UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

SAMARA RAFAEL LAGE

ANÁLISE DAS ABORDAGENS DE PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

LAVRAS – MG
2019

SAMARA RAFAEL LAGE

ANÁLISE DAS ABORDAGENS DE PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Matemática, para obtenção do título de Licenciada.

Orientador
Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães

LAVRAS – MG
2019

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades que foram dadas em minha vida, pela força todos os dias para superar as adversidades e não desistir.

Aos meus pais, por todo apoio e incentivo que me deram durante toda vida e em especial neste momento tão importante.

Às minhas irmãs, agradeço por toda ajuda e por me apoiarem nos momentos de dificuldades.

Às minhas sobrinhas, por fazerem meus dias muito mais felizes e leves. E principalmente ao carinho que me ofereceram durante esta jornada.

Ao meu noivo, pela compreensão, incentivo e sobretudo pelo apoio que me ofereceu nos momentos em que foi difícil continuar.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Henrique Sales Guimarães, pelo seu empenho e orientação.

À minha co-orientadora, Prof. Dra. Silvia Maria Medeiros Caporale pela compreensão, orientação e por prontamente me ajudar sempre que a procurei.

A todos que conviveram comigo e me apoiaram durante o tempo de realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho é de abordagem qualitativa no contexto do ensino de Probabilidade no ensino médio. Para tal, foram analisados os livros didáticos do ensino médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o triênio 2018/2020. Considerando o livro didático como recurso preponderante nas salas de aula, o objetivo foi verificar como os autores apresentam e trabalham o conteúdo de Probabilidade, de maneira a observar se este tratamento facilita ou não a compreensão dos conceitos e se estão de acordo com as propostas dos documentos curriculares. Para a análise, foram selecionados os livros: Quadrante – Matemática, de Eduardo Chavante e Diego Prestes, 1ª edição, 2016; Contextos & Aplicações, de Luiz Roberto Dante, 3ª edição, 2016; Matemática: Interação e Tecnologia, de Rodrigo Balestri, 2ª edição, 2016, e Contato Matemática, de Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da S. R. Garcia, 2ª edição, 2016. Dessa forma, foi possível perceber que os livros não dedicam a atenção que deveriam à Probabilidade.

Palavras Chave: Educação Matemática. Ensino de Probabilidade. Livro Didático.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A palavra probabilidade, derivada do Latim probare (provar, testar), sendo uma área da matemática responsável pelo estudo dos fenômenos aleatórios. Por meio da probabilidade, podemos quantificar quão provável é a ocorrência de certo fenômeno.

De forma geral, a nossa vida é feita de escolhas e a todo tempo tomamos decisões. Quando analisamos o tempo e afirmamos que há uma grande possibilidade de chuva, quando apostamos em loterias, quando fazemos previsões sobre os resultados possíveis de uma eleição, das chances de um time de futebol ganhar o campeonato. Enfim, todos nós fazemos previsões e todas as vezes que avaliamos o risco, estamos avaliando a probabilidade de um evento ocorrer.

A probabilidade está presente em muitas áreas como biologia, engenharia, economia, entre outras, tendo em vista que diversos fenômenos se caracterizam como experimentos aleatórios.

Assim, o conhecimento em probabilidade auxilia-nos a tomar decisões em várias situações do cotidiano, e a falta do seu conhecimento pode levar-nos a tomar decisões errôneas. Com isso, nota-se que a probabilidade desempenha um papel cada vez mais importante na sociedade.

Porém, percebe-se que ainda há uma grande dificuldade no ensino e aprendizagem da probabilidade. Diante das dificuldades apresentadas por alguns alunos, nota-se que o estudo de probabilidade é pouco valorizado e aproveitado no ensino básico, muitas vezes, os alunos estudam probabilidade de forma, mecânica, com a apresentação de fórmulas e distante do contexto social. Mesmo assim, vale salientar que seu estudo é de grande importância, por meio dele, é possível desenvolver nos estudantes a capacidade de compreensão e leitura crítica da realidade, e assim contribuir para a sua formação social, auxiliando-o nas situações de incerteza em que está inserido e na tomada de decisões.

Nesse contexto, a escolha do tema deste trabalho deu-se a partir da minha experiência enquanto estudante. Apesar de ter aprendido a efetuar cálculos relacionados à probabilidade, tive dificuldades em compreender seu significado e importância. Tendo compreendido, percebi o quanto este conceito é presente, importante para nossa formação e como ele foi superficialmente abordado no ensino básico em que cursei.

Considerando o livro didático como um dos recursos mais presentes e influentes no processo de ensino-aprendizagem, delimitamos nosso objeto de pesquisa à análise da abordagem dada à probabilidade nos livros didáticos do ensino médio, com a finalidade de responder a seguinte questão de pesquisa: Como se dá a abordagem dos conteúdos sobre probabilidade nos livros didáticos do ensino médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o triênio 2018/2020?

Nosso objetivo foi mostrar como os autores apresentam e trabalham o conteúdo de probabilidade, de maneira a observar se este tratamento facilita ou não a compreensão dos conceitos e se estão de acordo com as propostas dos documentos curriculares. Além disso, observamos também se as atividades propostas pelos livros permitem a aproximação ou associação da probabilidade com a vivência dos estudantes.

Para isso analisamos as seguintes coleções: Quadrante – Matemática, de Eduardo Chavante e Diego Prestes, 1ª edição/2016; Contextos & Aplicações, de Luiz Roberto Dante, 3ª edição/2016; Matemática: Interação e Tecnologia, de Rodrigo Balestri, 2ª edição/2016 e Contato Matemática, de Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da S. R. Garcia, 2ª edição/2016.

O texto está organizado da seguinte forma, no primeiro capítulo são apresentados alguns fatos históricos que levaram ao desenvolvimento da probabilidade, por fim, uma breve revisão dos principais conceitos e concepções de probabilidade comumente estudados no ensino básico. No segundo capítulo discutimos os aspectos dos documentos curriculares, sua organização e propostas. Por fim, nos capítulos 3 e 4, apresentamos a análise, os resultados e as conclusões que a pesquisa proporcionou.

2 CONTEXTO HISTÓRICO E TEORIAS SOBRE PROBABILIDADE

O propósito deste capítulo é apresentar alguns fatos históricos que levaram ao desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Há algumas pesquisas de abordagem histórica que retratam sua origem. Viali (2008) em seu trabalho traz considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades e argumenta que, traçar um panorama do desenvolvimento apenas desta teoria é uma tarefa bastante complicada considerando o fato de que as pesquisas históricas regularmente unem a história da probabilidade à história da estatística. Tentamos desta forma, apontar os principais acontecimentos que deram origem ao desenvolvimento da teoria de probabilidades.

De acordo com Viali (2008, p. 1), a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o "acaso" representa um papel preponderante.

Segundo Lopes (2005), a Teoria das Probabilidades teve sua origem por volta do século XV, mas antes disso já era tratada como ciência empírica. Suas origens estão relacionadas aos *jogos de azar* e *aos seguros*, mais especificamente, na análise de chances de se ganhar em jogos de azar e na avaliação sobre os riscos dos seguros relacionados à perda de cargas em navios. De acordo com Viali (2008), tem-se que a prática dos seguros teve início com os comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam a perda da carga de navios por naufrágio ou roubo. Teve sequência com os romanos e gregos e chegou ao mundo moderno com os comerciantes marítimos italianos.

Apesar do significativo aumento de seguros para as embarcações marítimas, não houve um estudo matemático aprofundado e os seguradores continuaram a usar técnicas empíricas. Os primeiros estudos matemáticos sobre seguros deram-se em torno dos seguros de vida, este tipo de seguro se popularizou após a Idade Média.

Os jogos de azar também fazem parte do surgimento da Teoria da Probabilidade. O jogo mais antigo, conhecido como Tali (jogo dos ossos) era praticado com astrágalos. Viali (2008, p. 1) define astrágalo como "o ancestral do dado moderno (hexaedro regular). Era formado por um osso de animal (possivelmente carneiro) e semelhante a um tetraedro irregular, isto é, as quatro faces não eram idênticas e nem tampouco mostravam a mesma frequência de ocorrência".

De acordo com Moreira (2015, p.23), como os ossos não tinham lados idênticos, estudiosos modernos apontam que, em virtude da anatomia do osso, as probabilidades de obter cada um dos lados em um lançamento não são iguais: são de aproximadamente 10% para dois dos lados e de 40% para os outros dois. A jogada de Vênus, a mais importante destas, consistia em jogar 4 astrágalos e cada um destes cair em um lado diferente. Além de apostas, este jogo também era utilizado para fazer previsões sobre o futuro e até divisão de heranças.

Mesmo que presente desde a antiguidade, a aleatoriedade e o acaso não foram objetos de pesquisa durante muito tempo, pois para os antigos o futuro dependia da vontade dos deuses, assim, conseguir uma jogada de Vênus, por exemplo, dependia da vontade divina.

De acordo com Rodrigues (2008, p.4), os primeiros estudos dedicados ao cálculo de probabilidade foram iniciados por Jerome Cardano (1547), sendo desenvolvidos posteriormente por Pascal e Fermat (1654), Jacques Bernoulli (1713), Laplace (1825) até os estudos de Kolmogorov (1933) que é tido como o responsável pela Teoria das Probabilidades numa perspectiva axiomática.

Os italianos são considerados os pioneiros nos estudos de cálculos probabilísticos. Segundo Viali (2008), Luca Pacioli (1445-1526) foi o responsável por estudar um problema conhecido como problema dos pontos, que foi resolvido mais tarde por Fermat e Pascal e tem grande importância no desenvolvimento da teoria das probabilidades.

Lopes (2005) afirma que, apesar de alguns autores atribuírem a origem da teoria das probabilidades às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat, Jerome Cardano é considerado o iniciador desta teoria, pois foi o primeiro a escrever argumentos teóricos para o cálculo de probabilidades. Ele estudou as probabilidades de se ganhar em jogos de azar, os resultados de suas pesquisas foram publicados em um manual para jogadores chamado “Liber de Ludo Aleae” (O livro dos jogos de azar - 1526).

Cardano em 1570 fez uma tentativa de estudo matemático sobre os seguros de vida, porém, não teve sucesso. Foi Halley, em 1693, quem apresentou o primeiro trabalho matemático para seguros de vida. Silveira (2001) afirma que Halley mostrou como calcular o valor da anuidade do seguro de acordo com a expectativa de vida da pessoa e da probabilidade de que ela sobreviva por um ou mais anos.

Galileu Galilei (1564-1642) e Tartaglia (1499-1557) assim como Cardano (1547), dedicaram-se ao estudo das probabilidades de se ganhar em jogos de azar. Apesar de suas valiosas contribuições, as técnicas usadas eram simples e se limitavam a casos numéricos. Para resolver problemas não numéricos e que envolvesse mais possibilidades era preciso técnicas mais avançadas.

Pascal e Fermat (1654) foram os primeiros a resolverem problemas gerais usando a teoria das probabilidades, entretanto não chegaram a apresentar teoremas de probabilidade.

Jakob Bernoulli (1730) foi o responsável pelo início da abstração da teoria das probabilidades, indo além da resolução de problemas numérico, desenvolveu os primeiros teoremas sobre o assunto.

De acordo com Silveira (2001), Laplace, em 1812, publicou seu tratado *Théorie Analytique des Probabilités* que foi o maior marco dessa etapa clássica da Teoria das Probabilidades. A partir daí, os estudos clássicos de probabilidades aceleraram-se e continuaram ao longo do século por grandes matemáticos, como Gauss (1777 – 1855), Poisson (1781 – 1840), Poincaré (1854 – 1912), Markov (1856 – 1922), Borel (1871 – 1956), entre outros.

Segundo Viali (2008), a teoria moderna de probabilidade foi iniciada em 1933, por Andrei Kolmogorov, sendo no século XX que ela se desenvolveu de maneira rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas.

Kolmogorov (1903 – 1987) em sua obra *Fundamentos da Teoria das Probabilidades (1933)* apresentou um conjunto de axiomas que descreve a noção de Probabilidade. Com base nesses axiomas foram estabelecidas as quatro propriedades fundamentais da Probabilidade.

No próximo tópico apresentamos os principais conteúdos relacionados à teoria das probabilidades.

3 CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

Para estudarmos probabilidade, precisamos, antes, definir alguns conceitos básicos. Os conceitos básicos da Teoria das Probabilidades são experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Experimento aleatório é definido por Magalhães e Lima (2005, p. 37) como sendo "à situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza". Mesmo quando mantida as condições iniciais, estes fenômenos podem conduzir a resultados diferentes. O lançamento de um dado, lançamento de uma moeda, a retirada de uma carta de um baralho, entre outros, são exemplos de experimentos aleatórios.

Segundo Magalhães e Lima (2005), embora não possamos prever os resultados de um experimento aleatório, podemos determinar o conjunto de todos os resultados possíveis e este conjunto recebe o nome de espaço amostral e será representado neste trabalho por Ω. Este espaço pode ser enumerável, finito ou infinito. Por exemplo, determine o espaço amostral do seguinte experimento: Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (1)$$

É evento qualquer subconjunto de um espaço amostral (Ω). De acordo com Magalhães e Lima (2005), os eventos são representados pelas letras latinas maiúsculas A, B, C, etc. Por exemplo, considerando o experimento do lançamento de um dado, podemos ter os seguintes eventos:

A = Sair um número par

D = Sair um número primo

E = Sair um número maior que 6

A, D e E são eventos do espaço amostral Ω definido em (1).

3. 1 Concepções de probabilidade

Segundo Bayer (2005, p. 6), a probabilidade é o ramo da matemática que estuda fenômenos aleatórios. Por meio desta teoria, pode-se medir e quantificar as chances de obtenção de cada resultado de um experimento aleatório.

De acordo com Moreira (2015), dizer que um jogo A tem mais chances de ser sorteada na mega sena, por exemplo, do que um jogo B, significa dizer que eu tenho mais confiança em apostar no jogo A do que do jogo B. É a partir dos cálculos de probabilidade que determinamos essa medida.

Devido à complexidade conceitual, não existe para este tema uma definição universal e única. O conceito de probabilidade admite várias interpretações e pode ser visto de diferentes perspectivas.

Apresentaremos, de forma sucinta, quatro concepções de probabilidade: Concepção Clássica, Frequentista, Subjetiva e Axiomática para o cálculo de probabilidades.

- **Concepção Clássica**

A concepção clássica define probabilidade como a proporção entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, sob condição de que os resultados sejam equiprováveis, ou seja, tenham a mesma probabilidade de ocorrer.

Dantas (2004, p.25) define a visão clássica de probabilidade como: Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A, que denotaremos por P(A), é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

A definição clássica para probabilidade é atribuída a Pierre Simon Laplace, em 1812, por meio da obra “Teoríe analytique des probabilités”. Entretanto, “a definição de probabilidade como quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra Liber de Ludo Aleae de Girolamo Cardano (1501-1576)” (MORGADO et al., 2004, p. 119). Esta definição só pode ser aplicada quando os espaços amostrais são equiprováveis e finitos.

- **Concepção Frequentista**

Nem sempre é possível determinar a probabilidade de ocorrência de um evento pela definição clássica. Como estimar, por exemplo, a probabilidade de um carro ser roubado? Para resolver este tipo de questão o que pode ser feito é observar com que frequência os fatos ocorrem.

A principal característica do enfoque frequentista é a experimentação ou a observação. Essa concepção define a probabilidade de um evento E, baseado na quantidade de vezes que o evento aconteceu (frequência absoluta), considerando uma grande quantidade de repetições nas mesmas condições.

Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostral associado Ω. Consideremos que o evento E é repetido “n” vezes e seja fr_A a frequência relativa do evento. Assim a probabilidade de A é definida como sendo o limite de fr_A quando “n” tende ao infinito.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} fr_A.$$

A diferença entre a probabilidade clássica e frequentista é que na clássica a probabilidade é calculada “a priori”, antes que o experimento aconteça e a probabilidade calculada considerando a concepção frequentista é calculada “a posteriori”, ou seja, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas.

- **Concepção Subjetiva**

A concepção subjetiva é baseada na intuição, palpite de cada pessoa. Essa probabilidade é pessoal e está relacionada à visão de mundo de cada pessoa, isso quer dizer que duas pessoas diferentes podem ter probabilidades diferentes para o mesmo evento.

> Enquanto nas duas perspectivas anteriores as probabilidades são propriedades do mundo real que nos rodeia, na perspectiva subjetivista, também designada por 53 personalistas, as probabilidades são avaliações de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito. Passa-se, assim, de uma avaliação exterior ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito. Neste sentido, a perspectiva clássica e a frequentista são referidas como interpretações objetivistas de probabilidade. (FERNANDES, 1999).

- **Concepção Axiomática**

A definição formal de probabilidade é atribuída ao matemático russo Andrey Kolmogorov, que formulou um conjunto de axiomas que permitiu fazer uma construção axiomática geral para a Teoria das Probabilidades.

Considera-se P(A) como a probabilidade de ocorrência do evento A, associada ao espaço amostral S, então P(A) deverá satisfazer os seguintes axiomas:

1º axioma: $0 \leq P(A) \leq 1$, a probabilidade de A é um número não negativo;

2º axioma: $P(\Omega) = 1$, a probabilidade de Ω é 1;

3º axioma: Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$) é igual à soma das probabilidades desses eventos.

No próximo capítulo apresentaremos algumas questões relacionadas ao currículo de Matemática na Educação Básica.

4 O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Este capítulo tem como objetivo discutir algumas concepções sobre currículos da Educação Básica, em especial o de Matemática do Ensino Médio.

De acordo com Sacristán (2013), O termo curriculum tem sua origem no latim e significa o curso, a rota, o caminho da vida ou das atividades de uma pessoa ou grupo de pessoas. Pensar em currículo na perspectiva da educação é pensar nas experiências escolares e estas não se limitam aos conteúdos e conhecimentos científicos. Tendo em vista as discussões em torno do currículo, percebe-se que este é um campo de disputa, que envolve relações de poder, conflitos e interesses diversos.

O currículo tem o poder de guiar a vida dos sujeitos e por isso é de grande importância para a comunidade escolar. Nosso objetivo é discutir a organização deste currículo e apresentar os principais documentos norteadores da educação básica, em especial os de matemática do ensino médio.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 9394/96), aprovada em dezembro de 1996, é a lei que regulamenta o sistema educacional do Brasil, desde educação básica até o ensino superior, esta lei é considerada a mais importante que se refere à educação brasileira.

O artigo 21 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) estabelece dois níveis para educação nacional divididos em educação básica composta por educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, e educação superior.

O objetivo da educação básica é assegurar ao cidadão brasileiro a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Segundo o Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 9394/96, os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996).

Embora prevista já na Lei de Diretrizes e Bases (LDB), de 1996, uma base nacional comum, até o ano de 2017 não existia no Brasil. As discussões sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) iniciaram-se no ano de 2013 e em 2017 foi aprovada a BNCC para o ensino fundamental. Já a versão que contempla o ensino médio está suspensa devido às discussões em torno da reforma do ensino médio.

Uma vez aprovada uma BNCC para o ensino fundamental, sua consecução ainda não foi concluída, estados e municípios deverão agora adequar seus currículos tomando-a como referência.

Antes das discussões sobre a BNCC, o que orientava a construção dos currículos de estados e municípios eram as Diretrizes e Parâmetros Curriculares. As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) são normas obrigatórias para a educação básica. Sua origem está previstas no Art 9º da LDB que especifica ser incumbência da União "estabelecer, em colaboração com os estados, Distrito Federal e os municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e os seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar a formação básica comum" (BRASIL, 1996).

O objetivo das diretrizes é promover a equidade da aprendizagem, garantindo que conteúdos básicos sejam ensinados. Cada etapa da educação básica apresenta diretrizes próprias, inclusive para o ensino médio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, também conhecidos como PCN, são documentos referenciais elaborados pelo MEC – Ministério da Educação, em atendimento ao Art. 210 da Constituição Federal (CF - 5/10/1988) serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.

De forma geral podemos dizer que as diretrizes curriculares nacionais (DCN) e os parâmetros curriculares nacionais (PCN) diferenciam-se no aspecto da obrigatoriedade, as DCNs são normas que as escolas são obrigadas a seguir, já os PCNs apresentam recomendações e, portanto não obrigatórias, e no fato de que as DCNs apresentam metas e objetivos às escolas, enquanto os PCNs apresentam orientações e referências curriculares.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394/96, consolidam os PCNs como um currículo de base comum e acrescenta ainda o ensino médio. Os PCNs são referenciais e, portanto, não obrigatórios. Esses documentos foram elaborados a fim de servir como auxílio para o trabalho docente e tem como função subsidiar a amparar na criação dos currículos dos Estados e Municípios. Apesar de não obrigatórios, os PCN's exercem influência direta no sistema de ensino.

Seu objetivo é garantir que todas as crianças e jovens tenham acesso aos conhecimentos básicos necessários para o exercício da cidadania respeitando à diversidade existente.

> Cada criança ou jovem brasileiro, mesmo de locais com pouca infraestrutura e condições socioeconômicas desfavoráveis, deve ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o

> exercício da cidadania para deles poder usufruir. Se existem diferenças socioculturais marcantes, que determinam diferentes necessidades de aprendizagem, existe também aquilo que é comum a todos, que um aluno de qualquer lugar do Brasil, do interior ou do litoral, de uma grande cidade ou da zona rural, deve ter o direito de aprender e esse direito deve ser garantido pelo Estado (BRASIL, 1998: 28).

Os PCNs estão divididos em ensino fundamental I, do 1º ao 5º ano, ensino fundamental II, do 6º ao 9º ano e ensino médio, que recebe uma versão especial. O ensino médio é considerado como última e complementar etapa da educação básica, etapa que sofreu grandes transformações nos últimos tempos. Envolvendo discussões desde o ensino profissionalizante até preparatório para o ensino superior. Atualmente os documentos que amparam o currículo do ensino médio são Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) foram divididos em três áreas: Linguagem, Código e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

A proposta do ensino médio correspondente a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, têm por objetivo apresentar as habilidades básicas que se espera que sejam desenvolvidas pelos discentes em Matemática, Física, Química e Biologia no ensino médio, as diretrizes e parâmetros que organizam esta etapa propõem a integração destas áreas. A intenção das orientações previstas neste documento é dar significado ao conhecimento escolar por meio de contextualização, evitando compartimentalizar os conteúdos, por meio da interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender.

