $\mathscr{U}$ é uma vizinhança distinguida uniformemente revestida por p de b, então $p^{-1}(\mathscr{U}) = \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha$, onde $\#L = \#p^{-1}(b)$. De fato, cada folha V_α deverá possuir um elemento de $p^{-1}(b)$, pois $p^{-1}(b) \subset p^{-1}(\mathscr{U})$ e $p|V_\alpha \colon V_\alpha \to \mathscr{U}$ é homeomomorfismo. Segue também que para cada $b' \in \mathscr{U}$ teremos $p^{-1}(b') = \lambda$. Logo, $\mathscr{U} \subset A_\lambda$. Portanto A_λ é aberto.
Assim, determinamos uma decomposição de B em abertos disjuntos A_λ, ou seja, $B =$

$\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$.

Agora, para cada λ_0 fixo, considere $B - A_{\lambda_0} = \bigcup_{\lambda \in J - \{0\}} A_\lambda$ com A_λ aberto em B. Logo $B - A_{\lambda_0}$ é aberto em B e portanto A_{λ_0} é fechado em B. Assim, como B é conexo, segue que $A_{\lambda_0} = B$ e portanto, as fibras de cada ponto $b \in B$ possuem a mesma cardinalidade.

■

Exemplo 5.1.4. *(Recobrimento de duas folhas do Espaço Projetivo.) A aplicação $p\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ definida por $p(x) = [x] = \{x, -x\}$ é um recobrimento. De fato,*

Primeiro iremos mostrar que, dado um conjunto aberto V em S^n, o conjunto $-V$ dos pontos antípodas de V é também conjunto aberto em S^n. Para isto, considere a aplicação $A\colon S^n \to S^n$ tal que $A(x) = -x$ para todo $x \in S^n$. Note que A é um homeomorfismo, logo uma aplicação aberta. Assim, $A(V) = -V$ é um conjunto aberto.

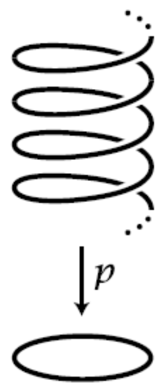
Agora, observe que $p^{-1}(p(V)) = V \cup -V$. Se $x \in p^{-1}(p(V))$ então $p(x) = [x] = \{x, -x\} \in p(V)$. Logo, existe $y \in V$ tal que $p(x) = p(y)$, ou seja, $[x] = [y]$. Então $x = y$ ou $x = -y$. Logo, $x \in V \cup -V$ e, assim, $p^{-1}(p(V)) \subset V \cup -V$. Por outro lado, tome $x \in V \cup -V$. Então $x \in V$ ou $x \in -V$. Assim, $(V \cup -V) \subset p^{-1}(p(V))$. Portanto, $p^{-1}(p(V)) = V \cup -V$
Observe que $p^{-1}(p(V))$ é aberto em S^n pois V e $-V$ são abertos e a união de abertos ainda é um conjunto aberto.

Para verificarmos que a aplicação p é uma aplicação de recobrimento, basta determinarmos uma vizinhança distinguida para cada ponto de $\mathbb{RP}^n$.
Seja $[x] \in \mathbb{RP}^n$ e considere $V \subset S^n$ um aberto que contém x e não contém nenhum par de antípodas. Neste caso, $p^{-1}(V) = V \cup -V$ é união de aberto disjuntos. Note que $p|V : V \to p(V)$ e $p|-V : -V \to p(V)$ são bijeções contínuas e abertas, logo, homeomorfismos.

Esta aplicação p é um recobrimento de duas folhas.

Exemplo 5.1.5. *(Recobrimento da S^1 pela reta.) A aplicação $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ com $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ é uma aplicação de recobrimento. Vamos mostrar que p é sobrejetiva.*
Fixe um ponto $z \in S^1$. Note que existe $0 \leq \theta_z \leq 1$ tal que $p(\theta_z) = e^{2\pi i\theta_z}$. Considere o aberto $V_n = \left(\theta_z + n - \frac{1}{2}, \theta_z + n + \frac{1}{2}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando p nos extremos do intervalo temos, $p\left(\theta + n - \frac{1}{2}\right)) = e^{2\pi i\left(\theta + n - \frac{1}{2}\right)} = e^{2\pi i(\theta+n) - 2\pi i\frac{1}{2}} = e^{2\pi i(\theta+n) - \pi} = (\cos(2\pi i(\theta + n) - \pi), sen(2\pi i(\theta + n) - \pi)) = z - \pi = -z$ e também, $p\left(\theta + n + \frac{1}{2}\right)) = e^{2\pi i\left(\theta + n + \frac{1}{2}\right)} = e^{2\pi i(\theta+n) + 2\pi i\frac{1}{2}} = e^{2\pi i(\theta+n)+\pi} = (cos(2\pi i(\theta + n) + \pi), sen(2\pi i(\theta + n) + \pi)) = z + \pi = -z$.
Tome $\mathscr{U}_z = S^1 - \{-z\}\}$. Então, $p^{-1}(\mathscr{U}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, no qual V_n são abertos disjuntos da reta.

Figura 5.3 – Representação do recobrimento da esfera S^1.



Além disso, $p|V_n \colon V_n \to \mathscr{U}$ é injetiva.

De fato, tome $\theta_1, \theta_2 \in V_n$. Suponha que $p(\theta_1) = p(\theta_2)$, então, $e^{2\pi i\theta_1} = e^{2\pi i\theta_2}$. Logo $\theta_1 - \theta_2 = k \in \mathbb{Z}$. Como $\theta_1, \theta_2 \in V_n$ então $k = 0$, ou seja, $\theta_1 = \theta_2$.

Assim, temos que a aplicação $p|V_n \colon V_n \to \mathscr{U}$ é contínua, aberta e bijetiva. Portanto, uma aplicação de recobrimento.

