



MATHEUS BASÍLIO RODRIGUES FERNANDES

**DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS PELA
FORMULAÇÃO DE COORDENADAS NODAIS ABSOLUTAS:
MODELAGEM, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E
SIMULAÇÃO**

LAVRAS – MG

2019

MATHEUS BASÍLIO RODRIGUES FERNANDES

**DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS PELA FORMULAÇÃO DE
COORDENADAS NODAIS ABSOLUTAS:
MODELAGEM, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E SIMULAÇÃO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Fernandes, Matheus Basílio Rodrigues

Dinâmica de Sistemas Multicorpos Flexíveis pela Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas : Modelagem, Implementação Computacional e Simulação / Matheus Basílio Rodrigues Fernandes. – Lavras : UFLA, 2019.

82 p. : il.

TCC–Universidade Federal de Lavras, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira.

Bibliografia.

1. TCC. 2. Monografia. 3. Dissertação. 4. Tese. 5. Trabalho Científico – Normas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

MATHEUS BASÍLIO RODRIGUES FERNANDES

**DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS PELA FORMULAÇÃO DE
COORDENADAS NODAIS ABSOLUTAS: MODELAGEM, IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL E SIMULAÇÃO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

APROVADA em 09 de Julho de 2019.

Prof. Dr. Evelise Roman Corbalan Góis DEX-UFLA
Prof. Dr. Fábio Lúcio Santos DEG-UFLA
Prof. Dr. Francisco Scinocca DEG-UFLA

Prof. Dr. Henrique Leandro Silveira
Orientador

**LAVRAS – MG
2019**

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de viver.

Aos meus pais, Rubens e Edilene, e ao meu irmão, Rubens, por todo o carinho, cuidado e suporte ao longo de todos esses anos de graduação.

À Laura, pela amizade, incentivo e (relativa) paciência ao longo dessa jornada.

Ao meu orientador e amigo, Professor Henrique, pela paciência, dedicação e irrepreensível exemplo de competência e amor à profissão, ao longo dos quase três anos de convívio. Agradeço também por acreditar no meu trabalho e por me fornecer excelentes oportunidades acadêmicas enquanto seu orientado.

Ao Professor Fábio, pela amizade, constante incentivo à vida acadêmica, ensinamentos e orientações quanto ao caminho a ser trilhado na academia. Agradeço também pelo inspirador exemplo de absoluta integridade moral e contagiante alto-astral.

Ao Professor Juliano Elvis, pela amizade, pelos incontáveis cafés e por todos os ensinamentos transmitidos quanto ao funcionamento da atividade científica e da academia.

Ao Professor Márcio Fialho, pela orientação nas atividades de monitoria e PROMAD ao longo de mais de três anos.

Ao Professor Maurício, pelo exemplo de compromisso com suas responsabilidades, excelência profissional e por toda a ajuda técnica e pessoal ao longo dos anos.

Aos Professores da Engenharia Mecânica, Adriano, Bruna, Carlos, Dimas, Filipe, Francisco, Joelma, Márcio, Sandro e Wander, pelos conhecimentos transmitidos e pelas agradáveis conversas e cafés ao longo desse tempo de convívio.

Aos Professores do ciclo básico Evelise, Sérgio, Helvécio, Solange, Livia, Belisário, Luiz Cleber e Gustavo pelo exemplo de excelência profissional, amor e dedicação à profissão, por todos os conselhos e pelo acolhimento nos primeiros anos de Universidade.

A todos os meus demais Professores de graduação, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao grande amigo e colega de apartamento 201420826 (Rubens), pelo indescritível companheirismo, estímulo aos estudos e, principalmente, incondicional exemplo pessoal.

Aos amigos de república, 201420289 (André), 201420722 (Vitor), 201311375 (Boldrin) e 201311381 (Gábrio), pela saudável amizade construída ao longo dos anos e por todos os momentos de descontração.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica Aplicada (LMA–UFLA), 201510644 (Lucas), 201511101 (Vinicius) e 201610804 (Rafael), pelos momentos de muito aprendizado e agradável convivência.

Ao Professor Robson Pederiva (FEM–Unicamp) e aos amigos do Laboratório de Vibrações e Controle (LabVib-FEM/Unicamp), Marcos, Clodoaldo, Matheus, Lucas e Jean, pelo acolhimento em Campinas e pelos conhecimentos e momentos divertidos compartilhados nos últimos meses.

A todos os colegas e amigos com os quais tive a oportunidade de conviver durante os anos de graduação, pela amizade e pelos momentos agradáveis compartilhados. Não explicito os seus nomes para não cometer nenhuma injustiça. Estou certo de que sabem quem são.

To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature. . . If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks in.
(Richard Feynman)

RESUMO

Esta monografia apresenta os conceitos básicos da modelagem dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis por meio da Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ANCF). A apresentação inicia-se com a discussão de alguns conceitos básicos de Cálculo Variacional. Em seguida, o Princípio de Hamilton é introduzido e utilizado para se obter as equações de movimento de um mecanismo quatro-barras rígido. Esse mesmo princípio variacional é utilizado, em seguida, para a obtenção das equações de movimento de uma viga baseada na formulação ANCF. Um método, denominado HHT-I3, para a integração numérica das equações algébrico-diferenciais de movimento é discutido. Por fim, a formulação ANCF é aplicada na modelagem de um mecanismo quatro-barras flexível. Essa aplicação reúne grande parte dos conceitos e ferramentas discutidos ao longo do trabalho. Uma série de simulações é realizada, propiciando boas discussões quanto aos aspectos da formulação ANCF e do método de integração utilizado.

Palavras-chave: ANCF, dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, Princípio de Hamilton, HHT-I3.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Mecanismo quatro-barras sob consideração.	19
Figura 3.1 – Graus de liberdade nodais de uma viga pela formulação ANCF.	30
Figura 3.2 – Elemento de viga planar.	33
Figura 3.3 – Junta de revolução entre dois elementos.	37
Figura 4.1 – Evolução temporal do quatro-barras sujeito a um momento aplicado à manivela.	54
Figura 4.2 – Balanço de energia para o quatro-barras conservativo, sujeito apenas ao próprio peso. \cdots , Energia Potencial; $---$, Energia Cinética; $—$, Energia Total.	55
Figura 5.1 – Discretização do mecanismo quatro-barras flexível sob consideração.	58
Figura 5.2 – Evolução temporal do quatro-barras flexível sujeito à ação do próprio peso.	59
Figura 5.3 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível conservativo, sujeito apenas ao próprio peso. $- \circ -$, Energia Potencial de Deformação; $- \Delta -$, Energia Potencial Gravitacional; $- x -$, Energia Cinética; $—$, Energia Total.	60
Figura 5.4 – Evolução temporal do quatro-barras flexível sujeito à ação do próprio peso e de um momento externo.	60
Figura 5.5 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível não-conservativo, sujeito ao próprio peso e a um momento externo. $- \circ -$, Energia Potencial de Deformação; $- \Delta -$, Energia Potencial Gravitacional; $- x -$, Energia Cinética; $—$, Energia Total.	61
Figura 5.6 – Cosseno do ângulo entre a manivela e o eixo horizontal. $--- \circ ---$, Mecanismo Rígido; $—$, Mecanismo Flexível.	62
Figura 5.7 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível não-conservativo, sujeito ao próprio peso e a um momento externo. $- \circ -$, Energia Potencial de Deformação; $- \Delta -$, Energia Potencial Gravitacional; $- x -$, Energia Cinética; $—$, Energia Total.	62
Figura 1 – Programa principal (parte 1 de 4).	68
Figura 2 – Programa principal (parte 2 de 4).	69
Figura 3 – Programa principal (parte 3 de 4).	70
Figura 4 – Programa principal (parte 4 de 4).	71
Figura 5 – Função para calcular $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	72
Figura 6 – Função para calcular $\mathbf{C}(t, \mathbf{q})$	73

Figura 7 –	Função para calcular $\mathbf{C}_q(t, \mathbf{q})$.	74
Figura 8 –	Função para calcular $\mathbf{Q}_d(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.	75
Figura 9 –	Função para calcular \mathbf{M} .	76
Figura 10 –	Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})$.	77
Figura 11 –	Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{Q})$.	78
Figura 12 –	Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{Q})$.	79
Figura 13 –	Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda})$.	80
Figura 14 –	Função que avança as variáveis no tempo (parte 1 de 2).	81
Figura 15 –	Função que avança as variáveis no tempo (parte 2 de 2).	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Propriedades geométricas e de inércia dos links do quatro-barras.	50
Tabela 5.1 – Propriedades geométricas, elásticas e de inércia dos links do quatro-barras flexível.	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Contextualização e motivação do estudo	10
1.2	Organização da monografia	12
2	TÓPICOS DE CÁLCULO VARIACIONAL E DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS PELO PRINCÍPIO DE HAMILTON	14
2.1	Tópicos de cálculo variacional	14
2.2	O Princípio de Hamilton	17
2.3	Equações de movimento de um mecanismo quatro-barras rígido pelo Princípio de Hamilton	19
3	DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS PELA FORMULAÇÃO ANCF	26
3.1	A Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ANCF)	26
3.2	Equações de movimento para os elementos finitos ANCF através do Princípio de Hamilton	28
3.3	Formulação do elemento de viga ANCF	29
3.3.1	Cinemática do elemento	29
3.3.2	Energia cinética do elemento	31
3.3.3	Energia potencial de deformação do elemento – Formulação 1	32
3.3.4	Energia potencial de deformação do elemento – Formulação 2	34
3.3.5	Vetor de forças externas generalizadas do elemento	35
3.3.6	Formulação das restrições	37
3.3.7	Equações de movimento para o elemento de viga ANCF	38
3.3.7.1	Vetor de forças elásticas para a Formulação 1	39
3.3.7.2	Vetor de forças elásticas para a Formulação 2	40
4	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICO-DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO	43
4.1	Técnicas de solução das equações algébrico-diferenciais de sistemas multicorpos	43
4.2	O método de Hilber-Hughes-Taylor para DAE's de Índice 3 (HHT-I3)	46
4.3	Implementação computacional do HHT-I3 e integração das equações algébrico-diferenciais do mecanismo quatro-barras rígido	49

5	EXPERIMENTO NUMÉRICO: MECANISMO QUATRO-BARRAS FLEXÍVEL	56
5.1	Equações de movimento de sistemas multicorpos	56
5.2	Mecanismo quatro-barras flexível conservativo	58
5.3	Mecanismo quatro-barras flexível não-conservativo	59
5.4	Mecanismo quatro-barras flexível, quase rígido	61
6	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65
	APENDICE A – Implementação computacional do HHT-I3 para integração das EAD's do mecanismo quatro-barras rígido	68

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e motivação do estudo

Prever o comportamento de sistemas físicos previamente à sua concepção física é fundamental para a redução de custos e a obtenção de uma performance otimizada. As técnicas e princípios para análise de sistemas mecânicos robustos são antigas e relativamente bem desenvolvidas. Estudos de Newton, d'Alembert, Euler, Lagrange, Hamilton e outros levaram ao estabelecimento de uma série de leis e princípios que permitem obter as equações que regem a dinâmica temporal de corpos rígidos sob a ação de forças. Essas técnicas, durante muito tempo, foram aplicadas ao estudo de sistemas físicos muito simples e sem interesses práticos, em grande parte devido aos dispendiosos processos de obtenção e solução das equações que o governam. Era comum o uso de técnicas gráficas, que permitiam a análise de sistemas compostos apenas por um limitado número de corpos (SHABANA, 2010).

Com o advento e o progresso dos computadores, as abordagens clássicas têm sido revisitadas, de modo a possibilitar a análise sistemática de sistemas complexos, constituídos por múltiplos corpos e juntas. Os conjuntos mecânicos modernos são, usualmente, bastante complexos e compostos por uma miríade de corpos interconectados por juntas e elementos de força (como molas, amortecedores e atuadores). Sistemas com essas características são referidos, na literatura moderna, por sistemas multicorpos.

Em um amplo espectro, os sistemas multicorpos podem ser classificados como rígidos ou flexíveis (SHABANA, 2013). Aos sistemas rígidos é feita a hipótese de que todos os componentes deformáveis são desprovidos de massa. Assim, corpos dotados de inércia são considerados como rígidos, de modo que as posições relativas entre suas partículas constituintes são mantidas constantes. Corpos como molas e amortecedores, que se deformam, têm suas massas desprezadas. Essa hipótese é bastante satisfatória em muitas aplicações práticas, especialmente para componentes vultosos e que operam sob baixas velocidades e solicitações. Para componentes leves e que operam sob altíssimas velocidades, se faz necessário levar em conta os efeitos da flexibilidade dos corpos. Estes são os sistemas multicorpos flexíveis, compostos por corpos deformáveis, cujo arranjo das partículas constituintes varia ao longo do tempo. Descrever essa variação da configuração do corpo torna a análise de corpos deformáveis muito mais difícil do que a de corpos rígidos.

Em um contexto de crescente competitividade mercadológica e maior responsabilidade ambiental, é essencial a busca por soluções e produtos com menor custo de produção e consumo energético reduzido. Isso tem levado à substituição de componentes injustificavelmente massivos por outros mais leves e, por conseguinte, mais flexíveis. Neste contexto, a dinâmica de multicorpos flexíveis emergiu no início dos anos setenta como um novo campo de estudos, em um cenário de crescente poder computacional e iminente necessidade de simular sistemas industriais e tecnológicos para os quais a deformação pode ter um efeito significativo na sua resposta dinâmica (SHABANA, 1997). Exemplos destes sistemas são veículos terrestres e espaciais, máquinas de precisão e mecanismos robóticos.

No campo da dinâmica de multicorpos, a descrição do movimento pode ser derivada utilizando-se um grande número de diferentes formulações (SHABANA, 1997). As mais usadas são a Formulação por Sistemas de Referência Flutuantes (FFRF, do inglês *Floating Frame of Reference Formulation*), a Formulação Vetorial de Grandes Rotações e a Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ANCF, do inglês *Absolute Nodal Coordinate Formulation*). Dentre as três, a formulação ANCF é a única capaz de produzir uma deformação exatamente nula sob movimentos arbitrários de corpo rígido e de lidar com grandes deformações.

A formulação ANCF é uma abordagem não-linear do método de elementos finitos que é baseada no uso de posições e inclinações globais como graus de liberdade do elemento. A descrição cinemática baseada nesta formulação, portanto, não inclui quaisquer graus de liberdade de rotação finita ou infinitesimal. Em seu lugar, a orientação da seção transversal do elemento finito é caracterizada utilizando-se os gradientes das coordenadas globais. O uso de coordenadas e inclinações globais, definidos em um sistema inercial, leva a uma matriz de massa que é constante, o que simplifica em muito a descrição e a solução das equações de movimento. Além disso, a representação da configuração do elemento em um plano global leva a uma descrição extremamente simplificada de uma grande quantidade de vínculos cinemáticos comumente encontrados na modelagem de sistemas mecânicos.

Por outro lado, a descrição das forças elásticas, que surgem internamente nos corpos em virtude de sua deformação, é bastante complexa, mesmo sob hipóteses bastante simplificadoras. A definição de forças internas não-conservativas, tais como forças de amortecimento, também é relativamente complexa, uma vez que a formulação é capaz de descrever de maneira exata a dinâmica de corpos rígidos. Se as forças de amortecimento não forem adequadamente formuladas, elas podem amortecer, também, movimentos de corpo rígido, o que é incongruente

com a proposição de um amortecimento interno (TAKAHASHI; SHIMIZU; SUZUKI, 2002; GARCÍA; A-VALLEJO; VALVERDE; DOMÍNGUEZ, 2005).

Embora tenha grande relevância científica e tecnológica, a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis é uma temática que não é tratada em cursos de graduação e atrai, ainda, relativamente poucos estudantes de pós-graduação. Em muito, isto se deve à grande exigência de preparo teórico em um espectro muito largo de áreas do conhecimento. É mandatório, por exemplo, sólidos conhecimentos de dinâmica de corpos rígidos, métodos numéricos para a solução de equações algébricas não-lineares, equações diferenciais ordinárias e parciais, diferenciação e integração numérica, além de noções de cálculo variacional e conhecimento em programação.

Nesse contexto, esta monografia tem o objetivo de apresentar, de forma elucidativa, os conceitos mais fundamentais relacionados à modelagem dinâmica de corpos flexíveis por meio da formulação ANCF. Virtualmente, todas as grandes áreas subjacentes a esse conteúdo são, em maior ou menor grau, delineadas no decorrer do texto. O principal objetivo do presente trabalho é servir de guia para estudantes iniciantes na temática de dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis. Cálculos matemáticos e discussões físicas que são, usualmente, suprimidos na literatura especializada são, aqui, apresentados e discutidos com maior riqueza de detalhes. Espera-se que este material consiga auxiliar àqueles que anseiam conhecer um pouco do elegante mundo da dinâmica de corpos flexíveis.

1.2 Organização da monografia

A monografia está organizada como segue.

No Capítulo 2, a dinâmica de corpos rígidos é revisitada por meio do formalismo Hamiltoniano. Inicialmente, uma breve exposição sobre o Cálculo Variacional é aprovionada, a qual serve de prelúdio para o Princípio de Hamilton. Em seguida, este último é apresentado, discutido e aplicado na dedução das equações de movimento de um mecanismo quatro-barras rígido.

No Capítulo 3, a formulação ANCF é apresentada e discutida em detalhes. As equações de movimento de um elemento de viga baseado nesta formulação são minuciosamente deduzidas. Também, são analisados diversos aspectos relacionados à obtenção dessas equações e ao modelo do elemento de viga.

Um método, denominado HHT-I3, para a integração das equações algébrico-diferenciais de movimento é apresentado no Capítulo 4. A implementação computacional desse método é exemplificada por meio da integração das equações de movimento do mecanismo quatro-barras rígido, deduzidas no Capítulo 2.

No Capítulo 5, a metodologia discutida no Capítulo 3 é aplicada a um mecanismo quatro-barras flexível. Diversas simulações são realizadas para esse mecanismo, e uma rica discussão quanto à formulação ANCF e ao método de integração é procedida.

A monografia finaliza no Capítulo 6, com as considerações finais sobre os resultados alcançados.

2 TÓPICOS DE CÁLCULO VARIACIONAL E DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS PELO PRINCÍPIO DE HAMILTON

Este capítulo começa com uma breve discussão sobre o Cálculo Variacional, o qual representa a fundação matemática sobre o qual o Princípio de Hamilton está posto. Para discutir os fundamentos do Cálculo Variacional, o problema da minimização da distância entre dois pontos é endereçado. Em seguida, o Princípio de Hamilton é apresentado em sua forma mais simples e modificado para levar em conta, por meio de uma função potencial, forças conservativas que agem em um sistema. Para exemplificá-lo, por fim, são deduzidas as equações de movimento de um mecanismo quatro-barras. O problema em questão permite, ainda, ilustrar o processo de extremização de funcionais sujeitos a vínculos, que é o caso encontrado na modelagem de sistemas mais complexos.

2.1 Tópicos de cálculo variacional

Uma das principais e mais recorrentes aplicações do cálculo diferencial é a avaliação dos valores extremos de uma função, isto é, de seus valores máximos e mínimos. O cálculo variacional tem uma aplicação análoga. Toma-se, por exemplo, um funcional $I[u(x)]$, que pode ser pensado como uma função (na verdade, um funcional), I , que depende de uma função $u(x)$ e, possivelmente, de suas derivadas $u'(x)$, $u''(x)$, etc. Enquanto uma função $f(x)$ toma um valor escalar e retorna também um escalar, um funcional toma uma função e retorna um escalar. É bastante natural (e importante) perguntar se existe e, caso exista, qual é a função $u(x)$ que faz com que o funcional $I[u(x)]$ adquira um valor extremo.