É indispensável que a educação evolua e acompanhe as mudanças decorrentes do desenvolvimento da sociedade. O PCNEM traz considerações a respeito da importância da Matemática no ensino médio, e da necessidade de assumir uma nova postura. Os documentos afirmam que aprender Matemática no ensino médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

De acordo com o PCNEM (1999), os objetivos apresentados para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os estudantes são:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação (BRASIL, 1999, p.42).

4.1 Programa Nacional do Livro Didático

Os materiais didáticos são ferramentas que estão presentes nas escolas e auxiliam no processo de ensino e aprendizagem, como por exemplo, lousa e giz, computadores, cadernos, softwares, entre outros. Lajolo (1996) menciona que dentre os conjuntos de materiais didáticos alguns elementos são mais essenciais do que outros, porque influem mais diretamente na aprendizagem. Entre esses elementos essenciais destacam-se os livros didáticos.

Por ter assumido prioridade entre os recursos utilizados nas salas de aula, o livro didático vem se configurando nos últimos anos como um objeto de discussão. Grande parte dos professores, por diversos motivos, transformou-o no principal ou, até mesmo, único instrumento utilizado nas aulas.

Lajolo (1996) argumenta que a importância do livro didático aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina.

Mandarino e Belfort (2004) apontam que pesquisas parecem indicar que o livro texto é mais do que uma simples ferramenta para os professores de Matemática: ele é também material de estudo e, muitas vezes, a única fonte com a qual o professor pode contar para lidar com as consequências de uma formação inicial deficiente e o único material sistematizado ao qual o aluno tem acesso.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais confirmam essa realidade:

> O ambiente da sala de aula, o número excessivo de alunos por turma, a quantidade de classes assumidas pelos professores e os controles administrativos assumidos no espaço escolar contribuem para a escolha de práticas educacionais que se adaptem à diversidade de situações enfrentadas pelos docentes. Geralmente, isso significa a adoção ou aceitação de um livro, um manual ou uma apostila, como únicos materiais didáticos utilizados para o ensino (Brasil, 1998b, p. 79).

Como ressaltam Mandarino e Belfort (2004), o livro didático tem sido fonte de informação e também de formação para professores, que o utilizam não só como recurso pedagógico, mas também como consulta pessoal. Isso implica na responsabilidade deste recurso como instrumento informativo e formativo dos professores. Compreendemos, a partir dos estudos sobre as pesquisas desenvolvidas sobre o assunto, a influência que este recurso tem sobre a educação e consideramos ser de fundamental importância para professores e alunos que os livros didáticos sejam avaliados e apresentem seus conteúdos de acordo com as propostas oficiais.

Além de ser uma das mais utilizadas e consideráveis ferramentas pedagógicas, o livro didático exerce importante papel nas políticas públicas. A preocupação do Estado com a sua distribuição e avaliação já se dá há alguns anos. Atualmente, a sua distribuição é garantida por um sistema governamental de educação que se efetiva pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Esse programa é o mais antigo dos programas dirigidos à distribuição de livros para a rede pública do ensino brasileiro, iniciou-se em 1937 com a criação do Instituto Nacional do Livro e foi aperfeiçoado ao longo dos anos, no qual recebeu diferentes nomes e formas de execução.

O atual Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) veio substituir o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF) em 1985, com a edição do decreto nº 91.542, de 19/8/85.

> O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) surge pelo Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985, em substituição ao Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), tendo como função avaliar, indicar, comprar e distribuir livros didáticos para as escolas públicas. O governo brasileiro traçou uma política de ação educacional em torno deste fato que, impulsionou a busca pela qualidade deste material didático, pois os livros que não se harmonizassem com as propostas oficiais de ensino não seriam indicados, diminuindo, assim, seu público e seu lucro (SOARES, 2011).

O PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) é um programa criado pelo governo federal, com o objetivo de avaliar e distribuir livros didáticos gratuitamente para alunos de escolas públicas. Esse sistema foi aperfeiçoado em 1995, com a inclusão do Guia de Livros Didáticos contendo resenha das coleções, onde o professor, antes de adotar o melhor livro para seus alunos, faz uma análise e avaliação prévia da coleção.

> PNLD tem como um de seus princípios básicos conferir ao docente a tarefa de escolher o livro que, em sintonia com o projeto pedagógico de sua escola, será usado por seus alunos. Portanto, essa é mais uma das importantes funções que o docente é periodicamente chamado a realizar (BRASIL, 2015).

Segundo orientações do PNLD, o processo de escolha do livro didático pelas escolas segue alguns passos. De início, mediante adesão formal, as editoras manifestam interesse em participar do programa. Os editais contendo as regras para a inscrição do LD são publicados no Diário Oficial da União e no portal do FNDE, esses editais determinam as regras e prazos para as editoras inscreverem suas obras. Depois de selecionadas, essas coleções passam por avaliações técnicas e são encaminhadas à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica, essas obras são avaliadas por especialistas conforme critérios divulgados no edital e a partir da análise desses especialistas são elaborados resenhas das coleções que compõem o guia de livros didáticos. O guia é disponibilizado às escolas e é responsável por orientar a escolha dos livros a serem adotados de forma democrática com a participação dos professores e diretores. Após escolhida às coleções, inicia-se o processo de aquisição, produção, análise de qualidade física das produções até serem recebidas nas escolas.

De acordo com o programa os livros são utilizados por três anos consecutivos e cada aluno tem direito a um exemplar por disciplina. Trataremos, nesse momento, sobre o Guia do Livro Didático que apresenta o conjunto das coleções de Matemática aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2018.

O Guia do Livro Didático expõe as resenhas das oito coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas para o ensino médio e os critérios de avaliação das coleções. Os critérios estão divididos entre critérios eliminatórios comuns a todas as áreas e critérios eliminatórios específicos para cada área e para cada componente curricular.

O guia apresenta uma reflexão acerca das características gerais das obras aprovadas, e os tópicos da Matemática são divididos nos seguintes campos de conteúdo: números, álgebra, geometria, estatística e probabilidade.

Será limitada a apresentação das reflexões acerca da probabilidade, objeto da nossa pesquisa. Em estatística e probabilidade, guia analisa os seguintes tópicos: o conceito clássico de probabilidade, probabilidade condicional; eventos dependentes e independentes, coleta, organização, representação e interpretação de dados; medidas de tendência central e de dispersão de um conjunto de dados, e, eventualmente, relações entre estatística e probabilidade (BRASIL, 2018).

5. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados na produção dos dados e na análise dos livros didáticos, objeto de estudo dessa pesquisa.

A pesquisa é um método de investigação que tem por objetivo buscar solução para problemas propostos. Gil (1985, p.26) define pesquisa como sendo, o processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos.

Esta pesquisa baseou-se em uma abordagem qualitativa. Dentre as características gerais dessa abordagem, salientamos: “A pesquisa qualitativa ou naturalista envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto [...]” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.13).

Toda pesquisa parte de um problema, neste sentido nossos questionamentos iniciais eram referentes às dificuldades dos alunos na compreensão dos conteúdos relacionados à Probabilidade, tendo por base a própria experiência da pesquisadora na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática. Afinal, trata-se de um tema tão presente no cotidiano, com aplicações diversas e muitas vezes pouco compreendido.

Desta forma surgiu à motivação para pesquisar o referido tema, após a escolha do orientador que atua nesta área do conhecimento, buscamos compreender por meio da busca por teorias e principalmente, pesquisas que abordam o processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade.

Tendo em vista que o livro didático é um dos recursos mais presentes e influentes no processo de ensino-aprendizagem, delimitamos nosso objeto de pesquisa à análise da abordagem dada à Probabilidade nos livros didáticos do ensino médio

5.1 A Escolha dos livros

No ano de 2017, realizei meu último estágio do curso de Licenciatura em Matemática. Nesse estágio tive a oportunidade de conhecer um pouco da escola onde fiz o estágio, na cidade de Santo Antônio do Amparo, em que moro atualmente. Essa escola é a única da rede pública que oferece o ensino médio no município.

Em conversa com a professora que acompanhei no estágio sobre a pesquisa que estava desenvolvendo, que tinha as a probabilidade e sua abordagem em livros didáticos como objeto de pesquisa, ela me explicou como se deu o processo de escolha deste recurso para o triênio 2018/2020. A escolha do livro didático nesta escola foi feita apenas pelos professores efetivos, porém, as editoras disponibilizaram os exemplares para todos os professores. Assim, ela me ofereceu as coleções que havia recebido, tendo em vista que eram coleções atuais, aprovadas pelo mais recente PNLD para o ensino médio.

Selecionamos, assim, as seguintes coleções para a análise conforme se vê no Quadro 1:

Quadro 1- Lista das coleções que compõe a amostra

LIVRO	AUTOR	TÍTULO	EDITORA	ANO
L1	Eduardo Chavante e Diego Prestes	Quadrante – Matemática	SM	2016
L2	Luiz Roberto Dante	Contextos & Aplicações	Ática	2016
L3	Rodrigo Balestri	Matemática: Interação e Tecnologia	Leya	2016
L4	Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da S. R. Garcia	Contato Matemática	FTD	2016

A partir da questão norteadora e da escolha das coleções, estabelecemos as seguintes categorias para análise:

(i) A abordagem dos seguintes conceitos:

- Experimento aleatório;
- Espaço amostral e evento;
- Conceito de Probabilidade.

(ii) Os Recursos didáticos sugeridos para o desenvolvimento dos conteúdos sobre probabilidade

(iii) Os tipos de atividades

No próximo capítulo apresentaremos a análise das coleções a partir das categorias definidas.

6. ANÁLISE DAS COLEÇÕES

Apresentamos no Quadro 2 um panorama geral das coleções ressaltando os principais conteúdos sobre probabilidade, número de páginas e o ano em que devem ser desenvolvidos, dos livros didáticos pesquisados.

Quadro 2 - Distribuição dos conteúdos por coleção.

COLEÇÃO	CONTEÚDO	Nº DE PÁGINAS	ANO
L1	Experimentos aleatórios Espaço amostral e evento Probabilidade Probabilidade condicional Probabilidade da intersecção de eventos Lei binomial das probabilidades Probabilidade e Estatística Verificando rota Ampliando fronteiras: Olhos da mãe? Nariz do pai? Matemática em ação: Alimentação e saúde	29	2º ano
L2	Estatística e probabilidade	10	3º ano
L2	Fenômenos aleatórios Espaço amostral e evento Eventos certos, impossível e mutuamente exclusivos união de eventos, intersecção de eventos e complementar de um evento Cálculo de probabilidades Certeza e impossibilidade Definição teórica de probabilidade e consequências Consequência da definição Probabilidade condicional Eventos independentes O método binomial Aplicações de probabilidades à Genética	21	2º ano
L3	Estudando probabilidade Calculando probabilidades Probabilidades da união de dois eventos Probabilidade condicional Experimentos binomiais Estatística e probabilidade Ser consciente	28	2º ano
L4	Probabilidade Probabilidade da união de dois eventos Probabilidade condicional Lei binomial das probabilidades Sobre a unidade Estatística e Probabilidade	25	2º ano

Dentre as coleções analisadas, apenas na coleção L2, o tema Probabilidade é tratado no 2º e 3º ano, as demais coleções abordam o tema apenas no 2º ano do ensino médio.

No que se refere ao estudo de análise de dados e probabilidade, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) recomendam seu estudo em todos os níveis da educação básica.

> Os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das idéias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. (BRASIL, 2006, p.78)

Sendo assim, percebe-se que apenas a coleção L2 retoma o tema em mais de uma série no ensino médio.

Consideramos importante haver essa abordagem em todas as séries para que haja de fato um aprofundamento no tema. (SILVA, PIRES, 2013) apresenta em seu trabalho considerações sobre a formação e organização do currículo, com ideias que se contrapõem às de organização linear, ressaltando a importância da aprendizagem em espiral para a construção do conhecimento, em que da-se a oportunidade ao aluno rever conteúdos para aprofundar-se.

Desta forma, concordamos com Bruner (1973, p. 12) que "um currículo, à medida que se desenvolve, deve voltar repetidas vezes a essas ideias básicas, elaborando e reelaborando-as, até que o aluno tenha captado inteiramente a sua completa formulação sistemática".

Apresentaremos a seguir como são apontados pelos autores das coleções escolhidas os seguintes conceitos: experimento aleatório, espaço amostral e evento e o conceito de probabilidade na amostra escolhida.

6.1.1- Experimento aleatório

A seguir são apresentados os conceitos de experimento aleatório encontrados nos livros didáticos da amostra.

Antes de definir o que é experimento aleatório, L1 contextualiza com o exemplo do lançamento de uma moeda.

L1: *Um experimento é dito aleatório quando o seu resultado depende de fatores que não podem ser controlados nem previstos, de modo que, se o experimento for repetido, pode-se obter um resultado igual ou diferente do anterior.*

L2 e L3 também apresentam o exemplo do lançamento de uma moeda e definem experimento aleatório como:

L2: *Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de fenômenos aleatórios (ou casuais).*

L3: *Chamados de experimento aleatório todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.*

L4 apresenta o exemplo do lançamento de um dado e define experimento aleatório como:

L4: *Todo experimento que, mesmo repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis é chamado de experimento aleatório.*

No geral o conceito de experimento aleatório é apresentado pelos livros por meio de exemplos envolvendo o lançamento de moedas e dados. Nenhum livro abordou ou discutiu as diferenças entre experimento aleatório e determinístico e não há sugestões para experimentação.

Concordamos com Ara (2006) quando afirma que, embora a incerteza esteja presente no nosso cotidiano, o ensino da matemática é marcado pelo determinismo, causando nos discentes a falsa impressão de que para cada questão existe uma única resposta, uma certeza absoluta, no qual a incerteza não é admitida.

Para romper com essa visão determinista que alguns estudantes trazem é preciso que a aleatoriedade e o acaso sejam explorados de forma significativa, pois o conceito de experimento aleatório é essencial para o desenvolvimento do conteúdo de probabilidade.

Consideramos que apresentar o conceito apenas via exemplos como lançamento de moedas e dados, como é feita pela maioria das coleções, é pouco atrativo, tendo em vista que existem outros exemplos do cotidiano, de conhecimento dos alunos, que poderiam ser explorados.

Van de Walle (2009) apresenta sugestões de atividades que utilizam dispositivos randômicos como roletas, cubos numéricos, moedas lançadas, cubos retirados de um saco, para que os alunos realizem experimentos e desenvolvam as ideias de que alguns eventos são mais ou menos prováveis de ocorrer do que outros.

Segundo Albuquerque (2015), uma boa maneira de introduzir o estudo sobre probabilidade é utilizando exemplos dos jogos, em seu trabalho o autor apresenta o jogo dos discos. Para o autor, é importante que o primeiro contato dos alunos com a probabilidade seja de forma lúdica, para que seja despertado o interesse dos estudantes e, com isso, os instigue a investigação das propriedades e dos conceitos matemáticos que possam estar envolvidos nesses jogos.

A tecnologia também pode ser usada para a introdução da aleatoriedade, as Orientações Educacionais para o Ensino Médio (2006) sugerem o uso de planilhas eletrônicas:

> As planilhas eletrônicas também são muito apropriadas para introduzir a noção de simulação probabilística, importante em diversos campos de aplicação. Ao se usar a função "ALEATÓRIO ()", podem-se simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, contribuindo, assim, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência relativa observada em uma infinidade de repetições (BRASIL, 2006, p.89).

Assim, vale salientar que experimento aleatório é um conceito essencial para o desenvolvimento do conteúdo de probabilidade e por isso deve ser explorado de maneira significativa, colocando o aluno como sujeito ativo no processo de ensino.

6.1.2- Espaço amostral

Após definir experimento aleatório, L1 define espaço amostral como:

L1: *Conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.*

Em seguida, apresenta três exemplos de experimentos aleatórios e eventos usando moedas e dados. Utiliza-se a árvore de possibilidades e tabela de dupla entrada para descrever o espaço amostral.

L2: *Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral.*

Logo após definir o que é espaço amostral, L2 apresenta dois exemplos envolvendo lançamento de dados e cartas.

L3 e L4 também definem espaço amostral e apresentam exemplos utilizando árvores de probabilidades e tabela de dupla entrada para descrever o espaço amostral.

L3: *Chamamos de espaço amostral, e geralmente indicamos por Ω (lê-se: ômega), o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.*

L4: *O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado espaço amostral.*

Os exemplares analisados apresentam a ideia de espaço amostral como conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Para exemplificar, utilizam lançamentos de dados e moedas.

A escolha pelo uso de diagrama de árvore e tabelas de dupla entrada facilita a visualização e organização do espaço de possibilidades. As orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2006, p.79) afirmam que a utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Desta forma, concordamos com Van de Walle (2009) que para compreender a probabilidade faz se necessário, também, a compreensão dos conceitos de resultados e de espaço amostral.

6.1.3 – Eventos

A seguir são apresentadas as definições de evento encontradas nas amostras.

L1: *Cada subconjunto do espaço amostral é denominado evento.*

L2: *Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.*

L3: *Chamamos de evento ou acontecimento, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, cada subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.*

L4: *Todo subconjunto de um espaço amostral Ω é chamado evento. Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula.*

Quanto a definição de evento, os livros conceituam como um subconjunto do espaço amostral. Logo em seguida, apresentam exemplos para ilustrar o conceito abordado.

A seguir, apresentamos os conceitos de probabilidade encontrados nos livros didáticos.

6.1.4 - Conceito de probabilidade

Antes de definir o conceito de probabilidade, L1 cita o exemplo do lançamento de um dado e exemplifica que dentro deste espaço amostral alguns eventos são mais difíceis de ocorrer do que outros.

Concordamos com essa abordagem e consideramos importante, assim como (BRASIL, 2006) que:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na

> nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. (BRASIL, 2006, p.79)

L1: *Com o conceito de probabilidade, busca-se expressar por meio de um número o quanto é provável a ocorrência de um evento, sendo tão maior esse número quanto mais provável for a ocorrência do evento.*

Ainda com exemplo do lançamento de um dado, L1 apresenta o conceito de equiprovável, para então definir por meio da definição clássica o cálculo das probabilidades.

L1: *Seja* $\Omega=\{e_1,\ e_2,\ e_3, ..., e_n\}$ *um espaço amostral de um experimento aleatório e* $A \subset \Omega$ *um evento qualquer, de modo que os eventos elementares* $e_1,\ e_2,\ e_3, ..., e_n$ *são igualmente prováveis. Então a probabilidade de A, indicada por P(A), é definida por:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}.$$

Nesta definição, o número de elementos de A também é chamado de número de casos favoráveis, e o número de elementos de Ω *é chamado de número de casos possíveis. Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser escrita como:*

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Em seguida, menciona três axiomas com suas respectivas demonstrações:

1) $P(\varnothing) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$
2) *Se A e B são eventos e* $A \subset B$*, então* $P(A) \leq P(B)$
3) *Para qualquer evento A,* $0 \leq P(A) \leq 1$.

L2 conceitua probabilidade da seguinte maneira:

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as probabilidades de determinado resultado ocorrer. A teoria das probabilidades é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

L2 define o cálculo de probabilidade como:

L2: *Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (o espaço é equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por p(A), é um número que mede essa chance e é dado por:*

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Logo depois, L2 mostra que a propriedade de ocorrência de um evento está no intervalo $0 \leq P(A) \leq 1$.

Além da probabilidade clássica, L2 apresenta a definição teórica de probabilidade:

L2: Definimos teoricamente probabilidade como uma função que associa a cada evento A um número p(A) satisfazendo os seguintes axiomas:

1ª) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento A;

2ª) Se Ω é o espaço amostral, então $p(\Omega)=1$

3ª) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, quando $A \cap B = \emptyset$ (eventos mutuamente exclusivos)

L3 e L4 definem a probabilidade de um evento ocorrer como:

L3: *Considere um evento A de um espaço amostral* Ω *finito e equiprovável. A razão entre a quantidade de elementos de A (indica por n(A)) e a quantidade de elementos de* Ω *(indicada por n(*Ω*)) é a probabilidade de P(A) de o evento A ocorrer.*

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \;\; ou \;\; P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

L4: *A probabilidade de ocorrer um evento A de um espaço amostral* Ω *finito é dado por* $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$*, em que n(A) e n(*$\Omega$*) representam a quantidade de elementos de A e de* Ω*, respectivamente*

Ambos também mostram que a propriedade de ocorrência de um evento está no intervalo $0 \leq P(A) \leq 1$.

De todos os livros analisados, todos apresentam a probabilidade por meio da definição clássica. Apenas o L2 explora a definição axiomática e suas propriedades. O conceito frequentista, com exceção do L2 que o apresenta em volume diferente e propõe experimentos, é apresentado no final do capítulo de forma superficial e sem experimentação.

Coutinho (1994) chama a atenção para as vantagens da utilização da visão frequentista para o ensino dos primeiros conceitos de Probabilidade, apontando a necessidade de uma mudança na abordagem do tema no Brasil, que explora apenas a visão clássica, pascaliana, limitando-se o estudo dos casos nos quais existe a equiprobabilidade. Para a autora esta visão parece a mais adequada num primeiro contato, pois pode utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, uma vez que não precisa estar limitado à hipótese de equiprobabilidade.

Por meio da frequência relativa é possível comparar os resultados experimentais com os teóricos, associando a realidade, o que favorece para a construção do conceito e uma aprendizagem significativa.

Para Van de Walle (2009) é importante trabalhar os conceitos de probabilidade frequentista para que os estudantes possam chegar à probabilidade teórica por meio da experimentação. Ainda segundo Van de Walle (2009) existem ainda algumas razões justificando uma abordagem experimental para o ensino de Probabilidade:

> - É significamente mais intuitiva. Os resultados começam a fazer sentido e não são oriundos de alguma regra abstrata.
> - Elimina apostar em probabilidades e se perguntar. “Eu fiz isso direito?”. Contar ou tentar determinar o número de elementos em um espaço de amostra pode ser muito difícil sem algumas informações intuitivas básicas.
> - Auxilia os alunos a perceber como a razão entre um resultado particular e o número total de testes começa a convergir para um número fixo (limite). Para um número infinito de testes, a frequência relativa e a probabilidade teórica seriam as mesmas.
> - Desenvolve uma apreciação pela abordagem de simulação para resolver problemas. Muitos problemas do mundo real são realmente resolvidos conduzindo experiências ou simulações. É muito mais divertida e interessante! Até mesmo procurar por uma explicação correta para o modelo teórico se torna mais interessante (VAN DE WALLE, 2009, p.517).

Consideramos apropriado estabelecer relações entre as várias concepções de probabilidade para que as possibilidades de compreensão do conceito sejam ampliadas. Os autores perdem a oportunidade de explorar o conteúdo por meio de experimentos, jogos, com a utilização da tecnologia, que são recursos que auxiliam a aprendizagem.