5.2 Levantamento de Homotopia.

Como anunciado no início do capítulo, estudaremos relações das classes de homotopias de X em um outro tipo de espaço, os espaços de recobrimento. Isso será feito por meio da construção de uma nova aplicação contínua denominada como Levantamento de aplicações.

Nosso objetivo é calcular o grupo fundamental da S^1 e mostrar que existe um isomorfimo do respectivo grupo com os inteiros aditivo, e para isso usaremos como ferramenta as seguintes definições e resultados .

Definição 5.2.1. *Sejam $f \colon X \to Y$ e $g \colon Z \to Y$ aplicações contínuas entre os espaços topológicos X, Y e Z. Um* ***levantamento*** *da aplicação g é uma aplicação contínua $\tilde{g} \colon Z \to X$ satisfazendo $f \circ \tilde{g} = g$.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

O próximo resultado é um lema auxiliar que será usado na demonstração do teorema principal dessa seção.

Lema 5.2.1. *Sejam $E.X, B$ espaços topológicos e $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento. Suponha $\varphi : X \to B$ uma aplicação contínua e que satisfaz:*

(i) X é conexo

(ii) Sejam $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \colon X \to E$ levantamentos de φ que coincidem em um ponto $x_0 \in X$, ou seja, $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$

Então $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)$, para todo $x \in X$.

Demonstração. Vamos mostrar que o conjuntos dos pontos tais que as aplicações $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ coincidem é um conjunto aberto e fechado em X.

Considere $A = \{x \in X; \tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)\}$.

Vamos mostrar que A é fechado em X. Para isso, basta mostrar que o fecho de A coincide com A. Como $A \subset \overline{A}$ em seu fecho, mostraremos que o fecho de A está contido em A.

Tome $x \in \overline{A}$ e suponha que $x \notin A$. Então $\tilde{\varphi}_1(x) \neq \tilde{\varphi}_2(x)$. Sejam $\mathscr{U} \subset B$ uma vizinhança distinguida de x e $E \supset V_1, V_2$ abertos de $p^{-1}(\mathscr{U})$ que contém $\tilde{\varphi}_1(x)$, $\tilde{\varphi}_2(x)$ respectivamente e, $p|V_i \colon V_i \to \mathscr{B}$ com $i = 1,2$ é homeomorfismo.

Note que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, pois $\tilde{\varphi}_1(x) \neq \tilde{\varphi}_2(x)$. Como $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ são contínuas, dado os abertos $V_1, V_2 \subset E$ que contém $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x)$ respectivamente, existem abertos $W_1, W_2 \subset X$ tal que $x \in W_i, i = 1,2$ e $\tilde{\varphi}_1(W_1) \subset V_1$ e $\tilde{\varphi}_2(W_2) \subset V_2$.

Agora tome $W = W_1 \cap W_2$.

Como $\tilde{\varphi}_1(W) \subset V_1$ e $\tilde{\varphi}_2(W) \subset V_2$ temos $\tilde{\varphi}_1(W) \cap \tilde{\varphi}_2(W) = \varnothing$, pois $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Assim, para todo $w \in W$, temos $\tilde{\varphi}_1(w) \neq \tilde{\varphi}_2(w)$, ou seja, $W \cap A = \varnothing$.

Mas, por hipótese, $x \in \overline{A}$ então $x \in A \cap W$. Absurdo! Assim, $\overline{A} \subset A$ e portando A é fechado em X.

Agora iremos mostrar que A é aberto em X.

Precisamos mostrar que para todo ponto $x \in A$, existe um aberto W inteiramente contido em A tal que $x \in W$. Tome $x \in A$. Então $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)$.

Seja $\mathscr{U}$ uma vizinhança distinguida de $\varphi(x)$ e V uma componente $p^{-1}(\mathscr{U})$ que contém $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)$ tal que $p|V \colon V \to \mathscr{U}$ é homeomorfismo. Como os levantamentos são contínuos, existem abertos $W_1, W_2 \subset X$ que contém o ponto x tal que $\tilde{\varphi}_1(W_1) \subset V$ e $\tilde{\varphi}_1(W_2) \subset V$.

Tome $W = W_1 \cap W_2$. Então, $\tilde{\varphi}_1(W) \subset V$ e $\tilde{\varphi}_2(W) \subset V$.

Note que W é aberto e, para todo $w \in W$ a imagem de w pelos levantamentos $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ coincindem, pois $p|V \circ \tilde{\varphi}_1(w) = \varphi(w) = p|V \circ \tilde{\varphi}_2(w)$ com $p|V$ homeomorfismo. Portanto, A é aberto em X.

Como X é conexo e $A \subset X$ é aberto e fechado em X, segue que $A = X$, ou seja, os levantamentos coincidem para todos pontos de X. ■

O lema a seguir nos dá uma caracterização para existência única de um levantamento de caminhos e será usado para demonstrar um importante teorema que afirma que o levantamento de caminhos homotópicos são homotópicos. Se o espaço topológico satisfaz as condições do Lema, dizemos que tal espaço goza da propriedade do levantamento de caminhos.

Lema 5.2.2. ***(Propriedade do Levantamento de Caminhos)*** *Seja $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ uma aplicação de recobrimento com $p(e_0)=b_0$. Se $\alpha:(I,0)\to(B,b_0)$ é um caminho em B com ponto inicial em b_0, então existe um único levantamento $\tilde{\alpha}:(I,0)\to(E,e_0)$ de α que começa em e_0, ou seja, $\tilde{\alpha}(0)=e_0$.*