Sabe-se, do cálculo diferencial, que uma condição necessária (mas não suficiente) para que x_0 seja um ponto extremo de uma função $f(x)$ de uma variável é:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (2.1)$$

Ou, de maneira equivalente:

$$df = \frac{df}{dx} dx = 0, \text{ em } x = x_0 \quad (2.2)$$

Onde df é o diferencial total de f . O procedimento para funções de várias variáveis é semelhante: faz-se que o diferencial total df seja igual a zero.

De modo análogo, a função $u(x)$ para o qual o funcional $I[u(x)]$ é estacionário (possivelmente um extremo) é aquela que faz com que a variação de I , denotada por δI , seja igual a 0^1 . Enquanto d (ou ∂) representa a variação de uma função de ponto para ponto, δ representa a variação de um funcional de função para função. O uso dessa notação variacional faz com que o processo de encontrar extremos de funcionais seja, em certo grau, similar ao cálculo dos extremos de funções.

De maneira mais concreta, toma-se o seguinte funcional como exemplo:

$$I[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2} dx \quad (2.3)$$

Esse funcional representa o comprimento da curva $u(x)$, desde o ponto (x_0, u_0) até o ponto (x_1, u_1) . A cada curva $u(x)$ associa-se um comprimento específico que é, em geral, diferente daquele associado a uma outra curva. Para, por exemplo, $(x_0, u_0) = (0, 0)$ e $(x_1, u_1) = (2, 4)$, o comprimento das curvas $u_1(x) = 2x$ e $u_2(x) = x^2$ entre esses pontos é dado por:

$$I[u_1(x)] = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{du_1(x)}{dx}\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4} dx = 2\sqrt{5} \approx 4.47 \quad (2.4)$$

$$I[u_2(x)] = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{du_2(x)}{dx}\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \quad (2.5)$$

$$= \sqrt{17} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(4) \approx 4.65 \quad (2.6)$$

Fica evidente que, quando o funcional $I[u(x)]$ recebe entradas diferentes (funções diferentes), ele retorna escalares diferentes (distâncias diferentes). É de interesse saber qual é a função que faz com que o funcional retorne o seu valor extremo. De um ponto de vista geométrico, neste caso trivial, a resposta salta aos olhos. Dado que $I[u(x)]$ representa o comprimento de uma curva que conecta os pontos (x_0, u_0) e (x_1, u_1) , a curva que minimiza essa distância é a reta que passa por esses dois pontos: a própria função $u_1(x) = 2x$. Qualquer outra função admissível $u(x)$ irá gerar um escalar $I[u(x)]$ que é maior do que $2\sqrt{5}$. O cálculo variacional fornece ferramentas para responder a questões como essa, mesmo para problemas mais complexos.

¹ A função $u(x)$ para o qual δI vale zero é uma função estacionária, que não necessariamente maximiza ou minimiza $I[u]$. A determinação rigorosa envolve o cálculo da segunda variação de I , denotada por $\delta^2 I$ (LANCZOS, 1986). No entanto, muitas aplicações (como o Princípio de Hamilton) exigem apenas a determinação de funções estacionárias, que não necessariamente devem ser extremas. Por este motivo, aqui, os termos *extremo* e *estacionário* são usados de maneira intercambiável.

Para mostrar esse resultado usando os conceitos do cálculo variacional, toma-se a variação do funcional da Eq. 2.3:

$$\delta I = \delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (u')^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta \left(\sqrt{1 + (u')^2} \right) dx \quad (2.7)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \delta u' \right) dx \quad (2.8)$$

Em que $F(x, u, u') = \sqrt{1 + (u')^2}$. Como $\delta x = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, tem-se:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \delta u' dx = \int_{x_0}^{x_1} u'(1 + u')^{-1/2} \delta u' dx \quad (2.9)$$

Integrando por partes chega-se a:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} u'(1 + u')^{-1/2} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} u'(1 + u')^{-1/2} \frac{d}{dx} (\delta u) dx \quad (2.10)$$

$$= \left[u'(1 + u')^{-1/2} \delta u \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} [u'(1 + u')^{-1/2}] \delta u dx \quad (2.11)$$

Cabe aqui um comentário. Busca-se, neste exemplo, a função que minimiza a distância entre (x_0, u_0) e (x_1, u_1) . Por conseguinte, as funções que são possíveis candidatas à solução do problema devem, necessariamente, passar por esses mesmos pontos. Essas são as funções ditas admissíveis. Dizemos, neste caso, que $u(x)$ não varia em $x = x_0$ e em $x = x_1$, de modo que $\delta u(x = x_0) = 0$ e $\delta u(x = x_1) = 0$. Tem-se, portanto:

$$\delta I = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} [u'(1 + u')^{-1/2}] \delta u dx \quad (2.12)$$

De acordo com o Lema Fundamental do Cálculo das Variações (CASSEL, 2013), como $u(x)$ e sua variação δu são arbitrários, deve-se ter, em cada ponto do domínio $x_0 \leq x \leq x_1$:

$$\frac{d}{dx} [u'(1 + u')^{-1/2}] = 0 \quad (2.13)$$

Como usual, o processo de encontrar a função estacionária de um funcional passa pela solução de uma equação diferencial. Integrando a Eq. 2.13 e resolvendo para u' , tem-se:

² Existem casos em que os pontos x_0 e x_1 são conhecidos, mas os valores da função nesses pontos, $u(x_0)$ e $u(x_1)$, não são. Nesses casos $\delta u|_{x_0}^{x_1} \neq 0$. Há, também, problemas em que sequer o seu domínio (x_0 e x_1) são conhecidos, necessitando ser determinado junto com a função estacionária (CASSEL, 2013).

$$u'(1+u')^{-1/2} = c_1 \quad (2.14)$$

$$u' = c_1(1+u')^{1/2} \quad (2.15)$$

$$(u')^2 = c_1^2(1+u') \quad (2.16)$$

$$(u')^2 = \frac{c_1^2}{1-c_1^2} \quad (2.17)$$

$$u' = \left[\frac{c_1^2}{1-c_1^2} \right]^{1/2} = c_2 \quad (2.18)$$

Integrando novamente obtém-se:

$$u(x) = c_2x + c_3 \quad (2.19)$$

Aplicando-se as condições de contorno $u(x = x_0) = u_0$ e $u(x = x_1) = u_1$ chega-se a:

$$u(x) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (2.20)$$

Conforme esperado, trata-se de uma reta que passa pelos pontos (x_0, u_0) e (x_1, u_1) .

Esse simples exemplo pode, à primeira vista, não deixar claro o poder do Cálculo Variacional. Acontece, no entanto, que a formulação por primeiros princípios de algumas questões da física leva, de maneira natural, a formulações variacionais. Não raro, essa forma variacional do problema fornece um elegante *insight* quanto às sutilezas do processo físico subjacente a ele. Frequentemente, essas sutilezas não são evidentes quando se analisa a sua formulação diferencial, que é mais comumente apresentada e discutida. O Princípio de Hamilton, que é discutido a seguir, é um notório representante desse fenômeno.

2.2 O Princípio de Hamilton

O Princípio de Hamilton estabelece que a trajetória $\mathbf{r}(t)$ de uma partícula, sobre a qual atua uma força $\mathbf{f}(t)$, é a função estacionária do seguinte funcional (CASSEL, 2013):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.21)$$

Onde T é a energia cinética e $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r}$ é o trabalho virtual das forças que atuam sobre a partícula. Fala-se em trabalho virtual para levar em consideração todas as forças que agem no sistema, independente se elas realmente produzem trabalho, ou não. O trabalho virtual $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r}$ é o trabalho produzido por uma força real \mathbf{f} agindo sobre uma distância $\delta \mathbf{r}$, em uma direção que seja compatível com a cinemática do problema, isto é, que seja consistente com os vínculos impostos. A mesma forma do Princípio de Hamilton da Eq. 2.21 pode ser estabelecida para sistemas de partículas, corpos rígidos e mesmo corpos deformáveis, bastando que as expressões para T e \mathbf{f} sejam escritas de maneira adequada.

Da forma como a Eq. 2.21 está posta, \mathbf{f} deve contemplar todas as forças que agem no sistema, sejam elas conservativas ou não-conservativas. A uma força conservativa \mathbf{f}^c , no entanto, pode-se associar um escalar V de modo tal que \mathbf{f}^c pode ser escrito como o gradiente de V , isto é:

$$\mathbf{f}^c = -\nabla V \quad (2.22)$$

O sinal negativo é introduzido para que a força aja na partícula na direção em que a energia potencial V decresce (∇V tem a direção do máximo crescimento de V). Dessa maneira, a Eq. 2.21 pode ser reescrita como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}^c + \mathbf{f}^{nc}) \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.23)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^c \cdot \delta \mathbf{r} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.24)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} \nabla V \cdot \delta \mathbf{r} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.25)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.26)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.27)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.28)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.29)$$

Onde \mathbf{f}^{nc} leva em consideração as forças não-conservativas que agem no sistema. É claro que, se o sistema é conservativo, então:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.30)$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.31)$$

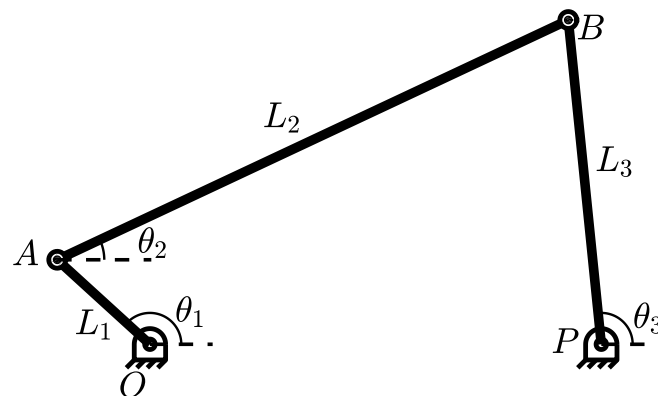
Onde $L = T - V$ é denominado Lagrangiano. Segundo Lanczos (LANCZOS, 1986), o Lagrangiano representa o excesso de energia cinética sobre a energia potencial. O funcional $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ é, por vezes, denominação *integral de ação*. O Princípio de Hamilton para sistemas conservativos, Eq. 2.31, estabelece que, de todos os possíveis caminhos de t_1 para t_2 , o caminho real é aquele para o qual a ação é uma função estacionária.

Na seção que sucede, o Princípio de Hamilton é exemplificado por meio da dedução das equações de movimento que regem a dinâmica temporal de um mecanismo quatro-barras rígido.

2.3 Equações de movimento de um mecanismo quatro-barras rígido pelo Princípio de Hamilton

Para ilustrar a aplicação do Princípio de Hamilton decide-se, de maneira auspiciosa, por deduzir as equações de movimento do mecanismo quatro-barras mostrado na Fig. 2.1. Esse mecanismo é estudado, ainda, em outros momentos ao longo da presente monografia.

Figura 2.1 – Mecanismo quatro-barras sob consideração.



Fonte: Do autor (2019).

É bastante claro que o mecanismo em questão apresenta um único grau de liberdade. Especificando-se, por exemplo, o ângulo θ_1 , a posição de um ponto genérico de um determinado *link* do mecanismo pode ser determinada. Uma vez que a determinação da equação de movimento do mecanismo passa pela escrita de seu Lagrangiano, deve-se ser capaz de escrever as energias cinética e potencial de cada um dos links em termos de uma única coordenada (θ_1 , por exemplo). No entanto, as expressões para essas energias são mais facilmente escritas em

termos de θ_1 , θ_2 e θ_3 , tal qual a seguir:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \quad (2.33)$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (2.34)$$

$$= m_1g\frac{L_1}{2}\sin\theta_1 + m_2g\left(L_1\sin\theta_1 + \frac{L_2}{2}\sin\theta_2\right) + m_3g\frac{L_3}{2}\sin\theta_3 \quad (2.35)$$

Os vínculos geométricos entre esses ângulos podem ser estabelecidos notando-se que:

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} - \mathbf{r}_{OP} - \mathbf{r}_{PB} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

Onde:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{OA} = \begin{Bmatrix} L_1 \cos \theta_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} L_2 \cos \theta_2 \\ L_2 \sin \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{r}_{OP} = \begin{Bmatrix} x_P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{PB} = \begin{Bmatrix} L_3 \cos \theta_3 \\ L_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Substituindo-se essas expressões na Eq. 2.36 chega-se a:

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} L_1 \cos \theta_1 - x_P + L_2 \cos \theta_2 - L_3 \cos \theta_3 \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Mesmo para um mecanismo simples como o quatro-barras em estudo, não é trivial escrever θ_2 e θ_3 como funções explícitas de θ_1 . De fato, nem mesmo o pacote de matemática simbólica do MATLAB foi capaz de fazê-lo. Por conseguinte, é bastante conveniente escrever as equações de movimento em termos de θ_1 , θ_2 e θ_3 e levar em conta os vínculos entre eles através de multiplicadores de Lagrange (CASSEL, 2013). Escreve-se, para tanto, a seguinte expressão para o Lagrangiano aumentado:

$$\tilde{L} = L - [\lambda_1 C_1(t, \mathbf{q}) + \lambda_2 C_2(t, \mathbf{q})] \quad (2.39)$$

$$\tilde{L} = L - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(t, \mathbf{q}) \quad (2.40)$$

$$\tilde{L} = T - V - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(t, \mathbf{q}) \quad (2.41)$$

Onde C_i é a linha i do vetor $\mathbf{C}(t, \mathbf{q})$, que está dado na Eq. 2.36, e $\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_1 \ \lambda_2\}^T$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange. Tem-se, portanto, um multiplicador de Lagrange associado a cada vínculo independente. De modo geral, os multiplicadores de Lagrange são funções de todas as coordenadas independentes (no caso, apenas o tempo t). A mesma expressão para o Princípio de Hamilton pode ser utilizada, meramente substituindo-se L por \tilde{L} nas Eq. 2.21 ou 2.29.

Calculando-se as velocidades dos centros de massa dos *links*, as suas energias cinéticas podem ser escritas como:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[\left(L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{2} \right)^2 + \left(L_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left(\frac{L_3}{2} \dot{\theta}_3 \right)^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \quad (2.44)$$

O Lagrangiano aumentado pode ser escrito, de modo explícito, como:

$$\tilde{L} = T - V - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(t, \mathbf{q}) \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[\left(L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{2} \right)^2 + \left(L_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left(\frac{L_3}{2} \dot{\theta}_3 \right)^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \quad (2.46)$$

$$- m_1g \frac{L_1}{2} \sin \theta_1 - m_2g \left(L_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \right) - m_3g \frac{L_3}{2} \sin \theta_3$$

$$- \lambda_1(L_1 \cos \theta_1 - x_P + L_2 \cos \theta_2 - L_3 \cos \theta_3) - \lambda_2(L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \theta_3)$$

Para emprego do Princípio de Hamilton calcula-se a variação de $\delta\tilde{L}$, tal qual a seguir:

$$\delta\tilde{L} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\theta_1} \delta\theta_1 + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\theta_2} \delta\theta_2 + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\theta_3} \delta\theta_3 + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}_1} \delta\dot{\theta}_1 + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}_2} \delta\dot{\theta}_2 + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}_3} \delta\dot{\theta}_3 \quad (2.47)$$

De onde usou-se o fato de que $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}$, pois os vínculos são todos holonômicos, de modo que $\mathbf{C}(t, \mathbf{q})$ não depende de $\dot{\mathbf{q}}$. Continuando o desenvolvimento da Eq. 2.47, tem-se:

$$\delta \tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \delta \dot{\theta}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \delta \dot{\theta}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \delta \dot{\theta}_3 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 - \lambda_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial C_1}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 \right) \\ &\quad - \lambda_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial C_2}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial C_2}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \delta \dot{\theta}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \delta \dot{\theta}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \delta \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

A Eq. 2.48 pode ser reescrita, de forma matricial, como:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{L} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} & \frac{\partial L}{\partial \theta_2} & \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} - \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Calculando-se a integral de $\delta \tilde{L}$, conforme o primeiro termo da Eq. 2.29, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{L} dt &= \\ \int_{t_1}^{t_2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} & \frac{\partial L}{\partial \theta_2} & \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} - \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} dt \end{aligned} \quad (2.51)$$

Integrando o último termo por partes tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{L} dt &= \\ \int_{t_1}^{t_2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} & \frac{\partial L}{\partial \theta_2} & \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} - \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$- \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right\} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} dt + \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right\} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.52)$$

Como de costume, considera-se que $\delta \mathbf{q}$ não varia em $t = t_1$ e $t = t_2$, de tal forma que a Eq. 2.52 fica dada por:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{L} dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \right\} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} - \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \} \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_3} \right] \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} \\ & - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right\} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} dt \end{aligned} \quad (2.53)$$

De forma compacta, a Eq. 2.53 pode escrita da seguinte maneira:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt \quad (2.54)$$

Trata-se, agora, o segundo termo da Eq. 2.29. De maneira geral, ele pode ser reescrito de modo que se tenha $\delta \mathbf{r}$ como função de $\delta \mathbf{q}$, tal qual segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (2.55)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 \right) dt = 0 \quad (2.56)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 + \mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_3} \delta \theta_3 \right) dt = 0 \quad (2.57)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} \quad \mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} \quad \mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_3} \right] \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{Bmatrix} dt = 0 \quad (2.58)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{q} dt = 0 \quad (2.59)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_e)^T \delta \mathbf{q} dt = 0 \quad (2.60)$$

\mathbf{Q}_e é o vetor de forças externas generalizadas, cujas componentes estão associadas às coordenadas generalizadas θ_1 , θ_2 e θ_3 . Do Lema Fundamental do Cálculo das Variações, já que $\delta \mathbf{q}$ é arbitrário, decorre da Eq. 2.60 que, em cada ponto do domínio:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_e = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

Substituindo-se a expressão para \mathbf{Q} da Eq. 2.54 chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{array} \right\} - \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_3} \right]^T \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \end{array} \right\} + \mathbf{Q}_e = 0 \quad (2.62)$$

Ou, de maneira mais compacta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (2.63)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (2.64)$$

Em que \mathbf{C}_q é o jacobiano do vetor de vínculos com relação ao vetor de coordenadas generalizadas. O termo $\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}$ na formulação da Lagrangiana aumentada pode ser visto como a força necessária para manter os vínculos cinemáticos. É claro que esse termo desaparece quando a restrição é satisfeita pois, se isso ocorre, $\mathbf{C}(t, \mathbf{q})$ é identicamente nulo e, portanto, \mathbf{C}_q também o é. Isso é ratificado pelo fato de o trabalho virtual das forças de reação ser nulo, já que os deslocamentos virtuais possíveis são ortogonais às forças de reação. Assim, a física subjacente ao problema mantém-se inalterada, enquanto que a trajetória é forçada a ser condizente com os vínculos impostos.