6.2. Recursos didáticos associados às atividades

Nesta seção, realizamos uma análise sobre como os recursos didáticos são utilizados pelos autores.

De acordo com Grando (2015, p. 394) “Os recursos didáticos são entendidos como modelos concretos ou não, que possam contribuir e facilitar a aprendizagem matemática dos alunos das escolas.”.

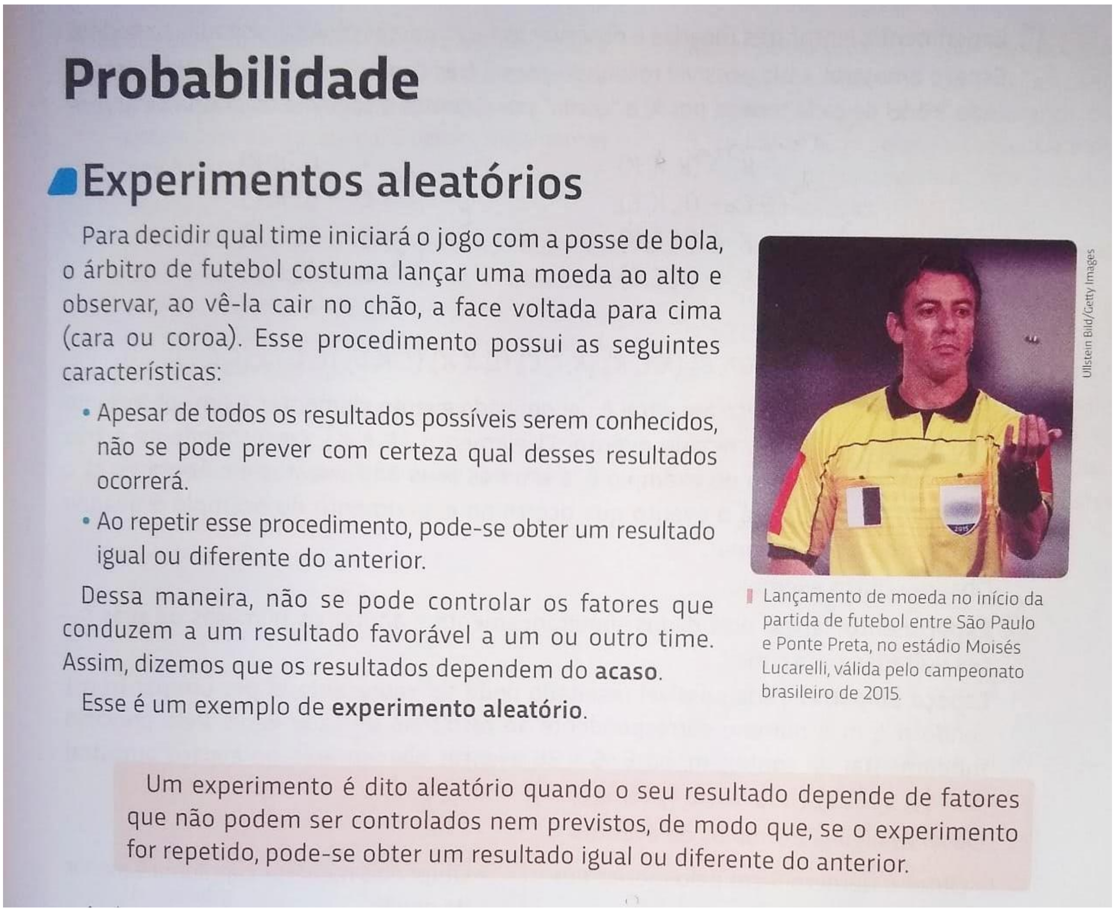
Segundo Souza (2007), um dos objetivos da utilização dos recursos didáticos no ensino é o de fazer o aluno a adquirir a cultura investigativa e o desenvolvimento da criatividade. Porém, para que a sua utilização seja útil, esta deve ser acompanhada de planejamento e reflexão pedagógica para que se alcance o objetivo proposto.

Analisamos assim, quais os recursos são utilizados ou propostos nas coleções pelos autores, observando aspectos voltados à história da matemática, uso da tecnologia, materiais concretos, entre outros.

- L1

Como podemos ver na Figura 1, antes de formalizar os conceitos, o autor apresenta o exemplo do lançamento de uma moeda como forma de contextualizar o tema que será introduzido e definir o que é um experimento aleatório.

Figura 1- Exemplificação do livro L1



Probabilidade

Experimentos aleatórios

Para decidir qual time iniciará o jogo com a posse de bola, o árbitro de futebol costuma lançar uma moeda ao alto e observar, ao vê-la cair no chão, a face voltada para cima (cara ou coroa). Esse procedimento possui as seguintes características:

- Apesar de todos os resultados possíveis serem conhecidos, não se pode prever com certeza qual desses resultados ocorrerá.
- Ao repetir esse procedimento, pode-se obter um resultado igual ou diferente do anterior.

Dessa maneira, não se pode controlar os fatores que conduzem a um resultado favorável a um ou outro time. Assim, dizemos que os resultados dependem do **acaso**.

Esse é um exemplo de **experimento aleatório**.

Ullstein Bild/Getty Images

Lançamento de moeda no início da partida de futebol entre São Paulo e Ponte Preta, no estádio Moisés Lucarelli, válida pelo campeonato brasileiro de 2015.

Um experimento é dito aleatório quando o seu resultado depende de fatores que não podem ser controlados nem previstos, de modo que, se o experimento for repetido, pode-se obter um resultado igual ou diferente do anterior.

Fonte:(CHAVANTE, 2016, p. 69).

Compreender o caráter aleatório de alguns fenômenos naturais, no qual a incerteza está constantemente presente, são um dos passos mais importantes do ensino de probabilidade. Tendo em vista que, o caráter determinístico é predominante no ensino de matemática, dificultando assim o aprendizado em disciplinas, como a probabilidade, em que os resultados não são exatos.

Concordamos com Ara (2006) que para superar dificuldades relacionadas a aleatoriedade, é preciso dispensar maior atenção aos conceitos e à compreensão da realidade, através da experimentação e de exemplos contextualizados, levando em conta as áreas de interesse dos alunos.

Logo após essa introdução, o conceito de probabilidade é apresentado e a seção é encerrada com exemplos, exercícios resolvidos e propostos.

Já a Figura 2, podemos ver um exemplo de utilização da história da matemática:

Figura 2- Exemplo de aplicação da História da Matemática

Probabilidade

Associada aos experimentos ou fenômenos aleatórios, está a incerteza quanto à ocorrência de determinado evento. Na teoria das probabilidades, buscam-se modelos que possam medir essa incerteza. Considere, por exemplo, o experimento de lançar um dado cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os eventos a seguir.

- Obter o número 3: $A = \{3\}$
- Obter um número primo par: $B = \{2\}$
- Obter um número ímpar: $C = \{1, 3, 5\}$

Há eventos mais difíceis de ocorrer do que outros, como é o caso do evento A em relação ao evento C. É razoável esperar maiores chances para se obter um número ímpar qualquer (1, 3 ou 5) em vez de se obter um desses números em particular (3). Por outro lado, também esperamos que os resultados 3 e 2 sejam igualmente prováveis. Com o conceito de **probabilidade**, busca-se expressar por meio de um número o quanto é provável a ocorrência de um evento, sendo tão maior esse número quanto mais provável for a ocorrência do evento.

No caso do experimento de lançar um dado de seis faces, é uma questão fundamental saber se os resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 e 6) realmente são todos igualmente prováveis. Isso deve ocorrer se, entre outras características, o dado for perfeitamente regular e uniforme. Nesse caso, diz-se que o dado não é "viciado" ou que é "honesto", assim, podemos considerar os eventos elementares do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ igualmente prováveis, isto é, **equiprováveis**.

Seja $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ um espaço amostral de um experimento aleatório e $A \subset \Omega$ um evento qualquer, de modo que os eventos elementares $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ são igualmente prováveis. Então, a probabilidade de A, indicada por $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

Nessa definição, o número de elementos de A também é chamado **número de casos favoráveis**, e o número de elementos de Ω é chamado **número de casos possíveis**. Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser escrita como:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Em 1654, um amigo do francês Blaise Pascal (1623–1662) o indagou a respeito da maneira que um jogador deveria ser indenizado em um jogo de dados interrompido. Pascal informou seu compatriota Pierre de Fermat (1601–1665), e a correspondência entre eles sobre o assunto originou os fundamentos a respeito da moderna teoria das probabilidades.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

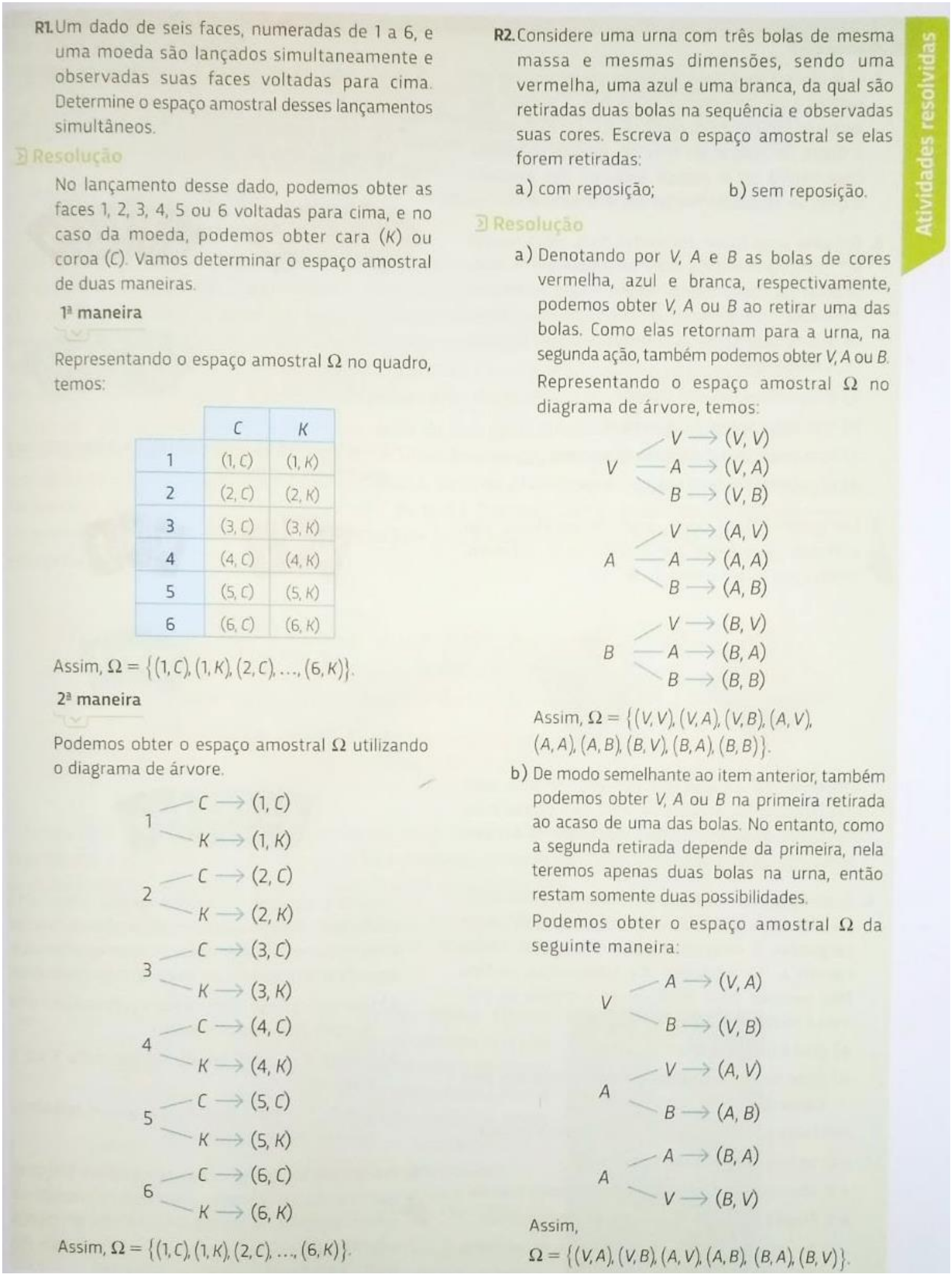
Blaise Pascal, físico, matemático, filósofo e teólogo do século XVII. MEYER, H. Técnica: gravura. Memoirs encyclopedia, Reino Unido, 1833.

Fonte: (CHAVANTE, 2016, p. 73)

Podemos ver que, apesar de abordado, este recurso foi empregado de forma superficial, como o apontamento de fatos históricos em boxes informativos.

Nos exemplos e exercícios resolvidos, o autor explora a utilização de árvores de probabilidades e tabelas de duplas entrada para a constituição do espaço amostral, como podemos observar na Figura 3:

Figura 3 – Exemplos de árvore de probabilidade e tabela de dupla entrada



R1. Um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, e uma moeda são lançados simultaneamente e observadas suas faces voltadas para cima. Determine o espaço amostral desses lançamentos simultâneos.

Resolução

No lançamento desse dado, podemos obter as faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 voltadas para cima, e no caso da moeda, podemos obter cara (K) ou coroa (C). Vamos determinar o espaço amostral de duas maneiras.

1ª maneira

Representando o espaço amostral Ω no quadro, temos:

	C	K
1	$(1, C)$	$(1, K)$
2	$(2, C)$	$(2, K)$
3	$(3, C)$	$(3, K)$
4	$(4, C)$	$(4, K)$
5	$(5, C)$	$(5, K)$
6	$(6, C)$	$(6, K)$

Assim, $\Omega = \{(1, C), (1, K), (2, C), \ldots, (6, K)\}$.

2ª maneira

Podemos obter o espaço amostral Ω utilizando o diagrama de árvore.

1 — $C \longrightarrow (1, C)$; $K \longrightarrow (1, K)$
2 — $C \longrightarrow (2, C)$; $K \longrightarrow (2, K)$
3 — $C \longrightarrow (3, C)$; $K \longrightarrow (3, K)$
4 — $C \longrightarrow (4, C)$; $K \longrightarrow (4, K)$
5 — $C \longrightarrow (5, C)$; $K \longrightarrow (5, K)$
6 — $C \longrightarrow (6, C)$; $K \longrightarrow (6, K)$

Assim, $\Omega = \{(1, C), (1, K), (2, C), \ldots, (6, K)\}$.

R2. Considere uma urna com três bolas de mesma massa e mesmas dimensões, sendo uma vermelha, uma azul e uma branca, da qual são retiradas duas bolas na sequência e observadas suas cores. Escreva o espaço amostral se elas forem retiradas:

a) com reposição; b) sem reposição.

Resolução

a) Denotando por V, A e B as bolas de cores vermelha, azul e branca, respectivamente, podemos obter V, A ou B ao retirar uma das bolas. Como elas retornam para a urna, na segunda ação, também podemos obter V, A ou B. Representando o espaço amostral Ω no diagrama de árvore, temos:

V — $V \longrightarrow (V, V)$; $A \longrightarrow (V, A)$; $B \longrightarrow (V, B)$
A — $V \longrightarrow (A, V)$; $A \longrightarrow (A, A)$; $B \longrightarrow (A, B)$
B — $V \longrightarrow (B, V)$; $A \longrightarrow (B, A)$; $B \longrightarrow (B, B)$

Assim, $\Omega = \{(V, V), (V, A), (V, B), (A, V), (A, A), (A, B), (B, V), (B, A), (B, B)\}$.

b) De modo semelhante ao item anterior, também podemos obter V, A ou B na primeira retirada ao acaso de uma das bolas. No entanto, como a segunda retirada depende da primeira, nela teremos apenas duas bolas na urna, então restam somente duas possibilidades. Podemos obter o espaço amostral Ω da seguinte maneira:

V — $A \longrightarrow (V, A)$; $B \longrightarrow (V, B)$
A — $V \longrightarrow (A, V)$; $B \longrightarrow (A, B)$
A — $A \longrightarrow (B, A)$; $V \longrightarrow (B, V)$

Assim, $\Omega = \{(V, A), (V, B), (A, V), (A, B), (B, A), (B, V)\}$.

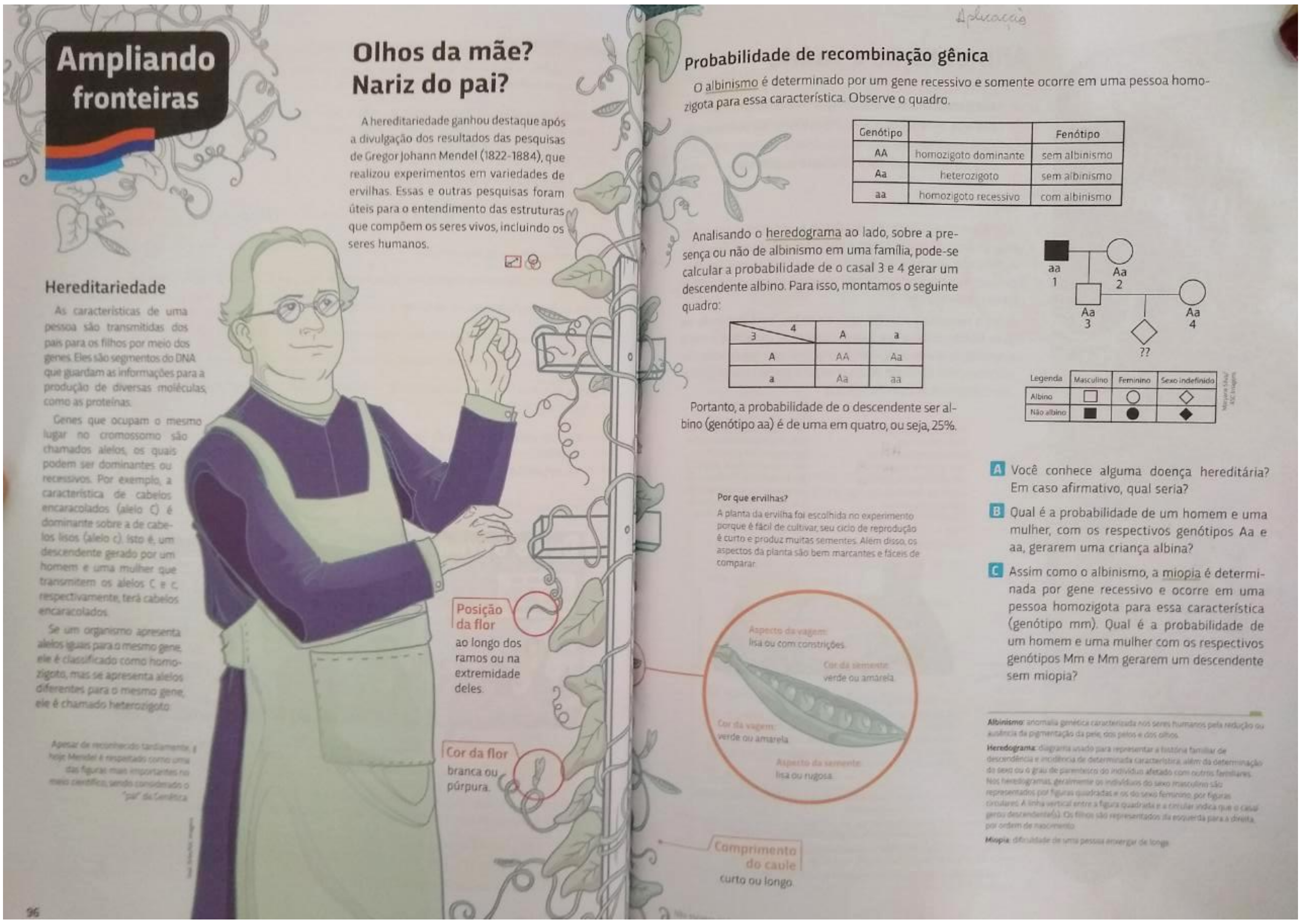
Atividades resolvidas

Fonte: (CHAVANTE, 2016, p71)

Esse recurso é de grande importância para a visualização do espaço amostral. Dessa maneira, é possível ilustrar todas as possibilidades e assim facilitar a compreensão do estudante.

Na seção *Ampliando fronteiras* e *Matemática em ação*, o autor aborda temas relacionados a outras áreas do conhecimento, como podemos ver na Figura 4 são apresentadas aplicações voltadas à genética.

Figura 4 - Aplicação à genética



Ampliando fronteiras

Olhos da mãe? Nariz do pai?

A hereditariedade ganhou destaque após a divulgação dos resultados das pesquisas de Gregor Johann Mendel (1822-1884), que realizou experimentos em variedades de ervilhas. Essas e outras pesquisas foram úteis para o entendimento das estruturas que compõem os seres vivos, incluindo os seres humanos.

Hereditariedade

As características de uma pessoa são transmitidas dos pais para os filhos por meio dos genes. Eles são segmentos do DNA que guardam as informações para a produção de diversas moléculas, como as proteínas.

Genes que ocupam o mesmo lugar no cromossomo são chamados alelos, os quais podem ser dominantes ou recessivos. Por exemplo, a característica de cabelos encaracolados (alelo C) é dominante sobre a de cabelos lisos (alelo c). Isto é, um descendente gerado por um homem e uma mulher que transmitem os alelos C e c, respectivamente, terá cabelos encaracolados.

Se um organismo apresenta alelos iguais para o mesmo gene, ele é classificado como homozigoto, mas se apresenta alelos diferentes para o mesmo gene, ele é chamado heterozigoto.

Apesar de reconhecido tardiamente, hoje Mendel é respeitado como uma das figuras mais importantes no meio científico, sendo considerado o "pai" da Genética.

Posição da flor: ao longo dos ramos ou na extremidade deles.

Cor da flor: branca ou púrpura.

Comprimento do caule: curto ou longo.

96

Probabilidade de recombinação gênica

O albinismo é determinado por um gene recessivo e somente ocorre em uma pessoa homozigota para essa característica. Observe o quadro.

Genótipo		Fenótipo
AA	homozigoto dominante	sem albinismo
Aa	heterozigoto	sem albinismo
aa	homozigoto recessivo	com albinismo

Analisando o heredograma ao lado, sobre a presença ou não de albinismo em uma família, pode-se calcular a probabilidade de o casal 3 e 4 gerar um descendente albino. Para isso, montamos o seguinte quadro:

3 \ 4	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Portanto, a probabilidade de o descendente ser albino (genótipo aa) é de uma em quatro, ou seja, 25%.

Legenda	Masculino	Feminino	Sexo indefinido
Albino	□	○	◇
Não albino	■	●	◆

Por que ervilhas?