Demonstração. (Existência)
Para cada ponto $b\in B$, tome $\mathscr{U}_b$ uma vizinhança distinguida de B pelo recobrimento p. Seja $\mathscr{U}_0=\{\mathscr{U}_b,\ b\in B\}$. Então temos:
$(i)B=\bigcup\limits_{b\in B}\mathscr{U}_b$ é uma cobertura aberta de B.
(ii) $\mathscr{U}_0^{-1}=\{\alpha^{-1}(\mathscr{U}_b);\mathscr{U}_b\in\mathscr{U}_0\}$ é uma cobertura aberta de I pois $\alpha\colon I\to B$ é contínua. Como I é compacto, existe uma subcobertura finita para I, ou seja, existem $b_1,\dots,b_n\in B$ tal que $I=\alpha^{-1}(\mathscr{U}_{b_1})\cup\ldots\cup\alpha^{-1}(\mathscr{U}_{b_k})$.
(iii) Seja s o número de Lebesgue [3] para a cobertura finita de I e considere a partição,

$$0=t_1\leq\ldots\leq t_i\leq\ldots\leq t_n=1$$

de modo que $t_i-t_{i-1}<s$ para todo $i=1,\ldots,n$. Logo, cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$ está contido em algum $\mathscr{U}_{b_j}$, para $i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,k$. Então, $\alpha([t_{1-i},t_i])\subset\alpha(\alpha^{-1}(\mathscr{U}_{b_j}))\subset\mathscr{U}_{b_j}$ e $\bigcup_{j=1}^{k}\mathscr{U}_{b_j}$ é uma cobertura finita para $\alpha(I)$.

Seja V a folha que contém e_0 no recobrimento p. Então $p|V\colon V\to p(V)\subset B$ é homeomorfismo. Defina $\tilde{\alpha}_1=(p|V)^{-1}\circ(\alpha|_{[t_0,t_1]})\colon[t_0,t_1]\to E$. Daí, $p\circ\tilde{\alpha}_1=p\circ((p|V_1)^{-1}\circ(\alpha|[t_0,t_1]))=id\circ\alpha|[t_0,t_1]=\alpha|[t_0,t_1]$ ou seja, $\tilde{\alpha}_1$ é um levantamento para $\alpha|[t_0,t_1]$. Note que $\tilde{\alpha}_1(0)=e_0$.

De modo análogo, podemos definir $\tilde{\alpha}_i\colon[t_{i-1},t_i]\to E$ levantando cada restrição $\alpha|[t_{i-1},t_i]$.

[3] **Lema de Lebesgue:** Seja $\mathscr{U}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico (X,d). Se X é compacto então existe um $s>0$ tal que, para todo $A\subset X$ com diâmetro menor que s está contido em um aberto $\mathscr{U}_\alpha\in\sqcap$.

Agora defina $\tilde{\alpha}\colon I \to E$ da seguinte forma, $\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(t), \text{ se } t \in [t_0, t_1] \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n(t), \text{ se } t \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$

Pelo Lema da Colagem, a aplicação $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to E$ é contínua e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, ou seja, o caminho α é levantado pela aplicação $\tilde{\alpha}$ cujo ponto inicial é e_0.

(Unicidade)

Sejam $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}\colon I \to B$ levantamentos de α com ponto inicial em e_0. Como I é conexo e os levantamentos coincidem no ponto $t = 0$, segue do Lema 5.2.1, que $\gamma = \beta$. ∎

Os próximos resultados irão mostrar que os levantamento de caminhos homotópicos são únicos, homotópicos e, ainda, coincidem no ponto final. Esses resultados serão importantes para construirmos a aplicação de homomorfismo dos grupos.

Teorema do Levantamento de Homotopia. *(MASSEY, 1991), Capítulo 5, Lema 3.3) Sejam E, X, B espaços de recobrimento, $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ uma aplicação de recobrimento com $p(e_0) = b_0$ e $f : (X, x_0) \to (B, b_0)$ uma aplicação contínua. Suponha que f possui levantamento $\tilde{f} : (X, x_0) \to (E, e_0)$, ou seja, $p \circ \tilde{f} = f$. Então, qualquer homotopia $F : X \times I \to B$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$, pode ser levantada a uma homotopia $\tilde{F} : X \times I \to E$ tal que, $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$, para todo $x \in X$. Em particular, se X for conexo então $\tilde{F}$ é único.*

Corolário 5.2.1. *Seja (E, p, B) um espaço de recobrimento. Se $\alpha, \beta\colon (I, 0) \to (B, b_0)$ são caminhos em B começando em b_0 tal que α e β são homotópicos, então existem únicos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\colon (I, 0) \to (E, e_0)$ tal que $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ são levantamentos de α e β. Em particular, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ possuem o mesmo ponto final.*

Demonstração. Seja $F\colon I \times I \to B$ uma homotopia entre os caminhos α e β. Segue então que: $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(0, t) = b_0, F(1, t) = b_1$ e $F(s, 1) = \beta(s)$. Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os levantamentos dos caminhos α e β.

Pelo teorema anterior sabemos que existe uma homotopia $\tilde{F}\colon I \times I \to E$ que é um levantamento da homotopia F em relação ao caminho α. Daí,

$$\widetilde{F}(s, 0) = \widetilde{\alpha}(s); \widetilde{F}(0, t) = \widetilde{\alpha}(1); \widetilde{F}(1, t) = \widetilde{\alpha}(1).$$

Vamos mostrar que $\widetilde{F}(s, 1) = \widetilde{\beta}(s)$.

Note que $(p \circ \widetilde{F})(s, 1) = F(s, 1) = \beta(s)$, $(p \circ \widetilde{\beta})(s) = \beta(s)$. Além disso, se $s = 0$ então $\tilde{\beta}(0) = e_0 = \tilde{\alpha}(0) = \widetilde{F}(0, 1)$. Ou seja, os levantamentos u e v coincidem no ponto inicial e portanto, pelo Lema 5.2.1, $\widetilde{F}(s, 1) = \tilde{\beta}(s)$.