Calculando-se as derivadas presentes na Eq. 2.63 chega-se às três equações de movimento do sistema, escritas a seguir:

$$\begin{aligned} & \left(I_1 + m_1 \frac{L_1^2}{4} + m_2 L_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 + m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - L_1 \sin \theta_1 \lambda_1 + L_1 \cos \theta_1 \lambda_2 \\ & + (m_1 + 2m_2) g \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 = Q_{e1} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
& m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m_2 \frac{L_2^2}{4} \right) \ddot{\theta}_2 - L_2 \sin \theta_2 \lambda_1 + L_2 \cos \theta_2 \lambda_2 \\
& + m_2 g \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 - m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 = Q_{e_2}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\left(I_3 + m_3 \frac{L_3^2}{4} \right) \ddot{\theta}_3 + L_3 \sin \theta_3 \lambda_1 - L_3 \cos \theta_3 \lambda_2 + m_3 g \frac{L_3}{2} \cos \theta_3 = Q_{e_3} \tag{2.67}$$

Ou, de forma matricial,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{2.68}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} I_1 + m_1 \frac{L_1^2}{4} + m_2 L_1^2 & m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 \\ m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) & I_2 + m_2 \frac{L_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 + m_3 \frac{L_3^2}{4} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}_{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -L_2 \sin \theta_2 & L_3 \sin \theta_3 \\ L_1 \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_2 & -L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \mathbf{e} \\
\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} Q_{e_1} - (m_1 + 2m_2)g \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 - m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ Q_{e_2} - m_2 g \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 + m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\ Q_{e_3} - m_3 g \frac{L_3}{2} \cos \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

As Eq. 2.36 e 2.68 formam um conjunto acoplado de três equações diferenciais e duas equações algébricas, todas não-lineares, com variáveis desconhecidas θ_1 , θ_2 , θ_3 , λ_1 e λ_2 . Na literatura, equações desse tipo são chamadas de equações algébrico-diferenciais (EAD's). Um procedimento para a solução dessas equações é endereçado no Capítulo 3.

3 DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS PELA FORMULAÇÃO ANCF

Neste capítulo, a Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas, ANCF, é apresentada e discutida em detalhes. Inicialmente, os aspectos gerais relacionados a essa formulação são apresentados. Em seguida, as equações de movimento para um elemento finito ANCF genérico são deduzidas utilizando uma abordagem similar à apresentada no Capítulo 2. Em particular, um elemento de viga ANCF é detalhadamente discriminado. São expostos aspectos relacionados à sua cinemática e às suas energias cinética e potencial de deformação. Logo após, são exemplificados os processos de determinação do vetor de forças externas e das equações de vínculos. Por fim, as equações de movimento para o elemento de viga ANCF são pormenorizadamente deduzidas.

3.1 A Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ANCF)

A dinâmica de multicorpos flexíveis é o campo relacionado com a modelagem e análise computacional de corpos deformáveis sujeitos a vínculos e que sofrem grandes deslocamentos. Esses deslocamentos, que podem incluir grandes rotações, consideram tanto movimentos de corpo rígido quanto deformação elástica.

Conforme discutido na Seção 1.1, a dinâmica de multicorpos flexíveis surgiu no início dos anos setenta como resultado da necessidade de simular sistemas para os quais as deformações têm um efeito significativo na sua dinâmica. Em meados dos anos noventa, uma importante contribuição a esse campo de estudo foi dada com a introdução de uma nova abordagem, denominada Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas (ou ANCF, do inglês *Absolute Nodal Coordinate Formulation*), que parte de uma proposta bastante destoante das técnicas estudadas até aquele momento. Desde então, a formulação ANCF tem sido extensivamente desenvolvida e aplicada na análise da dinâmica de corpos flexíveis sujeitos a pequenas e/ou grandes deformações (SHABANA, 2013; SHABANA; HUSSIEN; ESCALONA, 1998; SHABANA, 1997).

Na formulação ANCF do método de elementos finitos, rotações finitas ou infinitesimais não são usadas como coordenadas nodais. Em vez disso, as posições absolutas e as inclinações globais são usadas como coordenadas do elemento. Isso permite que elementos estruturais tais como os de viga, placa e casca possam ser modelados como elementos isoparamétricos e ser usados para a obtenção da modelagem exata da dinâmica de corpo rígido (CHRISTENSEN; SHABANA, 1998).

Uma vez que as coordenadas do elemento são expressas diretamente em termos de posições e inclinações globais, pode-se mostrar que a matriz de massa correspondente é constante e semelhante àquela que aparece na dinâmica linear de estruturas. No entanto, pelo mesmo motivo, a energia de deformação do elemento e sua matriz de rigidez são funções altamente não-lineares das coordenadas nodais, mesmo no simples caso de um modelo linear elástico (BERZERI; SHABANA, 2000).

Como é mostrado adiante, a definição dos graus de liberdade e das funções de forma do elemento leva, de maneira bastante imediata, à sua matriz de massa. Talvez o grande desafio dessa formulação esteja relacionado à definição das forças elásticas e às questões que emergem a partir dessa definição, como problemas de *locking*, modos acoplados de deformação, efeitos de enrijecimento centrífugo, diferentes modelos constitutivos de materiais, entre outros. Extensas pesquisas têm sido, ainda hoje, realizadas nessas temáticas (XU; LIU; QU, 2019; BOZORGMEHRI et al., 2019; NACHBAGAUER, 2014).

A definição das forças elásticas na formulação ANCF envolve duas abordagens conceitualmente diferentes (NACHBAGAUER, 2014). Uma delas parte de uma formulação baseada na mecânica do contínuo. Nela, o trabalho virtual das forças elásticas é escrito como uma integral no volume do elemento, usando o tensor de deformações de Green–Lagrange e o segundo tensor de tensões de Piola–Kirchhoff, os quais configuram um par de conjugados energéticos (SURANA, 2016; REDDY, 2013). Na segunda abordagem, baseada nos conceitos da mecânica estrutural, as deformações e tensões generalizadas são definidas e escritas na linha elástica do elemento. Esse modelo, mais simplificado, leva a elementos de viga unidimensionais, os quais são significativamente menos custosos do ponto de vista computacional. A formulação baseada na mecânica do contínuo é, certamente, mais elegante e rica, no sentido de que fenômenos como modos acoplados de deformação, incluindo da seção transversal, são capturados. Esses elementos, no entanto, são conhecidos na literatura por apresentarem problemas de *locking*, além de possuírem muitos graus de liberdade por nó, o que requer mais tempo de processamento.

Nas seções que seguem, duas abordagens são discutidas. A primeira parte plenamente dos preceitos da mecânica estrutural para a definição da energia de deformação. A segunda abordagem utiliza conceitos de mecânica estrutural, mas com tensores de deformação provenientes da mecânica do contínuo, de modo que uma medida não-linear da relação deslocamento-deformação é adotada. Ambas as formulações apresentam custo computacional semelhante, com nós com mesma quantidade de graus de liberdade.

3.2 Equações de movimento para os elementos finitos ANCF através do Princípio de Hamilton

A dedução das equações de movimento do elemento finito modelado por meio da formulação ANCF pode ser realizada utilizando-se o Princípio de Hamilton (Eq. 2.29), tal qual no caso de corpos rígidos. Para tanto, o primeiro passo é escrever a Lagrangiana do elemento, o que passa pela determinação das expressões para as suas energias cinética e potencial. Considera-se, por generalidade, o caso de funcionais sujeitos a vínculos holonômicos, tal qual descrito e exemplificado na Seção 2.3. A expressão para a Lagrangiana aumentada é dada por:

$$\tilde{L} = L - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(t, \mathbf{e}) \quad (3.1)$$

$$\tilde{L} = T - V - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(t, \mathbf{e}) \quad (3.2)$$

Onde L é a Lagrangiana, T e V são as energias cinética e potencial, \mathbf{e} é o vetor contendo todos os graus de liberdade do elemento, $\mathbf{C}(t, \mathbf{e})$ é o vetor de vínculos holonômicos e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange. Calculando-se a variação de \tilde{L} tem-se:

$$\delta\tilde{L} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \delta\dot{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{e}) - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} \quad (3.4)$$

Calculando a integral de $\delta\tilde{L}$, conforme o primeiro termo da Eq. 2.29, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{e}) \right] dt \quad (3.5)$$

Integrando o último termo por partes e eliminando o termo do contorno chega-se a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right) \delta\mathbf{e} \right] dt \quad (3.6)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{e}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right) \right] \delta\mathbf{e} dt \quad (3.7)$$

Em seguida, escreve-se o segundo termo da Eq. 2.29, de maneira que a dependência de $\delta\mathbf{q}$ fique explícita, tal qual segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \delta\mathbf{r} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{e}} \delta\mathbf{e} dt \quad (3.8)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{e} dt \quad (3.9)$$

Pensando em termos de trabalhos virtuais, pode-se enxergar o termo $\mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{e}$ como representando o trabalho virtual realizado pelas forças externas generalizadas através de um deslocamento virtual $\delta \mathbf{e}$, isto é:

$$\delta W_e = \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{e} \quad (3.10)$$

Substituindo-se as Eq. 3.6 e 3.8 na Eq. 2.29 e utilizando o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.11)$$

Essa equação, denominada Equação de Lagrange, é bastante geral e pode ser utilizada tanto para corpos rígidos, quanto flexíveis. Para a obtenção das equações de movimento do elemento finito baseado na formulação ANCF resta, agora, escrever a expressão para L e realizar as diferenciações contidas na Eq. 3.11.

3.3 Formulação do elemento de viga ANCF

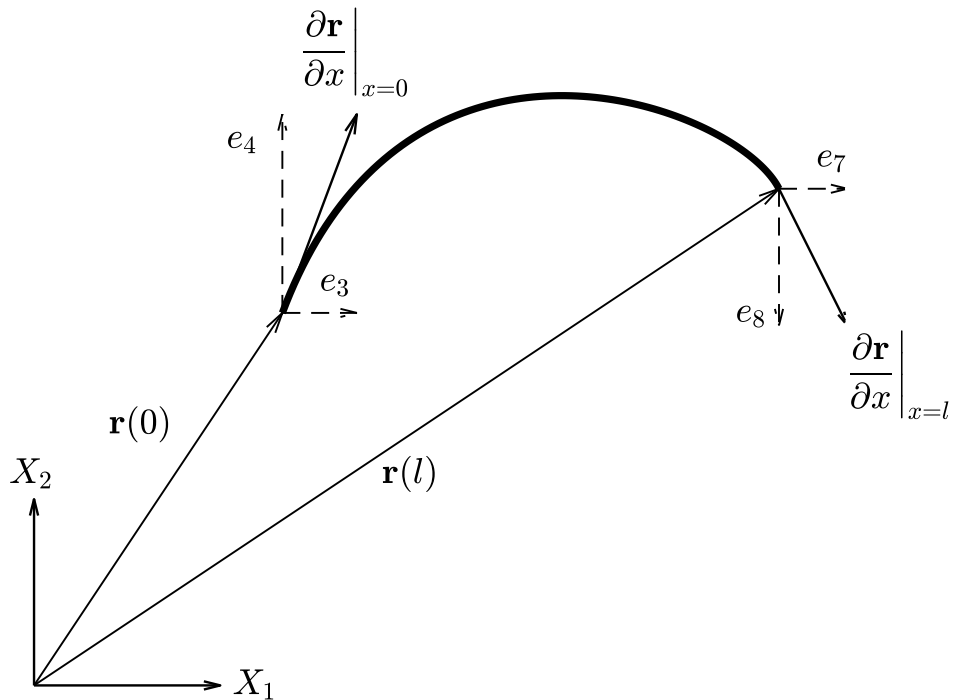
3.3.1 Cinemática do elemento

Conforme mencionado anteriormente, na formulação ANCF, as coordenadas nodais dos elementos são definidas em um sistema de coordenadas inercial (sistema $X_1 X_2$ da Fig. 3.1). Desta maneira, não é necessária qualquer transformação de coordenadas entre diferentes sistemas de referência. As coordenadas nodais do elemento representam as posições e as inclinações globais, de maneira que não é realizada qualquer suposição quanto à magnitude das rotações que os corpos podem realizar.

O vetor posição global, $\mathbf{r}(t, x)$, de um ponto da linha elástica de um elemento de viga unidimensional, como o mostrado na Fig. 3.1, é definido em termos das coordenadas nodais do elemento como:

$$\mathbf{r}(t, x) = \left\{ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right\} = \mathbf{S}(x) \mathbf{e}(t) \quad (3.12)$$

Figura 3.1 – Graus de liberdade nodais de uma viga pela formulação ANCF.



Fonte: Do autor (2019).

Onde $\mathbf{S}(x)$ é a matriz de funções de forma e $\mathbf{e}(t)$ é o vetor de coordenadas nodais do elemento, o qual é dado por:

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8]^T \quad (3.13)$$

Com

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1|_{x=0}, & e_2 &= r_2|_{x=0}, & e_3 &= \frac{\partial r_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}, & e_4 &= \frac{\partial r_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \\ e_5 &= r_1|_{x=l}, & e_6 &= r_2|_{x=l}, & e_7 &= \frac{\partial r_1}{\partial x}\bigg|_{x=l}, & e_8 &= \frac{\partial r_2}{\partial x}\bigg|_{x=l}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por simplicidade de notação, a dependência temporal de $\mathbf{r}(t, x)$, à qual decorre de $\mathbf{e}(t)$, é, a partir daqui, omitida. Utilizando um polinômio cúbico para interpolar os deslocamentos, a matriz \mathbf{S} fica dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 \\ 0 & 0 & l(\xi^3 - \xi^2) & 0 & 0 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & 0 & l(\xi^3 - \xi^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (3.15)$$

Por meio da Eq. 3.12 e da definição da matriz de funções de forma, Eq. 3.15, o conhecimento do vetor posição de um ponto qualquer da linha elástica da viga fica condicionado exclusivamente ao conhecimento do vetor $\mathbf{e}(t)$. Embora a dependência espacial de $\mathbf{r}(t, x)$ já seja, portanto, conhecida, a evolução temporal deve ser obtida por meio da integração de um conjunto de EAD's, como será mostrado.

3.3.2 Energia cinética do elemento

Para escrever a Lagrangiana L do elemento escreve-se, inicialmente, a sua energia cinética. Utilizando-se o vetor posição global de um ponto da linha elástica do elemento, dado pela Equação 3.12, a energia cinética do elemento finito pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho [\mathbf{S}(x) \dot{\mathbf{e}}(t)]^T [\mathbf{S}(x) \dot{\mathbf{e}}(t)] dV \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{e}}(t)^T \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) \dot{\mathbf{e}}(t) dV \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}(t)^T \left(\int_V \rho \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dV \right) \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}(t)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (3.20)$$

Onde:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dV \quad (3.21)$$

Utilizando-se a matriz $\mathbf{S}(x)$ definida anteriormente e considerando-se um elemento prismático e com densidade constante, chega-se à matriz de massa do elemento finito, que é simétrica, constante e semelhante àquela que aparece na dinâmica linear de estruturas. Realizando a integral anterior, obtém-se:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) dV = m \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 \\ & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} \\ & & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 \\ & & & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} \\ & \text{simétrico} & & & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 \\ & & & & & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} \\ & & & & & & \frac{l^2}{105} & 0 \\ & & & & & & & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.3.3 Energia potencial de deformação do elemento – Formulação 1

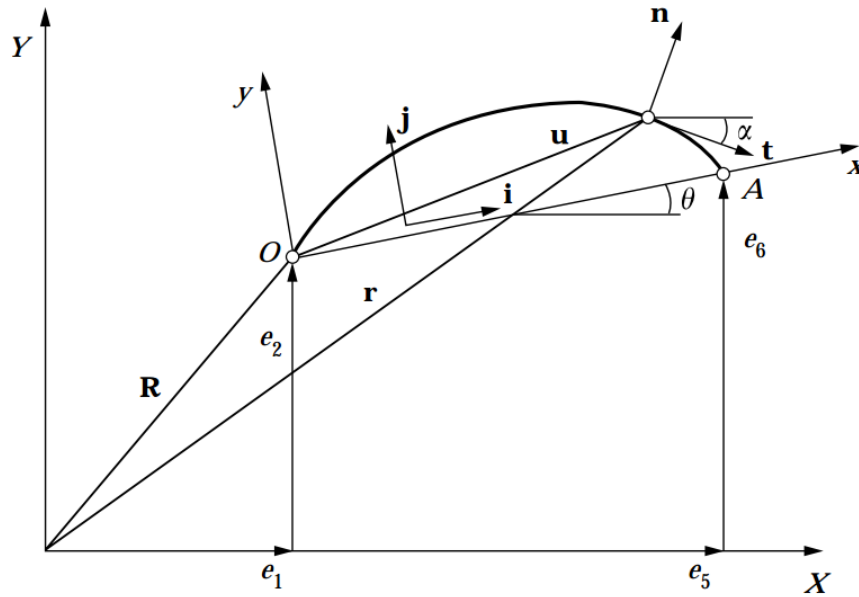
A próxima etapa na escrita da Lagrangiana do elemento finito envolve a determinação de uma expressão para a sua energia potencial de deformação. Diferentemente do caso de corpos rígidos tem-se, para os flexíveis, uma energia potencial (que é, portanto, recuperável) associada à sua deformação elástica. Embora a matriz de massa que foi obtida seja simples e constante, a energia potencial de deformação (e, portanto, as forças elásticas associadas) apresentam uma expressão relativamente complexa e não-linear, mesmo no simples caso de uma viga linear e elástica baseada na teoria clássica de vigas (Fig. 3.2), tal qual é mostrado à frente. Considerando-se a Fig. 3.2, o deslocamento, relativo ao ponto O , de um ponto P arbitrário da viga é dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_O = \begin{Bmatrix} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_{1_O}) \mathbf{e} \\ (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_{2_O}) \mathbf{e} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Onde \mathbf{S}_i é a linha i da matriz \mathbf{S} e \mathbf{S}_{i_O} é a linha i da matriz \mathbf{S} calculada no ponto O , isto é, $\mathbf{S}(x=0)$. Para definir estes deslocamentos no sistema de coordenadas do elemento, escrevem-se os versores \mathbf{i} e \mathbf{j} ao longo dos eixos do elemento:

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O|} \begin{Bmatrix} (\mathbf{S}_{1_A} - \mathbf{S}_{1_O}) \mathbf{e} \\ (\mathbf{S}_{2_A} - \mathbf{S}_{2_O}) \mathbf{e} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Figura 3.2 – Elemento de viga planar.



Fonte: Shabana, Hussien e Escalona (1998).

$$= \frac{1}{[(e_5 - e_1)^2 + (e_6 - e_2)^2]^{1/2}} \begin{Bmatrix} e_5 - e_1 \\ e_6 - e_2 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{j} = \begin{Bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} \quad (3.26)$$

Os deslocamentos longitudinais e transversais de um ponto da linha elástica da viga são dados por:

$$\mathbf{u}_d = \begin{Bmatrix} u_l \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{i} - x \\ \mathbf{u}^T \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 i_1 + u_2 i_2 - x \\ u_1 j_1 + u_2 j_2 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Com base nessas expressões e na teoria clássica de vigas, pode-se escrever a energia potencial de deformação do elemento de viga, devido aos deslocamentos longitudinais e transversais, como:

$$V = \int_0^l \left(EA \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (3.28)$$

Onde A e I são a área e o momento de inércia de área da seção transversal da viga, respectivamente, e E é o módulo de Young do material.

3.3.4 Energia potencial de deformação do elemento – Formulação 2

O modelo discutido anteriormente para a energia potencial de deformação apresenta, apesar das suas hipóteses simplificadores, uma forma relativamente complexa. Por meio do tensor de deformações de Cauchy, esse modelo utiliza medidas lineares de deslocamento-deformação, as quais partem do pressuposto de deformações (strains) infinitesimais. Além disso, as energias de deformação longitudinais e transversais são totalmente desacopladas.

Nesta subseção, um novo modelo é investigado. Ele foi proposto por Berzeri e Shabana (2000) e é derivado através de uma abordagem de mecânica do contínuo, sem a necessidade de se introduzir sistemas locais de coordenadas (tal qual foi feito anteriormente). Esse modelo leva em conta as não-linearidades na relação deslocamento-deformação, por meio do uso do tensor de deformações de Green-Lagrange.