A planta da ervilha foi escolhida no experimento porque é fácil de cultivar, seu ciclo de reprodução é curto e produz muitas sementes. Além disso, os aspectos da planta são bem marcantes e fáceis de comparar.

A Você conhece alguma doença hereditária? Em caso afirmativo, qual seria?

B Qual é a probabilidade de um homem e uma mulher, com os respectivos genótipos Aa e aa, gerarem uma criança albina?

C Assim como o albinismo, a miopia é determinada por gene recessivo e ocorre em uma pessoa homozigota para essa característica (genótipo mm). Qual é a probabilidade de um homem e uma mulher com os respectivos genótipos Mm e Mm gerarem um descendente sem miopia?

Albinismo: anomalia genética caracterizada nos seres humanos pela redução ou ausência de pigmentação da pele, dos pelos e dos olhos.

Heredograma: diagrama usado para representar a história familiar de descendência e incidência de determinada característica, além da determinação do sexo ou o grau de parentesco do indivíduo afetado com outros familiares. Nos heredogramas, geralmente os indivíduos do sexo masculino são representados por figuras quadradas e os do sexo feminino, por figuras circulares. A linha vertical entre a figura quadrada e a circular indica que o casal gerou descendente(s).

Miopia: dificuldade de uma pessoa enxergar de longe.

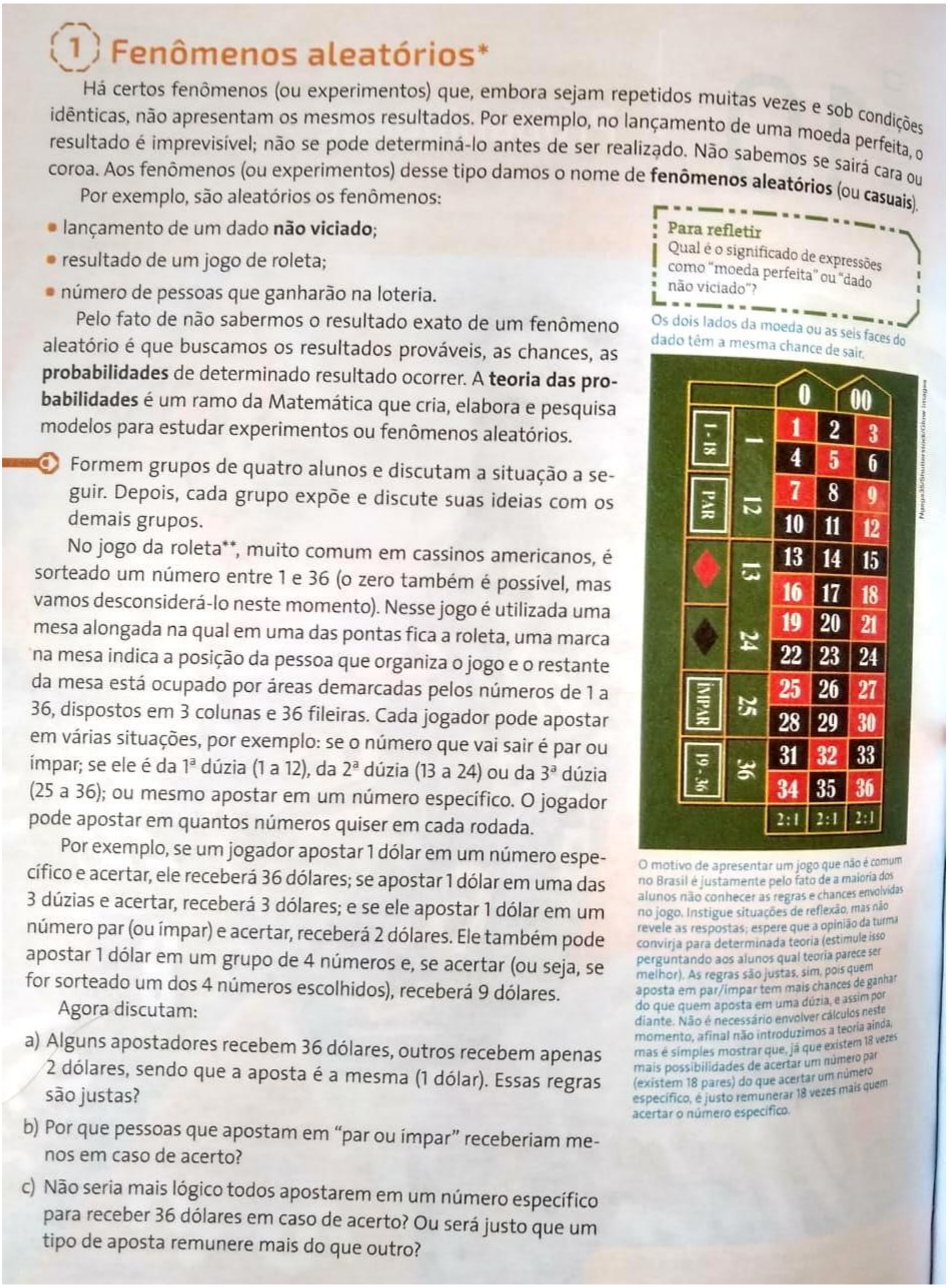
Fonte: (CHAVANTE, 2016, p. 96-97)

A probabilidade é uma área rica em aplicações e por isso este recurso deve ser bem explorado. Este tipo de abordagem, que explora situações presentes na realidade e no cotidiano dos alunos, favorece para despertar seus interesses, tornar a aprendizagem mais interessante e significativa.

- **L2**

Já a coleção L2, como pode ver na Figura 5, introduz o capítulo de forma diferente. Antes de formalizar os conceitos, o autor propõe uma discussão em grupo, onde apresenta as regras de um jogo que não é comum no Brasil e pergunta se as regras são justas.

Figura 5- Introdução ao conceito de probabilidade.



1 Fenômenos aleatórios*

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de **fenômenos aleatórios** (ou **casuais**).

Por exemplo, são aleatórios os fenômenos:

- lançamento de um dado **não viciado**;
- resultado de um jogo de roleta;
- número de pessoas que ganharão na loteria.

Para refletir
Qual é o significado de expressões como "moeda perfeita" ou "dado não viciado"?

Os dois lados da moeda ou as seis faces do dado têm a mesma chance de sair.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as **probabilidades** de determinado resultado ocorrer. A **teoria das probabilidades** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Formem grupos de quatro alunos e discutam a situação a seguir. Depois, cada grupo expõe e discute suas ideias com os demais grupos.

No jogo da roleta**, muito comum em cassinos americanos, é sorteado um número entre 1 e 36 (o zero também é possível, mas vamos desconsiderá-lo neste momento). Nesse jogo é utilizada uma mesa alongada na qual em uma das pontas fica a roleta, uma marca na mesa indica a posição da pessoa que organiza o jogo e o restante da mesa está ocupado por áreas demarcadas pelos números de 1 a 36, dispostos em 3 colunas e 36 fileiras. Cada jogador pode apostar em várias situações, por exemplo: se o número que vai sair é par ou ímpar; se ele é da 1ª dúzia (1 a 12), da 2ª dúzia (13 a 24) ou da 3ª dúzia (25 a 36); ou mesmo apostar em um número específico. O jogador pode apostar em quantos números quiser em cada rodada.

Por exemplo, se um jogador apostar 1 dólar em um número específico e acertar, ele receberá 36 dólares; se apostar 1 dólar em uma das 3 dúzias e acertar, receberá 3 dólares; e se ele apostar 1 dólar em um número par (ou ímpar) e acertar, receberá 2 dólares. Ele também pode apostar 1 dólar em um grupo de 4 números e, se acertar (ou seja, se for sorteado um dos 4 números escolhidos), receberá 9 dólares.

Agora discutam:

a) Alguns apostadores recebem 36 dólares, outros recebem apenas 2 dólares, sendo que a aposta é a mesma (1 dólar). Essas regras são justas?

b) Por que pessoas que apostam em "par ou ímpar" receberiam menos em caso de acerto?

c) Não seria mais lógico todos apostarem em um número específico para receber 36 dólares em caso de acerto? Ou será justo que um tipo de aposta remunere mais do que outro?

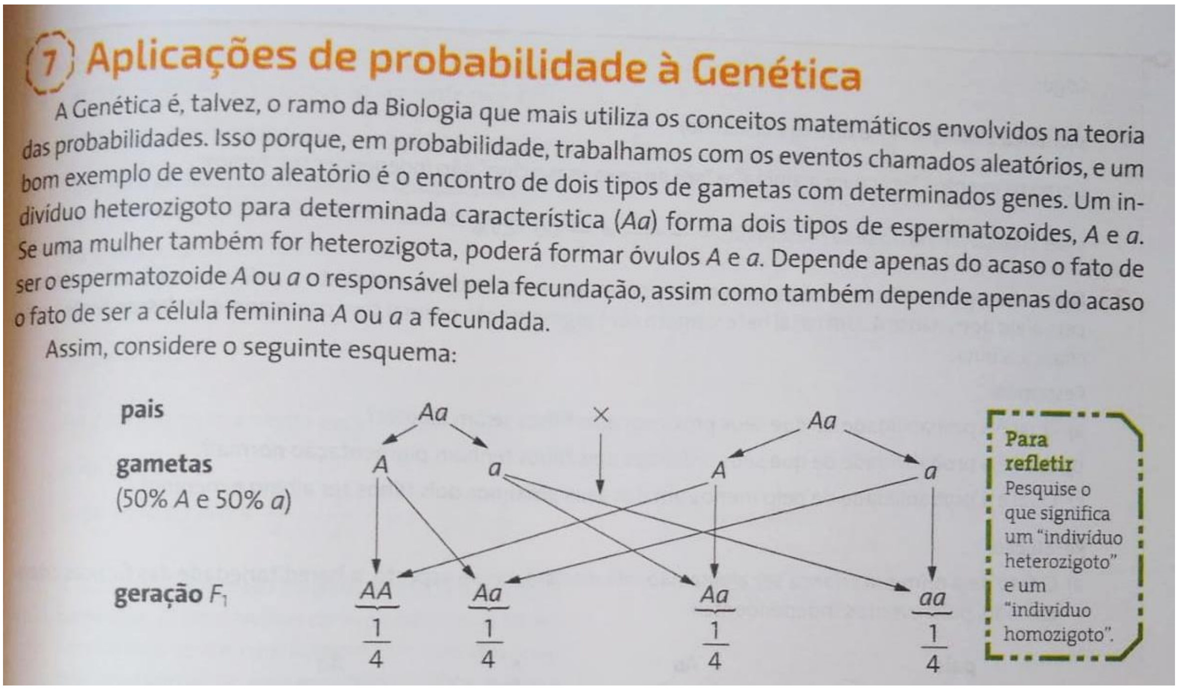
O motivo de apresentar um jogo que não é comum no Brasil é justamente pelo fato de a maioria dos alunos não conhecer as regras e chances envolvidas no jogo. Instigue situações de reflexão, mas não revele as respostas; espere que a opinião da turma convirja para determinada teoria (estimule isso perguntando aos alunos qual teoria parece ser melhor). As regras são justas, sim, pois quem aposta em par/ímpar tem mais chances de ganhar do que quem aposta em uma dúzia, e assim por diante. Não é necessário envolver cálculos neste momento, afinal não introduzimos a teoria ainda, mas é simples mostrar que, já que existem 18 vezes mais possibilidades de acertar um número par (existem 18 pares) do que acertar um número específico, é justo remunerar 18 vezes mais quem acertar o número específico.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 232)

O objetivo é instigar os alunos e provocar situações de reflexão a respeito das chances envolvidas no jogo sem envolver cálculos nesse momento, com o objetivo de levar o aluno a fixar o conceito de probabilidade.

Assim como a coleção L1, a coleção L2 também apresenta aplicações de probabilidade à Genética, como pode ser visto na Figura 6:

Figura 6 - Aplicação à genética



7 Aplicações de probabilidade à Genética

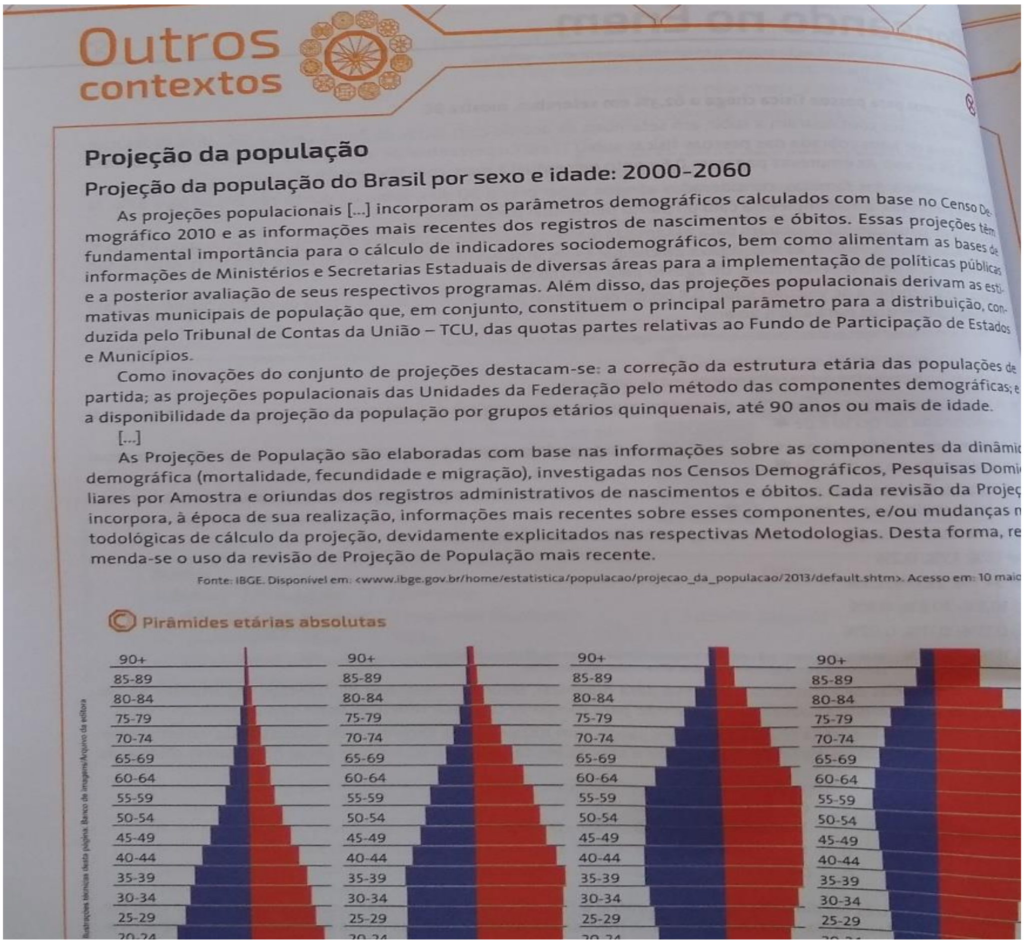
A Genética é, talvez, o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios, e um bom exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes. Um indivíduo heterozigoto para determinada característica (*Aa*) forma dois tipos de espermatozoides, *A* e *a*. Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulos *A* e *a*. Depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozoide *A* ou *a* o responsável pela fecundação, assim como também depende apenas do acaso o fato de ser a célula feminina *A* ou *a* a fecundada.

Assim, considere o seguinte esquema:

Fonte: (DANTE, 2016, p. 253)

Na seção *Outros contextos*, como podemos ver na Figura 7, o autor apresenta situações do cotidiano em que é possível trabalhar com conceitos de probabilidade e frequência relativa.

Figura 7- Frequência relativa



Outros contextos

Projeção da população

Projeção da população do Brasil por sexo e idade: 2000-2060

As projeções populacionais [...] incorporam os parâmetros demográficos calculados com base no Censo Demográfico 2010 e as informações mais recentes dos registros de nascimentos e óbitos. Essas projeções têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sociodemográficos, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais de diversas áreas para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, das projeções populacionais derivam as estimativas municipais de população que, em conjunto, constituem o principal parâmetro para a distribuição, conduzida pelo Tribunal de Contas da União – TCU, das quotas partes relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

Como inovações do conjunto de projeções destacam-se: a correção da estrutura etária das populações de partida; as projeções populacionais das Unidades da Federação pelo método das componentes demográficas; e a disponibilidade da projeção da população por grupos etários quinquenais, até 90 anos ou mais de idade.

[...]

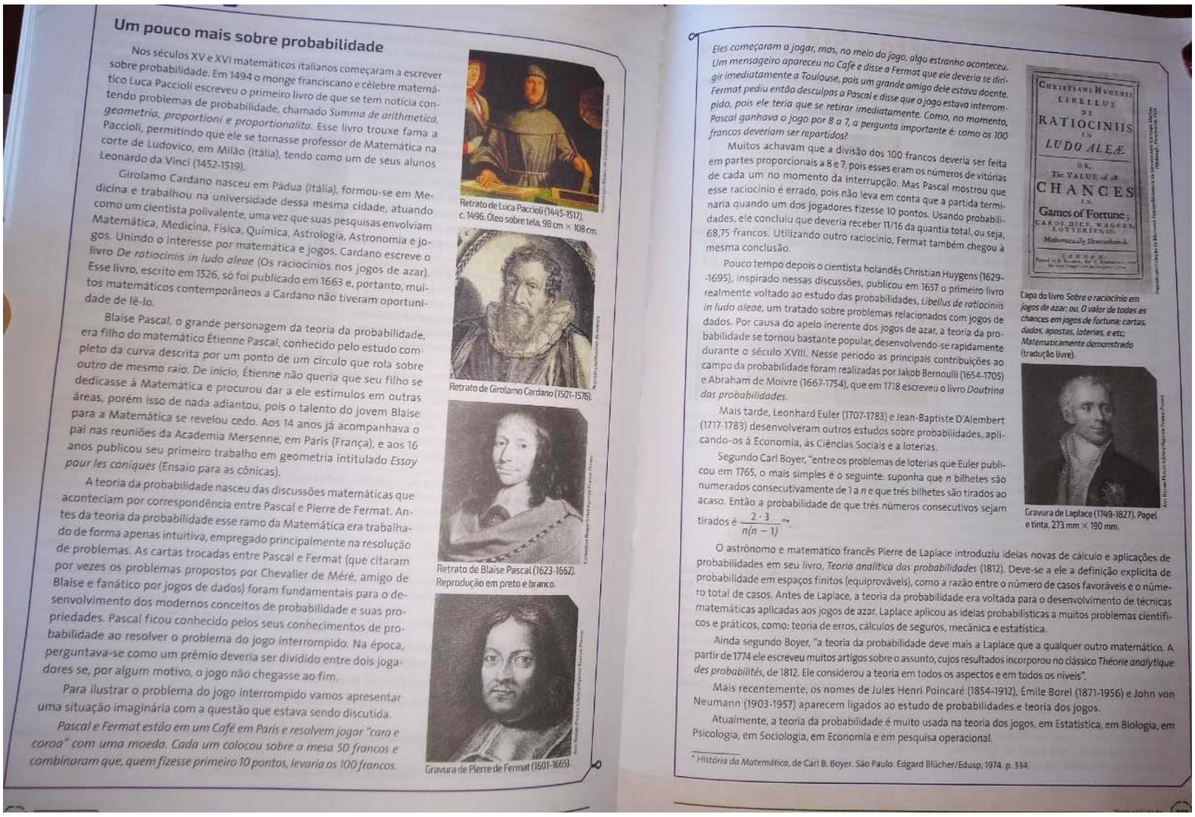
As Projeções de População são elaboradas com base nas informações sobre as componentes da dinâmic demográfica (mortalidade, fecundidade e migração), investigadas nos Censos Demográficos, Pesquisas Domi liares por Amostra e oriundas dos registros administrativos de nascimentos e óbitos. Cada revisão da Projeç incorpora, à época de sua realização, informações mais recentes sobre esses componentes, e/ou mudanças n todológicas de cálculo da projeção, devidamente explicitados nas respectivas Metodologias. Desta forma, re menda-se o uso da revisão de Projeção de População mais recente.

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default.shtm>. Acesso em: 10 maio

Fonte: (DANTE, 2016, p. 258)

Na seção *Leitura*, a coleção L2 apresenta alguns fatos históricos que deram origem à Probabilidade, no qual estimula a discussão e análise histórica deste tema.

Figura 8 - História da Probabilidade



Um pouco mais sobre probabilidade

Nos séculos XV e XVI matemáticos italianos começaram a escrever sobre probabilidade. Em 1494 o monge franciscano e célebre matemático Luca Paccioli escreveu o primeiro livro de que se tem notícia contendo problemas de probabilidade, chamado *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita*. Esse livro trouxe fama a Paccioli, permitindo que ele se tornasse professor de Matemática na corte de Ludovico, em Milão (Itália), tendo como um de seus alunos Leonardo da Vinci (1452-1519).

Girolamo Cardano nasceu em Pádua (Itália), formou-se em Medicina e trabalhou na universidade dessa mesma cidade, atuando como um cientista polivalente, uma vez que suas pesquisas envolviam Matemática, Medicina, Física, Química, Astrologia, Astronomia e jogos. Unindo o interesse por matemática e jogos, Cardano escreve o livro *De ratiociniis in ludo aleae* (Os raciocínios nos jogos de azar). Esse livro, escrito em 1526, só foi publicado em 1663 e, portanto, muitos matemáticos contemporâneos a Cardano não tiveram oportunidade de lê-lo.

Blaise Pascal, o grande personagem da teoria da probabilidade, era filho do matemático Étienne Pascal, conhecido pelo estudo completo da curva descrita por um ponto de um círculo que rola sobre outro de mesmo raio. De início, Étienne não queria que seu filho se dedicasse à Matemática e procurou dar a ele estímulos em outras áreas, porém isso de nada adiantou, pois o talento do jovem Blaise para a Matemática se revelou cedo. Aos 14 anos já acompanhava o pai nas reuniões da Academia Mersenne, em Paris (França), e aos 16 anos publicou seu primeiro trabalho em geometria intitulado *Essay pour les coniques* (Ensaio para as cônicas).

A teoria da probabilidade nasceu das discussões matemáticas que aconteciam por correspondência entre Pascal e Pierre de Fermat. Antes da teoria da probabilidade esse ramo da Matemática era trabalhado de forma apenas intuitiva, empregado principalmente na resolução de problemas. As cartas trocadas entre Pascal e Fermat (que citaram por vezes os problemas propostos por Chevalier de Méré, amigo de Blaise e fanático por jogos de dados) foram fundamentais para o desenvolvimento dos modernos conceitos de probabilidade e suas propriedades. Pascal ficou conhecido pelos seus conhecimentos de probabilidade ao resolver o problema do jogo interrompido. Na época, perguntava-se como um prêmio deveria ser dividido entre dois jogadores se, por algum motivo, o jogo não chegasse ao fim.