Tome o ponto final do levantamento, então $\tilde{\alpha}(1) = \widetilde{F}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$. Logo, o ponto final dos levantamentos coincidem. ■

Corolário 5.2.2. *Seja $p\colon (E,e_0) \to (B,b_0)$ uma aplicação de recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Então o homomorfismo $p_*\colon \Pi_1(E,e_0) \to \Pi_1(B,b_0)$ é um monomorfismo.*

Demonstração. Seja $[\tilde{\alpha}] \in \Pi_1(E,e_0)$ tal que $[\tilde{\alpha}] \in ker(p_*)$. Então $p_*[\tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{b_o}]$, ou seja, a classe do caminho constante ε_{b_o} que é o elemento neutro do $\Pi_1(B,b_0)$. Logo $p \circ \tilde{\alpha} \cong \varepsilon_{b_o}$. Sendo assim, como $p \circ \tilde{\alpha}$ e ε_{b_o} são laços com ponto inicial em b_0 segue que os levantamentos $\tilde{\alpha}$ e ε_{e_0} são únicos (Lema 5.2.2) e homotópicos (Corolário 5.2.1). Assim, $[\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{e_0}]$, portanto, a aplicação p_* é um monomorfismo. ■

5.3 Recobrimento e Grupo Fundamental

O próximo resultado afirma que o grupo fundamental da esfera S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, ou seja, fixando um ponto na S^1, cada classe de caminhos a partir do ponto fixado poderá ser representada por um número inteiro e o sinal desse número representará a orientação do caminho.

Teorema 5.3.1. *Sejam S^1 a esfera unitária e $b_0 = (0,1)$ um ponto básico em S^1. Então, o grupo fundamental $\Pi_1(S^1,b_0)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros $(Z,+)$.*

Demonstração. Seja $p\colon (\mathbb{R},0) \to (S^1,1)$ o recobrimento da S^1 tal que $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ e $1 = (0,1) \in S^1$ (Exemplo 5). Dado $[\alpha] \in \Pi_1(S^1,1)$, temos que $\alpha\colon I \to S^1$ é um laço em S^1 com ponto base em $b_0 = 1$, ou seja, $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$.
Daí, pelo Lema 5.2.1, existe um único levantamento $\tilde{\alpha}\colon I \to \mathbb{R}$ de α com início em $e_0 = 0$.
Note que $p \circ \tilde{\alpha}(1) = e^{2\pi i\tilde{\alpha}(1)} = \alpha(1) = 1$ se, e somente se, $2\pi i\tilde{\alpha}(1) = 2n\pi i$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.
Logo, $\tilde{\alpha}(1) = n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.
Vamos mostrar que a aplicação $\Phi\colon \Pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ de forma que $\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$ é um isomorfismo.
$\vdash$ **Φ está bem definida**. Tome $\alpha,\beta : I \to S^1$ com ponto básico em b_0 sendo os caminhos α e β homotópicos. Pelo Corolário 1:

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1), \text{ logo } \Phi(\alpha) = \Phi(\beta).$$

$\vdash$ **Φ é homomorfismo de grupos.**

Considere $\alpha,\beta\colon I\to S^1$ laços em S^1 com ponto base em $b_0=1$. Então, pela propriedade do levantamento de caminhos, existem únicos caminhos $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\colon I\to\mathbb{R}$ com ponto inicial $e_0=0$. Logo, $\tilde{\alpha}(1)=n$ e $\tilde{\beta}(1)=m$ com $m,n\in\mathbb{Z}$. Defina o caminho $\tilde{\gamma}$: $[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $\tilde{\gamma}(s):=\tilde{\beta}(s)+n$ e considere a justaposição:

$$(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s):=\begin{cases}\tilde{\alpha}(2s), s\in[0,\frac{1}{2}]\\ \tilde{\gamma}(2s-1):=\tilde{\beta}(2s-1)+n, s\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Note que $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{\beta}(0)+n=\tilde{\alpha}(1)$, ou seja, o caminho justaposto está bem definido e:
(i) $\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma}(0):=\tilde{\alpha}(0)=0$.
(ii) $\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma}=\widetilde{\alpha*\beta}$,
onde $\widetilde{\alpha*\beta}$ é o único levantamento de $\alpha*\beta$. Observe que $\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma}$ e $\widetilde{\alpha\star\gamma}$ são caminhos com ponto inicial em $e_0=0$. Note o seguinte:

$$p(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s)=\begin{cases}p\circ\tilde{\alpha}(2s)=\alpha(2s), s\in[0,\frac{1}{2}]\\ p\circ\tilde{\gamma}(2s-1), s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$p(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s)=\begin{cases}\alpha(2s), s\in[0,\frac{1}{2}]\\ p(\tilde{\beta}(2s-1)+n), s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$p(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s)=\begin{cases}\alpha(2s), s\in[0,\frac{1}{2}]\\ e^{2\pi i\tilde{\beta}(2s-1)}+e^{2\pi in}, s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$p(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s)=\begin{cases}\alpha(2s), s\in[0,\frac{1}{2}]\\ \beta(2s-1), s\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

$$p(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(s)=(\alpha*\beta)(s).$$

Assim, $\Phi([\alpha][\beta])=\Phi([\alpha*\beta)]:=\widetilde{\alpha*\beta}(1)=(\tilde{\alpha}*\tilde{\gamma})(1):=\tilde{\gamma}(1)=\tilde{\beta}(1)+n=\tilde{\alpha}(1)+\tilde{\beta}(1)=\Phi([\alpha])+\Phi([\beta])$.

$\vdash$ **Φ é injetora**:

Tome $[\alpha]\in\Pi_1(S^1,1)$ tal que $[\alpha]\in\ker(\Phi)$. Então, $\Phi[\alpha]=\tilde{\alpha}(1)=0=\tilde{\alpha}(0)$. Portanto, a classe de caminhos $[\tilde{\alpha}]$ pertence ao grupo fundamental de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é um espaço contrátil, segue que seu grupo fundamental possui apenas o elemento trivial, ou seja, $[\tilde{\alpha}]\in\Pi_1(\mathbb{R},0)=\{[e_1]\}$. Além disso, $p_*([e_1])=p_*([\tilde{\alpha}])=[\alpha]=\{0\}$, ou seja, $ker(\Phi)=\{0\}$. Portanto, o homomorfismo é injetivo.