Para tanto, escreve-se a deformação longitudinal ε_l do elemento, por meio do tensor de Green-Lagrange, tal qual a seguir:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' \mathbf{e} - 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_l \mathbf{e} - 1) \quad (3.30)$$

Assumindo um material isotrópico, a energia de deformação devido às deformações longitudinais pode ser calculada pela equação abaixo:

$$V_l = \frac{1}{2} \int_0^l EA \varepsilon_l^2 dx \quad (3.31)$$

Onde E é o módulo de Young e A é a área da seção transversal do elemento de viga. De maneira semelhante, a energia de deformação transversal pode ser escrita como:

$$V_t = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx \quad (3.32)$$

Em que I é o momento de área da seção transversal e κ é a curvatura da viga, que pode ser calculada por meio das fórmulas de Serret-Frenet, tal qual a seguir:

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dx^2} \right| = |\mathbf{r}''| = |\mathbf{S}'' \mathbf{e}| \quad (3.33)$$

$$\kappa^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' \mathbf{e} \quad (3.34)$$

Substituindo essa expressão para κ^2 na Eq. 3.32 tem-se:

$$V_t = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l EI \mathbf{e}^T \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' \mathbf{e} dx \quad (3.36)$$

$$= \mathbf{e}^T \left(\frac{1}{2} \int_0^l EI \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' dx \right) \mathbf{e} \quad (3.37)$$

Nesse modelo, a expressão para a energia total de deformação, composta pelas contribuições longitudinais e transversais, é dada por:

$$V = V_l + V_t = \frac{1}{2} \int_0^l [EA \varepsilon_l^2 + EI \kappa^2] dx \quad (3.38)$$

3.3.5 Vetor de forças externas generalizadas do elemento

Exemplifica-se, nesta seção, a escrita do vetor de forças externas generalizadas (último termo da Eq. 3.11) por meio de dois exemplos. Primeiro, chama-se atenção ao fato de que a expressão para a energia potencial da Eq. 3.28 leva em conta apenas a deformação elástica do elemento. A energia potencial gravitacional não é levada em conta. Assim, a força gravitacional deve ser incluída como uma força externa aplicada ao elemento. Para tanto, escreve-se o trabalho virtual realizado por uma força gravitacional distribuída ao longo do elemento, tal qual a seguir:

$$\delta W_e = \int_V \{0 \quad -\rho g\} \delta \mathbf{r} dV \quad (3.39)$$

$$= \int_V \{0 \quad -\rho g\} \delta(\mathbf{S}\mathbf{e}) dV \quad (3.40)$$

$$= \left(\int_V \{0 \quad -\rho g\} \mathbf{S} dV \right) \delta \mathbf{e} \quad (3.41)$$

$$= mg \left\{ 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{l}{12} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{l}{12} \right\} \delta \mathbf{e} \quad (3.42)$$

$$= \mathbf{Q}_e^T \delta \mathbf{e} \quad (3.43)$$

De onde surge que $\mathbf{Q}_e = mg \left\{ 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{l}{12} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{l}{12} \right\}^T$ é o vetor de forças externas generalizadas associado à força gravitacional distribuída ao longo do elemento finito.

Como segundo exemplo, escreve-se o vetor de forças externas generalizadas associado à aplicação de um momento M na extremidade inicial da viga (ponto O da Fig. 3.2). O trabalho virtual associado a esse momento é dado por $\delta W_e = M\delta\alpha$, onde α é o ângulo de rotação da seção transversal (Figura 3.2). Para que esse trabalho fique escrito em termos de um deslocamento virtual dos graus de liberdade do elemento, a rotação virtual $\delta\alpha$ deve ser escrita em função de $\delta\mathbf{e}$. Para tanto, escreve-se a orientação do sistema de coordenadas cuja origem é rigidamente acoplada a uma seção transversal (sistema $\mathbf{t}-\mathbf{n}$ da Figura 3.2), a qual pode ser definida usando-se a seguinte matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{d^{1/2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & -\frac{\partial r_2}{\partial x} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad d = \left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2 = (e_3)^2 + (e_4)^2 \quad (3.44)$$

Deste modo, tem-se:

$$\sin \alpha = \frac{1}{d^{1/2}} \frac{\partial r_2}{\partial x}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{d^{1/2}} \frac{\partial r_1}{\partial x} \quad (3.45)$$

Usando essas duas equações, pode-se chegar a:

$$\delta\alpha = \frac{\frac{\partial r_1}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial r_2}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)}{d} \quad (3.46)$$

$$= \frac{e_3\delta e_4 - e_4\delta e_3}{d} \quad (3.47)$$

Assim, tem-se:

$$\delta W_e = M\delta\alpha \quad (3.48)$$

$$= M \left(\frac{e_3\delta e_4 - e_4\delta e_3}{d} \right) \quad (3.49)$$

$$= \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{Me_4}{d} \quad \frac{Me_3}{d} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \delta\mathbf{e} \quad (3.50)$$

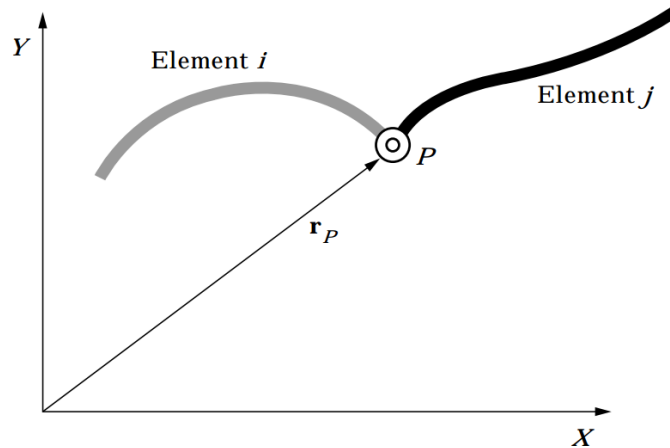
$$= \mathbf{Q}_e^T \delta\mathbf{e} \quad (3.51)$$

De onde segue que $\mathbf{Q}_e = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{Me_4}{d} \quad \frac{Me_3}{d} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T$ é o vetor de forças externas generalizadas associado a um momento aplicado à extremidade inicial do elemento finito.

3.3.6 Formulação das restrições

Na formulação ANCF, a definição das equações de vínculo que descrevem restrições geométricas entre diferentes corpos torna-se bastante simples.

Figura 3.3 – Junta de revolução entre dois elementos.



Fonte: Shabana, Hussien e Escalona (1998).

Considera-se, por exemplo, o vínculo mostrado na Figura 3.3, que expressa um junta de revolução entre dois elementos i e j . Tal vínculo pode ser escrito como:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j \quad (3.52)$$

Isto é, o vetor posição do ponto P é o mesmo visto tanto pelo elemento i quanto pelo elemento j . Reescrevendo essa equação em termos das coordenadas nodais, chega-se a:

$$\mathbf{S}_P^i \mathbf{e}^i = \mathbf{S}_P^j \mathbf{e}^j \quad (3.53)$$

O ponto P corresponde à extremidade final do elemento i e também à extremidade inicial do elemento j , de modo que $\mathbf{S}_P^i = \mathbf{S}^i(x=l)$ e $\mathbf{S}_P^j = \mathbf{S}^j(x=0)$. Assim, as equações de vínculo se reduzem ao seguinte conjunto de equações lineares:

$$\begin{Bmatrix} e_5^i \\ e_6^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1^j \\ e_2^j \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Ou:

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{e}) = \begin{Bmatrix} e_5^i - e_1^j \\ e_6^i - e_2^j \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.55)$$

Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) deduzem as equações de restrição para uma série de outros vínculos entre elementos de viga tridimensionais. Conforme é mostrado, essas expressões são, em sua maioria, muito mais simples do que as expressões para esses mesmos vínculos escritas utilizando-se a formulação FFRF ou a dinâmica de corpos rígidos.

3.3.7 Equações de movimento para o elemento de viga ANCF

A Lagrangiana para o elemento de viga pode ser escrita utilizando as expressões das Equações 3.20 e 3.28 ou 3.38 para as energias cinética e potencial, respectivamente. Da Eq. 3.20, nota-se que a energia cinética do elemento não depende das coordenadas generalizadas, isto é, $T \neq T(\mathbf{e})$. A energia potencial, por sua vez, não depende das velocidades generalizadas, conforme mostram as Eq. 3.28 e 3.38, isto é, $V \neq V(\dot{\mathbf{e}})$. Assim, a Eq. de Lagrange (Eq. 3.11) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T - \left(\frac{\partial (-V)}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.58)$$

A partir da Eq. 3.20, segue que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) \right]^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}^T \right]^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.61)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{e}}) + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.62)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.63)$$

De onde usou-se o fato de que a matriz \mathbf{M} é constante e simétrica.

O termo $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T$, por sua vez, rememora o termo da Eq. 2.22. De fato, dado que V representa uma energia potencial, deve-se ter uma força conservativa \mathbf{Q}_k associada a esse

potencial, de maneira que $\mathbf{Q}_k = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T$. Uma vez que V representa uma energia potencial de deformação, \mathbf{Q}_k é denominado vetor de forças elásticas do elemento.

Uma vez que foram obtidas duas expressões diferentes para V (a partir das Formulações 1 e 2), tem-se um vetor de forças elásticas diferente associado a cada uma delas. Esses vetores são deduzidos a seguir.

3.3.7.1 Vetor de forças elásticas para a Formulação 1

Utilizando as Eq. 3.24 e 3.27 na Eq. 3.28, pode-se mostrar (ESCALONA; HUSSIEN; SHABANA, 1998; SHABANA; HUSSIEN; ESCALONA, 1998) que a expressão para o vetor de forças elásticas pode ser escrita em termos das seguintes integrais (que são constantes):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{11} &= \frac{EA}{l} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} \right) \right] d\xi, & \mathbf{A}_{12} &= \frac{EA}{l} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} \right) \right] d\xi \\
 \mathbf{A}_{21} &= \frac{EA}{l} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} \right) \right] d\xi, & \mathbf{A}_{22} &= \frac{EA}{l} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} \right) \right] d\xi \\
 \mathbf{B}_{11} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_1}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_1}{\partial \xi^2} \right) \right] d\xi, & \mathbf{B}_{12} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_1}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_2}{\partial \xi^2} \right) \right] d\xi \\
 \mathbf{B}_{21} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_2}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_1}{\partial \xi^2} \right) \right] d\xi, & \mathbf{B}_{22} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_2}{\partial \xi^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}_2}{\partial \xi^2} \right) \right] d\xi \\
 \mathbf{A}_1 &= EA \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} \right)^T \right] d\xi, & \mathbf{A}_2 &= EA \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} \right)^T \right] d\xi
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Usando-se essas integrais, o vetor de forças elásticas generalizadas do elemento pode ser calculado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_k &= \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \mathbf{A}_{11} \mathbf{e} i_1^2 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{e} i_2^2 + (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21}) \mathbf{e} i_1 i_2 - \mathbf{A}_1 i_1 - \mathbf{A}_2 i_2 + \mathbf{B}_{11} \mathbf{e} j_1^2 + \mathbf{B}_{22} \mathbf{e} j_2^2 \\
 &+ (\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{21}) \mathbf{e} j_1 j_2 + (\mathbf{e}^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{e} i_1 + 1/2 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21}) \mathbf{e} i_2 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{e}) \left(\frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \\
 &+ (\mathbf{e}^T \mathbf{A}_{22} \mathbf{e} i_2 + 1/2 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21}) \mathbf{e} i_1 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{e}) \left(\frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \\
 &+ (\mathbf{e}^T \mathbf{B}_{11} \mathbf{e} j_1 + 1/2 \mathbf{e}^T (\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{21}) \mathbf{e} j_2) \left(\frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \\
 &+ (\mathbf{e}^T \mathbf{B}_{22} \mathbf{e} i_2 + 1/2 \mathbf{e}^T (\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{21}) \mathbf{e} j_1) \left(\frac{\partial j_2}{\partial \mathbf{e}} \right)^T
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Onde:

$$\left(\frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{e}}\right)^T = \left(\frac{\partial j_2}{\partial \mathbf{e}}\right)^T \quad (3.66)$$

$$= D[-(e_6 - e_2)^2 \quad (e_5 - e_1)(e_6 - e_2) \quad 0 \quad 0 \quad (e_6 - e_2)^2 \quad -(e_5 - e_1)(e_6 - e_2) \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\left(\frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{e}}\right)^T = -\left(\frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{e}}\right)^T \quad (3.67)$$

$$= D[(e_5 - e_1)(e_6 - e_2) \quad (e_5 - e_1)^2 \quad 0 \quad 0 \quad -(e_5 - e_1)(e_6 - e_2) \quad (e_5 - e_1)^2 \quad 0 \quad 0]^T$$

E:

$$D = \frac{1}{((e_5 - e_1)^2 + (e_6 - e_2)^2)^{3/2}} \quad (3.68)$$

Dessas expressões, fica evidente a dependência fortemente não-linear do vetor de forças elásticas com relação aos graus de liberdade nodais.

3.3.7.2 Vetor de forças elásticas para a Formulação 2

Utilizando as Eq. 3.31 e 3.30, a expressão para o vetor de forças elásticas longitudinais pode ser escrita como:

$$\mathbf{Q}_l = \left(\frac{\partial V_l}{\partial \mathbf{e}}\right)^T = \left[\frac{1}{2} \int_0^l EA 2\varepsilon_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \mathbf{e}} dx\right]^T \quad (3.69)$$

$$= \left[\int_0^l EA \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_l \mathbf{e} - 1)\right] dx\right]^T \quad (3.70)$$

$$= \left[\int_0^l EA \varepsilon_l \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{S}_l + \mathbf{S}_l^T)\right) dx\right]^T \quad (3.71)$$

$$= \left[\int_0^l EA \varepsilon_l (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_l^T) dx\right]^T \quad (3.72)$$

$$= \int_0^l EA \varepsilon_l \mathbf{S}_l \mathbf{e} dx = \mathbf{K}_l \mathbf{e} \quad (3.73)$$

De onde usou-se o fato de \mathbf{S}_l , que foi definido na Eq. 3.30 como $\mathbf{S}_l = \mathbf{S}'^T \mathbf{S}'$, é simétrico.

Identifica-se, a partir da Eq. 3.73, a matriz de rigidez longitudinal do elemento, a qual é dada por:

$$\mathbf{K}_l = \int_0^l EA \varepsilon_l \mathbf{S}_l dx \quad (3.74)$$

O cálculo analítico dessa integral produz a expressão simbólica dada por:

$$\mathbf{K}_l = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ & \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} \\ & & \mathcal{D} & -\mathcal{B} & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ & & & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} \\ & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ \text{simétrico} & & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & \mathcal{F} & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Onde:

$$d_x = e_5 - e_1, \quad d_y = e_6 - e_2, \quad d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad (3.76)$$

$$a_x = le_3, \quad a_y = le_4, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3.77)$$

$$b_x = le_7, \quad b_y = le_8, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \quad (3.78)$$

E:

$$\mathcal{A} = \frac{3}{70l^2} (a^2 + b^2 - 14l^2 - 6a_x d_x - 6b_x d_x - 6a_y d_y - 6b_y d_y + 24d^2) \quad (3.79)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{280l} (b^2 - a^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14l^2 - 24a_x d_x - 24a_y d_y + 36d^2) \quad (3.80)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{280l} (a^2 - b^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14l^2 - 24b_x d_x - 24b_y d_y + 36d^2) \quad (3.81)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{420} (12a^2 + b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28l^2 + 3a_x d_x - 3b_x d_x + 3a_y d_y - 3b_y d_y + 18d^2) \quad (3.82)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{840} (3a^2 + 3b^2 - 4a_x b_x - 4a_y b_y - 14l^2 + 6a_x d_x + 6b_x d_x + 6a_y d_y + 6b_y d_y) \quad (3.83)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{420} (a^2 + 12b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28l^2 - 3a_x d_x + 3b_x d_x - 3a_y d_y + 3b_y d_y + 18d^2) \quad (3.84)$$

Evidentemente, essa matriz é altamente não-linear, dependendo explicitamente das coordenadas do vetor de graus de liberdade do elemento, \mathbf{e} . Esse complexo resultado, porém, não carrega qualquer hipótese simplificadora quando à magnitude das deformações.

De modo semelhante, calcula-se o vetor de forças elásticas transversais generalizadas a partir da Eq. 3.37:

$$\mathbf{Q}_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \left(\int_0^l EI \mathbf{S}''^T \mathbf{S}'' dx \right) \mathbf{e} \quad (3.85)$$

$$= \mathbf{K}_t \mathbf{e} \quad (3.86)$$

De onde identifica-se que a matriz de rigidez transversal é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \int_0^l EIS''^T \mathbf{S}'' dx \quad (3.87)$$

Que é, evidentemente, independente de \mathbf{e} . A integração simbólica produz:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l & 0 \\ & 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l \\ & & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 & 0 \\ & & & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 \\ & & & & 12 & 0 & -6l & 0 \\ \text{simétrico} & & & & & 12 & 0 & -6l \\ & & & & & & 4l^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Essa matriz é linear e semelhante àquela que aparece na dinâmica estrutural linear.

O vetor de forças elásticas para a Formulação 2, que leva em conta as contribuições longitudinais e transversais, fica dado por:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_l + \mathbf{Q}_t \quad (3.89)$$

$$= (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_t) \mathbf{e} \quad (3.90)$$

Tem-se, agora, todos os ingredientes necessários para se construir as equações de movimento de sistemas flexíveis, conforme verifica-se pela Eq. 3.63.

4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICO-DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO

Este capítulo é devotado à solução das equações algébrico-diferenciais (EAD's) de movimento que surgem na modelagem de sistemas multicorpos. Inicialmente é feita uma explanação sobre o conceito de índice de uma EAD. Em seguida, as principais técnicas de solução disponíveis na literatura são apresentadas e comparadas. Atenção especial é dada ao método HHT-I3, que é escolhido no presente trabalho como método de integração de EAD's. Por fim, a sua implementação computacional é detalhadamente apresentada por meio da integração das equações de movimento do mecanismo quatro-barras rígido, que foram deduzidas por meio do Princípio de Hamilton no Capítulo 2.

4.1 Técnicas de solução das equações algébrico-diferenciais de sistemas multicorpos

As EAD's que surgem na modelagem de sistemas multicorpos, tanto rígidos quanto flexíveis, podem ser representadas, de maneira geral, como:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.1)$$

Essas equações tratam-se de EAD's de índice 3. Na teoria das EAD's, o índice é usado como uma medida da distância de uma EAD ao seu conjunto de equações puramente diferenciais relacionado. Dado que uma EAD envolve uma combinação de equações algébricas e diferenciais, é natural esperar que consecutivas derivações dessas equações com relação à variável independente irão gerar um sistema de equações puramente diferenciais. O número de diferenciações necessárias para que isso ocorra é o índice da EAD. Um sistema de equações diferenciais ordinárias apresenta, portanto, índice 0.

Conforme dissertado, a Eq. 4.1 possui índice 3. Isto é, para que ela se torne um sistema somente de equações diferenciais, a equação de movimento deve ser diferenciada uma vez (para que $\boldsymbol{\lambda}$, que é função do tempo, não apareça como uma variável algébrica, mas como $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$) e as equações de vínculo devem ser diferenciadas duas vezes (para que surjam as derivadas segundas das coordenadas generalizadas \mathbf{q}).