Para ilustrar o problema do jogo interrompido vamos apresentar uma situação imaginária com a questão que estava sendo discutida.

Pascal e Fermat estão em um Café em Paris e resolvem jogar "cara e coroa" com uma moeda. Cada um colocou sobre a mesa 50 francos e combinaram que, quem fizesse primeiro 10 pontos, levaria os 100 francos.

Retrato de Luca Paccioli (1445-1517), c. 1496. Óleo sobre tela, 98 cm × 108 cm.

Retrato de Girolamo Cardano (1501-1576).

Retrato de Blaise Pascal (1623-1662). Reprodução em preto e branco.

Gravura de Pierre de Fermat (1601-1665).

Eles começaram a jogar, mas, no meio do jogo, algo estranho aconteceu. Um mensageiro apareceu no Café e disse a Fermat que ele deveria se dirigir imediatamente a Toulouse, pois um grande amigo dele estava doente. Fermat pediu então desculpas a Pascal e disse que o jogo estava interrompido, pois ele teria que se retirar imediatamente. Como, no momento, Pascal ganhava o jogo por 8 a 7, a pergunta importante é: como os 100 francos deveriam ser repartidos?

Muitos achavam que a divisão dos 100 francos deveria ser feita em partes proporcionais a 8 e 7, pois esses eram os números de vitórias de cada um no momento da interrupção. Mas Pascal mostrou que esse raciocínio é errado, pois não leva em conta que a partida terminaria quando um dos jogadores fizesse 10 pontos. Usando probabilidades, ele concluiu que deveria receber 11/16 da quantia total, ou seja, 68,75 francos. Utilizando outro raciocínio, Fermat também chegou à mesma conclusão.

Pouco tempo depois o cientista holandês Christian Huygens (1629-1695), inspirado nessas discussões, publicou em 1657 o primeiro livro realmente voltado ao estudo das probabilidades, *Libellus de ratiociniis in ludo aleae*, um tratado sobre problemas relacionados com jogos de dados. Por causa do apelo inerente dos jogos de azar, a teoria da probabilidade se tornou bastante popular, desenvolvendo-se rapidamente durante o século XVIII. Nesse período as principais contribuições ao campo da probabilidade foram realizadas por Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham de Moivre (1667-1754), que em 1718 escreveu o livro *Doutrina das probabilidades*.

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783) e Jean-Baptiste D'Alembert (1717-1783) desenvolveram outros estudos sobre probabilidades, aplicando-os à Economia, às Ciências Sociais e a loterias.

Segundo Carl Boyer, "entre os problemas de loterias que Euler publicou em 1765, o mais simples é o seguinte: suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}$"*.

Capa do livro *Sobre o raciocínio em jogos de azar; ou, O valor de todas as chances em jogos de fortuna; cartas, dados, apostas, loterias, e etc; Matematicamente demonstrado* (tradução livre).

Gravura de Laplace (1749-1827). Papel e tinta, 273 mm × 190 mm.

O astrônomo e matemático francês Pierre de Laplace introduziu ideias novas de cálculo e aplicações de probabilidades em seu livro, *Teoria analítica das probabilidades* (1812). Deve-se a ele a definição explícita de probabilidade em espaços finitos (equiprováveis), como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Antes de Laplace, a teoria da probabilidade era voltada para o desenvolvimento de técnicas matemáticas aplicadas aos jogos de azar. Laplace aplicou as ideias probabilísticas a muitos problemas científicos e práticos, como: teoria de erros, cálculos de seguros, mecânica e estatística.

Ainda segundo Boyer, "a teoria da probabilidade deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités*, de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis".

Mais recentemente, os nomes de Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos.

Atualmente, a teoria da probabilidade é muito usada na teoria dos jogos, em Estatística, em Biologia, em Psicologia, em Sociologia, em Economia e em pesquisa operacional.

* *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974. p. 334.

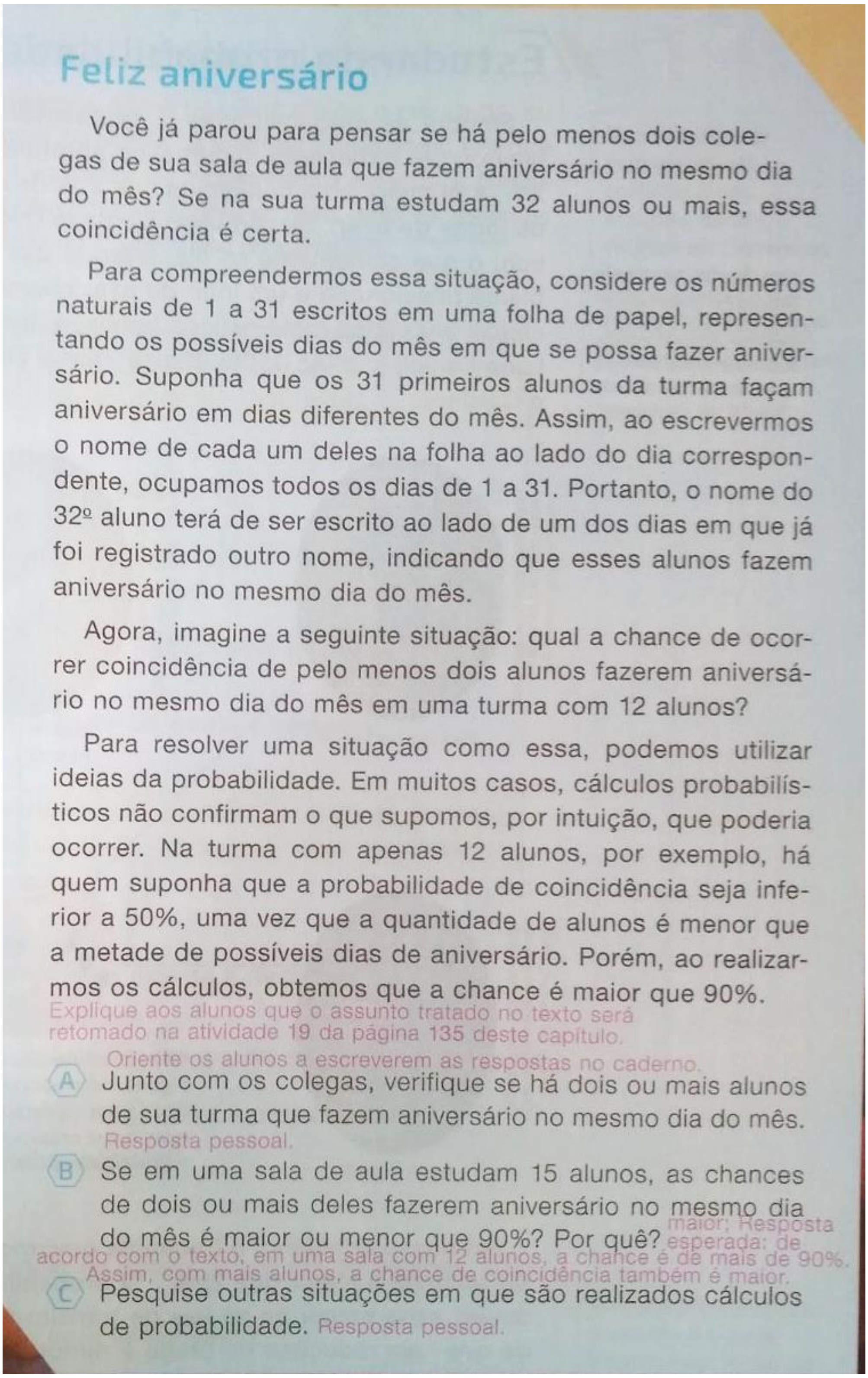
Fonte: (DANTE, 2016, p. 260)

Podemos notar que o autor conta a história de como teve início os estudos sobre a probabilidade e apresenta os principais matemáticos que participaram do desenvolvimento desta teoria contando um pouco desta história.

- L3

Já a coleção L3, como podemos ver na Figura 9, apresenta no início do capítulo o paradoxo dos aniversários.

Figura 9 - Paradoxo dos aniversários



Feliz aniversário

Você já parou para pensar se há pelo menos dois colegas de sua sala de aula que fazem aniversário no mesmo dia do mês? Se na sua turma estudam 32 alunos ou mais, essa coincidência é certa.

Para compreendermos essa situação, considere os números naturais de 1 a 31 escritos em uma folha de papel, representando os possíveis dias do mês em que se possa fazer aniversário. Suponha que os 31 primeiros alunos da turma façam aniversário em dias diferentes do mês. Assim, ao escrevermos o nome de cada um deles na folha ao lado do dia correspondente, ocupamos todos os dias de 1 a 31. Portanto, o nome do 32º aluno terá de ser escrito ao lado de um dos dias em que já foi registrado outro nome, indicando que esses alunos fazem aniversário no mesmo dia do mês.

Agora, imagine a seguinte situação: qual a chance de ocorrer coincidência de pelo menos dois alunos fazerem aniversário no mesmo dia do mês em uma turma com 12 alunos?

Para resolver uma situação como essa, podemos utilizar ideias da probabilidade. Em muitos casos, cálculos probabilísticos não confirmam o que supomos, por intuição, que poderia ocorrer. Na turma com apenas 12 alunos, por exemplo, há quem suponha que a probabilidade de coincidência seja inferior a 50%, uma vez que a quantidade de alunos é menor que a metade de possíveis dias de aniversário. Porém, ao realizarmos os cálculos, obtemos que a chance é maior que 90%.

Explique aos alunos que o assunto tratado no texto será retomado na atividade 19 da página 135 deste capítulo.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Junto com os colegas, verifique se há dois ou mais alunos de sua turma que fazem aniversário no mesmo dia do mês. Resposta pessoal.

B) Se em uma sala de aula estudam 15 alunos, as chances de dois ou mais deles fazerem aniversário no mesmo dia do mês é maior ou menor que 90%? Por quê? maior; Resposta esperada: de acordo com o texto, em uma sala com 12 alunos, a chance é de mais de 90%. Assim, com mais alunos, a chance de coincidência também é maior.

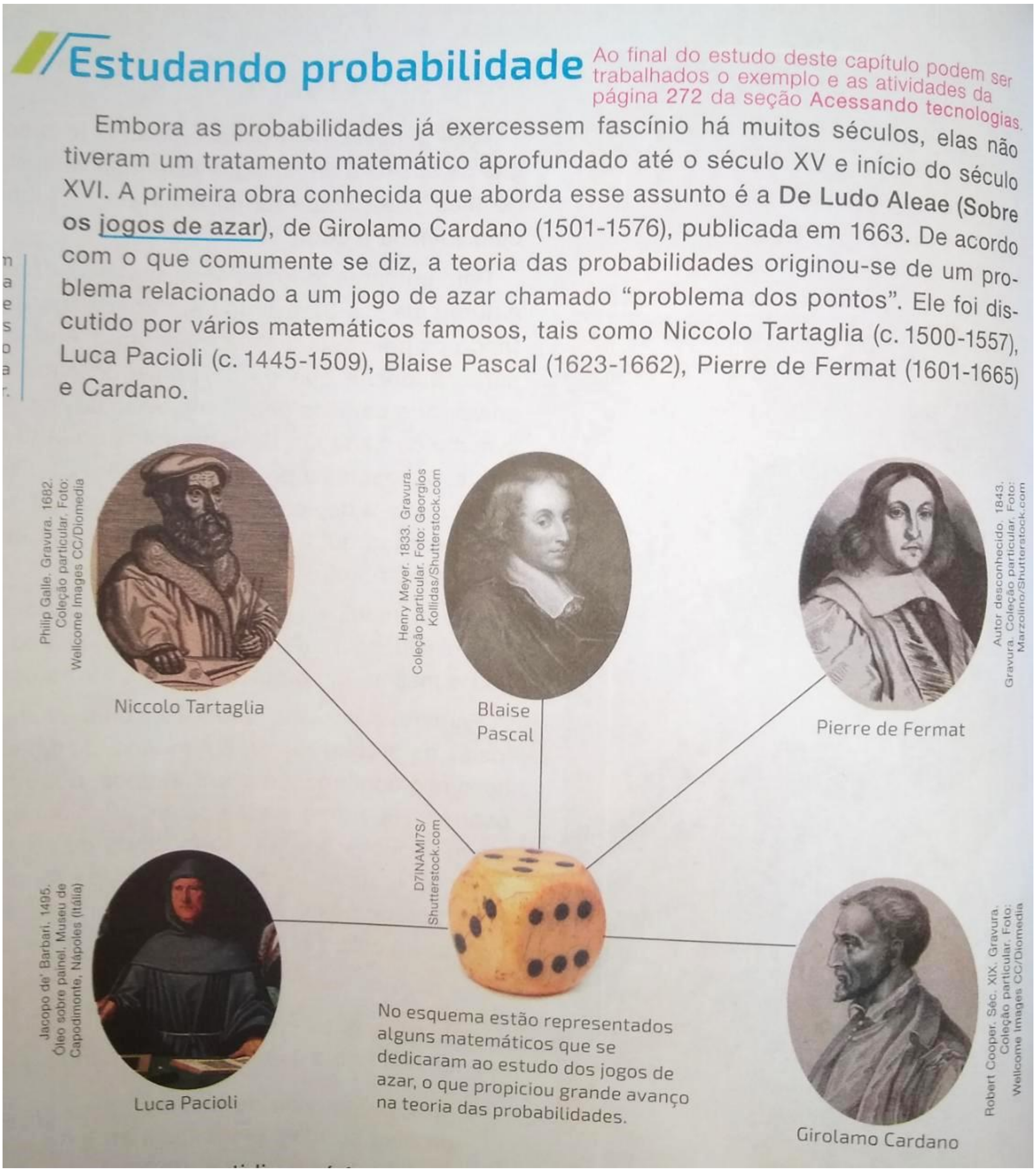
C) Pesquise outras situações em que são realizados cálculos de probabilidade. Resposta pessoal.

Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 125)

Nesse momento, o autor apresenta questões que instigam os alunos a refletirem sobre as chances de duas ou mais pessoas, de um determinado grupo, fazerem aniversário no mesmo dia de um determinado mês.

O autor da coleção L3 também apresenta a história da probabilidade, como podemos ver na figura 10, já no início do capítulo, apresentando fatos históricos e alguns dos matemáticos que se dedicaram ao estudo dos jogos de azar e que propiciaram grande avanço na teoria das probabilidades. Em seguida expõe as definições.

Figura 10 - História da probabilidade



Estudando probabilidade

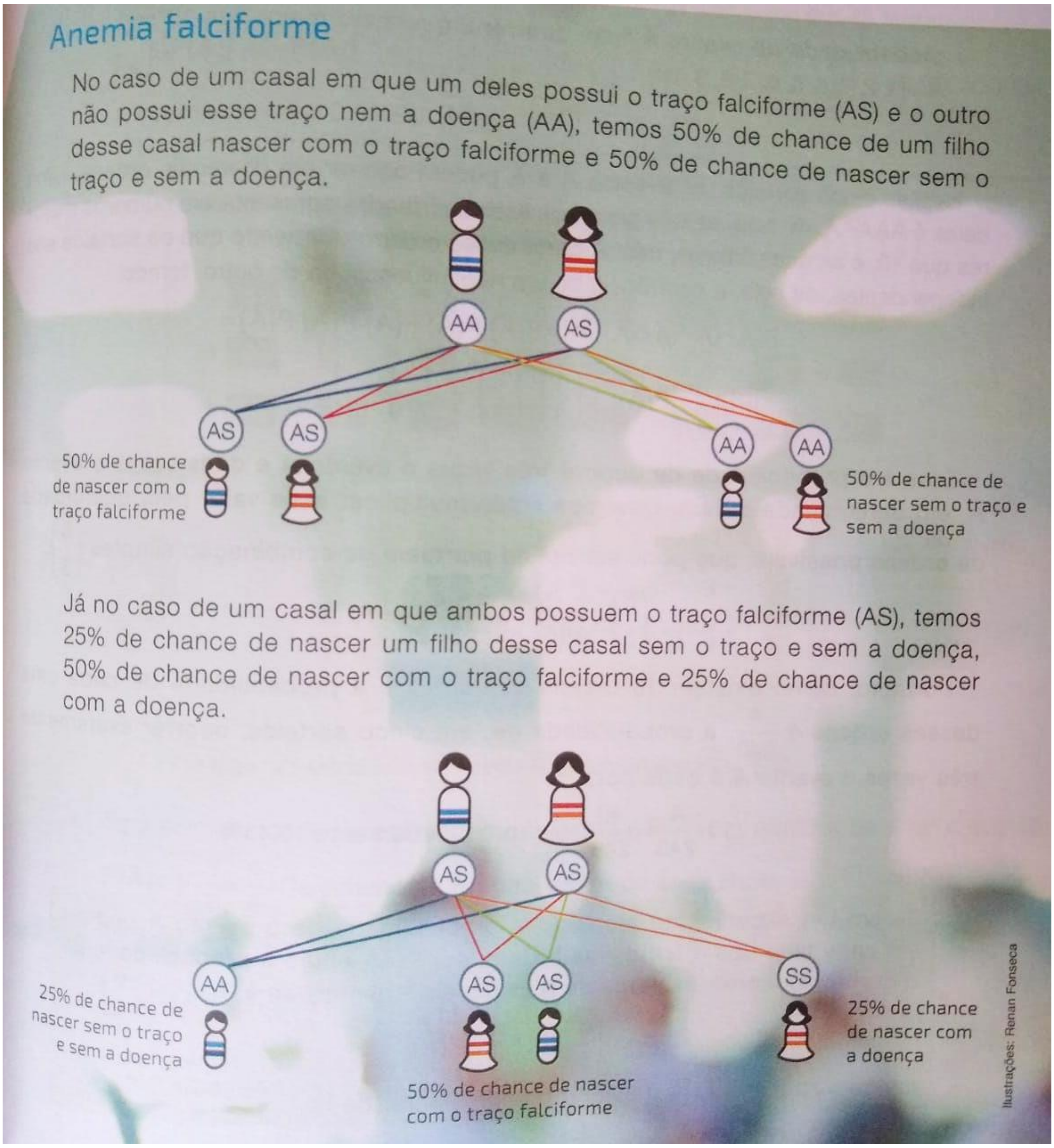
Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página 272 da seção Acessando tecnologias.

Embora as probabilidades já exercessem fascínio há muitos séculos, elas não tiveram um tratamento matemático aprofundado até o século XV e início do século XVI. A primeira obra conhecida que aborda esse assunto é a **De Ludo Aleae (Sobre os jogos de azar)**, de Girolamo Cardano (1501-1576), publicada em 1663. De acordo com o que comumente se diz, a teoria das probabilidades originou-se de um problema relacionado a um jogo de azar chamado "problema dos pontos". Ele foi discutido por vários matemáticos famosos, tais como Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557), Luca Pacioli (c. 1445-1509), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665) e Cardano.

Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 126)

Na seção *Contexto* a coleção L3, assim como as coleções analisadas anteriormente, são apresentas aplicações à genética como podemos ver na Figura 11.

Figura 11 - Aplicações à genética

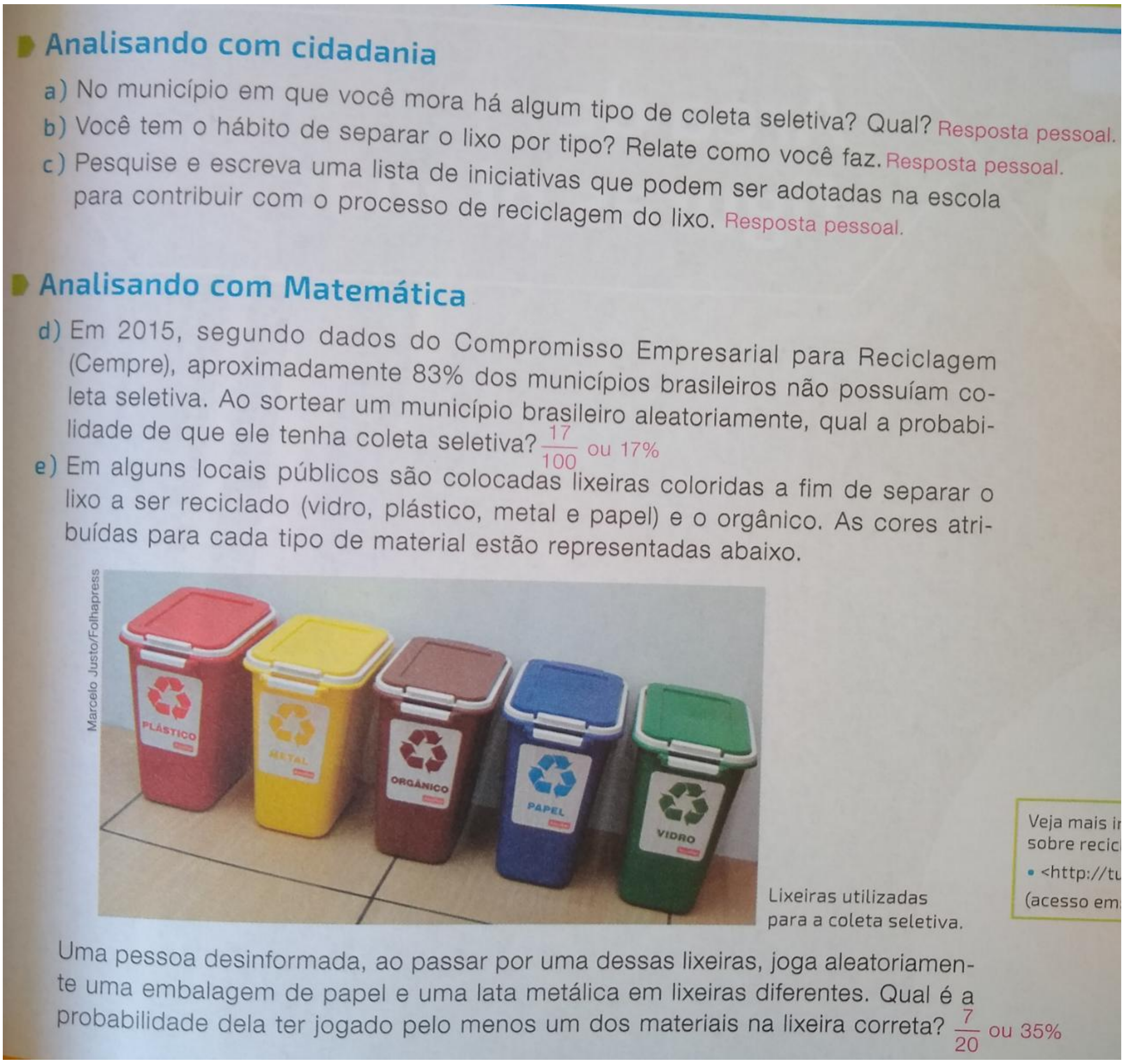


Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 145)

Nesta seção o autor aborda o tema “anemia falciforme”, uma doença hereditária, transmitida por genes dos pais para os filhos. Por meio da probabilidade, é possível auxiliar casais sobre a tomada de decisões a respeito da procriação, ajudando-os a entender sobre os riscos presentes. Esse tipo de recurso contribui para uma conexão entre o ensino de probabilidade e saúde pública.