$\vdash$ **Φ é sobrejetiva:**

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Considere o caminho $\alpha \colon I \to S^1$ tal que $\alpha(t) = e^{2\pi int}$. O levantamento de α é o caminho $\tilde{\alpha} \colon I \to \mathbb{R}$ com $\tilde{\alpha}(t) = nt$ pois, $p \circ \tilde{\alpha}(t) = e^{2\pi int} = \alpha(t)$. Logo $\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = n$. Portanto, $\Pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. ■

O próximo exemplo segue como aplicação direta do teorema anterior.

Exemplo 5.3.1. *Considerando $T^2 = S^1 \times S^1$, é possível verificar que $\Pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De fato, pela proposição 4.3.2, sabemos que o grupo fundamental do produto cartesiano de espaços topológicos é isomorfo ao cartesiano dos grupos fundamentais dos respectivos espaços. Portanto, $\Pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

A seguir, estudaremos resultados algébricas envolvendo levantamentos de caminhos, aplicações de recobrimento e grupo fundamental de espaços topológicos e calcularemos o grupo fundamental do espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$.

Vimos que o levantamento de dois caminhos homotópicos que coincidem no ponto inicial, coincidem nos pontos finais. Para um caso mais geral temos o seguinte lema.

Lema 5.3.1. *Sejam $p \colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ uma aplicação de recobrimento e α, β caminhos fechados em B. Se $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \colon (I, 0) \to (E, e_0)$ são levantamentos únicos de α, β com o mesmo ponto inicial, então $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ se e somente se $[\alpha * \beta^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$.*

Demonstração. Observe que $p_* \colon \Pi_1(E, e_0) \to \Pi_1(B, b_0)$ é definida por $p_*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}]$.
Vamos mostrar a condição suficiente.
Suponha que $[\alpha * \beta^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$. Então, existe um laço $[\tilde{\gamma}]$ tal que $p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\alpha * \beta^{-1}]$. Então p $\circ \tilde{\gamma} \cong p \circ \alpha * \beta^{-1}$. Pelo Corolário 5.2.1, temos que os levantamentos $\tilde{\gamma}$ e $\widetilde{\alpha * \beta^{-1}}$ são únicos, homotópicos e, em particular, $\tilde{\gamma}(1) = \widetilde{\alpha * \beta^{-1}}(1)$. Considere $\widetilde{\alpha * \beta^{-1}} := \tilde{\theta}$ e defina a seguinte parametrização: $\alpha', \beta' \colon I \to E$ com $\begin{cases} \alpha'(s) := \tilde{\theta}(\frac{s}{2}) \\ \beta'(s) := \tilde{\theta}(\frac{2-s}{2}) \end{cases}$ para todo $s \in I$.
Vamos mostrar que os caminhos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ são homotópicos aos caminhos α', β' respectivamente.
Note que $(\alpha^{-1})(t) \colon \begin{cases} \alpha(2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta^{-1}(2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$
$\vdash \alpha' \simeq \tilde{\alpha}$ e $\beta' \simeq \tilde{\beta}$ são levantamentos únicos começando em e_0.
Note que, para $s = 1$, temos $\tilde{\alpha}(1) = \alpha'(1) = \theta\left(\frac{1}{2}\right) = \beta' = \tilde{\beta(1)}$. De fato, segue que, para todo $s \in [0, 1]$:

(i) $\alpha'(0) = \theta(0) = \widetilde{\alpha * \beta^1}(0) = e_0$, ou seja, e_0 é o ponto inicial do caminho α'.

(ii) $p \circ \alpha'(s) = p \circ \tilde{\theta}(\frac{s}{2}) = \alpha * \beta^{-1}(\frac{s}{2}) = \alpha\left(\frac{2s}{2}\right) = \alpha(s)$, ou seja, α' é um levantamento de α.

Assim, segue da propriedade do levantamento de caminhos que $\tilde{\alpha} \simeq \alpha^{'}$.

De modo análogo temos,

(iii) $\beta^{'}(0) = \theta(1) = \widetilde{\alpha * \beta}(1) = e_0$.

(iv) $p \circ \beta^{'}(s) = p \circ \tilde{\theta}(\frac{2-s}{2}) = (\alpha * \beta^{-1})\left(\frac{2-s}{2}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{2-s}{2} \leq 1 = \beta^{-1}\left(2(\frac{2-s}{2}) - 1\right) =$

$= \beta^{-1}(1-s) = \beta(s)$.[4]

Logo, β' é um levantamento de β com ponto inicial em e_0 e portanto $\beta' \simeq \tilde{\beta}$.

Agora mostraremos a condição necessária.

Sejam $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \colon (I,0) \to (E,e_0)$ levantamentos dos caminhos α e β com ponto inicial em e_0. Suponha que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$

$\vdash [\alpha * \beta^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E,e_0))$

Seja $\tilde{\beta}^{-1} \colon (I,0) \to (E, \beta\tilde{(1)})$ com $\tilde{\beta}^{-1}(s) = \tilde{\beta}(1-s)$. Note que,

(i) $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \beta^{-1}(0)$

(ii) $p \circ \tilde{\beta}^{-1}(s) = p \circ \tilde{\beta}(1-s) = \beta(1-s) = \beta^{-1}(s)$, para todo $s \in I$.

Assim, temos que o caminho justaposto está bem definido e $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}$ é um laço em e_0 e portanto, $[\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}] \in \Pi_1(E,e_0)$. E, além disso, $p_*[\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}] = [p \circ (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1})] = [p \circ \tilde{\alpha} * p \circ \tilde{\beta}^{-1}] = \alpha * \beta^{-1}$. E portanto, $[\alpha * \beta - 1] \in \Pi_1(E,e_0)$. ■

Teorema 5.3.2. *O número de folhas de um recobrimento (E,p,B) conexo por caminhos é igual ao índice de $p_*\Pi_1(E,e_0)$ em $\Pi_1(B,b_0)$, ou seja, $[\Pi_1(B,b_0) : p_*\Pi_1(E,e_0)] = \#p^{-1}(b_0)$.*

Observação: Se B é conexo por caminhos, todas as fibras $p^{-1}(b)$ possuem mesma cardinalidade.