Alguns solvers de equações diferenciais ordinárias (EDO's) também podem lidar com EAD's de índice máximo 1. É o caso, por exemplo, dos solvers ODE15S e ODE23T do MA-

TLAB. Assim, através de um processo de redução de índice, a Eq. 4.1 pode ser solucionada usando-se esses solvers. Para tanto, as equações de vínculo são diferenciadas duas vezes. A primeira diferenciação produz:

$$\frac{d\mathbf{C}(t, \mathbf{q})}{dt} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Diferenciando novamente chega-se a:

$$\frac{d(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2 \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = - \frac{\partial(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2 \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

Ou, de maneira mais compacta:

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d \quad (4.10)$$

A equação de movimento e a Eq. 4.10 formam, juntas, o seguinte sistema de EAD's de índice 1:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_d \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Embora essa metodologia seja bastante simples, o processo de diferenciação das equações algébricas pode remover alguns vínculos do sistema, levando a soluções incorretas. Termos constantes e lineares, por exemplo, desaparecem durante o processo de dupla diferenciação. Em virtude da acumulação dos erros de integração, esse efeito é mais ressaltado para moderados ou grandes tempos de simulação, bem como para condições iniciais de baixa acurácia, que não respeitam os vínculos cinemáticos. Existem alguns procedimentos desenvolvidos para minimi-

zar esse fenômeno. Devido à sua simplicidade e facilidade de implementação, o mais comum deles é o Método de Estabilização de Baumgarte (BAUMGARTE, 1972; NIKRAVESH, 1988). Ele envolve, no entanto, parâmetros de realimentação que são de difícil escolha, usualmente envolvendo processos de tentativa e erro (FLORES et al., 2011).

Um segundo método para a integração das equações de movimento envolve a separação das coordenadas generalizadas em dependentes e independentes. Isso pode ser procedido através da identificação de uma submatriz não-singular da matriz \mathbf{C}_q utilizando-se, para tal, técnicas como decomposição LU, eliminação de Gauss, decomposição QR, entre outras (WEHAGE; HAUG, 1982; SHABANA, 2013). A partir disso, mostra-se (SHABANA, 2013) que o vetor de forças de vínculo, $\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}$, é sistematicamente eliminado das equações de movimento, restando apenas um sistema de EDO's, que pode ser integrado no tempo utilizando-se integradores comuns. Conhecidas as variáveis independentes, as coordenadas dependentes podem ser determinadas por meio da solução do sistema de equações não-lineares $\mathbf{C}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$ e as velocidades dependentes podem ser determinadas através da solução do sistema de equações lineares da Eq. 4.4. Por causa de possíveis singularidades do sistema mecânico, o conjunto de coordenadas independentes pode não ser constante durante o processo de integração, de maneira que a sua consistência deve ser checada e, caso necessário, um novo conjunto deve ser determinado.

Uma terceira alternativa é solucionar a Eq. 4.1 diretamente para \mathbf{q} e para $\boldsymbol{\lambda}$ por meio de técnicas específicas para EAD's de índice 3. Um desses métodos é o chamado método de Hilber-Hughes-Taylor de Índice 3, ou HHT-I3 (NEGRUT et al., 2005; NEGRUT et al., 2007; HUSSEIN; NEGRUT; SHABANA, 2008; NEGRUT; JAY; KHUDE, 2009; JAY; NEGRUT, 2009), versão modificada do método HHT, sendo esse último extensivamente difundido no campo da dinâmica de estruturas. O HHT-I3, que é um método implícito, apresenta uma série de características que são desejáveis quando se lida com sistemas multicorpos flexíveis, como convergência de segunda ordem (ARNOLD; BRÜLS, 2007) e a capacidade de introduzir um controlável amortecimento numérico na solução, de modo a eliminar as contribuições em altas frequências sem afetar os modos de baixa frequência (NEGRUT et al., 2005). É um método adequado, portanto, para lidar com equações diferenciais rígidas, as quais são caracterizadas por apresentar solução com diferentes escalas de tempo. Por esses atributos e pela possibilidade de se resolver a Eq. 4.1 diretamente, sem que seja necessário identificar os graus de liberdade do sistema, esse método é adotado no presente trabalho. Na Seção a seguir são discutidos os aspectos teóricos relacionados ao HHT-I3.

4.2 O método de Hilber-Hughes-Taylor para DAE's de Índice 3 (HHT-I3)

O precursor do HHT-I3 é o método de Newmark, inicialmente proposto para a solução de equações puramente diferenciais no campo da dinâmica de estruturas. O método de Newmark introduz duas equações, baseadas em expansões em série de Taylor, que relacionam as posições e as velocidades em um instante t_{n+1} a essas mesmas grandezas no instante t_n , mas também à aceleração no instante t_{n+1} , tal qual mostrado a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \end{cases} \quad (4.12)$$

Em que $h = t_{n+1} - t_n$ é o passo de integração e β e γ são dois parâmetros assumidos que, para assegurar convergência, devem satisfazer as seguintes condições:

$$\gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \leq \frac{(\gamma + \frac{1}{2})^2}{4} \quad (4.13)$$

Essas expressões são resolvidas juntamente com as equações de movimento em t_{n+1} , escritas a seguir, gerando um método implícito:

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} + (\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda})_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1} \quad (4.14)$$

O método de Newmark, no entanto, não garante convergência de segunda ordem juntamente com estabilidade-A e um nível desejado de amortecimento numérico (NEGRUT et al., 2007). O HHT-I3, por sua vez, tem a capacidade de eliminar as oscilações indesejadas de altas frequências, enquanto garante estabilidade e convergência de segunda ordem. Ele é obtido usando-se as mesmas expressões de discretização da Eq. 4.12, mas alterando as equações de movimento da seguinte maneira:

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} + (1+\alpha)(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_{n+1} - \alpha(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_n = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

O método está posto na simples ideia de reciclar as fórmulas de integração de Newmark, mas alterar ligeiramente as equações de movimento de modo a considerar o conjunto de forças atuando no sistema em dois pontos de integração consecutivos. Para que se obtenha uma solução

estável, os parâmetros α , β e γ devem ser tais que:

$$-0.3 \leq \alpha \leq 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \quad (4.16)$$

O valor de α controla a quantidade de amortecimento numérico. A escolha $\alpha = 0$ leva ao método trapezoidal, que não possui qualquer amortecimento numérico. Quanto mais negativo for α , mais amortecimento é adicionado à solução.

Enquanto que a Eq. 4.15 depende de $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$, \mathbf{q}_{n+1} e $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$, a Eq. 4.12 pode ser utilizada na Eq. 4.15 para que se obtenha equações dependentes apenas de $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$. O resultado é um conjunto de equações algébricas não-lineares que pode ser resolvido, juntamente com as equações de vínculo avaliadas em t_{n+1} , para $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ utilizando-se o método de Newton-Raphson. A discretização de Newmark tem papel central no intuito de escrever qualquer equação que possua $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ e \mathbf{q}_{n+1} como função de $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$.

Definem-se, por conveniência, as seguintes equações a serem resolvidas por meio do método de Newton-Raphson:

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(1)} = \frac{1}{1 + \alpha} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} + (\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_{n+1} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_n \\ \mathbf{F}^{(2)} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{C}(\mathbf{q}_{n+1}, t_{n+1}) \end{cases} \quad (4.17)$$

A equação de movimento foi toda dividida por $(1 + \alpha)$ apenas por conveniência. Já a equação de vínculos foi escalada pelo fator $\frac{1}{\beta h^2}$ para melhorar o número de condicionamento da matriz jacobiana (presente na Eq. 4.18) quando $h \rightarrow 0$ (NEGRUT et al., 2005; NEGRUT et al., 2007). A solução da Eq. 4.17 pelo método de Newton-Raphson requer, na iteração (k) , a construção e solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{n+1}} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \end{bmatrix}^{(k+1)} - \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \end{bmatrix}^{(k)} \right) = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)} \\ \mathbf{F}^{(2)} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.18)$$

Alguns dos jacobianos presentes na Eq. 4.18 podem ser calculados analiticamente. Da Eq. 4.17 segue diretamente que:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{n+1}} = (\mathbf{C}_q^T)_{n+1} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \frac{1}{\beta h^2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \frac{1}{\beta h^2} (\mathbf{C}_{\mathbf{q}})_{n+1} \beta h^2 \mathbf{I} = (\mathbf{C}_{\mathbf{q}})_{n+1} \quad (4.21)$$

Onde $\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \beta h^2 \mathbf{I}$ é obtido a partir da Eq. 4.12. Percebe-se, a partir das Eq. 4.19 e 4.21, que se a equação de vínculos não tivesse sido escalada por $1/(\beta h^2)$, os respectivos jacobianos seriam dados por:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{n+1}} = (\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}})_{n+1} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \beta h^2 (\mathbf{C}_{\mathbf{q}})_{n+1} \quad (4.23)$$

Isso tornaria a matriz jacobiana mal-condicionada quando $h \rightarrow 0$, isto é, para passos de integração muito pequenos.

Por outro lado, o jacobiano $\frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}}$ precisa ser, em geral, calculado por meio de diferenciação numérica. A partir da Eq. 4.17 escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} &= \frac{1}{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}] + \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_{n+1}] - \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_n] \\ &= \frac{1}{1+\alpha} (\mathbf{M})_{n+1} + \frac{1}{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}] \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda})_{n+1}] \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}] \frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} - \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}] \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} \\ &= \frac{1}{1+\alpha} (\mathbf{M})_{n+1} + \frac{\beta h^2}{1+\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}] + \beta h^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda})_{n+1}] \\ &\quad - \beta h^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}] - \gamma h \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Onde, a partir da Eq. 4.12, obtém-se $\frac{\partial \mathbf{q}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \beta h^2 \mathbf{I}$ (conforme já reportado) e $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}} = \gamma h \mathbf{I}$.

Necessita-se calcular, portanto, o jacobiano das forças de inércia com relação às coordenadas generalizadas, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}]$, o jacobiano das forças de reação com relação às coordenadas generalizadas, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda})_{n+1}]$, e os jacobianos das forças aplicadas (que incluem tanto forças internas elásticas e dissipativas quanto forças externas) com relação às coordena-

das e velocidades generalizadas, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}]$ e $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}]$, respectivamente. No caso particular da formulação ANCF, o jacobiano das forças de inércia com relação às coordenadas generalizadas é identicamente nulo, uma vez que a matriz de massa é constante. No caso da formulação FFRF (SHABANA, 2013) e mesmo da dinâmica de corpos rígidos, esse termo é não-nulo (vide Eq. 2.69). Esses jacobianos podem ser calculados numericamente por meio do método de diferenças centradas. Genericamente, tem-se que a componente ij do jacobiano $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$ é aproximada por:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \quad (4.25)$$

$$\approx \frac{F_i(q_1, \dots, q_j + \varepsilon, \dots, q_P) - F_i(q_1, \dots, q_j - \varepsilon, \dots, q_P)}{2\varepsilon} \quad (4.26)$$

Em que P é o número de elementos do vetor \mathbf{q} e ε é um número suficientemente pequeno.

É oportuno destacar que o HHT-I3 leva em conta, de maneira explícita, apenas os vínculos para as coordenadas generalizadas. Os vínculos para as velocidades generalizadas (Eq. 4.4) não são explicitamente resolvidos e podem, para tempos de simulação muito longos, não ser satisfeitos. A extensão do HHT-I3 que leva em conta também os vínculos para as velocidades, bem como outros eventuais vínculos não-holonômicos, é bastante direta e está amplamente reportada na literatura (JAY; NEGRUT, 2009; NEGRUT; JAY; KHUDE, 2009). Esses métodos não são adotados aqui em virtude do aumento do custo computacional associado à incorporação de mais equações.

A seguir são discutidas as estratégias de implementação do método HHT-I3 para a solução das equações algébrico-diferenciais de movimento, bem como a sua exemplificação para o mecanismo rígido de quatro-barras discutido na Seção 2.3.

4.3 Implementação computacional do HHT-I3 e integração das equações algébrico-diferenciais do mecanismo quatro-barras rígido

Por uma questão de clareza, as equações obtidas na Seção 2.3 e que são relevantes para a solução do mecanismo quatro-barras são aqui repetidas.

O vetor de restrições holonômicas, que descreve a conectividade entre os corpos, é dado por (Eq. 2.38):

$$\mathbf{C}(t, \mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} L_1 \cos \theta_1 - x_P + L_2 \cos \theta_2 - L_3 \cos \theta_3 \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

As equações de movimento são dadas por (Eq. 2.68):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.28)$$

Onde (Eq. 2.69):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 + m_1 \frac{L_1^2}{4} + m_2 L_1^2 & m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 \\ m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) & I_2 + m_2 \frac{L_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 + m_3 \frac{L_3^2}{4} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -L_2 \sin \theta_2 & L_3 \sin \theta_3 \\ L_1 \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_2 & -L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{Bmatrix} Q_{e_1} - (m_1 + 2m_2)g \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 - m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ Q_{e_2} - m_2 g \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 + m_2 \frac{L_1 L_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\ Q_{e_3} - m_3 g \frac{L_3}{2} \cos \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

As propriedades geométricas e de inércia dos links do mecanismo estão listadas na Tab. 4.1 e são as mesmas usadas por Yakoub e Shabana (1999) e Berzeri e Shabana (2000).

Tabela 4.1 – Propriedades geométricas e de inércia dos links do quatro-barras.

Propriedade	Link 1 (manivela)	Link 2 (acoplador)	Link 3 (seguidor)
Comprimento (m)	0.2	0.9	0.5196152
Massa (kg)	0.6811	2.4740	1.4700
Momento de inércia de massa (kg · m ²)	2.270E-03	1.66995E-01	3.3075E-02

Fonte: Do autor (2019).

A coordenada horizontal do ponto P (Fig. 2.1) vale 0.719615 m. As condições iniciais são dadas por $\theta_{10} = 0^\circ$, $\theta_{20} = 30^\circ$ e $\theta_{30} = 60^\circ$, com todas as velocidades angulares iniciais nulas.

Uma vez que as coordenadas generalizadas são angulares, é notório que as forças externas generalizadas (\mathbf{Q}_e) associadas são dadas por momentos aplicados aos links. No presente

estudo, considera-se que o corpo 1, a manivela, é acionado por um momento externo, com nenhum outro esforço externo dirigido aos demais links. As expressões para os momentos externos estão escritas a seguir:

$$Q_{e_1} = \begin{cases} [10 \sin(3\pi t)] \text{ Nm}, & t \leq 0.2728 \text{ s} \\ [465.8838298 e^{-16.324194t}] \text{ Nm}, & t > 0.2728 \text{ s} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$Q_{e_2} = 0 \quad (4.33)$$

$$Q_{e_3} = 0 \quad (4.34)$$

Os códigos escritos em MATLAB para a avaliação do quatro-barras estão, todos, dados no Apêndice A. As Figuras 1 a 4 do Apêndice A trazem o programa principal, que é o que deve ser executado pelo usuário. Todos os demais códigos (Figuras 5 a 15 do Apêndice A) são funções que são chamadas pelo programa principal ou por outras funções.

No início do programa, Figura 1 do Apêndice A, são inseridas informações básicas, como o número de equações e vínculos do problema (linhas 11 e 12), bem como as propriedades geométricas e inerciais dos corpos (linhas 15 a 27). Na linha 30 a matriz `modelD` é definida, a qual é utilizada para passar os parâmetros dos corpos para as demais funções que deles necessitam. Logo em seguida, nas linhas 38 e 39, as condições iniciais para as coordenadas e velocidades generalizadas são inseridas.

Na Figura 2 do Apêndice A, a Eq. 4.11 é resolvida de modo a se obter os valores iniciais das acelerações generalizadas e dos multiplicadores de Lagrange. Para que isso seja realizado, conforme observa-se pelos termos presentes na Eq. 4.11, devem ser calculados os vetores \mathbf{Q} e \mathbf{Q}_d e as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{C}_q . Os códigos mostrados nas Figuras 5, 9, 8 e 7 do Apêndice A calculam os respectivos vetores e matrizes.

Os parâmetros relativos à simulação e ao integrador são estabelecidos também na Figura 2 do Apêndice A. Entre eles, o tempo total de simulação e a discretização temporal desejada (linhas 68 e 69), o parâmetro α , responsável por controlar o amortecimento numérico (linha 72), e os critérios de parada do processo iterativo de Newton-Raphson (linhas 77 e 79). Conforme apresentado na Seção 4.2, o método HHT-I3 transforma o conjunto de equações diferenciais e algébricas que se almeja resolver em um sistema de equações não-lineares (Eq. 4.17), que aqui é resolvido pelo método de Newton-Raphson. A solução obtida é considerada aceitável quando a norma euclidiana do resíduo do vetor $\mathbf{F} = [\mathbf{F}^{(1)T} \quad \mathbf{F}^{(2)T}]^T$ é menor do que a quantidade

`tolResid` ou quando a norma euclidiana do vetor $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^T \quad \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^T]^T$, que representa a variação da solução entre as iterações (k) e $(k+1)$, é menor do que a quantidade `tolNR`. Na linha 81, `max_niter` diz respeito ao número máximo de iterações que o método de Newton-Raphson irá executar no intuito de convergir. Se após `max_niter` iterações a solução não for considerada satisfatória, o passo de integração será reduzido pelo fator `step_redfac` (linha 83). O mínimo passo de integração aceitável, após sucessivas reduções, é determinado pelo valor de `min_step` (linha 85). Se for necessário um passo menor do que este, a solução é abortada.

Nos códigos das Figuras 3 e 4 do Apêndice A, o integrador propriamente dito é implementado. Nas linhas 90 e 91 os parâmetros β e γ são calculados a partir do α e, na linha 93, o primeiro passo de integração é estabelecido. A quantidade `Nmax` da linha 94 define o número total de instantes de tempo em que a solução será buscada e, nas linhas 97 a 101, as matrizes que armazenarão a solução são inicializadas. No instante inicial a solução é dada, obviamente, pelas próprias condições iniciais, o que é procedido nas linhas de 104 a 107. O laço que se inicia na linha 111, com contador `i`, é repetido `Nmax` vezes, ou seja, uma vez para cada incremento de tempo a ser atingido. A variável `t_desired`, na linha 113, representa o tempo que se deseja atingir ao final do passo de número `i`. Nas linhas 116 a 119, os dados obtidos para a iteração anterior são resgatados. Na linha 121 se inicia um novo laço, que é executado até que se atinja o tempo `t_desired`.

É oportuno fazer, aqui, uma elucidação. Supõe-se que, em um determinado momento da simulação, deseja-se partir de um tempo t_i e atingir $t_f = t_i + \Delta t$, onde Δt é o incremento de tempo imputado pelo usuário. A primeira e mais óbvia tentativa é realizar este caminho por meio de um único passo de tamanho Δt . Pode ser, no entanto, que Δt seja um passo inadequadamente grande e a solução não convirja. Caso isso ocorra, o passo é reduzido para, por exemplo, $\Delta t/2$ e, portanto, busca-se partir de t_i e atingir $t_i + \Delta t/2$. Se a solução convergir, partir-se-á de $t_i + \Delta t/2$ com vistas a atingir $t_i + \Delta t$. Essa possibilidade de que o passo de integração seja reduzido é que configura a distinção entre os tempos denotados no código por `t_current` e por `t_desired` e também é o que torna necessário o laço da linha 121. O tempo `t_current` é o tempo instantâneo, enquanto que o tempo `t_desired` é o tempo que se deseja atingir ao final da iteração `i` do laço mais externo. No exemplo discutido, após sair de t_i e chegar a $t_i + \Delta t/2$, o tempo `t_current` será $t_i + \Delta t/2$ e o tempo `t_desired` será $t_i + \Delta t$.