Já na seção *Ser consciente*, como podemos ver na Figura 12, o autor apresenta a probabilidade relacionada ao tema reciclagem.

Figura 12 - Contextualização social



Analisando com cidadania

a) No município em que você mora há algum tipo de coleta seletiva? Qual? Resposta pessoal.

b) Você tem o hábito de separar o lixo por tipo? Relate como você faz. Resposta pessoal.

c) Pesquise e escreva uma lista de iniciativas que podem ser adotadas na escola para contribuir com o processo de reciclagem do lixo. Resposta pessoal.

Analisando com Matemática

d) Em 2015, segundo dados do Compromisso Empresarial para Reciclagem (Cempre), aproximadamente 83% dos municípios brasileiros não possuíam coleta seletiva. Ao sortear um município brasileiro aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele tenha coleta seletiva? $\frac{17}{100}$ ou 17%

e) Em alguns locais públicos são colocadas lixeiras coloridas a fim de separar o lixo a ser reciclado (vidro, plástico, metal e papel) e o orgânico. As cores atribuídas para cada tipo de material estão representadas abaixo.

Lixeiras utilizadas para a coleta seletiva.

Veja mais i
sobre recic
• <http://tu
(acesso em

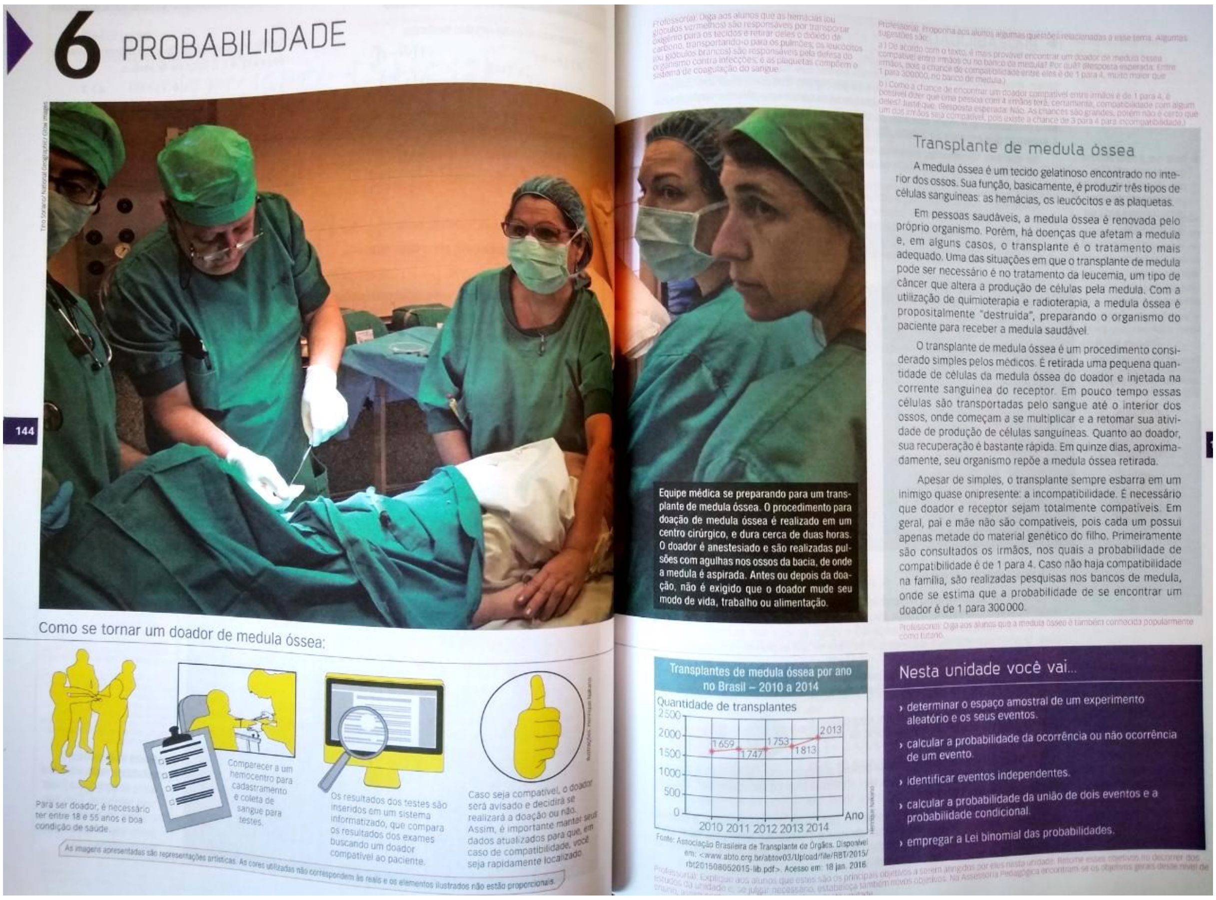
Uma pessoa desinformada, ao passar por uma dessas lixeiras, joga aleatoriamente uma embalagem de papel e uma lata metálica em lixeiras diferentes. Qual é a probabilidade dela ter jogado pelo menos um dos materiais na lixeira correta? $\frac{7}{20}$ ou 35%

Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 153)

- L4

Na coleção L4 o autor inicia o capítulo apresentando um texto sobre transplante de medula óssea, apresentando sugestões sobre como se tornar um doador e também da dificuldade de se encontrar um doador compatível. Nesse contexto apresenta dados sobre a probabilidade de se encontrar um doador compatível entre irmãos e nos bancos de medula, podemos ver na Figura 13. O autor utiliza este contexto para introduzir o conceito de probabilidade.

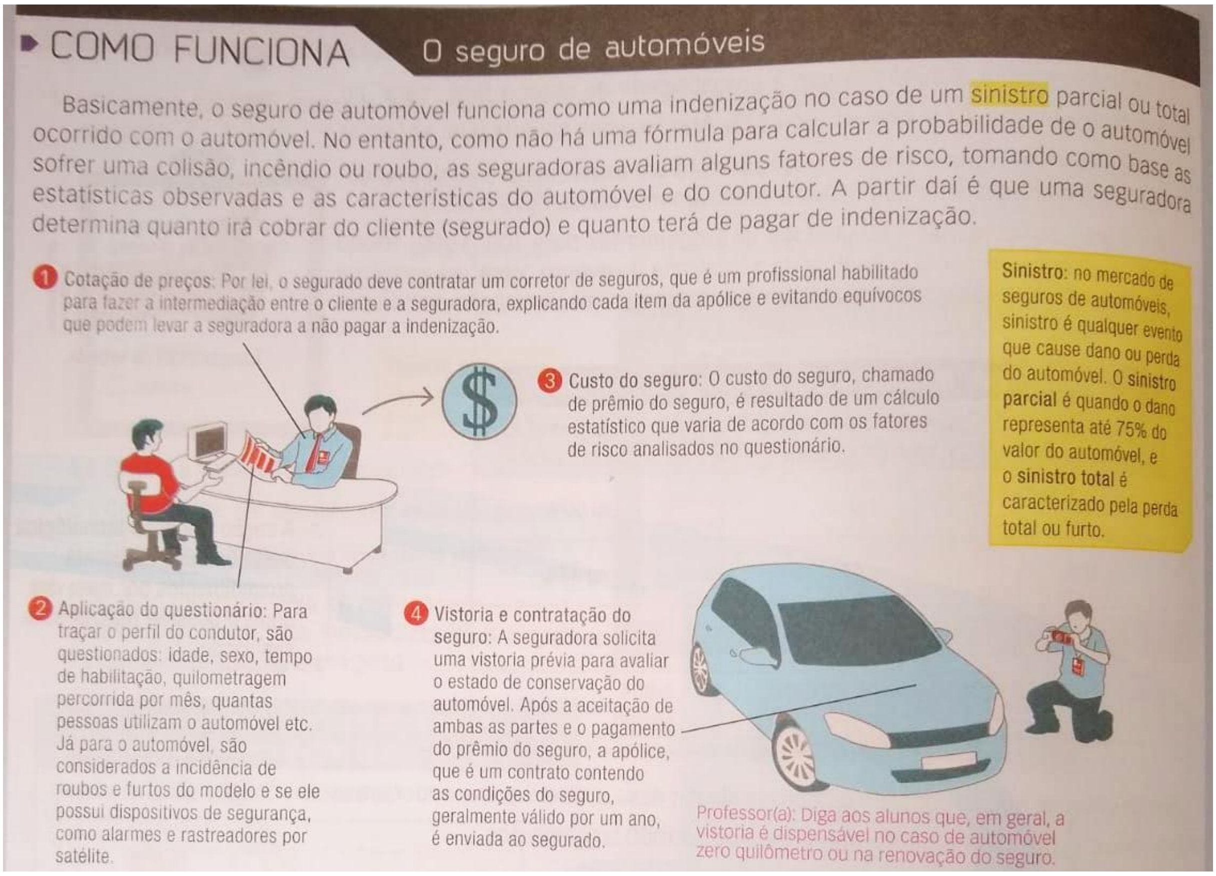
Figura 13 - Transplante de medula óssea



Fonte: (SOUZA, 2016, p.144)

Diferente dos outros autores, o autor da coleção L4 trouxe o exemplo de aplicação do conceito de probabilidade aos seguros de automóveis. É através do cálculo de probabilidade de ocorrência de determinados eventos que as seguradoras estipulam os valores de cada seguro. Esta aplicação está presente no dia a dia dos alunos e é uma boa oportunidade de fazer com que os alunos compreendam o conceito.

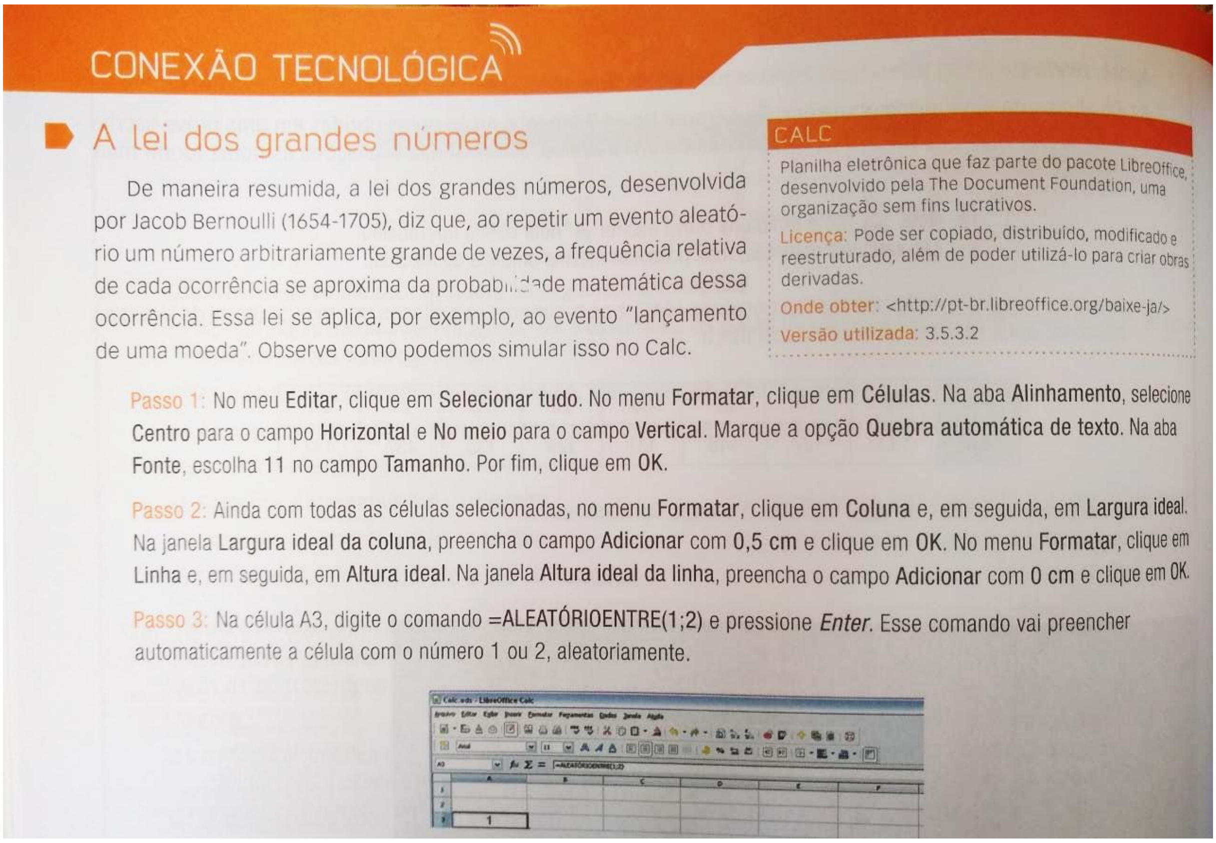
Figura 14 - Seguros de automóveis



Fonte: (SOUZA, 2016, p.176)

Outra abordagem que a coleção L4 traz como vemos na Figura 15 é o incentivo à utilização de planilhas eletrônicas para a simulação de frequências relativas.

Figura 15 - Utilização de planilhas eletrônicas para simulação de frequências relativas



CONEXÃO TECNOLÓGICA

A lei dos grandes números

De maneira resumida, a lei dos grandes números, desenvolvida por Jacob Bernoulli (1654-1705), diz que, ao repetir um evento aleatório um número arbitrariamente grande de vezes, a frequência relativa de cada ocorrência se aproxima da probabilidade matemática dessa ocorrência. Essa lei se aplica, por exemplo, ao evento "lançamento de uma moeda". Observe como podemos simular isso no Calc.

CALC

Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.

Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.

Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>

Versão utilizada: 3.5.3.2

Passo 1: No meu **Editar**, clique em **Selecionar tudo**. No menu **Formatar**, clique em **Células**. Na aba **Alinhamento**, selecione **Centro** para o campo **Horizontal** e **No meio** para o campo **Vertical**. Marque a opção **Quebra automática de texto**. Na aba **Fonte**, escolha **11** no campo **Tamanho**. Por fim, clique em **OK**.

Passo 2: Ainda com todas as células selecionadas, no menu **Formatar**, clique em **Coluna** e, em seguida, em **Largura ideal**. Na janela **Largura ideal da coluna**, preencha o campo **Adicionar** com **0,5 cm** e clique em **OK**. No menu **Formatar**, clique em **Linha** e, em seguida, em **Altura ideal**. Na janela **Altura ideal da linha**, preencha o campo **Adicionar** com **0 cm** e clique em **OK**.

Passo 3: Na célula A3, digite o comando **=ALEATÓRIOENTRE(1;2)** e pressione ***Enter***. Esse comando vai preencher automaticamente a célula com o número 1 ou 2, aleatoriamente.

Fonte: (SOUZA, 2016, p.196)

Analisando de maneira geral as estratégias utilizadas pelos autores das coleções analisadas, verificamos que para introduzir o capítulo as coleções apresentam textos e exemplos como lançamento de dados e moedas como forma de contextualizar o conceito que será definido. Apenas a coleção L2 optou por introduzir o tema a partir da problematização.

Concordamos com Godefroid (2010), que a metodologia da problematização apresenta muitas vantagens no processo de ensino aprendizagem, o autor considera as seguintes características:

> 1- Supõe o interesse dos alunos.
>
> 2- Presta-se à aplicação de conhecimentos prévios.
>
> 3- Presta-se à interdisciplinaridade e à transdisciplinaridade.
>
> 4- Dá oportunidade de conhecer conteúdos matemáticos não estudados.
>
> 5- Dá oportunidade aos alunos de atribuir significados a conteúdos estudados.
>
> 6- Contribui para que os alunos desenvolvam a autonomia intelectual.
>
> 7- Contribui para que os alunos desenvolvam o espírito crítico

(GODEFROID, 2010, p.5).

De acordo com Brasil (2006, p.85) “Essa modalidade de trabalho pode ser muito educativa ao dar espaço para os alunos construírem e socializarem conhecimentos relacionados a situações problemáticas significativas, considerando suas vivências, observações, experiências, inferências e interpretações”.

A História da Matemática foi utilizada por todas as coleções, porém, de forma superficial, como apontamento de fatos históricos. O objetivo da história da matemática não é somente contar a história de uma determinada época, o objetivo da utilização deste recurso está além da motivação e sim para o desenvolvimento do conteúdo. É importante que os alunos percebam que os cálculos foram desenvolvidos diante de uma necessidade da época, e a partir desta ideia é possível buscar um ensino mais significativo e menos abstrato.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a História da Matemática pode oferecer

> [...] uma importante contribuição ao processo de ensino aprendizagem. Ao revelar a Matemática como uma criação, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (BRASIL, 1998, p. 42).

O uso de diagrama de árvores e tabela de dupla entrada também foi utilizado como exemplos em todas as coleções. Este recurso torna-se essencial para a visualização do espaço amostral. De acordo com as Orientações Curriculares para o ensino médio (2006), a utilização de diagrama de árvore e tabelas de dupla entrada, para quando o espaço amostral é pequeno, é importante para facilitar a compreensão do estudante, pois permite que ele visualize todas as possibilidades.

Os exemplos de aplicação tanto voltados à genética, seguros de automóveis, cidadania, entre outros que foram utilizados, foram bem empregados. A probabilidade é uma área rica em possibilidades de aplicação e pode ser explorada de forma bastante contextualizada. Esse tipo de abordagem permite ao discente estabelecer relações entre o que está sendo estudado com o cotidiano.

De modo geral, percebemos que a metodologia utilizada para a abordagem do tema Probabilidade se dá de maneira semelhante em todas as coleções. Explanação teórica, seguida de exercícios resolvidos e propostos com exemplos de aplicações no final dos capítulos.

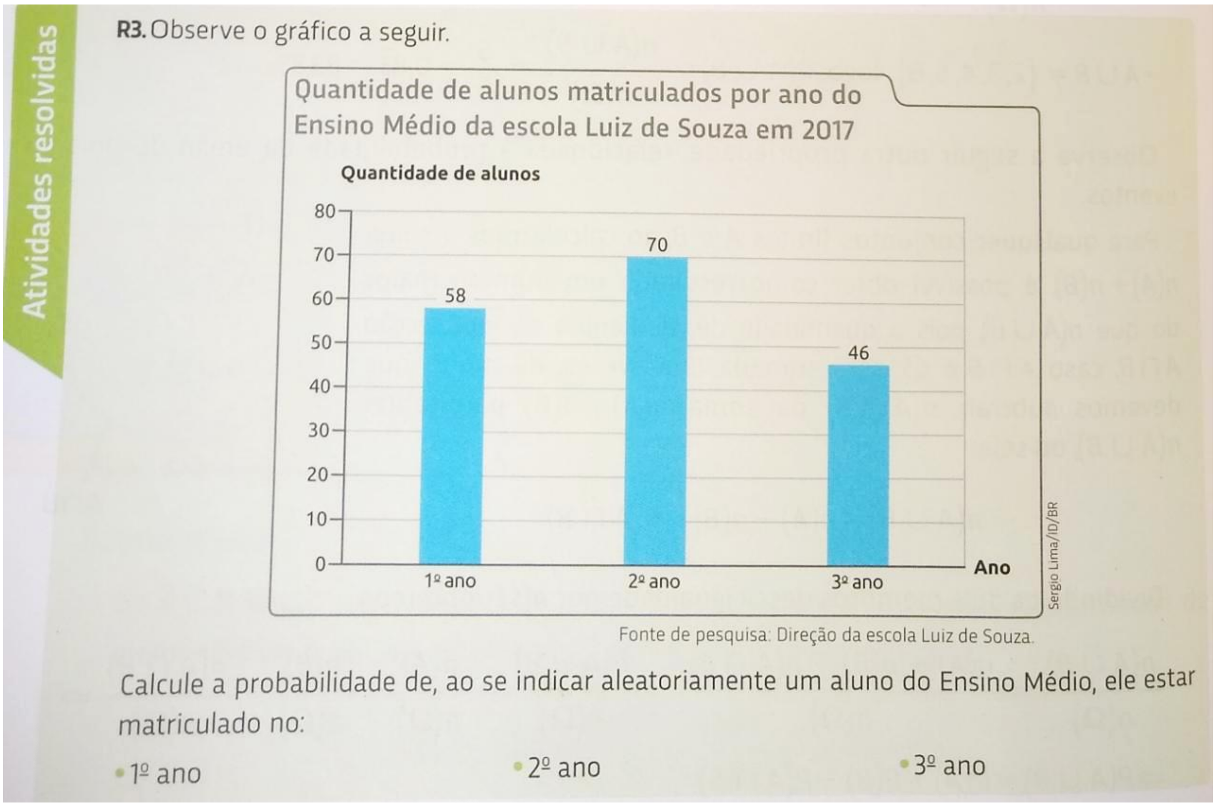
No entanto, observa-se que este tipo de metodologia oferece poucas oportunidades para que o aluno apresente uma postura mais ativa e autônoma na aprendizagem e na construção do seu conhecimento.

6.3. Tipos de atividades

No que se refere a análise das atividades, que são ofertadas pelos livros selecionados para este trabalho, verificamos que na coleção L1 são apresentados um total de 46 exercícios, divididos entre: 11 exercícios resolvidos e 35 exercícios propostos, sendo 2 destes, em grupo.

A seguir, nas Figuras 16 e 17, podemos ver um exemplo de exercício e resolução apresentados pelo autor:

Figura 16 – Exemplo de exercício resolvido do livro L1.



Fonte: (CHAVANTE, 2016, p. 76)

Figura 17- Resolução do exemplo R3, coleção L1.

Resolução

De acordo com o gráfico, o total de alunos matriculados no Ensino Médio é dado por $58 + 70 + 46 = 174$.