Demonstração. Denote $G = \Pi_1(B,b_0)$, $H = p_*(\Pi_1(E,e_0))$ e defina $\Phi \colon \frac{G}{H} \to p^{-1}(b_0)$ com $\Phi(H[\alpha]) := \tilde{\alpha}(1)$, onde α é um laço em b_0 e $\tilde{\alpha}$ seu respectivo levantamento cujo ponto inicial é e_0 e $H[\alpha]$ uma classe lateral de H em G.

$\vdash \Phi$ está bem definida e é injetiva.

Tome $[\alpha], [\gamma] \in G$ tal que $H[\alpha] = H[\gamma]$. Obeserve que:

$$H[\alpha] = H[\gamma] \Leftrightarrow [\alpha] * [\gamma]^{-1} \in H \Leftrightarrow^{\text{Lema 3}} \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\gamma}(1) \Leftrightarrow \Phi([H[\alpha]]) = \Phi([H[\gamma]]).$$

[4] $0 \leq s \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq -s \leq 0 \Longleftrightarrow 2-1 \leq 2-s \leq 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2-s}{2} \leq 1$

$\vdash \Phi$ é sobrejetiva.

Tome um ponto $e \in p^{-1}(b_0)$. Como E é um espaço conexo por caminhos, então existe um caminho $\tilde{\gamma}$ em E tal que $\tilde{\gamma}(0) = e_0$ e $\tilde{\gamma}(1) = e$. Então, $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ é um laço com ponto base em b_0, ou seja, $[\gamma] \in \Phi(B, b_0) = G$ e $H[\gamma] \in \frac{G}{H}$ é tal que $\Phi(H[\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) = e$, que é o ponto final do caminho $\tilde{\gamma}$.

Então, $\Phi\colon \frac{G}{H} \to p^{-1}(b_0)$ é uma bijeção e portanto $\#\left(\frac{\Pi_1(B,b_0)}{p_*(\Pi_1(E,e_0))}\right) := [\Pi_1(B,b_0) : \Pi_1(E,e_0)] = \#p^{-1}(b_0)$. ■

Corolário 5.3.1. *Seja (E,p,B) um espaço de recobrimento com B conexo por caminho e E simplesmente conexo. Então $\#\Pi_1(B,b_0) = \#p^{-1}(b_0)$.*

Demonstração. Sabemos que $\Pi_1(E)$ é trivial, visto que E é um espaço simplesmente conexo. Assim, $p_*(\Pi_1(E,e_0))$ é subgrupo trivial de $\Pi(B,b_0)$. Então, pelo teorema 5.3.2, $\Phi\colon \Pi_1(B,b_0) \to p^{-1}(b_0)$ é uma bijeção, e com isso, segue o resultado. ■

Corolário 5.3.2. *Seja E um espaço de recobrimento simplesmente conexo de k-folhas com k um número primo, B um espaço conexo por caminhos e E um espaço simplesmente conexo. Então, o grupo fundamental de B com o ponto básico b_0 é isomorfo ao $\mathbb{Z}_k$.*

Demonstração. Pelo corolário 3, sabemos que a ordem do grupo fundamental de B corresponde a cardinalidade da imagem inversa do ponto básico b_0, ou seja, a cardinalidade de $\Pi_1(B,b_0) = p^{-1}(b_0) = k$. Assim, temos um grupo finito com k elementos. Como o único grupo finito a menos de isomorfismo com cardinalidade k tal que k é um número primo é $\mathbb{Z}_k$, segue que $\Pi_1(B,b_0) \cong \mathbb{Z}_k$. ■

Exemplo 5.3.2. ***O grupo fundamental do*** $(\mathbb{RP}^n)$. *Seja $p\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ com $p(x) = \{x,-x\} = [x]$ o recobrimento de duas folhas do $\mathbb{RP}^n$. Como S^n é simplesmente conexa, segue pelo Corolário 4 que $\Pi_1(\mathbb{RP}^n, b_0) \cong \mathbb{Z}_2$ para todo $n \geq 2$.*

6 TEOREMA DE BORSUK-ULAM E APLICAÇÃO.

O Teorema de Borsuk-Ulam é um clássico e fundamental resultado da Topologia, mais precisamente da Topologia Algébrica. Foi conjecturado pelo matemático e físico S. Ulam e provado pelo matemático polonês Karol Borsuk em 1933. Um dos aspectos que caracterizam sua relevância na área é sua versatilidade, ou seja, possui diferentes demonstrações, generalizações e aplicações. De fato, até 1985 eram conhecidas mais de 400 generalizações do teorema.

Teorema de Borsuk-Ulam (I). *Sejam S^ne $\mathbb{R}^n$ a esfera n-dimensional e o espaço euclidiano respectivamente. Se $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua então f colapsa pelo menos em um par de pontos antípodas, isto é, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Definição 6.0.1. *Dizemos que uma aplicação contínua $f\colon S^n \to S^m$ preserva pontos antípodas se, para todo $x \in S^n$ temos $f(-x) = -f(x)$.*

Uma equivalêcia para o teorema anterior pode ser dado da seguinte forma:

Definição 6.0.2. *Dizemos que uma aplicação contínua $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ colapsa em um par de pontos antípodas se existe pelo menos um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Teorema de Borsuk-Ulam (II). *Não existe uma aplicação contínua $f\colon S^n \to S^{n-1}$ que preserva pontos antípodas.*

As seguintes definições serão utilizadas para mostrar que, de fato, as versões do Teorema de Borsuk-Ulam são equivalentes.