Nas linhas de 124 a 126, se necessário, o passo é ajustado de modo que o tempo `t_current` não exceda o `t_desired`. O tempo é atualizado na linha 129 e, nas linhas de

132 a 134, a função `Increment.m` (Figuras 14 e 15 do Apêndice A) é chamada. Essa função é que avança, de fato, as variáveis do instante `t_current` para o `t_current + h`.

Nas linhas 8 a 10 do código contido na Figura 14 do Apêndice A, o terceiro termo do lado direito da Eq. 4.17 é calculado, isto é, $(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q})_n$. Nas linhas 13 e 14, uma estimativa inicial para $(\boldsymbol{\lambda})_{n+1}$ e $(\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}$ é feita utilizando-se os valores para estas variáveis calculados na iteração anterior. Logo após, nas linhas 15 e 16, utilizando a discretização de Newmark, avança-se no tempo para $(\mathbf{q})_{n+1}$ e $(\dot{\mathbf{q}})_{n+1}$. Na linha 18 um laço é iniciado, com um contador `it` que percorre, no máximo, `max_niter` iterações. Nas linhas 20 a 23, os demais termos do lado direito da Eq. 4.17 são calculados. Nas linhas 25 e 27, os termos calculados de maneira isolada são reunidos formando, na linha 28, o lado direito da Eq. 4.18. O cálculo do lado esquerdo da Eq. 4.18, sobretudo o jacobiano $\frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}}$, é realizado nas linhas de 31 a 34. Os termos $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1}]$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}]$, $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{Q})_{n+1}]$ e $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} [(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda})_{n+1}]$ são calculados, respectivamente, por meio dos códigos presentes nas Figuras 10, 11, 12 e 13 do Apêndice A. Na linha 37, o jacobiano da Eq. 4.18 é montado e esse mesmo sistema é resolvido na linha 43. As acelerações generalizadas e os multiplicadores de Lagrange são atualizados nas linhas 46 e 47 e, com esses novos valores, as coordenadas e velocidades generalizadas são, nas linhas 50 e 51, atualizadas pelo método de Newmark. Em seguida, o critério de parada já discutido é avaliado. Se a resposta for satisfatória, a função `Increment.m` é retornada. Se não, uma nova iteração é realizada utilizando os valores atualizados.

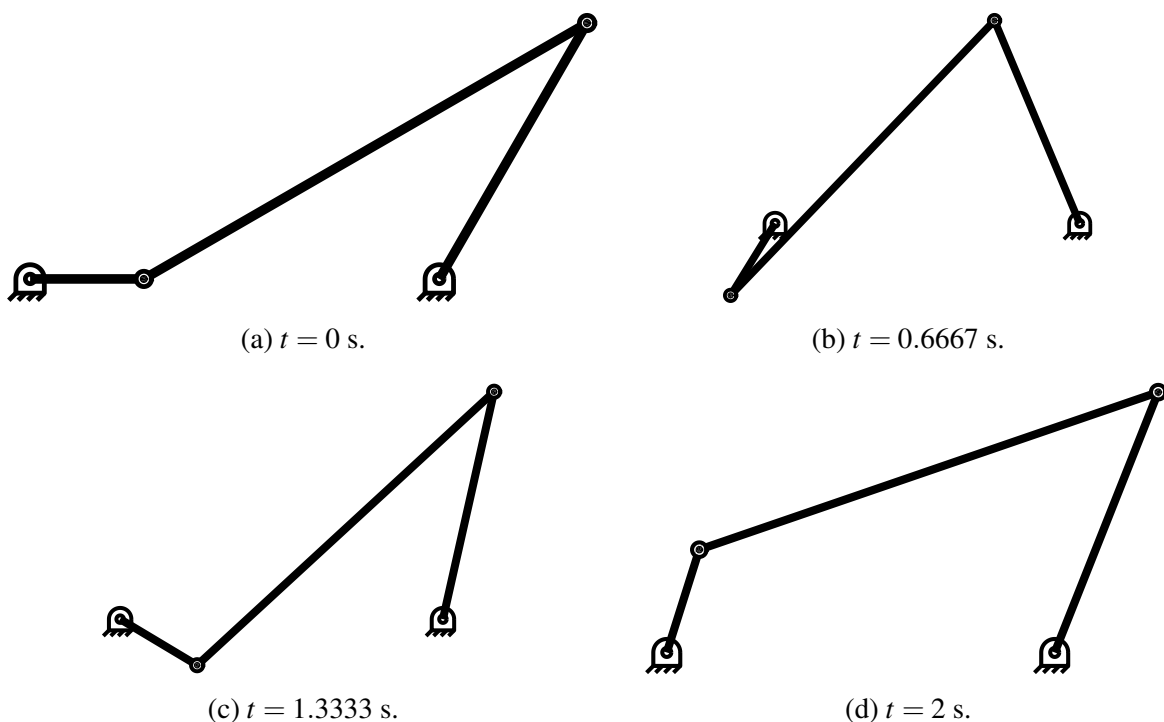
Após a função `Increment.m` retornar, volta-se à linha 137 da Figura 4 do Apêndice A. Essa linha verifica se a função `Increment.m` retornou tendo convergido, ou não. Se não houver convergência, as linhas 139 a 141 descartam a solução obtida e reduzem o passo de integração pelo fator `step_redfac`, que foi definido previamente. Nas linhas 144 a 147 é verificado se o passo de integração não foi reduzido para além do tolerado e, se for esse o caso, a integração é abortada. Se, por outro lado, a solução houver convergido, a norma do resíduo é comparada com a tolerância admitida. Se essa norma for menor do que o produto da tolerância pelo quadrado do fator de redução do passo, pode-se aumentar o passo por esse fator, sem que o erro consequente seja maior do que o tolerável. Isso se justifica pelo fato de o método HHT-I3 apresentar convergência de segunda ordem, como já reportado. Essa análise é realizada para que se possa percorrer a simulação com o maior passo possível, de modo a se minimizar o tempo de processamento. Essa é a essência do que está colocado nas linhas 148 a 161. Por fim, nas

linhas 166 a 170, todas as variáveis já foram avançadas com sucesso até o tempo t_{desired} , de modo que estas são armazenadas na matriz de solução.

Embora a implementação do integrador tenha sido apresentada juntamente com o seu uso para o mecanismo quatro barras, ela é, de fato, bastante geral. O código referente ao integrador propriamente dito, Figuras 3, 4, 14 e 15 do Apêndice A, pode ser utilizado para a solução de quaisquer problemas de dinâmica multicorpos com vínculos holonômicos. Os demais códigos, por sua vez, são particulares a cada problema e formulação e devem ser devidamente adaptados.

A simulação do mecanismo quatro-barras sujeito às condições iniciais e aos esforços anteriormente citados está dada na Fig. 4.1. Verificando se a solução obedece às restrições para as coordenadas generalizadas, Eq. 4.27, obtém-se que a norma euclidiana do resíduo encontra máximo valor, ao longo de toda a simulação, de $1.5E-15$ m. Já os vínculos para as velocidades, obtidos pela diferenciação no tempo da Eq. 4.27, apresentam resíduo máximo de $3.5E-05$ m/s. Como é de se esperar, os vínculos holonômicos, que são resolvidos explicitamente, apresentam resíduo praticamente nulo. Já os vínculos para as velocidades, que não são contemplados de maneira direta, apresentam um resíduo que, embora seja mais expressivo, ainda é aceitavelmente baixo.

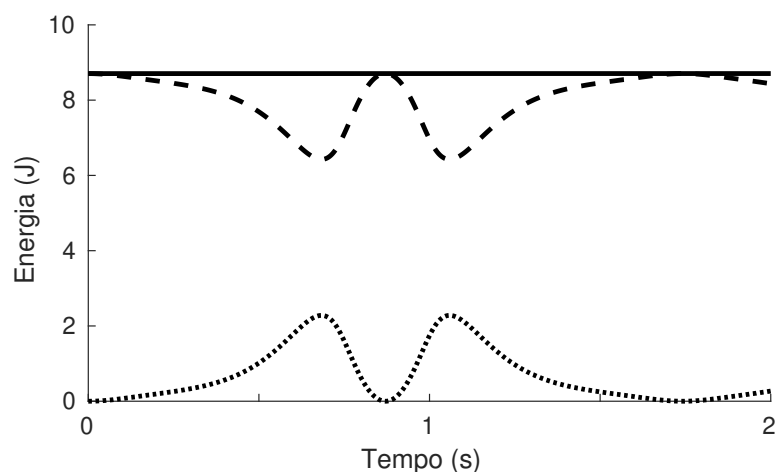
Figura 4.1 – Evolução temporal do quatro-barras sujeito a um momento aplicado à manivela.



Fonte: Do autor (2019).

Uma nova simulação para o mesmo mecanismo é realizada. Elimina-se, no entanto, o momento externo aplicado à manivela, de modo que o mecanismo fica sujeito unicamente à ação do seu próprio peso. Pelo fato de não haver nenhum mecanismo físico de dissipação, é de se esperar que a energia mecânica do sistema seja conservada. Como mostra a Fig. 4.2, isso é, de fato, verificado. Conforme amplamente reportado na literatura (HUSSEIN; NEGRUT; SHABANA, 2008; NEGRUT; JAY; KHUDE, 2009), verifica-se que o amortecimento numérico, que é característico do HHT-I3, não viola de modo grosseiro os invariantes do sistema, tal qual a energia. Na simulação reportada, com $\alpha = -0.3$ (que garante máximo amortecimento numérico), o maior desvio da energia do sistema em relação à sua energia inicial é de $\frac{|E - E_0|}{E_0} \times 100\% = 0.011\%$.

Figura 4.2 – Balanço de energia para o quatro-barras conservativo, sujeito apenas ao próprio peso. \cdots , Energia Potencial; $---$, Energia Cinética; $—$, Energia Total.



Fonte: Do autor (2019).

5 EXPERIMENTO NUMÉRICO: MECANISMO QUATRO-BARRAS FLEXÍVEL

Neste capítulo, a metodologia que foi apresentada no Capítulo 3 é aplicada a um mecanismo quatro-barras geometricamente semelhante àquele discutido nos Capítulos 2 e 4, mas com os três links flexíveis. O intuito básico é mostrar a aplicação da formulação ANCF para conjuntos formados por vários corpos, os ditos sistemas multicorpos.

Inicialmente, o processo de montagem das equações de movimento do sistema multicorpos a partir das equações de cada corpo é delineado. Em seguida, são realizadas simulações para o mecanismo quatro-barras flexível sob diferentes condições de solicitação mecânica. Por fim, o mesmo mecanismo, porém notavelmente enrijecido, é considerado. Os resultados são discutidos e comparados com os obtidos através da dinâmica de corpos rígidos. Questões relacionadas à conservação da energia e à importância do amortecimento numérico também são endereçadas.

5.1 Equações de movimento de sistemas multicorpos

Retomando a Eq. 3.63, as equações de movimento para um corpo flexível i , modelado por meio da formulação ANCF, são dadas por:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{Q}_{k_i} + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{Q}_{e_i} \quad (5.1)$$

Onde \mathbf{M}_i é a matriz de massa do corpo, que é simétrica e constante, \mathbf{Q}_{k_i} é o vetor de forças elásticas, $\mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda}_i$ é o vetor de forças de vínculo e \mathbf{Q}_{e_i} é o vetor de forças externas generalizadas, que pode ser obtido por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Para corpos modelados com mais de um elemento, as matrizes e vetores do corpo como um todo podem ser obtidas por meio do convencional processo de superposição do método de elementos finitos. Em toda a discussão que segue, o modelo adotado para as forças elásticas é aquele discutido na Subseção 3.3.7.2, que foi obtido por meio dos princípios da mecânica do contínuo.

É claro que os sistemas de interesse prático são compostos por um número de corpos superior à unidade. No caso do mecanismo quatro-barras, por exemplo, tem-se três corpos com propriedades arbitrariamente diferentes. Assim, as equações de movimento para cada corpo devem ser escritas e adequadamente reunidas, de maneira a se formar um sistema global de equações que contemple todos os corpos do sistema multicorpos. Para tanto, as matrizes de

massa de cada um dos corpos são reunidas, formando a matriz de massa global do sistema, tal qual a seguir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

De maneira análoga, os vetores de força e de graus de liberdade de cada corpo são reunidos, formando-se os correspondentes vetores globais, conforme mostrado adiante:

$$\ddot{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{e}}_1 \\ \ddot{\mathbf{e}}_2 \\ \ddot{\mathbf{e}}_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{k1} \\ \mathbf{Q}_{k2} \\ \mathbf{Q}_{k3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{e1} \\ \mathbf{Q}_{e2} \\ \mathbf{Q}_{e3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{e1}^T \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \mathbf{C}_{e2}^T \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \mathbf{C}_{e3}^T \boldsymbol{\lambda}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

A partir dessas matrizes e vetores, o sistema global de equações diferenciais de movimento do sistema multicorpos pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}_k + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (5.4)$$

Para que essas equações sejam escritas no mesmo formato que a Eq. 4.1, elas são reescritas da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}_k + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (5.5)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e - \mathbf{Q}_k \quad (5.6)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \quad (5.7)$$

Tem-se definido, portanto, o seguinte conjunto de equações algébrico-diferenciais de movimento para um sistema multicorpos, as quais podem ser prontamente integradas pelo método HHT-I3, descrito no Capítulo 4:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \\ \mathbf{C}(t, \mathbf{e}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.8)$$

Com relação aos aspectos de implementação computacional, códigos muito semelhantes aos dispostos no Apêndice A são utilizados. Basta que as funções que calculam os vetores

$\mathbf{Q}(t, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$, $\mathbf{C}(t, \mathbf{e})$ e $\mathbf{Q}_d(t, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$ e a matriz \mathbf{M} sejam reescritas de maneira a representar o sistema físico em questão. Para fins de uma implementação de carácter geral, todos os jacobianos podem ser calculados por meio de diferenciação numérica, tal qual descrito na Seção 4.2.

5.2 Mecanismo quatro-barras flexível conservativo

Para as simulações tomadas adiante, as propriedades geométricas, elásticas e de inércia dos links do quatro-barras flexível estão listadas na Tab. 5.1 e são as mesmas usadas por Yakoub (YAKOUB; SHABANA, 1999) e Berzeri (BERZERI; SHABANA, 2000).

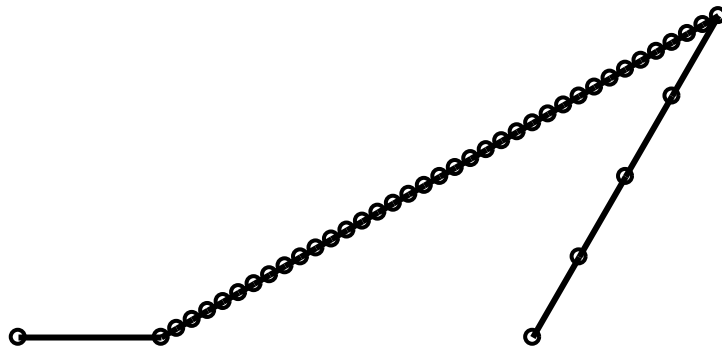
Tabela 5.1 – Propriedades geométricas, elásticas e de inércia dos links do quatro-barras flexível.

Propriedade	Link 1 (manivela)	Link 2 (acoplador)	Link 3 (seguidor)
Comprimento (m)	0.2	0.9	0.5196152
Massa (kg)	0.6811	2.4740	1.4700
Momento de inércia de área (m ⁴)	1.257E-07	3.068E-07	3.976E-08
Área da seção transversal (m ²)	1.257E-03	1.960E-03	7.068E-04
Módulo de Young (N/m ²)	1E+09	5E+06	5E+08

Fonte: Do autor (2019).

Da Tabela 5.1, nota-se que o acoplador é assumido ser muito mais flexível do que o seguidor, que por sua vez é mais flexível do que a manivela. Em virtude dessas diferentes propriedades e das diferentes geometrias, números distintos de elementos são utilizados para cada corpo. A manivela é discretizada utilizando-se apenas 1 elemento, o acoplador 36 elementos e o seguidor 4 elementos. A Fig. 5.1 mostra a malha adotada para o mecanismo.

Figura 5.1 – Discretização do mecanismo quatro-barras flexível sob consideração.



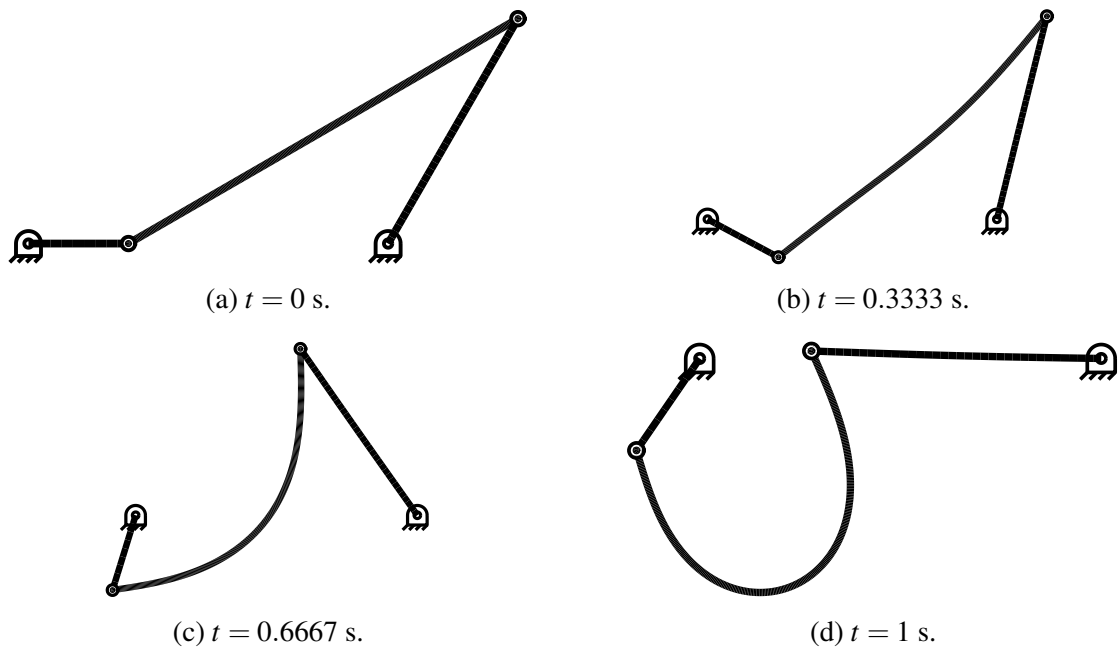
Fonte: Do autor (2019).

A configuração inicial do sistema é a mesma considerada na Seção 4.3.

Em uma primeira simulação, o sistema é liberado a partir do repouso, sem qualquer condição forçante, sujeito exclusivamente à ação do seu próprio peso. O intuito dessa simulação é checar se a conservação da energia é garantida pela formulação ANCF.

A Figura 5.2 mostra a configuração do mecanismo em quatro instantes diferentes. O balanço de energia para essa simulação está mostrado na Fig. 5.3. Da figura, é evidente que a energia mecânica do sistema é, de fato, conservada. Mesmo com amortecimento numérico máximo ($\alpha = -0.3$), o maior desvio da energia total do sistema em relação à sua energia inicial é de $\frac{|E - E_0|}{E_0} \times 100\% = 0.00005\%$.

Figura 5.2 – Evolução temporal do quatro-barras flexível sujeito à ação do próprio peso.