Sejam:

A: alunos matriculados no 1º ano;

B: alunos matriculados no 2º ano;

C: alunos matriculados no 3º ano.

Assim:

$$P(A) = \frac{58}{174} = \frac{1}{3} = 33{,}\overline{3}\%.$$

$$P(B) = \frac{70}{174} = \frac{35}{87} \simeq 40{,}23\%.$$

$$P(C) = \frac{46}{174} = \frac{23}{87} \simeq 26{,}44\%.$$

Fonte: (CHAVANTE, 2016, p. 77)

Como podemos ver nos exemplos 16 e 17, o autor sugere que o exercício seja resolvido por meio da concepção clássica de probabilidade.

Em seguida, na Figura 18, é apresentado um exercício semelhante ao exemplo de exercício que é proposto por ele, anteriormente. No exercício, é solicitado para que o aluno calcule a probabilidade de ocorrência de alguns eventos. Como podemos ver abaixo:

Figura 18 - Exemplo de atividade do livro L1.

9. Lançando-se um dado honesto, com as faces numeradas de 1 a 6, qual seria a probabilidade de se obter na face voltada para cima:

a) um número par?

b) o número 4?

c) o número zero?

d) um número ímpar ou primo?

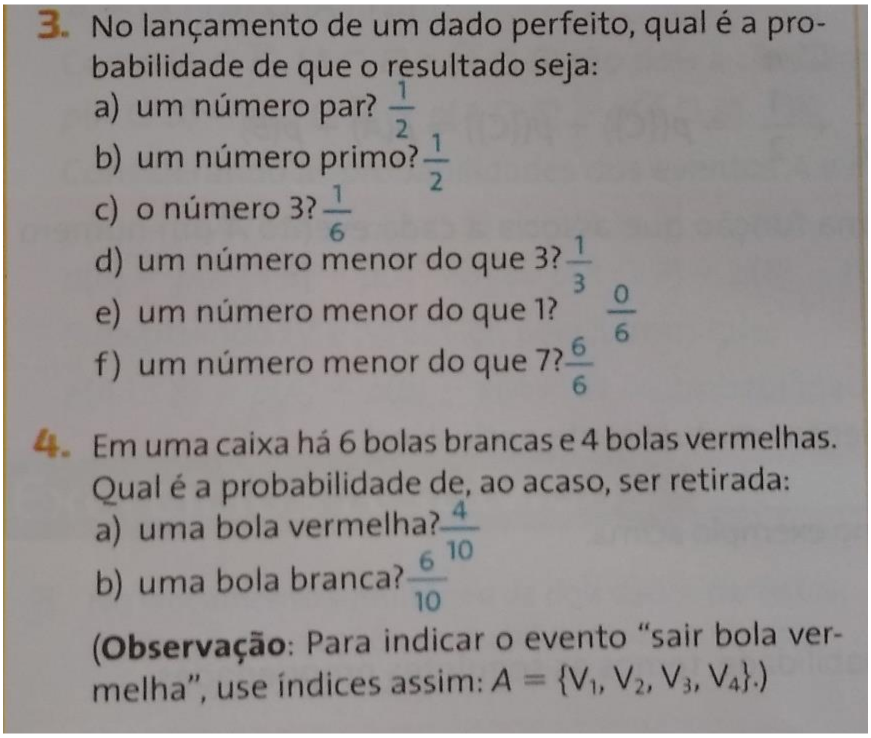
Fonte: (CHAVANTE, 2016, p. 79)

Com isso, analisamos que se espera a continuidade de percepção tradicional da resolução, ao que se refere à probabilidade.

Já na coleção L2, são apresentados 95 exercícios, divididos da seguinte maneira: 39 exercícios resolvidos, 10 questões de vestibulares e 46 exercícios propostos.

Na Figura 19, retirada da coleção L2, podemos identificar um exemplo de exercício resolvido, também através da probabilidade clássica.

Figura 19 - Atividade 3 e 4, coleção L2.



3. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de que o resultado seja:

a) um número par? $\frac{1}{2}$

b) um número primo? $\frac{1}{2}$

c) o número 3? $\frac{1}{6}$

d) um número menor do que 3? $\frac{1}{3}$

e) um número menor do que 1? $\frac{0}{6}$

f) um número menor do que 7? $\frac{6}{6}$

4. Em uma caixa há 6 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, ser retirada:

a) uma bola vermelha? $\frac{4}{10}$

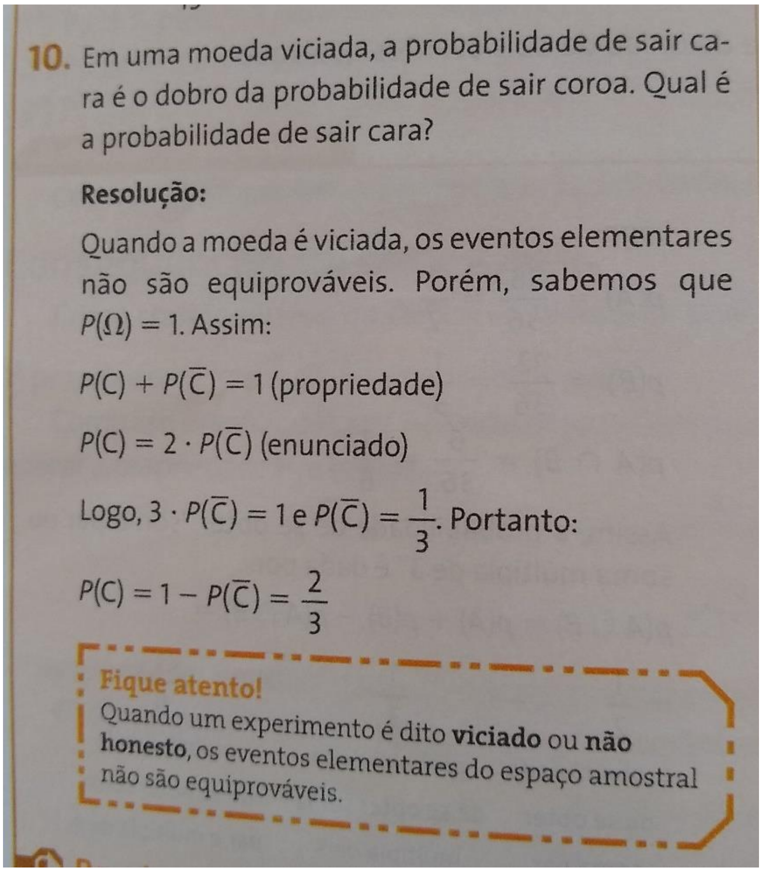
b) uma bola branca? $\frac{6}{10}$

(**Observação**: Para indicar o evento "sair bola vermelha", use índices assim: $A = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.)

Fonte: (DANTE, 2016)

Nota-se que os exercícios apresentados acima podem ser resolvidos por meio da utilização da fórmula: P (A) = $\frac{m}{N}$, o que se baseia na definição clássica de probabilidade. Ainda em L2, é apresentado um exemplo de aplicação da concepção axiomática, como podemos ver na Figura 20.

Figura 20 - Atividade 10, coleção L2.



10. Em uma moeda viciada, a probabilidade de sair cara é o dobro da probabilidade de sair coroa. Qual é a probabilidade de sair cara?

Resolução:

Quando a moeda é viciada, os eventos elementares não são equiprováveis. Porém, sabemos que $P(\Omega) = 1$. Assim:

$P(C) + P(\overline{C}) = 1$ (propriedade)

$P(C) = 2 \cdot P(\overline{C})$ (enunciado)

Logo, $3 \cdot P(\overline{C}) = 1$ e $P(\overline{C}) = \frac{1}{3}$. Portanto:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$

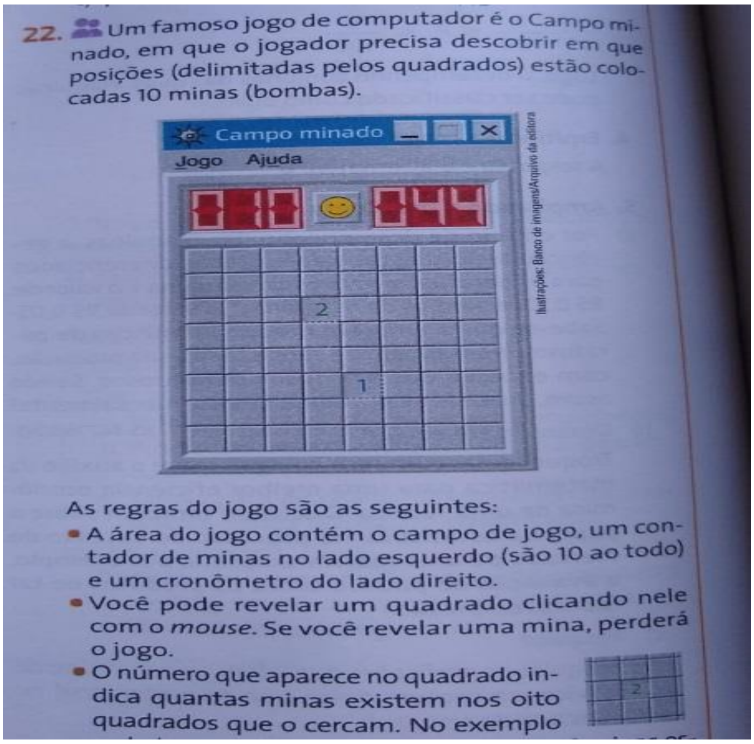
Fique atento!
Quando um experimento é dito **viciado** ou **não honesto**, os eventos elementares do espaço amostral não são equiprováveis.

Fonte: (DANTE, 2016, p. 240)

Como pode ser visto, L2 insere uma proposta diferente da clássica para o estudo, que é a concepção axiomática, a qual se refere as resoluções dos exercícios por meio de demonstrações. Como muitos pesquisadores consideram, o estudo dessa concepção é de grande relevância no ensino, pois proporciona, além da aplicabilidade, uma visão científica da probabilidade.

Além disso, a coleção L2 propõe uma proposta lúdica para o estudo de probabilidade, com a utilização do jogo “campo minado”, a Figura 21 ilustra essa situação:

Figura 21- Atividade 22, coleção L3.



22. Um famoso jogo de computador é o Campo minado, em que o jogador precisa descobrir em que posições (delimitadas pelos quadrados) estão colocadas 10 minas (bombas).

As regras do jogo são as seguintes:

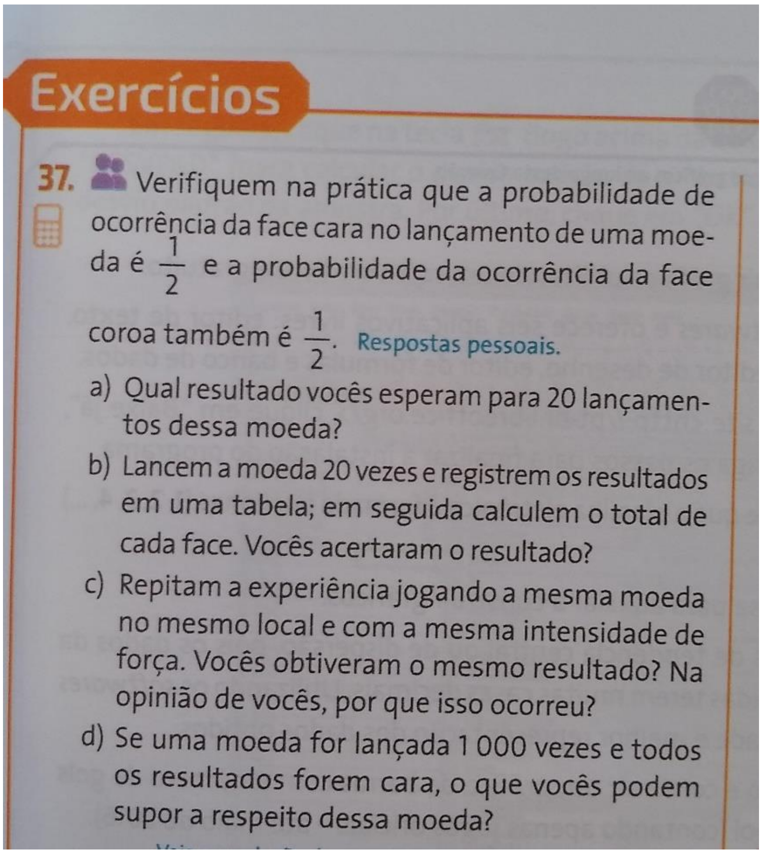
- A área do jogo contém o campo de jogo, um contador de minas no lado esquerdo (são 10 ao todo) e um cronômetro do lado direito.
- Você pode revelar um quadrado clicando nele com o *mouse*. Se você revelar uma mina, perderá o jogo.
- O número que aparece no quadrado indica quantas minas existem nos oito quadrados que o cercam. No exemplo

Fonte: (DANTE, 2016, p.242)

Considerando que o jogo campo minado é um jogo de fácil acesso, pois está presente na maioria dos computadores, e é um jogo com regras simples, o qual os alunos tem mais facilidade para compreender e jogar, a proposta torna-se interessante pelo fato de relacionar o jogo, a tecnologia e a probabilidade, com a vivência dos alunos, já que a tecnologia está cada vez mais presente na vida das pessoas. Isso contribui para que o interesse dos alunos sobre a matemática seja despertado.

Além da concepção clássica e axiomática de probabilidade, a coleção L2 também explora atividades que envolvem a concepção frequentista de probabilidade. Na Figura 22 podemos ver esse exemplo:

Figura 22 - Atividade 37, coleção L2 - vol 3.



Exercícios

37. Verifiquem na prática que a probabilidade de ocorrência da face cara no lançamento de uma moeda é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade da ocorrência da face coroa também é $\frac{1}{2}$. Respostas pessoais.

a) Qual resultado vocês esperam para 20 lançamentos dessa moeda?

b) Lancem a moeda 20 vezes e registrem os resultados em uma tabela; em seguida calculem o total de cada face. Vocês acertaram o resultado?

c) Repitam a experiência jogando a mesma moeda no mesmo local e com a mesma intensidade de força. Vocês obtiveram o mesmo resultado? Na opinião de vocês, por que isso ocorreu?

d) Se uma moeda for lançada 1 000 vezes e todos os resultados forem cara, o que vocês podem supor a respeito dessa moeda?

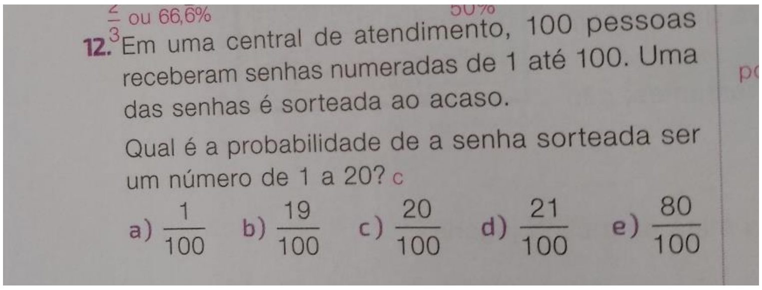
Fonte: (DANTE, 2016, p. 59)

Nessa atividade, o autor propõe a experimentação e dá a oportunidade dos alunos verificarem na prática a probabilidade de ocorrência de alguns eventos, a partir do experimento de lançamento de uma moeda.

Na coleção L3 são apresentados 63 exercícios, divididos da seguinte maneira: 11 exercícios resolvidos e 52 exercícios propostos.

Nas Figuras 23 e 24, temos exemplos de exercícios propostos que, assim como nas coleções anteriores, são tipos de exercícios mais tradicionais, parecidos com os exemplos dados pelo autor, os quais ele utiliza a concepção clássica.

Figura 23 – Exemplo de Atividade do livro L3.



$\frac{2}{3}$ ou 66,6%

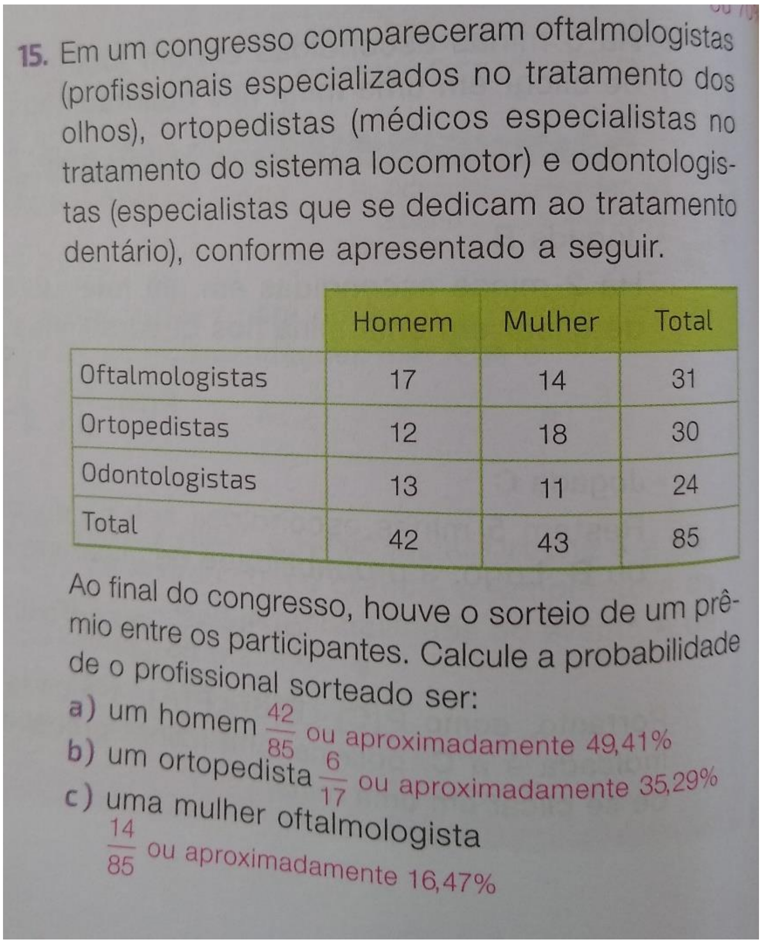
12. Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? c

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

Fonte:(BALESTRI, 2016, p. 134)

Figura 24- Atividade 15, coleção L3.



15. Em um congresso compareceram oftalmologistas (profissionais especializados no tratamento dos olhos), ortopedistas (médicos especialistas no tratamento do sistema locomotor) e odontologistas (especialistas que se dedicam ao tratamento dentário), conforme apresentado a seguir.

	Homem	Mulher	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Odontologistas	13	11	24
Total	42	43	85

Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser:

a) um homem $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%

b) um ortopedista $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%

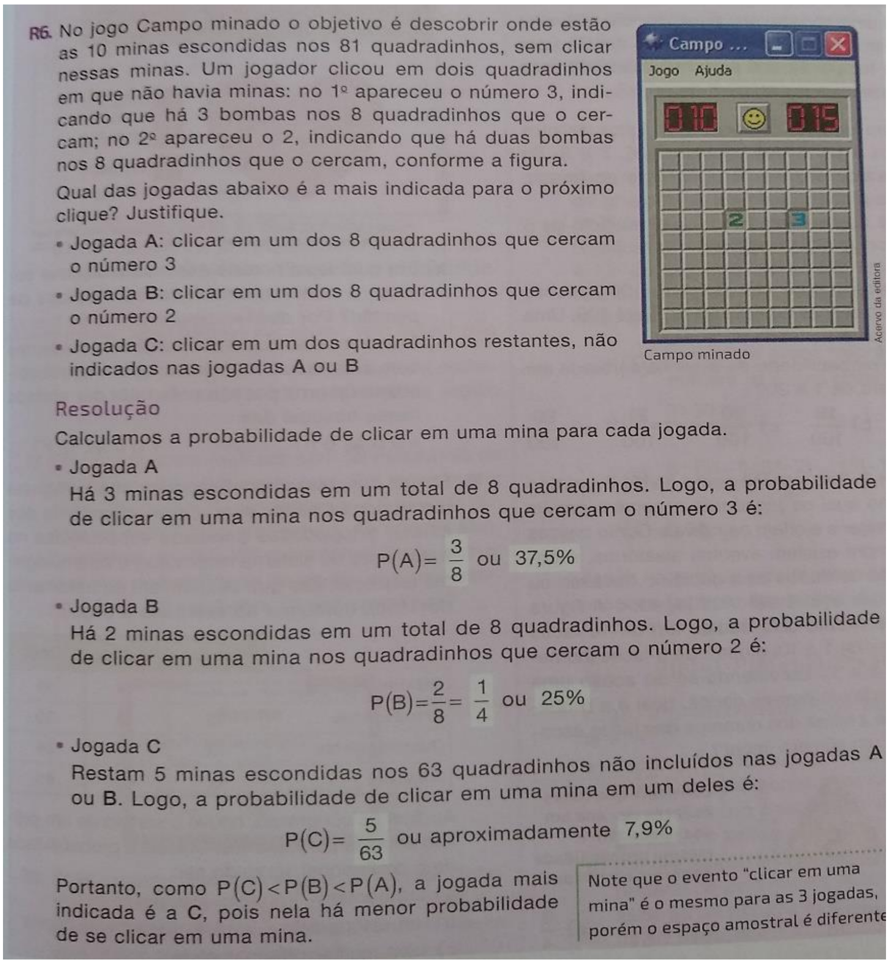
c) uma mulher oftalmologista $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%

Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 134)

Assim como nos exemplos das coleções L1 e L2, que propõem exercícios de concepções clássica, L3 segue a vertente clássica, em vários exercícios apresentados. Nas Figuras 23 e 24, observamos exemplos de exercícios que solicitam o cálculo da probabilidade dentro de espaços amostrais equiprováveis, os quais também são possíveis de serem realizados utilizando a fórmula clássica da probabilidade.

Assim como em L2 o autor utiliza o jogo campo minado para o ensino de probabilidade, em L3, o jogo também utilizado, porém como exercício resolvido.

Figura 25- Exemplo R5, coleção L3.



R6. No jogo Campo minado o objetivo é descobrir onde estão as 10 minas escondidas nos 81 quadradinhos, sem clicar nessas minas. Um jogador clicou em dois quadradinhos em que não havia minas: no 1º apareceu o número 3, indicando que há 3 bombas nos 8 quadradinhos que o cercam; no 2º apareceu o 2, indicando que há duas bombas nos 8 quadradinhos que o cercam, conforme a figura.

Qual das jogadas abaixo é a mais indicada para o próximo clique? Justifique.

- Jogada **A**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 3
- Jogada **B**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 2
- Jogada **C**: clicar em um dos quadradinhos restantes, não indicados nas jogadas A ou B

Campo minado

Resolução

Calculamos a probabilidade de clicar em uma mina para cada jogada.