Vamos mostrar que as versões (I) e (II) do Teorema de Borsuk-Ulam enunciadas são equivalentes.

Demonstração.
$(I) \Rightarrow (II)$
Suponha que existe uma aplicação $f\colon S^n \to S^{n-1}$ contínua tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S^n$. Considere a aplicação $h = i \circ f$ onde $S^n \xrightarrow{f} S^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n$ e i é a aplicação inclusão. Como as aplicações i e f são contínuas, então $h = i \circ f$ também é contínua. Então, para todo $x \in S^n$, temos

$$h(x) = (i \circ f)(x) = f(x) \text{ e } h(-x) = (i \circ f)(-x) = f(-x) = -f(x)$$

Portanto, $h(x) \neq h(-x)$, para todo $x \in S^n$, contradizendo o Teorema de Borsuk-Ulam.

$(II) \Rightarrow (I)$

Seja $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e, suponha por absurdo, que não existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$, ou seja, $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in S^n$. Defina $h\colon S^n \to S^{n-1}$ tal que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Calculando h nos pontos $-x$ e x, temos $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{||f(-x)-f(x)||}$ e $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f-(x)||}$, ou seja, $h\colon S^n \to S^{n-1}$ preserva pontos antípodas $h(-x) = -h(x)$. Absurdo! Portanto, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. ■

Uma interpretação para o caso unidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam pode ser dada da seguinte forma: Suponha que um estudante está perdido em um pavilhão de aulas com estrutura circular, que será representada pela esfera S^1. Se este aluno começa a andar continuamente ao redor do pavilhão e para ao perceber que voltou ao mesmo lugar, independente do quão rápido ele andou, sempre haverá pelo menos um par de pontos diametralmente opostos no qual sua velocidade foi a mesma. Considerando f a função que associa cada ponto da S^1 à velocidade instantânea do aluno, teremos um par de ponto antípodas x e $-x$ tal que $f(x) = f(-x)$.

A demonstração para esse caso segue diretamente do Teorema do Valor Intermediário, como veremos a seguir.

Teorema do Aluno. *Seja $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração. Podemos parametrizar a curva S^1 pela seguinte função: $\gamma\colon [0,2\pi] \to S^1$, tal que $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Defina a função $a_\theta\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ por $a(\theta) = f((\gamma(\theta+\pi)) - f(\gamma(\theta))$. Observe que $a(0) = f((\gamma(0+\pi)) - f(\gamma(0))$ e $a(\pi) = f((\gamma(2\pi)) - f(\gamma(\pi))$. Como $f(\gamma(2\pi)) = f(\gamma(0))$ temos $a(0) = -a(\pi)$. Assim, pelo Teorema do Valor intermediário[1], que existe θ_0 tal que $a(\theta_0) = 0$, ou seja, $f(\gamma(\theta_0+\pi)) = f(\gamma(\theta_0))$. ■

6.1 O caso bidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam.

Uma interpretação para o caso bidimensional do Teorema anterior pode ser dada da seguinte forma: Suponha que o planeta Terra seja uma esfera e que os parâmetros pressão atmosférica e temperatura variam continuamente no tempo e espaço. Então, em cada instante de tempo,

[1] Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

existem na superfície da terra pelo menos um par de pontos diametralmente opostos no qual pressão atmosférica e temperatura coincidem.

Teorema de Borsuk-Ulam (Caso bidimensional)**.** *Não existe uma aplicação contínua* $f\colon S^2 \to S^1$ *que preserva pontos antípodas.*

Demonstração. Suponha que existe $f\colon S^2 \to S^1$ contínua tal que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in S^2$.

Considere os recobrimentos p, q do $\mathbb{RP}^1$ (exemplo 5.1.4) e $\mathbb{RP}^2$(exemplo 5.1.4) respectivamente e construa a seguinte aplicação $h\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^1$ com $h([x]) = [f(x)]$.

Note que $(h \circ p)(x) = h([x]) = [f(x)] = (q \circ f)(x)$.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "h"'] & \mathbb{RP}^1 \end{tikzcd}$$

$\vdash$ h **está bem definida.**

$h([x]) := [f(x)] = [-f(x)] = [f(-x)] = h([-x])$ ou seja, $h([x]) = h([-x])$.

Portanto, a aplicação h está bem definida.

$\vdash$ $h_*\colon \Pi_1(\mathbb{RP}^2, b_1) \to \Pi_1(\mathbb{RP}^1, b_0)$ é **homomorfismo nulo.**

Suponha por absurdo que h_* não é nulo. Observe que, $\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{Z}_2$ Exemplo 5.3.2 e $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{RP}^1$ é homeomorfo à S^1 Exemplo 2.2.14

Se $h_*\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ não é nulo, então $h_*(\overline{1}) = m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Note que, $0 = h_*(\overline{0}) = h_*(\overline{1+1}) = h_*(\overline{1}) + h_*(\overline{1}) = m + m \neq 0$. Absurdo! Assim, o homomorfismo h_* é, de fato, um homomorfismo nulo.

Agora mostraremos que existe um laço em $\mathbb{RP}^2$ que contradiz o fato de h_* ser nulo.

Seja uma classe de caminhos $[\gamma] \in \Pi_1(\mathbb{RP}^2, b_1)$ tal que $[\gamma] \neq [e_{b_1}]$. Seja $y_0 \in S^2$ e $\gamma\colon I \to S^2$ um caminho tal que $\gamma(0) = y_0$ e $\gamma(1) = -y_0$. Daí, $f \circ \gamma\colon I \to S^1$ é um caminho em S^1 que liga o ponto $f(y_0)$ ao ponto $f(-y_0) = -f(y_0)$.