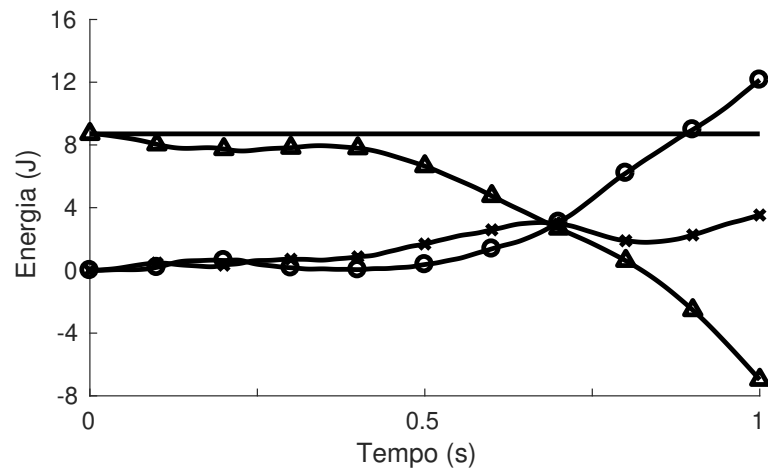
Fonte: Do autor (2019).

5.3 Mecanismo quatro-barras flexível não-conservativo

A partir das mesmas propriedades da Tabela 5.1, da mesma discretização e das mesmas condições iniciais, uma nova simulação é realizada. Nessa segunda simulação, a condição forçante da Eq. 4.32 é considerada. Existe, evidentemente, uma injeção de energia no sistema, de modo que este não é mais conservativo.

A Figura 5.4 mostra a configuração do mecanismo em quatro instantes diferentes. O balanço de energia para essa simulação está mostrado na Fig. 5.5. Da figura, nota-se claramente a inserção de energia que ocorre no sistema por meio do momento aplicado. A partir de cerca de 0.4 s, no entanto, a energia total do sistema volta a ficar aproximadamente constante. Isto é,

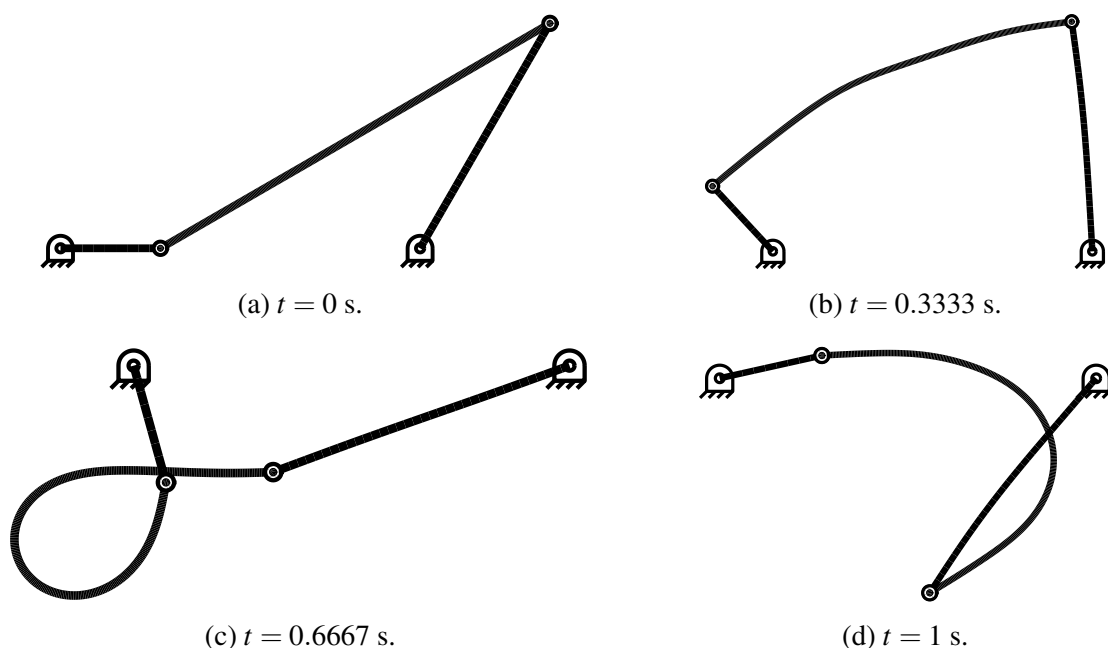
Figura 5.3 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível conservativo, sujeito apenas ao próprio peso. - \circ -, Energia Potencial de Deformação; - \triangle -, Energia Potencial Gravitacional; - \times -, Energia Cinética; —, Energia Total.



Fonte: Do autor (2019).

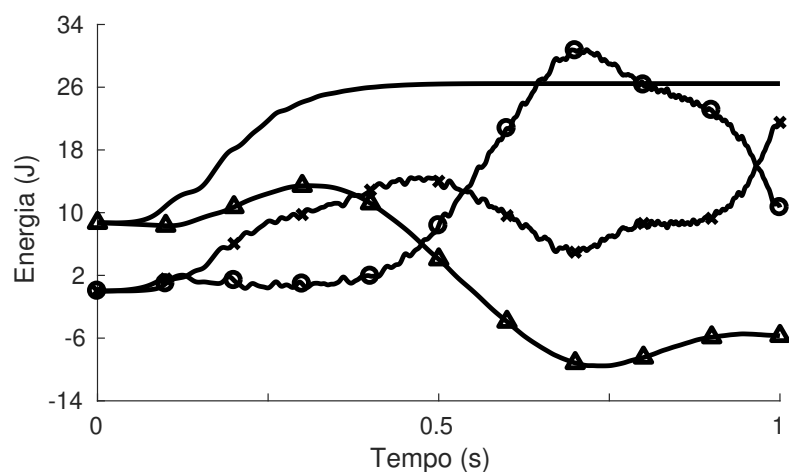
de fato, esperado, uma vez que, a partir de 0.2778 s, o momento aplicado cai exponencialmente com o tempo (Eq. 4.32). Também, por volta do segundo 0.9 de simulação, a energia potencial de deformação é maior do que a energia total do sistema. É claro que isso só é possível porque, nesse instante, a energia potencial gravitacional do sistema é negativa. Conforme mostra a Fig. 5.5, o momento externo aplicado leva a uma rápida oscilação das trocas entre as energias potencial de deformação e cinética.

Figura 5.4 – Evolução temporal do quatro-barras flexível sujeito à ação do próprio peso e de um momento externo.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 5.5 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível não-conservativo, sujeito ao próprio peso e a um momento externo. - \circ -, Energia Potencial de Deformação; - \triangle -, Energia Potencial Gravitacional; - \times -, Energia Cinética; —, Energia Total.



Fonte: Do autor (2019).

5.4 Mecanismo quatro-barras flexível, quase rígido

Uma última simulação é realizada para esse mecanismo. Nela, as condições iniciais, a discretização e a condição forçante são todas mantidas constantes. Altera-se, no entanto, o módulo de Young dos materiais que compõe o quatro-barras. Todos eles são elevados para $210\text{E}+10$ Pa, número 10 vezes maior do que o módulo de Young do aço.

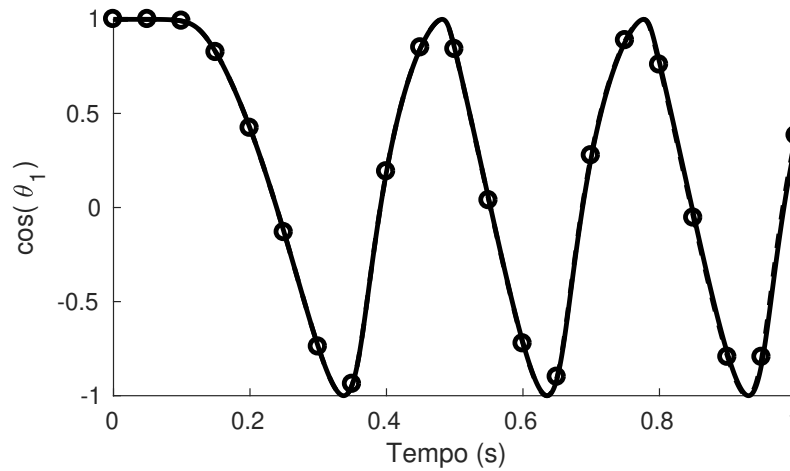
Conforme descrito na Seção 3.1, a modelagem exata da dinâmica de corpo rígido pode ser obtida pela formulação ANCF. Este fato é mostrado em detalhes por Christensen e Shabana (1998) e deve ser verificado nessa simulação. De fato, para um sistema com elevada rigidez e solicitado por esforços relativamente baixos, é de se esperar um comportamento semelhante ao de um corpo rígido.

A Fig. 5.6 mostra o cosseno do ângulo θ_1 (definido na Fig. 2.1) para a simulação dos mecanismos rígido e flexível. Conforme esperado, os resultados são praticamente coincidentes. Embora não reportado, o mesmo acontece para θ_2 e θ_3 .

Em virtude da alta rigidez, é de se esperar, também, que as deformações elásticas sejam pequenas. A Fig. 5.7 mostra que a energia potencial de deformação permanece praticamente nula durante toda a simulação. O mesmo comportamento para a energia total é obtido: um acréscimo inicial, seguido de um regime estacionário.

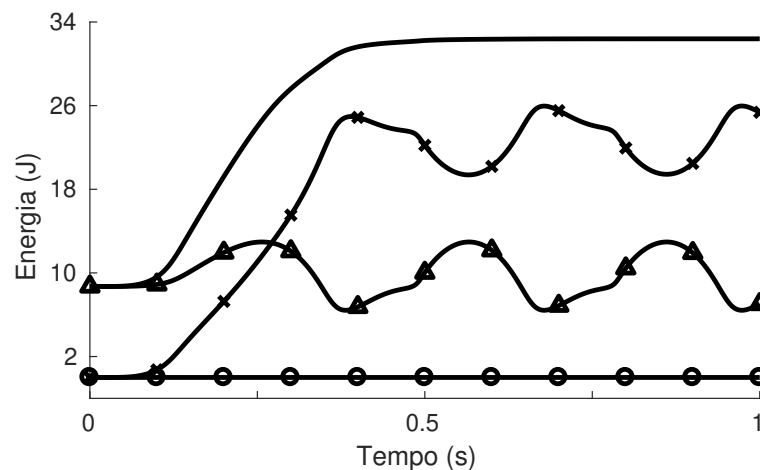
Essa simulação torna evidente um aspecto já discutido e absolutamente relevante relacionado ao método HHT-I3 e à simulação de sistemas multicorpos: a presença de amortecimento

Figura 5.6 – Cosseno do ângulo entre a manivela e o eixo horizontal. - - o - -, Mecanismo Rígido; —, Mecanismo Flexível.



Fonte: Do autor (2019).

Figura 5.7 – Balanço de energia para o quatro-barras flexível não-conservativo, sujeito ao próprio peso e a um momento externo. - o -, Energia Potencial de Deformação; - Δ -, Energia Potencial Gravitacional; - x -, Energia Cinética; —, Energia Total.



Fonte: Do autor (2019).

numérico controlável. Usando o HHT-I3, o tempo de processamento da simulação foi de 1636 segundos (cerca de 27 minutos). Utilizando o ODE15S (conforme discutido na Seção 4.1) e técnicas semelhantes de implementação, o tempo de processamento foi de 87279 segundos (mais de 24 horas), o que representa 53 vezes o tempo do HHT-I3. Para problemas muito rígidos, como este, é imprescindível a utilização de técnicas de integração que apresentem amortecimento numérico.

6 CONCLUSÃO

O objetivo principal desta monografia foi apresentar, de uma maneira sucinta e didática, os principais aspectos relacionados à simulação dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis por meio da Formulação de Coordenadas Nodais Absolutas.

O pleno entendimento das técnicas comumente aplicadas à dinâmica de multicorpos exige o domínio de uma série de fundamentos mais elementares. Por isso, inicialmente, o trabalho iniciou-se com uma discussão introdutória de Cálculo Variacional, o qual representa a fundação matemática sobre o qual o Princípio Variacional de Hamilton está apoiado. O processo de minimização de funcionais sujeitos a restrições foi demonstrado por meio da dedução das equações de movimento de um mecanismo quatro-barras rígido. Foi mostrado que as equações que regem a dinâmica de conjuntos mecânicos são, em geral, um conjunto acoplado e não-linear de equações diferenciais e algébricas, chamado de equações algébrico-diferenciais.

A formulação ANCF foi apresentada como uma técnica para a análise dinâmica de corpos flexíveis. Mostrou-se que a definição das coordenadas nodais em um sistema inercial conduz a uma matriz de massa constante e a um vetor de forças elásticas altamente não-linear. Por meio do Princípio de Hamilton, as equações de movimento de um elemento de viga ANCF foram deduzidas. Mostrou que as forças externas generalizadas podem ser inseridas no modelo por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais e também que as restrições cinemáticas costumam apresentar uma forma bastante simples.

As principais abordagens para a solução de EAD's foram apresentadas e discutidas. Em particular, o método HHT-I3, recentemente introduzido na literatura para a solução de EAD's de índice 3, foi adotado e analisado em detalhes. Os aspectos relacionados à sua implementação computacional foram endereçados por meio da solução das equações deduzidas anteriormente para o quatro-barras rígido. Mostrou que o controlável amortecimento numérico do HHT-I3 não viola de modo grosseiro invariantes do sistema, tal qual sua energia total.

Por fim, a formulação ANCF foi aplicada para a simulação de um mecanismo quatro-barras totalmente flexível. O processo de montagem das equações de movimento de um sistema multicorpos a partir das equações de cada corpo foi delineado. Mostrou-se que a formulação ANCF garante a conservação da energia para sistemas conservativos e também um balanço de energia consistente para sistemas externamente alimentados. Enrijecendo substancialmente o quatro-barras, mostrou-se que a sua resposta é bastante semelhante à do mecanismo rígido, o que mostra que a formulação ANCF pode ser utilizada para a modelagem exata da dinâmica de

corpos rígidos. Esta última simulação evidenciou a necessidade do uso de métodos de integração com amortecimento numérico para a simulação de sistemas rígidos, que são caracterizados por conter uma resposta com diferentes escalas de tempo.

Espera-se que o objetivo de explicar, de maneira didática e sucinta, os aspectos essenciais relacionados à dinâmica de multicorpos flexíveis pela formulação ANCF tenha sido plenamente atingido, e que o presente texto possa servir de auxílio àqueles que desejam apetreter deste prazeroso campo do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ARNOLD, M.; BRÜLS, O. Convergence of the generalized- α scheme for constrained mechanical systems. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 2, p. 185–202, Sep 2007. ISSN 1573-272X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11044-007-9084-0>>.
- BAUMGARTE, J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 1, n. 1, p. 1 – 16, 1972. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782572900187>>.
- BERZERI, M.; SHABANA, A. A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal co-ordinate formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 235, n. 4, p. 539 – 565, 2000. ISSN 0022-460X.
- BOZORGMEHRI, B. et al. Dynamic analysis of rotating shafts using the absolute nodal coordinate formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 453, p. 214 – 236, 2019. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X19301944>>.
- CASSEL, K. **Variational Methods with Applications in Science and Engineering**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107022584.
- CHRISTENSEN, A. P.; SHABANA, A. A. Exact modeling of the spatial rigid body inertia using the finite element method. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME, v. 120, n. 3, p. 650–657, Jul 1998. ISSN 1048-9002.
- ESCALONA, J.; HUSSIEN, H.; SHABANA, A. Application of the absolute nodal co-ordinate formulation to multibody system dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 214, n. 5, p. 833 – 851, 1998. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X98915632>>.
- FLORES, P. et al. A parametric study on the Baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 6, n. 1, p. 011019, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4002338>>.
- GARCÍA;A-VALLEJO, D.; VALVERDE, J.; DOMÍNGUEZ, J. An internal damping model for the absolute nodal coordinate formulation. **Nonlinear Dynamics**, v. 42, n. 4, p. 347–369, Dec 2005. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-005-6445-1>>.
- HUSSEIN, B.; NEGRUT, D.; SHABANA, A. A. Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations. **Nonlinear Dynamics**, v. 54, n. 4, p. 283–296, Dec 2008. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-007-9328-9>>.
- JAY, O. L.; NEGRUT, D. A second order extension of the generalized- α method for constrained systems in mechanics. In: _____. **Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. p. 143–158. ISBN 978-1-4020-8829-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8829-2_8>.
- LANCZOS, C. **The Variational Principles of Mechanics**. 1. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1986. (Dover Books On Physics). ISBN 9780486650678.

- NACHBAGAUER, K. State of the art of anc elements regarding geometric description, interpolation strategies, definition of elastic forces, validation and the locking phenomenon in comparison with proposed beam finite elements. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 21, n. 3, p. 293 – 319, 2014.
- NEGRUT, D.; JAY, L. O.; KHUDE, N. A discussion of low-order numerical integration formulas for rigid and flexible multibody dynamics. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 4, n. 2, p. 021008, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3079784>>.
- NEGRUT, D. et al. On the use of the HHT method in the context of index 3 differential algebraic equations of multibody dynamics. In: **Volume 6: 5th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C**. ASME, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/detc2005-85096>>.
- NEGRUT, D. et al. On an implementation of the Hilber-Hughes-Taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics (DETC2005-85096). **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 2, n. 1, p. 73, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2389231>>.
- NIKRAVESH, P. **Computer-aided analysis of mechanical systems**. 1. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 1988. ISBN 9780131642201.
- REDDY, J. **An Introduction to Continuum Mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. (An Introduction to Continuum Mechanics). ISBN 9781107025431.
- SHABANA, A. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 3, p. 339–348, Sep 1997. ISSN 1573-272X.
- SHABANA, A. **Computational Dynamics**. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2010. ISBN 9780470686867.
- SHABANA, A. **Dynamics of Multibody Systems**. 4. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107435889.
- SHABANA, A. A. Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 2, p. 189–222, Jun 1997. ISSN 1573-272X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1009773505418>>.
- SHABANA, A. A.; HUSSIEN, H. A.; ESCALONA, J. L. Application of the absolute nodal coordinate formulation to large rotation and large deformation problems. **Journal of Mechanical Design**, ASME, v. 120, n. 2, p. 188–195, Jun 1998. ISSN 1050-0472.
- SUGIYAMA, H.; ESCALONA, J. L.; SHABANA, A. A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 167–195, Jan 2003. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1022082826627>>.
- SURANA, K. **Advanced Mechanics of Continua**. [S.l.]: CRC Press, 2016. (Applied and computational mechanics series). ISBN 9781498708111.
- TAKAHASHI, Y.; SHIMIZU, N.; SUZUKI, K. W-1-1-4 Introduction of Damping Matrix Into Absolute Nodal Coordinate Formulation. **The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics**, Japan Society of Mechanical Engineers, v. 2002, n. 0, p. 33–40, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1299/jsmeacmd.2002.33>>.

WEHAGE, R. A.; HAUG, E. J. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems. **Journal of Mechanical Design**, ASME International, v. 104, n. 1, p. 247, 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3256318>>.

XU, Q.; LIU, J.; QU, L. Dynamic modeling for silicone beams using higher-order ancf beam elements and experiment investigation. **Multibody System Dynamics**, Feb 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11044-019-09668-2>>.

YAKOUB, R. Y.; SHABANA, A. A. Use of cholesky coordinates and the absolute nodal coordinate formulation in the computer simulation of flexible multibody systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 20, n. 3, p. 267–282, Nov 1999. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1008323106689>>.