- Jogada A

Há 3 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 3 é:

$$P(A) = \frac{3}{8} \text{ ou } 37{,}5\%$$

- Jogada B

Há 2 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 2 é:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ ou } 25\%$$

- Jogada C

Restam 5 minas escondidas nos 63 quadradinhos não incluídos nas jogadas A ou B. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina em um deles é:

$$P(C) = \frac{5}{63} \text{ ou aproximadamente } 7{,}9\%$$

Portanto, como $P(C) < P(B) < P(A)$, a jogada mais indicada é a **C**, pois nela há menor probabilidade de se clicar em uma mina.

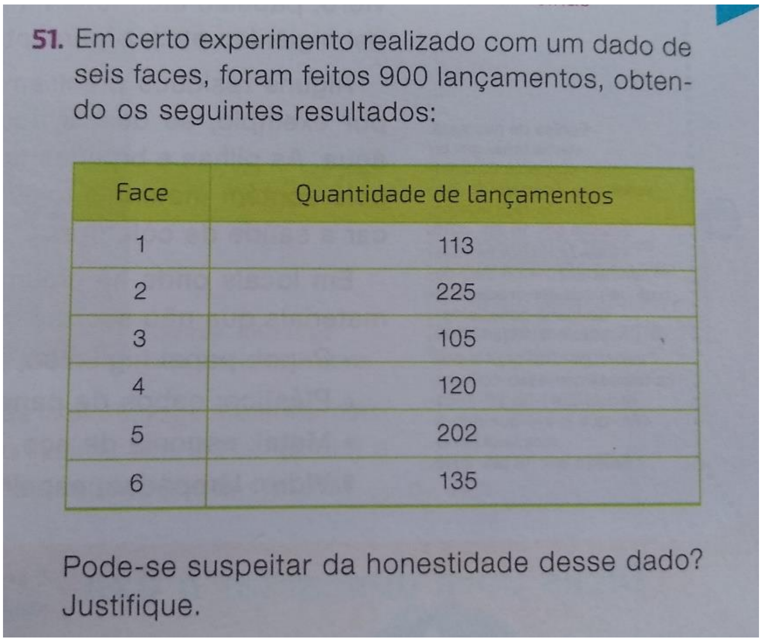
Note que o evento "clicar em uma mina" é o mesmo para as 3 jogadas, porém o espaço amostral é diferente

Fonte: (BALESTRI, 2016, p. 133)

Na Figura 25, observamos a utilização do jogo proposta por L3. Podemos considerar que a forma com que o jogo foi proposto no livro tenha sido pouco significativa, pois o autor poderia ter utilizado este exemplo como exercício e dado aos alunos a oportunidade de investigarem e construírem o conceito, da forma em que a atividade foi proposta, os alunos pouco puderam experimentar e refletir sobre a aplicabilidade da probabilidade na prática.

Já no exercício a seguir, o autor explora a concepção frequentista de probabilidade, como podemos ver na Figura 26:

Figura 26 - Atividade 51, coleção L3.



51. Em certo experimento realizado com um dado de seis faces, foram feitos 900 lançamentos, obtendo os seguintes resultados:

Face	Quantidade de lançamentos
1	113
2	225
3	105
4	120
5	202
6	135

Pode-se suspeitar da honestidade desse dado? Justifique.

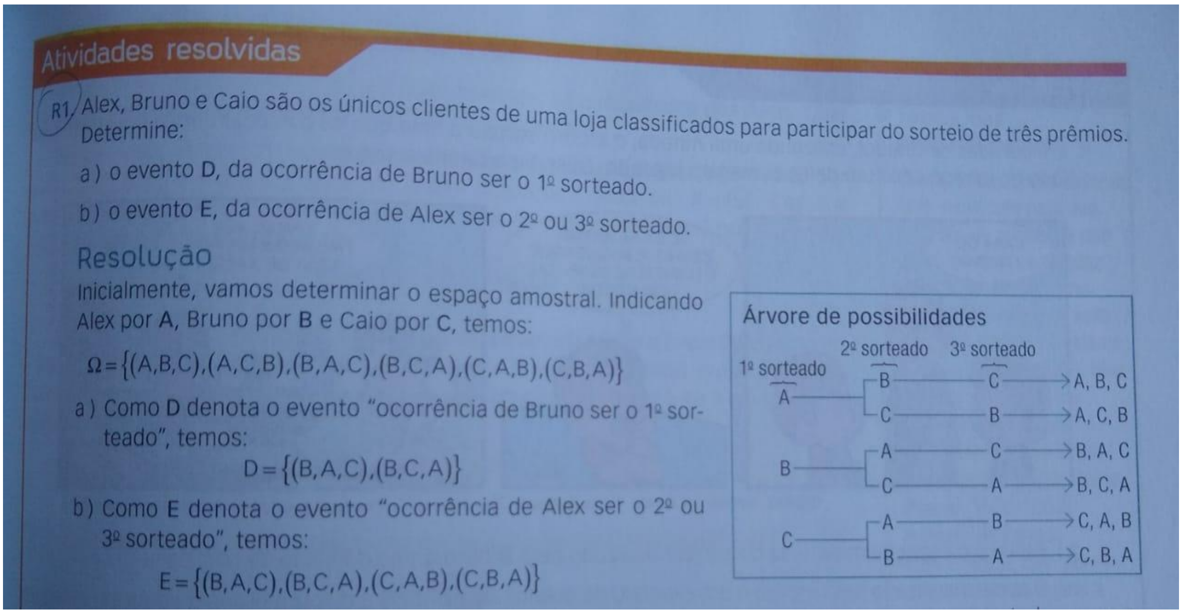
Fonte: (BALESTRI, 2016)

A proposta da concepção frequentista é considerada satisfatória para o ensino, pois se utiliza da experimentação para a compreensão da probabilidade. Porém, no que é apresentado na Figura 26, observamos a falta da oportunidade de inserir a participação dos alunos no experimento, pois foram apresentados apenas os resultados de um experimento para calcular a probabilidade, e é significativo a importância dessa participação dos alunos para melhor compreensão da situação.

A coleção L4 apresenta 62 exercícios, divididos da seguinte maneira: 10 exercícios resolvidos e 52 exercícios propostos.

Na Figura 27, podemos ver um exemplo de exercício resolvido apresentado pelo autor, em que ele expõe a construção da árvore de possibilidades. Na Figura 28, é proposto um exercício, também ilustrando a utilização da árvore de possibilidades.

Figura 27 - Exemplo R1, coleção L4.



Atividades resolvidas

R1. Alex, Bruno e Caio são os únicos clientes de uma loja classificados para participar do sorteio de três prêmios. Determine:

a) o evento D, da ocorrência de Bruno ser o 1º sorteado.

b) o evento E, da ocorrência de Alex ser o 2º ou 3º sorteado.

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o espaço amostral. Indicando Alex por A, Bruno por B e Caio por C, temos:

$\Omega = \{(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$

a) Como D denota o evento "ocorrência de Bruno ser o 1º sorteado", temos:

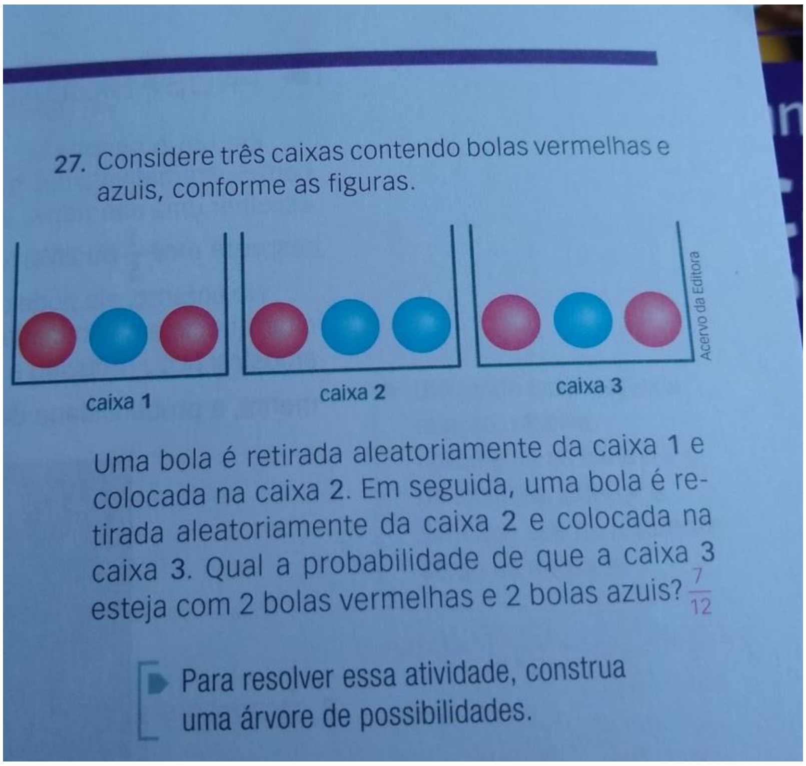
$D = \{(B,A,C),(B,C,A)\}$

b) Como E denota o evento "ocorrência de Alex ser o 2º ou 3º sorteado", temos:

$E = \{(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$

Fonte: (SOUZA, 2016)

Figura 28 - Atividade 27, coleção L4.



27. Considere três caixas contendo bolas vermelhas e azuis, conforme as figuras.

Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 1 e colocada na caixa 2. Em seguida, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 2 e colocada na caixa 3. Qual a probabilidade de que a caixa 3 esteja com 2 bolas vermelhas e 2 bolas azuis? $\frac{7}{12}$

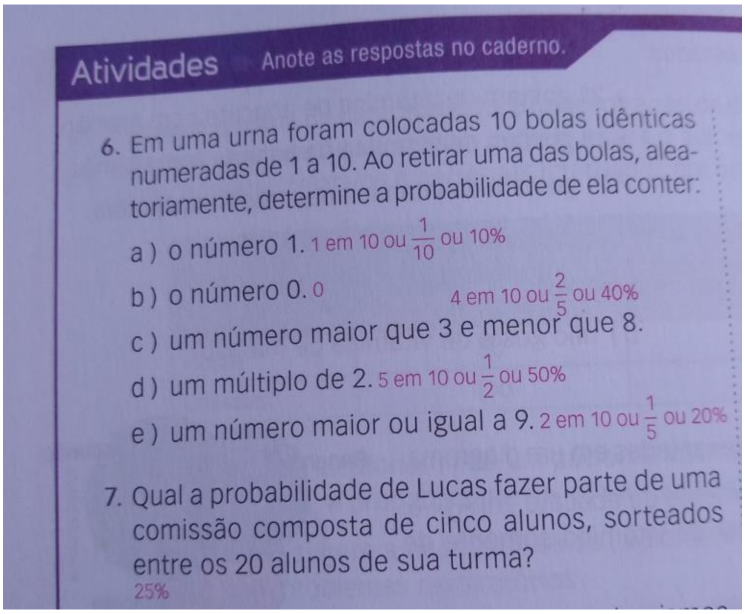
Para resolver essa atividade, construa uma árvore de possibilidades.

Fonte: (SOUZA, 2016, p. 149)

Em ambas figuras, tanto na atividade resolvida, da Figura 27, quanto no exercício proposto, na Figura 28, expostos por L4, observamos que o autor opta pelo o uso do diagrama da árvore de possibilidades. Com isso, além de quantificar, o aluno consegue visualizar todas as possibilidades. Considerando que, para compreender probabilidade é necessário conhecer os conceitos de resultados e de espaço amostral, como é apontado por Van de Walle (2009), a árvore de possibilidades se torna uma estratégia satisfatória para essa visão ampliada, contribuindo para ensino de probabilidade.

Assim como as coleções anteriores, observamos também em L4, como na Figura 29, o uso da concepção clássica nos exercícios:

Figura 29 - Atividade 6, coleção L4.



Atividades Anote as respostas no caderno.

6. Em uma urna foram colocadas 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10. Ao retirar uma das bolas, aleatoriamente, determine a probabilidade de ela conter:

a) o número 1. 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 10%

b) o número 0. 0

c) um número maior que 3 e menor que 8. 4 em 10 ou $\frac{2}{5}$ ou 40%

d) um múltiplo de 2. 5 em 10 ou $\frac{1}{2}$ ou 50%

e) um número maior ou igual a 9. 2 em 10 ou $\frac{1}{5}$ ou 20%

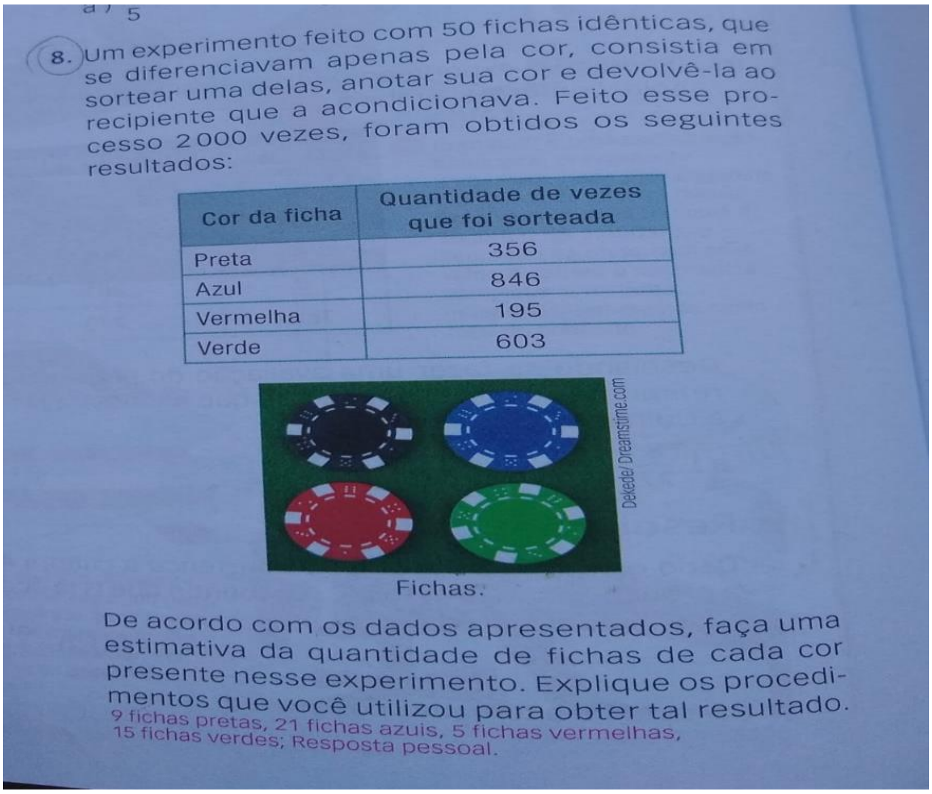
7. Qual a probabilidade de Lucas fazer parte de uma comissão composta de cinco alunos, sorteados entre os 20 alunos de sua turma? 25%

Fonte: (SOUZA, 2016, p. 154)

Assim como nos exemplos, que o autor expõe previamente, a grande maioria dos exercícios em L4, opta por resoluções clássicas de probabilidade.

Contudo, o autor também apresenta uma concepção frequentista, como observamos na Figura 30.

Figura 30 - Atividade 8, coleção L4.



8. Um experimento feito com 50 fichas idênticas, que se diferenciavam apenas pela cor, consistia em sortear uma delas, anotar sua cor e devolvê-la ao recipiente que a acondicionava. Feito esse processo 2 000 vezes, foram obtidos os seguintes resultados:

Cor da ficha	Quantidade de vezes que foi sorteada
Preta	356
Azul	846
Vermelha	195
Verde	603

Fichas.

De acordo com os dados apresentados, faça uma estimativa da quantidade de fichas de cada cor presente nesse experimento. Explique os procedimentos que você utilizou para obter tal resultado.
9 fichas pretas, 21 fichas azuis, 5 fichas vermelhas, 15 fichas verdes; Resposta pessoal.

Fonte: (SOUZA, 2016, p. 178)

Apesar de ilustrar a concepção frequentista, que se refere a experimentação com base na quantidade de vezes em que o evento aconteceu, o autor pouco explora essa vertente, pois em vez de propiciar aos alunos essa vivência, ele já apresenta os resultados finais, impossibilitando a participação do aluno no processo e prejudicando a melhor compreensão.

De modo geral, a disposição das atividades nos livros analisados seguem o mesmo esquema no decorrer dos capítulos. Há a apresentação da introdução, seguida da formalização dos conceitos, e finalizando com exercícios resolvidos e exercícios propostos.

Das quatro coleções analisadas, verificamos que em três são apresentados exercícios que exploram a concepção frequentista de probabilidade, mas apenas uma sugere a experimentação de fato, o uso de jogos e tecnologia, que é a coleção L2.

Grande parte dos exercícios sugeridos nas coleções são semelhantes aos exemplos, são do tipo para encontrar o espaço amostral e calcular o valor da probabilidade utilizando a concepção clássica, ou seja, com a utilização da fórmula clássica de probabilidade.

Assim, verificamos que apenas a coleção L2 explora a concepção axiomática de probabilidade, com exemplos e também exercícios propostos, que propicia não só a aplicabilidade no exercício, como também um conhecimento científico, permitindo com que o aluno continue os estudos na área.

Além disso, L2 propõe o ensino de probabilidade por meio de jogos e tecnologia, o que é benéfico, já que além de permitir a compreensão do conteúdo por meio do lúdico, permite também uma aproximação da matemática com a vivência social dos alunos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou discutir sobre a relevância do ensino de probabilidade para a formação discente. Muito além de jogos de cartas e dados, por meio da probabilidade é possível tratar matematicamente situações do acaso e incerteza, que estão presentes na vida diária das pessoas, e com isso auxiliar na tomada de decisão, além de contribuir para o rompimento da visão determinista da Matemática, em que a certeza e a verdade absoluta é predominante.

Este estudo teve como objetivo principal analisar como a Probabilidade é apresentada em livros didáticos aprovados pelo PNLD para o triênio 2018/2020. Para isso, analisamos, em cada livro selecionado, como a probabilidade é introduzida e proposta, suas atividades e metodologias. As análises apontaram que, ao contrário do que é recomendado pelas orientações educacionais para o ensino médio, as quatro coleções pesquisadas não apresentaram o tema de forma contínua. O conteúdo de probabilidade não é abordado no primeiro ano do ensino médio por nenhuma das coleções, com exceção da coleção L2, que apresenta no 2º e 3º ano do ensino médio, as demais apresentam apenas no 2º ano.

Ao analisar os recursos didáticos e metodologias, verificamos que a abordagem do tema dá-se de maneira semelhante em todas as coleções, com explanação teórica, seguida de exercícios resolvidos e propostos com exemplos de aplicações no final dos capítulos. Observamos que os recursos utilizados pelos autores oferecem poucas oportunidades para que o discente apresente uma postura mais ativa e autônoma na aprendizagem e na construção do seu conhecimento.

Apesar de abordar alguns exercícios contextualizados, aplicações do tema, nossas análises apontaram que a abordagem da probabilidade nos livros analisados ainda está centrada na metodologia tradicional do ensino, com definições, exemplos e exercícios com a aplicação de fórmulas. Em poucos momentos foram dadas a oportunidade aos estudantes de serem ativos no processo da aprendizagem. Nesse sentido, consideramos que as coleções analisadas não dedicam a atenção que deveriam à probabilidade e suas abordagens não contribuem para uma aprendizagem significativa.

Dada a importância do ensino de probabilidade e considerando essa lacuna presente nas coleções, reafirmamos a importância da prática docente, ressaltando o papel fundamental do professor como mediador do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. R. C. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade**. 2015. 50 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

ARA, A. B. **O ensino de Estatística e busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade**. 2006, 86f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2006.

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia, v. 2, 2 ed., São Paulo, 2016.
BAYER, A. et al. Probabilidade na escola. In: **III Congresso Internacional de Ensino da Matemática.** 2005.

BRASIL, M. da E. **Parâmetros Curriculares Nacionais 1998: Matemática**. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, **Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN**. Lei nº. 9.394 de 1996. Brasília: Ministério da Educação, 1996.

BRASIL, M. E. C. SEB. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL, M. E. C. SEB. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL. M. E. **PNLD 2018**: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação. Brasília: Secretária de Educação Básica SEB, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação Básica, 2017. 122 p.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 108p. 2014.

BRUNER, J. S. O processo da educação. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.

CHAVANTE, E. **Quadrante matemática, 2° ano**: ensino médio, 1 ed., São Paulo, 2016.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão freqüentista: estudo epistemológico e didático**. 1994. 151 f. . Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade:** Um curso introdutório. São Paulo: EDUSP, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio, 3 ed, São Paulo, 2016
FERNANDES, J. A.; LACAZ, T. M. **Situações contra intuitivas e aprendizagem de probabilidades**. 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 6. ed. 2008.

GODEFROID, V. L. A. **Problematização:** outro olhar à Educação Matemática. 2010. 20f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 02, 2015.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário**.** In: **Em aberto**. INEP, v.16, n.69, 1996.

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. In: **XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática**. Campinas: LEM / UNICAMP, 2005.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 6 ed., 2005.

MANDARINO, M. C. F.; BELFORT, E. Como é escolhido o livro didático de Matemática dos Primeiros Anos do Ensino Fundamental? In: **Anais do VIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: UFPE, 2004.

MOREIRA, A. de P. M. et al. **Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio**. 2015.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2004.

RODRIGUES, J. M. S. Acaso e Incerteza na concepção de professores que ensinam matemática. In: **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**, v. 12, p. 05-07, 2008.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Penso Editora, 2013.

SILVA, Marcio Antônio da; PIRES, Célia Maria Carolino. Organização curricular da Matemática no Ensino Médio: a recursão como critério. Ciência & Educação (Bauru), v. 19, n. 2, p. 249-266, 2013.

SILVEIRA, J. F. P. da. **Início da Matematização das Probabilidades**. 2001. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acesso em 24/08/2018.

SOARES, J. B.; SOUZA, W. D. O. Memorial do PNLD: Elaboração, Natureza e Funcionalidade. In: **Anais eletrônicos da XIX Semana de Humanidades**. Natal, 2011.

SOUZA, J. R. **Contato matemática 2° ano**, 2 ed, São Paulo, 2016.

SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. In: **I Encontro de Pesquisa em educação - IV Jornada Prática de Ensino - XIII Semana de Pedagogia da UEM. Maringá**, 2007. Arq. Mudi. Periódicos.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**. Artmed Editora, 2009.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v.8, n.16, p.143-153, out. 2008.