Observe que $f \circ \gamma$ não é um laço em S^1. Entretanto, $q(f \circ \gamma)$ é um laço em $\mathbb{RP}^1$ com base em $[f(y_0)] = [b_0]$. De fato, $q(f \circ \gamma) = [f \circ \gamma] = [-(f \circ \gamma)]$. Logo, $[q(f \circ \gamma)] \in \Pi_1(\mathbb{RP}^1, b_0)$ além disso, $[q(f \circ \gamma)] \neq [e_{b_0}]$.

Caso contrário, teríamos $[q(f \circ \gamma)] = [e_{b_0}]$, ou seja, $q(f \circ \gamma) \simeq e_{b_0}$. Então, Pelo corolário 5.2.1 (unicidade do levantamento) temos, $\widetilde{e_{b_0}} = e_{e_0}$ e $f \circ \gamma = q(\widetilde{f \circ \gamma})$ são levantamentos únicos com base em $e_0 = f(y_0)$ e seus pontos finais coincidem. Mas, ε_{b_0} tem ponto final em $f(y_0)$ e $q(f \circ \gamma)$ tem ponto final em $-f(y_0)$. Absurdo! Portanto, $[q(f \circ \gamma)] \neq [\varepsilon_{b_0}]$.
Observe o seguinte, $\alpha = p \circ \gamma$ é um laço em $\mathbb{RP}^2$ com base $b_1 = p(y_0)$. Logo, $[\alpha] = [p \circ \gamma] \in \Pi_1(\mathbb{RP}^2, b_1)$. Aplicando h_* na classe $[p \circ \gamma]$ temos:

$$h_*([p \circ \gamma]) := [h \circ (p \circ \gamma)] = [h \circ p(\gamma)] = [q \circ f(\gamma)] \neq [\varepsilon_{b_0}]$$

e isso contradiz o fato do homomorfismo h_* ser nulo.
Portanto, não existe uma aplicação $f\colon S^2 \to S^1$ contínua que preserve pontos antípodas. ■

O Teorema de Borsuk-Ulam pode ser aplicado diretamente na demonstração de um teorema muito utilizado na Teoria da Medida, o teorema de Stoney-Tukey, conhecido também, no caso particular de dimensão 3, como o Teorema do Sanduíche de Presunto. Uma interpretação para tal pode ser feita da seguinte forma: Dado um sanduíche com qualquer distribuição de pão e presunto, sempre é possível, com um único corte, dividir o sanduíche em duas partes exatamente iguais.

Teorema do Sanduíche de Presunto. *((KOSNIOWSKI, 1980), Capítulo 20, Teorema 20.6) Se A, B e C são subconjuntos limitados do $\mathbb{R}^3$, então existe um plano no $\mathbb{R}^3$ que divide o volume de cada subconjunto exatamente ao meio.*

Demonstração. Seja um conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$. Suponha que $A, B, C \subseteq B$. Tome um ponto $x \in S$ e considere D_x o segmento de reta que liga x ao seu antípoda. Para $t \in I$, considere P_t um plano perpendicular ao segmento D_x de forma que t seja a distância da intersecção do plano P_t com o segmento D_x até o ponto x. Note que P_t divide o subconjunto A em duas partes, que denotaremos como A_1 e A_2, com A_1 mais próximo de x que A_2
Defina $f_1, f_2\colon I \to \mathbb{R}$ com $f_1(t) = VolA_1$ e $f_2(t) = VolA_2$, ou seja, as aplicações f_1, f_2 calculam o volume dos sólidos A_2 e A_2 respectivamente. É possível mostrar que as funções f_1 e f_2 são contínuas e monótonas, f_1 crescente e f_2 decrescente. Agora considere $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Observe que f também é contínua, monótona e não decrescente e ainda, $f(0) = f_1(0) - f_2(0) = -f_2(0) = -f(-1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe $t \in I$ tal que $f(t) = 0$. Como f é monótona e não decrescente, esta função anula em pelo menos um ponto, que denotaremos por $\alpha(x)$ ou em um intervalo fechado [a,b] e, neste caso, que iremos escolher $\alpha(x)$ sendo o ponto $\frac{(a+b)}{2}$. Portanto, $P_{\alpha(x)}$ divide A em duas partes iguais.

De modo análogo à construção anterior, podemos encontrar os pontos $\beta(x)$ e $\gamma(x)$ que divide os subconjuntos B e C exatamente ao meio.

Considere as funções $\tilde{\alpha}\colon S \to \mathbb{R}$ com $\tilde{\alpha}(x) = 1 - \alpha(-x)$, $\tilde{\beta}\colon S \to \mathbb{R}$ com $\tilde{\beta}(x) = 1 - \beta(-x)$ e $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}$ com $\tilde{\gamma}(x) = 1 - \gamma(-x)$. Agora defina $\Phi\colon S \to \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x)$. Note que,

$-\Phi(x) = (-1+\alpha(-x)+1-\beta(-x), -1+\alpha(-x)-1+\gamma(-x)) = (\alpha(-x)-\beta(-x), \alpha(-x)-\gamma(-x)$.

Mas, $\alpha(x) = 1 - \alpha(-x) \iff \alpha(-x) = 1 - \alpha(x)$. E de modo análogo, $\beta(-x) = 1 - \beta(x)$ e $\gamma(-x) = 1 - \gamma(x)$. Assim, $-\Phi(x) = \Phi(-x)$. Então, pelo teorema de Borsuk-Ulam, existe $y \in S$ tal que $\Phi(y) = 0$. Mas,

$$\Phi(y) = 0 \Rightarrow (\alpha(y) - \beta(y), \alpha(y) - \gamma(y)) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y).$$

Portanto, o plano P_{α_y} divide o volume de A, B e C exatamente ao meio. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORSUK, K. Drei sätze über die *n*-dimensionale euklidische sphäre. Fund. Math. 20 177-190, 1933.

DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. [S.l.: s.n.], 1982.

KOSNIOWSKI, C. **A first course in algebraic topology**. [S.l.]: CUP Archive, 1980.

LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 2012.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2015. v. 4.

MASSEY, W. S. **A basic course in algebraic topology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1991.