**APÊNDICE A – Implementação computacional do HHT-I3 para integração das EAD's
do mecanismo quatro-barras rígido**

Figura 1 – Programa principal (parte 1 de 4).

```

1  %% FULLY RIGID FOUR-BAR MECHANISM SIMULATION
2  % Written in MATLAB R2018a (Ubuntu)
3  % Author: Matheus Basilio Rodrigues Fernandes
4  % E-mail: engmatheusbr@gmail.com
5  % Date: 20/06/2019
6
7  clear all; close all; clc;
8
9  %% %%% Setting model parameters and initial conditions
10
11  neq = 3; % number of equations of motion
12  nconst = 2; % number of constraints
13
14  % Body 1 (crankshaft)
15  l1 = 0.2; % length
16  m1 = 0.6811; % mass
17  I1 = m1*l1^2/12; % second moment of mass
18
19  % Body 2 (coupler)
20  l2 = 0.9;
21  m2 = 2.4740;
22  I2 = m2*l2^2/12;
23
24  % Body 3 (follower)
25  l3 = (0.9*sind(30)/sind(60));
26  m3 = 1.4700;
27  I3 = m3*l3^2/12;
28
29  % Storing the parameters in the modelD matrix
30  modelD = [
31      m1 m2 m3
32      l1 l2 l3
33      I1 I2 I3
34      ];
35
36  % Initial conditions (i.c.) for the generalized coord. and veloc.
37  % Body: 1 2 3
38  ic_pos = [0; degtorad(30); degtorad(60)];
39  ic_vel = [0; 0; 0];
40
41

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 2 – Programa principal (parte 2 de 4).

```

42 %% %%%% Solution of the Index-1 DAE at the initial configuration
43 %           for the accelerations and Lagrange multipliers
44
45 % Forces (vector Q(t, q, dq) ) at initial configuration
46 [extF] = appForce(0, ic_pos, ic_vel, modelD);
47
48 % Left-hand side of the system of equations
49 LHS = [
50     MassMatrix(ic_pos, modelD)    Cq(0, ic_pos, modelD).';
51     Cq(0, ic_pos, modelD)         zeros(nconst)
52 ];
53
54 % Right-hand side of the system of equations
55 RHS = [extF; Qd(0, ic_pos, ic_vel, modelD)];
56
57 % Solution of the system of equations
58 sol = LHS\RHS;
59
60 % Extracting i.c. for the accel. and the Lagrange Multipliers
61 ic_accel = sol(1:neq);           % i.c. for the accelerations
62 ic_lambda = sol(neq+1:neq+nconst); % i.c. for the Lagrange mult.
63
64
65 %% %%%% Setting the HHT-I3 and simulations parameters
66
67 % Simulation parameters
68 t_total = 2;                    % total time of simulation
69 user_dt = 1e-4;                 % desired increment of time
70
71 % Parameter that controls numerical damping
72 alpha = -0.3;                   % (alpha MUST BE between -0.3 and 0!)
73
74 % Integrator parameters
75 % Absolute residue of the nonlinear equations (solved by the
76 %     Newton-Raphson method)
77 tolResid = 1e-8;
78 % Absolute difference found in the Newton-Raphson iteration
79 tolNR = 1e-4;
80 % Maximum number of iterations for the Newton-Raphson solver
81 max_niter = 20;
82 % Step reduction factor, in solution doesn't converge
83 step_redfac = 0.5;
84 % Minimum step allowed
85 min_step = 1e-15;
86
87

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 3 – Programa principal (parte 3 de 4).

```

88 %% %%% INTEGRATOR (NO NEED TO CHANGE ANYTHING)
89 % Integrator parameters related to numerical damping
90 beta = (1-alpha)^2/4;
91 gamma = 1/2 - alpha;
92
93 h      = user_dt;           % initial step
94 Nmax   = round(t_total/user_dt); % number of time steps
95
96 % Initialization of the vectors that will store results
97 t      = zeros(round(Nmax)+1, 1); % time vector
98 q      = zeros(neq, round(Nmax)+1); % coord. vector
99 dq     = zeros(neq, round(Nmax)+1); % veloc. vector
100 d2q    = zeros(neq, round(Nmax)+1); % accel. vector
101 lambda = zeros(nconst, round(Nmax)+1); % Lagrange mult. vector
102
103 % Send initial conditions to the solution vectors
104 q(:,1) = ic_pos;
105 dq(:,1) = ic_vel;
106 d2q(:,1) = ic_accel;
107 lambda(:,1) = ic_lambda;
108
109 t_curr = 0; % initialize current time
110
111 for i=1:Nmax
112
113     t_desired = i*user_dt % desired time at the end of the step
114
115     % Getting data from the previous iteration
116     q_old     = q(:,i);
117     dq_old    = dq(:,i);
118     d2q_old   = d2q(:,i);
119     lambda_old = lambda(:,i);
120
121     while (t_curr <= t_desired*0.99999999)
122
123         % If necessary, adjust step to not exceed the desired time
124         if (t_curr+h) > t_desired
125             h = t_desired - t_curr;
126         end
127
128         % Update current time
129         t_curr = t_curr + h;
130

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 4 – Programa principal (parte 4 de 4).

```

131     % Try to go one step forward
132     [q_new, dq_new, d2q_new, lambda_new, norm_e, deltax] = ...
133         Increment(max_niter, t_curr, h, modelD, q_old, ...
134             dq_old, d2q_old, lambda_old, alpha, tolResid, tolNR);
135
136     % Check convergence
137     converged = (norm_e < tolResid) || (deltax < tolNR);
138     if ~converged
139         % if doesn't converged try again with a smaller step
140         t_curr = t_curr-h;           % go back in time
141         h      = h*step_redfac;     % reduce step
142         % Abort if the step has reached the minimum
143         %     allowable value
144         if (h<min_step)
145             fprintf("\nMinimum step size reached\n\n")
146             return
147         end
148     elseif (norm_e > tolResid*step_redfac^2)
149         % advance in time, without increasing the step
150         q_old      = q_new;
151         dq_old     = dq_new;
152         d2q_old    = d2q_new;
153         lambda_old = lambda_new;
154     else
155         % advance in time and increase the step, since the
156         %     error obtained was very small
157         h          = h*2;
158         q_old      = q_new;
159         dq_old     = dq_new;
160         d2q_old    = d2q_new;
161         lambda_old = lambda_new;
162     end % if
163 end % while
164
165     % Simulation data is stored
166     q(:, i+1)      = q_new;
167     dq(:, i+1)    = dq_new;
168     d2q(:, i+1)   = d2q_new;
169     lambda(:, i+1) = lambda_new;
170     t(i+1, 1)     = t_desired;
171
172 end % for
173
174 %% CODE END

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 5 – Função para calcular $Q(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

```

1 function [Q] = appForce(t, q, dq, modelD)
2 % Computes the generalized forces acting on the system: Q
3
4 g = 9.81;           % gravity
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the generalized velocities from the vector dq
12 dtheta1 = dq(1);
13 dtheta2 = dq(2);
14 dtheta3 = dq(3);
15
16 % Getting the model parameters from the modelD matrix
17 m1 = modelD(1,1);
18 m2 = modelD(1,2);
19 m3 = modelD(1,3);
20
21 l1 = modelD(2,1);
22 l2 = modelD(2,2);
23 l3 = modelD(2,3);
24
25 % External applied moments
26 if (t <=0.2778)
27     Qe1 = 10*sin(3*pi*t);
28 else
29     Qe1 = 465.8838298*exp(-16.324194*t);
30 end
31 Qe1 = 0;
32 Qe2 = 0;
33 Qe3 = 0;
34
35 % Force vector
36 Q = [
37     Qe1 - (m1+2*m2)*g*l1/2*cos(theta1) - m2*l1*l2/2*sin(theta1 - ...
38         theta2)*dtheta2^2
39     Qe2 - m2*g*l2/2*cos(theta2) + m2*l1*l2/2*sin(theta1 - ...
40         theta2)*dtheta1^2
41     Qe3 - m3*g*l3/2*cos(theta3)
42 ];
43
44 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 6 – Função para calcular $C(t, \mathbf{q})$.

```
1 function [constr] = constVec(t, q, modelD)
2 % Computes the constraints vector: C
3
4 % Getting the generalized coordinates from the vector q
5 theta1 = q(1);
6 theta2 = q(2);
7 theta3 = q(3);
8
9 % Getting the model parameters from the modelD matrix
10 l1 = modelD(2,1);
11 l2 = modelD(2,2);
12 l3 = modelD(2,3);
13
14 % x-coordinate from point P
15 x_p = 0.2 + 0.9*cosd(30) - (0.9*sind(30)/sind(60))*cosd(60);
16
17 % Constraints vector
18 constr = [
19     l1*cos(theta1) - x_p + l2*cos(theta2) - l3*cos(theta3)
20     l1*sin(theta1) + l2*sin(theta2) - l3*sin(theta3)
21 ];
22
23 end
```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 7 – Função para calcular $\mathbf{C}_q(t, \mathbf{q})$.

```
1 function [JacConstr] = Cq(t, q, modelD)
2 % Computes the jacobian of the constraints vector wrt
3 % the generalized coordinates:
4 %     JacConstr = d(C)/d(q)
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the model parameters from the modelD matrix
12 l1 = modelD(2,1);
13 l2 = modelD(2,2);
14 l3 = modelD(2,3);
15
16 % Jacobian of the constraints vector
17 JacConstr = [
18     -l1*sin(theta1),  -l2*sin(theta2),  l3*sin(theta3)
19     l1*cos(theta1),   l2*cos(theta2),  -l3*cos(theta3)
20 ];
21
22 end
```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 8 – Função para calcular $Q_d(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

```

1 function [d2C] = Qd(t, q, dq, modelD)
2 % Computes the partial derivative of constraints vector wrt to time:
3 % d2C = Cq*d2q = Qd =
4 %      - ( d(Cq*dq)/d(q) ) * dq - 2*d(Cq)/d(t) * dq - d2(C)/dt^2
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the generalized velocities from the vector dq
12 dtheta1 = dq(1);
13 dtheta2 = dq(2);
14 dtheta3 = dq(3);
15
16 % Getting the model parameters from the modelD matrix
17 l1 = modelD(2,1);
18 l2 = modelD(2,2);
19 l3 = modelD(2,3);
20
21 % Computes the d2C vector
22 d2C = [
23     l1*cos(theta1)*dtheta1^2 + l2*cos(theta2)*dtheta2^2 - ...
24     l3*cos(theta3)*dtheta3^2
25     l1*sin(theta1)*dtheta1^2 + l2*sin(theta2)*dtheta2^2 - ...
26     l3*sin(theta3)*dtheta3^2
27 ];
28
29 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 9 – Função para calcular M.

```
1 function M = MassMatrix(q, modelD)
2 % Evaluates the mass matrix
3
4 % Getting the generalized coordinates from the vector q
5 theta1 = q(1);
6 theta2 = q(2);
7 theta3 = q(3);
8
9 % Getting the model parameters from the modelD matrix
10 m1 = modelD(1,1);
11 m2 = modelD(1,2);
12 m3 = modelD(1,3);
13
14 l1 = modelD(2,1);
15 l2 = modelD(2,2);
16 l3 = modelD(2,3);
17
18 I1 = modelD(3,1);
19 I2 = modelD(3,2);
20 I3 = modelD(3,3);
21
22 % Computes the mass matrix
23 M = [
24     I1 + m1*l1^2/4 + m2*l1^2,      m2*l1*l2*cos(theta1-theta2)/2,      0
25     m2*l1*l2*cos(theta1-theta2)/2, I2 + m2*l2^2/4,      0
26     0,                             0,                             I3 + m3*l3^2/4
27     ];
28
29 end
```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 10 – Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})$.

```

1 function [JacInertF] = InertF_deriv_q(q, d2q, modelD)
2 % Computes the jacobian of the inertia forces (MassMatrix*d2q)
3 % wrt the generalized coordinates:
4 %     d(MassMatrix*d2q) / d(q)
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the generalized accelerations from the vector d2q
12 d2theta1 = d2q(1);
13 d2theta2 = d2q(2);
14 d2theta3 = d2q(3);
15
16 % Getting the model parameters from the modelD matrix
17 m1 = modelD(1,1);
18 m2 = modelD(1,2);
19 m3 = modelD(1,3);
20
21 l1 = modelD(2,1);
22 l2 = modelD(2,2);
23 l3 = modelD(2,3);
24
25 % Jacobian of the inertia forces vector
26 JacInertF = zeros(3);
27 JacInertF(1,1) = -(d2theta2*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2))/2;
28 JacInertF(1,2) = (d2theta2*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2))/2;
29 JacInertF(2,1) = -(d2theta1*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2))/2;
30 JacInertF(2,2) = (d2theta1*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2))/2;
31
32 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 11 – Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{Q})$.

```

1 function [JacQ_q] = Q_deriv_q(t, q, dq, modelD)
2 % Computes the jacobian of the generalized forces (Q) wrt
3 % the generalized coordinates:
4 %     d(Q) / d(q)
5
6 g = 9.81;
7
8 % Getting the generalized coordinates from the vector q
9 theta1 = q(1);
10 theta2 = q(2);
11 theta3 = q(3);
12
13 % Getting the generalized velocities from the vector dq
14 dtheta1 = dq(1);
15 dtheta2 = dq(2);
16 dtheta3 = dq(3);
17
18 % Getting the model parameters from the modelD matrix
19 m1 = modelD(1,1);
20 m2 = modelD(1,2);
21 m3 = modelD(1,3);
22
23 l1 = modelD(2,1);
24 l2 = modelD(2,2);
25 l3 = modelD(2,3);
26
27 % Jacobian of the generalized force vector
28 JacQ_q = zeros(3,3);
29 JacQ_q(1,1) = (g*l1*sin(theta1)*(m1 + 2*m2))/2 - ...
30     (dtheta2^2*l1*l2*m2*cos(theta1 - theta2))/2;
31 JacQ_q(1,2) = (dtheta2^2*l1*l2*m2*cos(theta1 - theta2))/2;
32 JacQ_q(2,1) = (dtheta1^2*l1*l2*m2*cos(theta1 - theta2))/2;
33 JacQ_q(2,2) = (l2*m2*(- l1*cos(theta1 - theta2)*dtheta1^2 + ...
34     g*sin(theta2)))/2;
35 JacQ_q(3,3) = (g*l3*m3*sin(theta3))/2;
36
37 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 12 – Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{Q})$.

```

1 function [JacQ_dq] = Q_deriv_dq(t, q, dq, modelD)
2 % Computes the jacobian of the generalized forces (Q) wrt
3 % the generalized velocities:
4 %     d(Q) / d(dq)
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the generalized velocities from the vector dq
12 dtheta1 = dq(1);
13 dtheta2 = dq(2);
14 dtheta3 = dq(3);
15
16 % Getting the model parameters from the modelD matrix
17 m1 = modelD(1,1);
18 m2 = modelD(1,2);
19 m3 = modelD(1,3);
20
21 l1 = modelD(2,1);
22 l2 = modelD(2,2);
23 l3 = modelD(2,3);
24
25 % Jacobian of the generalized force vector
26 JacQ_dq = zeros(3);
27 JacQ_dq(1,2) = -dtheta2*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2);
28 JacQ_dq(2,1) = dtheta1*l1*l2*m2*sin(theta1-theta2);
29
30 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 13 – Função para calcular $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda})$.

```

1 function [JacReacF] = ReacF_deriv_q(t, q, lambda, modelD)
2 % Computes the jacobian of the reaction forces (Cq'*lambda) wrt
3 % the generalized coordinates:
4 %     d(Cq'*lambda) / d(q)
5
6 % Getting the generalized coordinates from the vector q
7 theta1 = q(1);
8 theta2 = q(2);
9 theta3 = q(3);
10
11 % Getting the model parameters from the modelD matrix
12 l1 = modelD(2,1);
13 l2 = modelD(2,2);
14 l3 = modelD(2,3);
15
16 % Jacobian of the reaction forces vector
17 JacReacF = zeros(3);
18 JacReacF(1,1) = -l1*lambda(1)*cos(theta1) - l1*lambda(2)*sin(theta1);
19 JacReacF(2,2) = -l2*lambda(1)*cos(theta2) - l2*lambda(2)*sin(theta2);
20 JacReacF(3,3) = l3*lambda(1)*cos(theta3) + l3*lambda(2)*sin(theta3);
21
22 end

```

Fonte: Do autor (2019).

Figura 14 – Função que avança as variáveis no tempo (parte 1 de 2).

```

1 function [q_new, dq_new, d2q_new, lambda_new, norm_e, deltax] = Increment(max_niter, t_new, h, ...
2   modelD, q_old, dq_old, d2q_old, lambda_old, alpha, tolResid, tolNR)
3
4 nconst = 2;           neq = 3;
5 beta = (1-alpha)^2/4;   gamma = 1/2 - alpha;
6
7 % Calculation of (phiq'*lambda - F)n (old time)
8 Cqo = Cq(t_new-h, q_old, modelD); % = Cq
9 Qo = appForce(t_new-h, q_old, dq_old, modelD); % forces
10 old = alpha/(1+alpha)*(Cqo'*lambda_old - Qo); % = alpha/(1+alpha) * (Cq.'*lambda - Qo)
11
12 % Update q and dq for initial guess (Newmark's discretization)
13 d2q_new = d2q_old; % inicial guest for d2q
14 lambda_new = lambda_old; % inicial guest for lambda
15 q_new = q_old + h*dq_old + h^2/2*d2q_old;
16 dq_new = dq_old + h*d2q_old;
17
18 for it = 1:max_niter
19   % Calculation of RHS of the Newton-Raphson equation
20   Cqn = Cq(t_new, q_new, modelD); % = Cq, with updated q and dq
21   Qn = appForce(t_new, q_new, dq_new, modelD); % generalized forces, with updated q and dq
22   M = MassMatrix(q_new, modelD); % mass matrix, with updated q
23   const = constVec(t_new, q_new, modelD); % constraint equations with updated q
24   % HHT equations of motion
25   F1 = 1/(1+alpha)*M*d2q_new + (Cqn'*lambda_new - Qn) - old;
26   % Scaled constraint equations
27   F2 = 1/(beta*h^2)*const;
28   RHS = -[F1; F2];
29
30 % Calculation of LHS of the Newton-Raphson equation

```

Figura 15 – Função que avança as variáveis no tempo (parte 2 de 2).

```

31 dQdq      = Q_deriv_q(t_new, q_new, dq_new, modelD);           % deriv of the generalized force wrt q
32 dQdqdt    = Q_deriv_dq(t_new, q_new, dq_new, modelD);         % deriv of the generalized force wrt dq
33 phiqlamq  = ReacF_deriv_q(t_new, q_new, lambda_new, modelD);  % deriv of the reaction force wrt q
34 M_Q       = InertF_deriv_q(q_new, d2q_new, modelD);           % deriv of inertia force wrt q
35 % Jacobian of F1 wrt the generalized acceleration
36 dF1       = 1/(1+alpha)*M + beta*h^2*( 1/(1+alpha)*M_Q + phiqlamq - dQdq ) - gamma*h*dQdqdt;
37 LHS       = [
38     dF1          Cqn.';
39     Cqn          zeros(nconst)
40 ];
41
42 % Solve for delta(d2q) and delta(lambda)
43 delta = LHS\RHS;
44
45 % Update d2q and lambda
46 d2q_new = d2q_new + delta(1:neq);
47 lambda_new = lambda_new + delta(neg+1:end);
48
49 % Update q and dq (with the updated d2q) using Newmark's discretization
50 q_new = q_old + h*dq_old + h^2/2*((1-2*beta)*d2q_old + 2*beta*d2q_new);
51 dq_new = dq_old + h*((1-gamma)*d2q_old + gamma*d2q_new);
52
53 % Evaluate errors
54 norm_e = norm(RHS);      deltax = norm(delta);
55 if (norm_e < tolResid) || (deltax < tolNR)      % check convergence
56     return      % exit, if converged
57 end
58
59 end      %for
60 end      %function

```